



Le tempérament musical

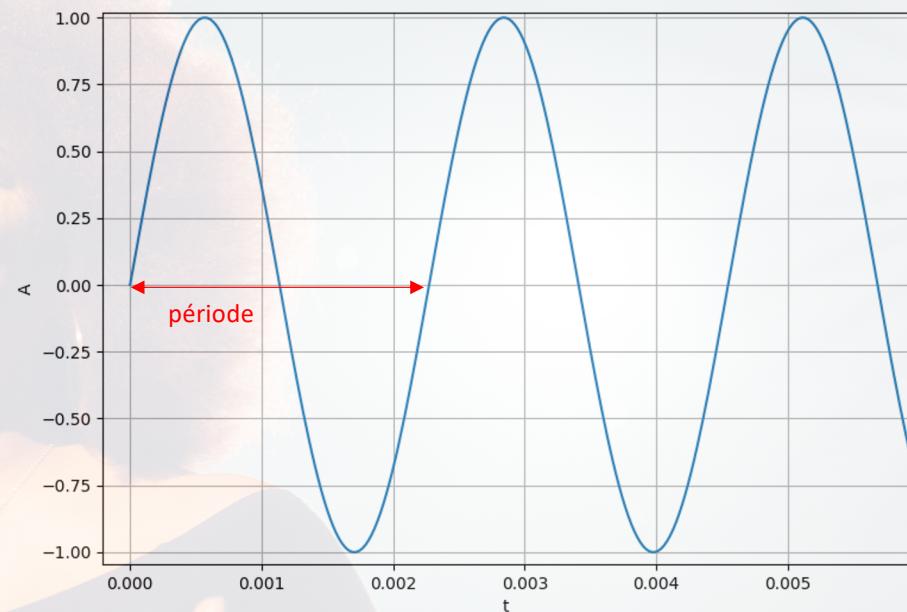
Guillaume Bertello
18/12/2020

Qu'est-ce qu'un son ?

La4 

$$f = 440 \text{ Hz} = \frac{1}{440} \text{ s} = 2.27 \text{ ms}$$

- Un son est une vibration de l'air.
- Cette vibration s'assimile à un phénomène périodique.
- Un phénomène périodique se caractérise par sa *période*, qui est la durée qui se reproduit identiquement lorsqu'on se décale dans le temps de cette même durée.
- La fréquence dite fondamentale est l'inverse de la période d'un son périodique.



La corde vibrante



Le son d'une corde vibrante, pour une tension et une masse linéique données, est liée à sa longueur, dont dépend sa fréquence de vibration

https://fr.wikipedia.org/wiki/Corde_vibrante

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

*f est la fréquence d'oscillation
T est la tension du fil
μ est la masse linéique du fil
L est la longueur du fil*

L'octave

Lorsqu'on fait varier la fréquence de la corde dans un rapport de 2, on obtient des sons séparés d'un octave



La3 (220 Hz)



La4 (440 Hz)

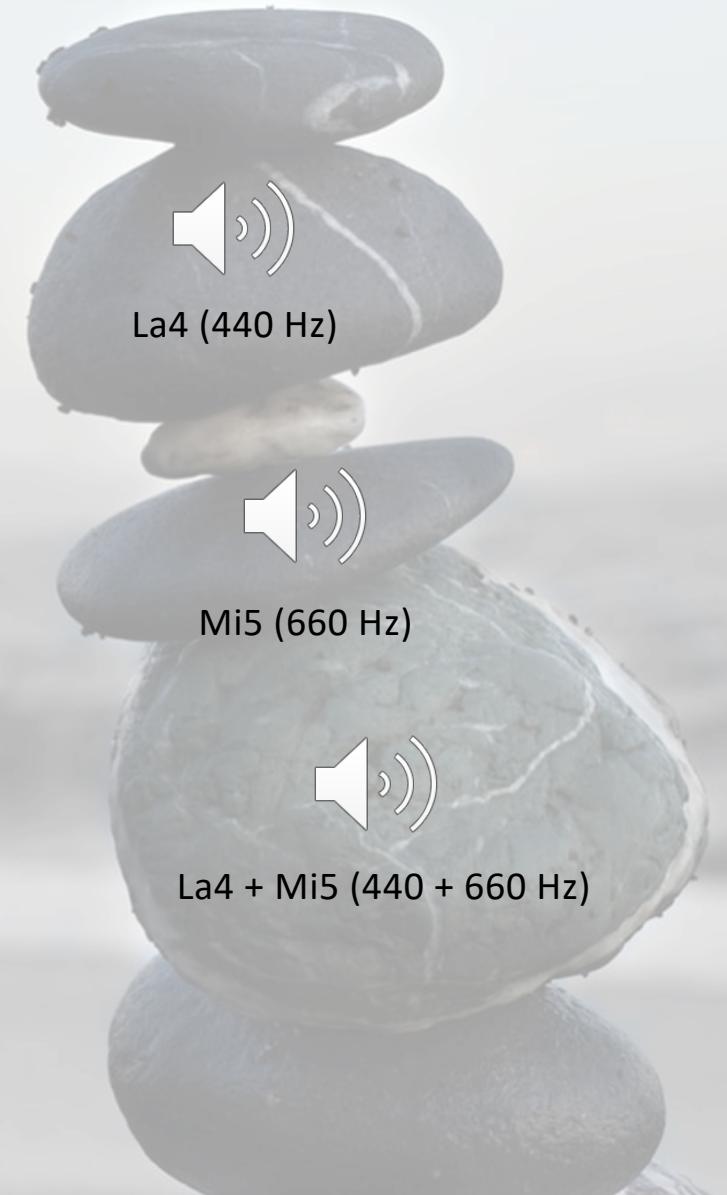
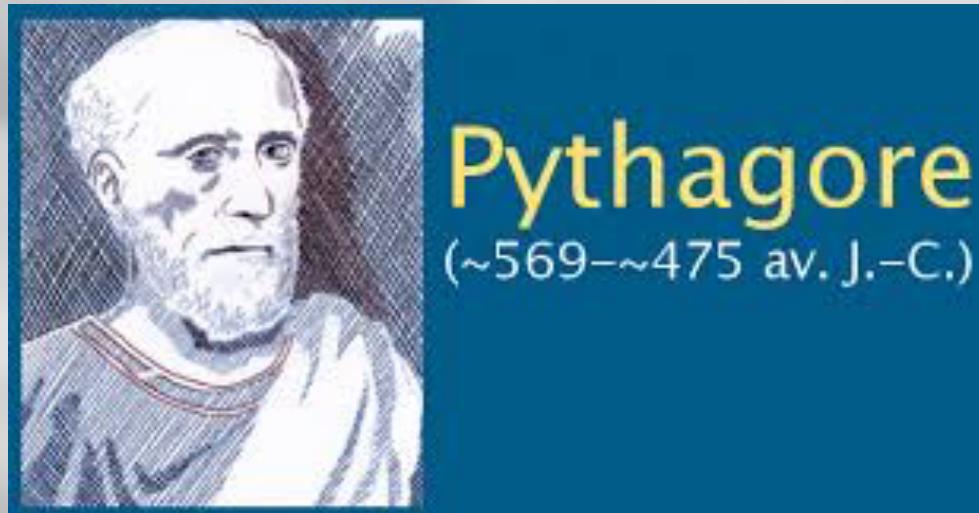


La5 (880 Hz)

Ce que Pythagore a découvert

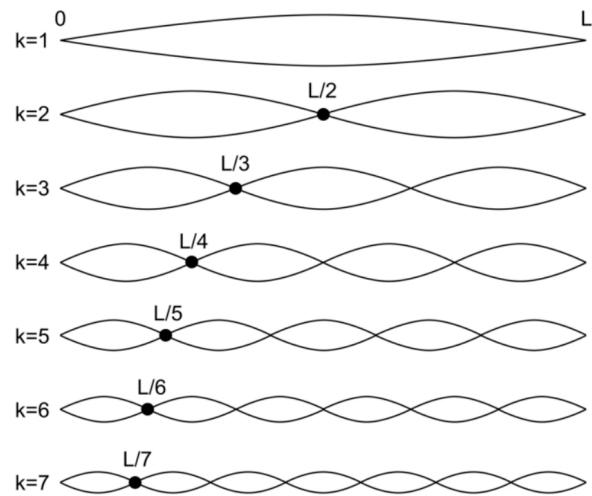
Lorsqu'on fait varier la longueur (donc la fréquence) de la corde dans un rapport 3/2, on obtient des sons séparés d'une quinte.

Cet intervalle est considéré comme harmonieux



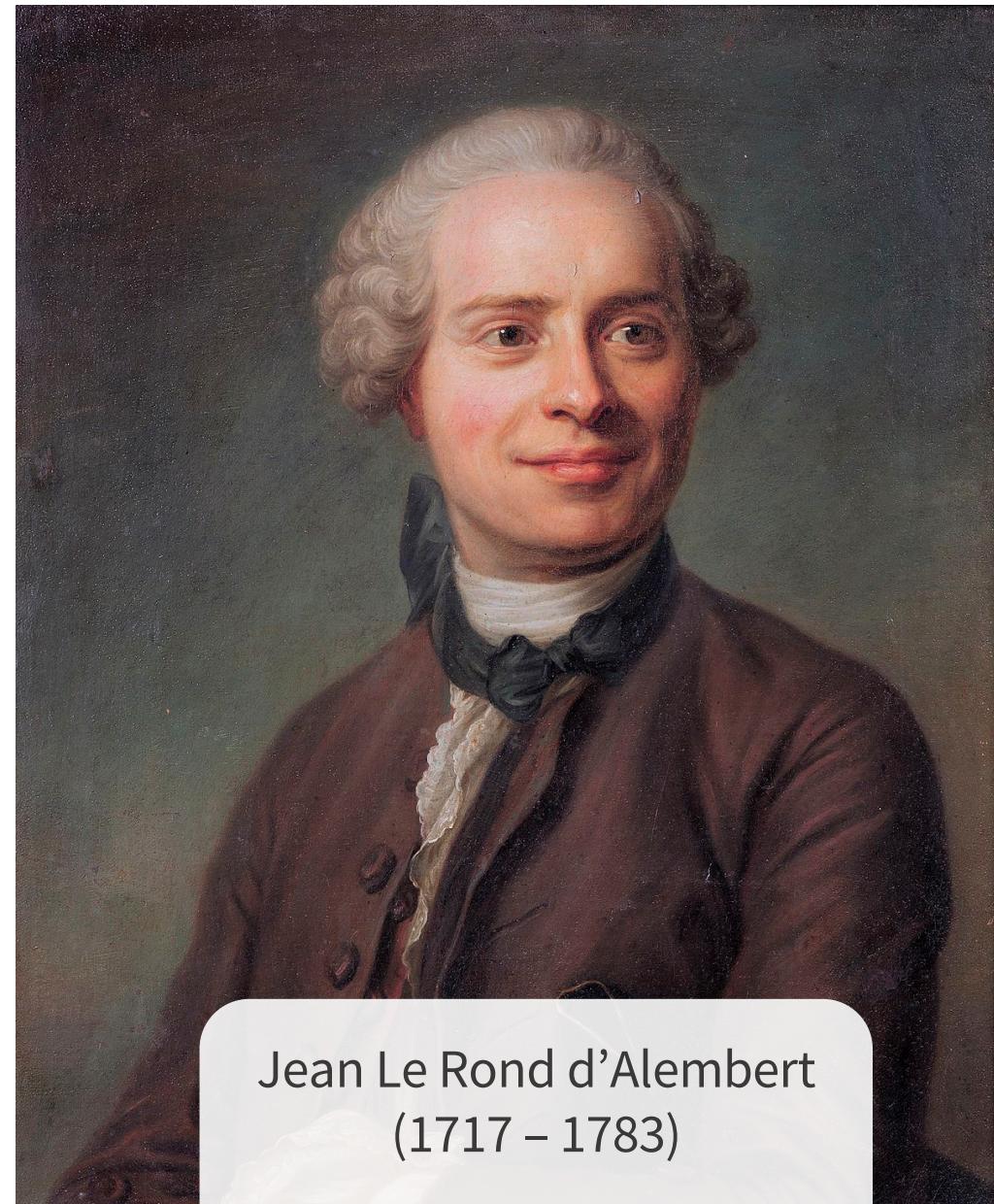
Il y a une raison à cela

Le mouvement d'une corde vibrante tendue entre deux points fixes est une combinaison de vibrations, chacune correspondant à un mode ayant l'aspect de k fuseau(x) identiques (harmonique k)



C'est le phénomène de propagation des ondes.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_sur_une_corde_vibrante



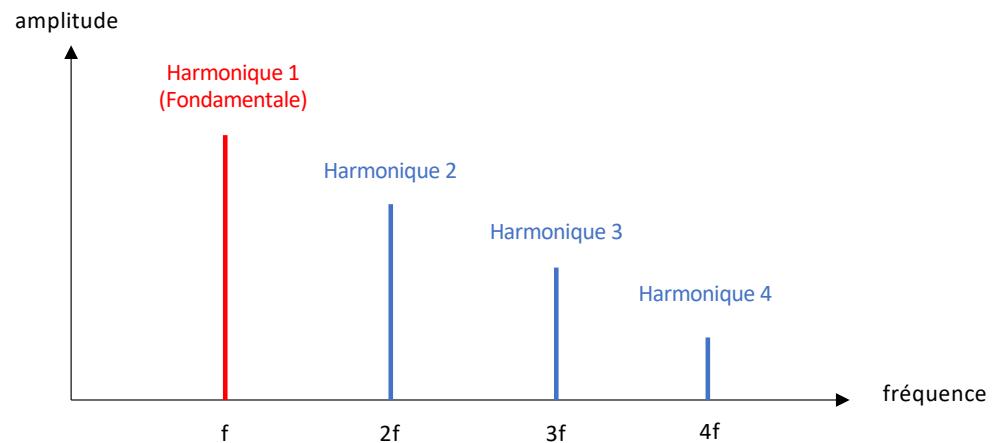
Jean Le Rond d'Alembert
(1717 – 1783)



Joseph Fourier
(1768 – 1830)

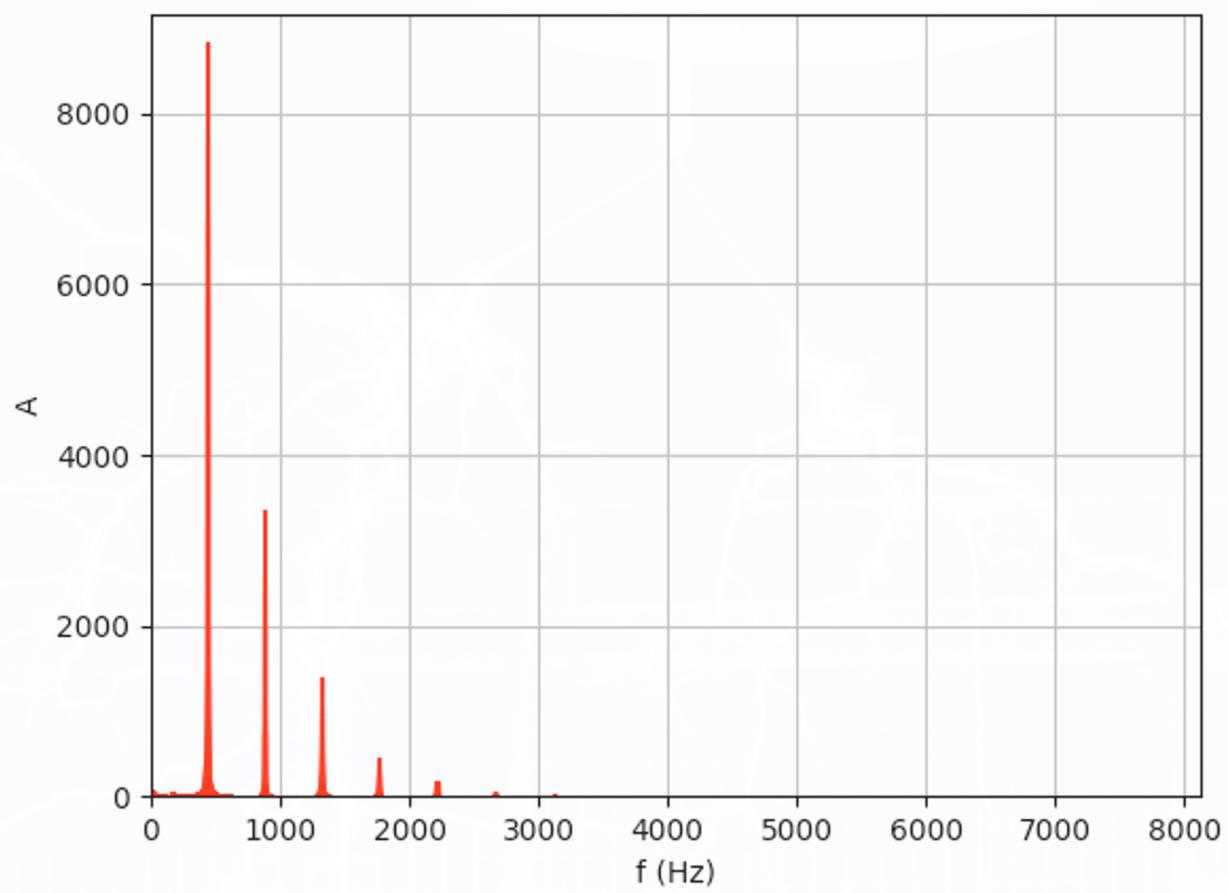
Représentation des harmoniques

Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f .

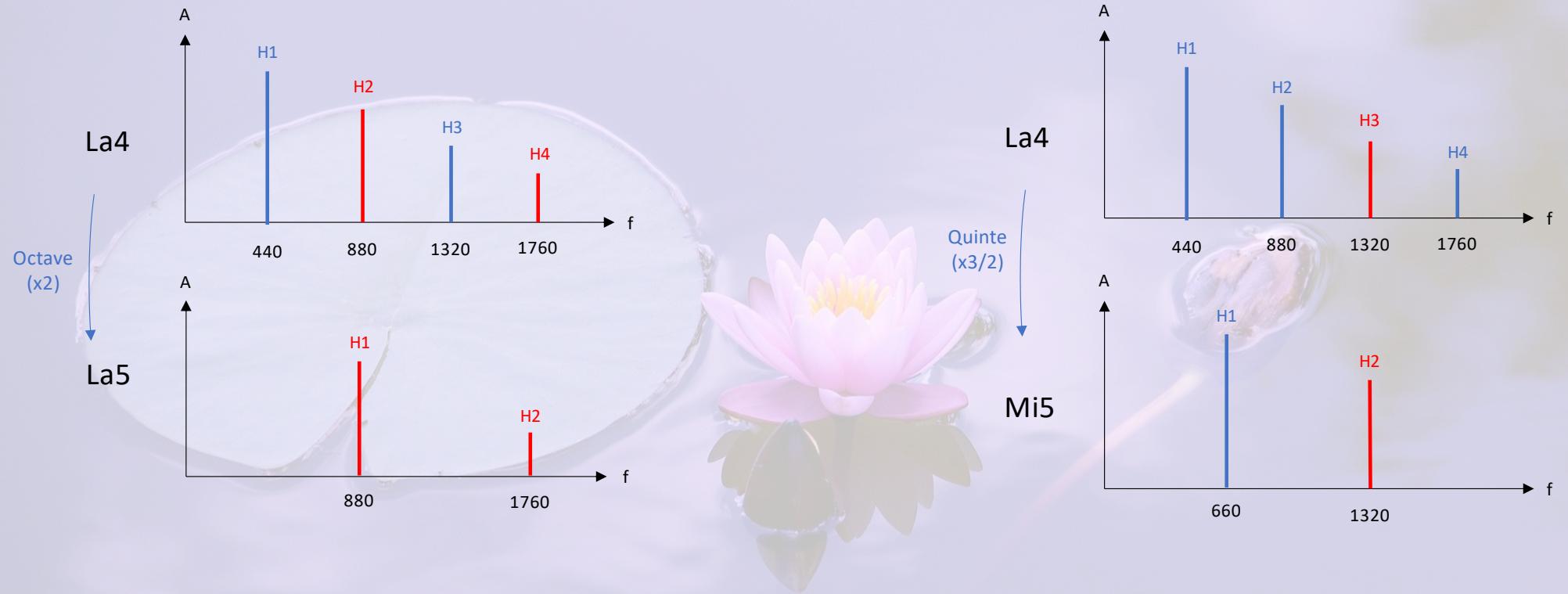


https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier

Exemple d'une transformée de Fourier du La4 au piano



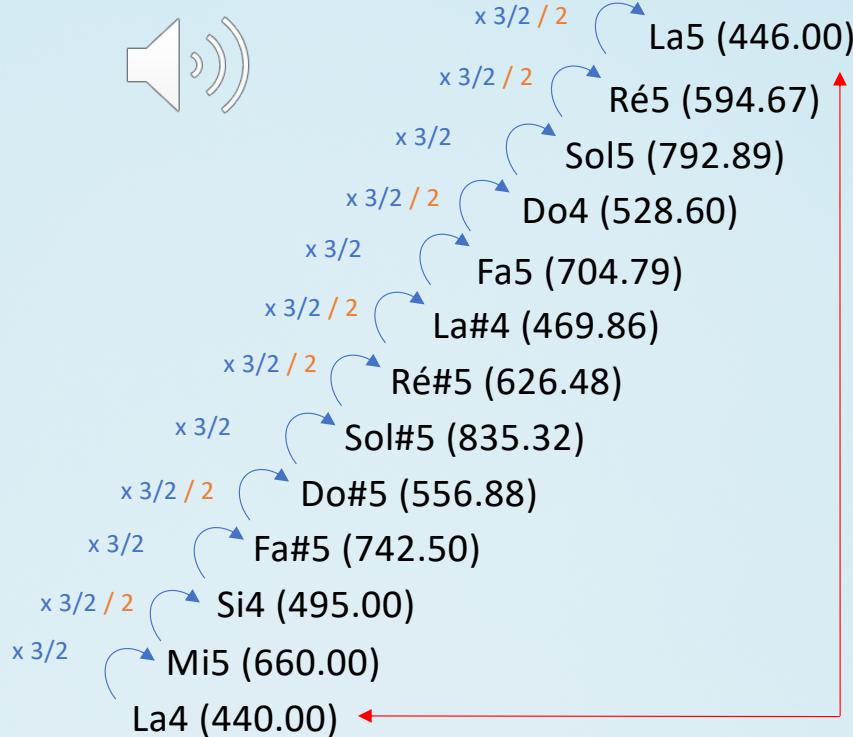
La définition originale de l'harmonie



L'harmonie au sens de Pythagore est l'association de sons partageant des harmoniques communes



La gamme pythagoricienne



Le cycle de 12 quintes se déroule sur 7 octaves

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7$$

$$3^{12} \approx 2^{19}$$

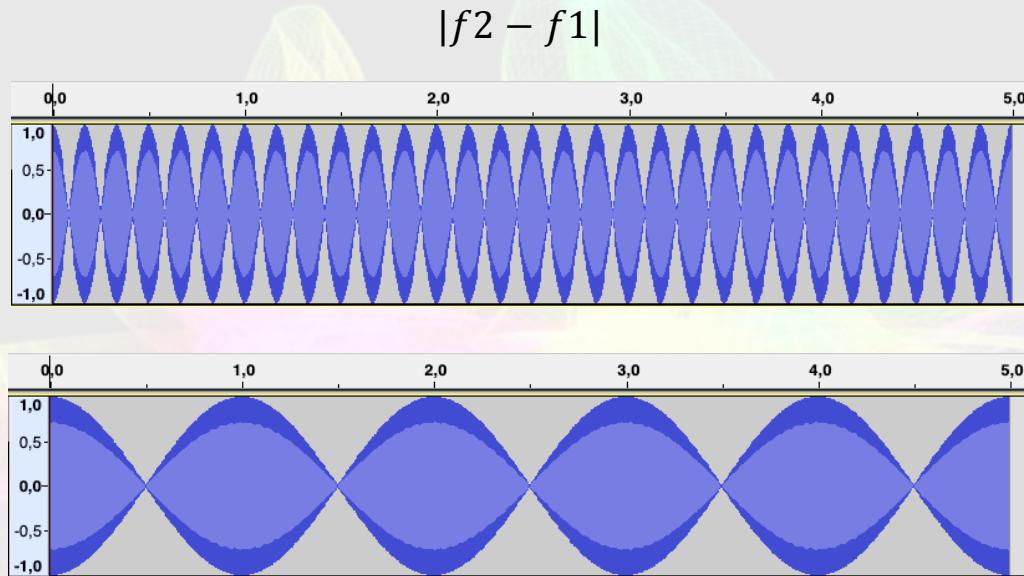
$$531\,441 \approx 524\,288$$

$$3^{12}$$

$$1 \text{ comma} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$$

La gamme chromatique de notre système musical contient 12 notes car 3^{12} est proche d'une puissance de 2 (en l'occurrence 2^{19})

Mais il y a un problème: le phénomène de battements...

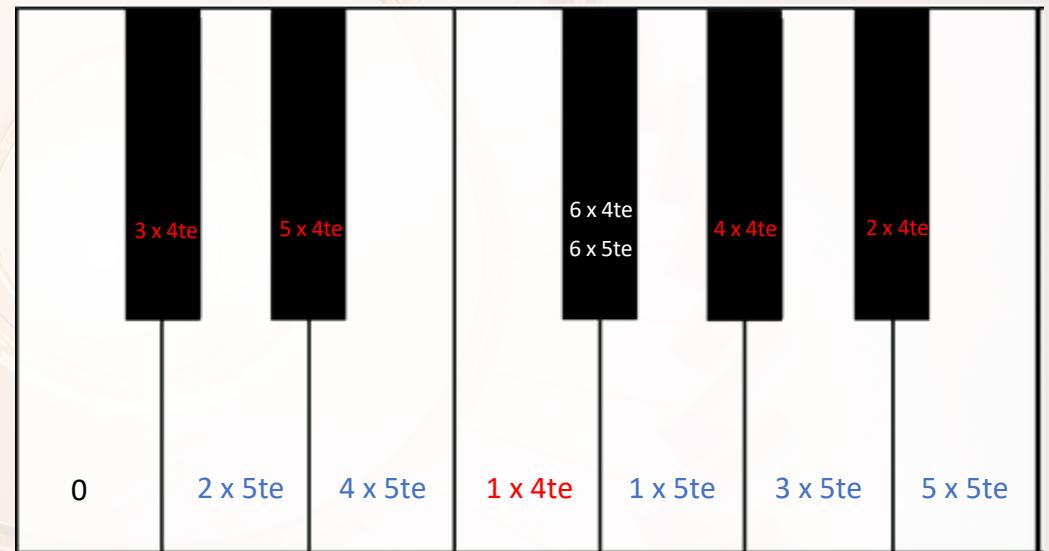
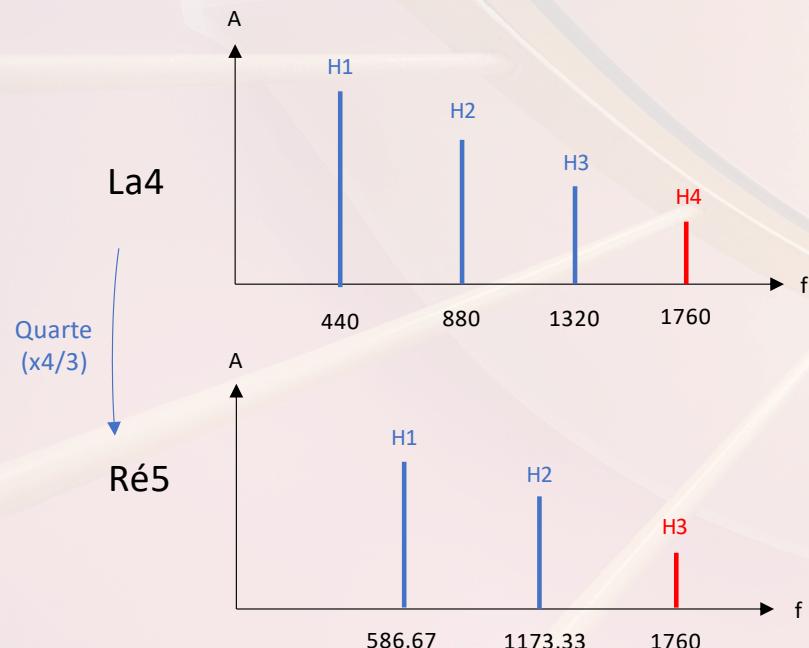


[https://fr.wikipedia.org/wiki/Battement_\(acoustique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Battement_(acoustique))

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

La quarte: renversement parfait de la quinte parfaite

$$quarte = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4}{3}$$



Le **TRITON** apparaît comme l'intervalle le moins harmonique



La 440

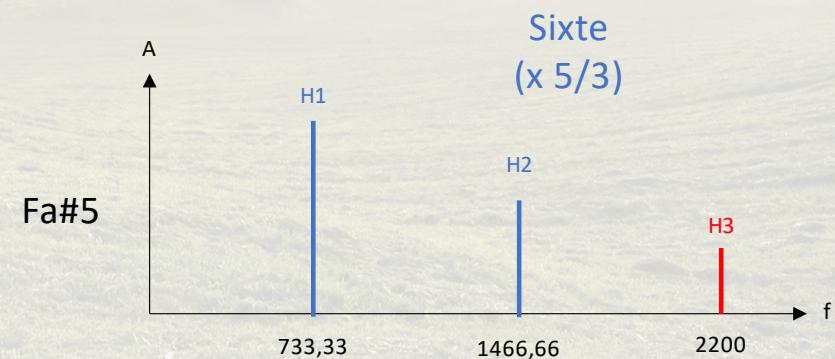
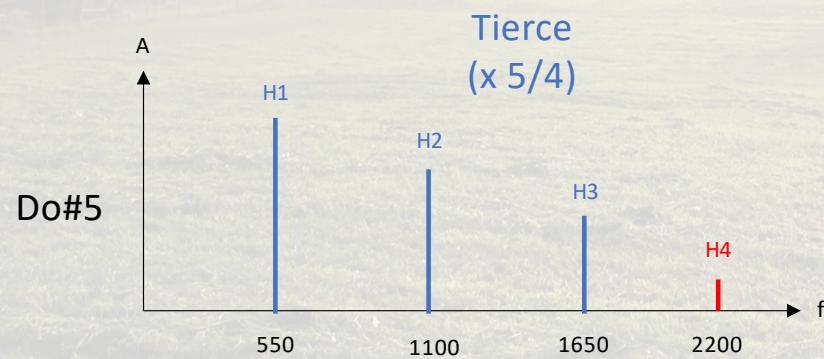
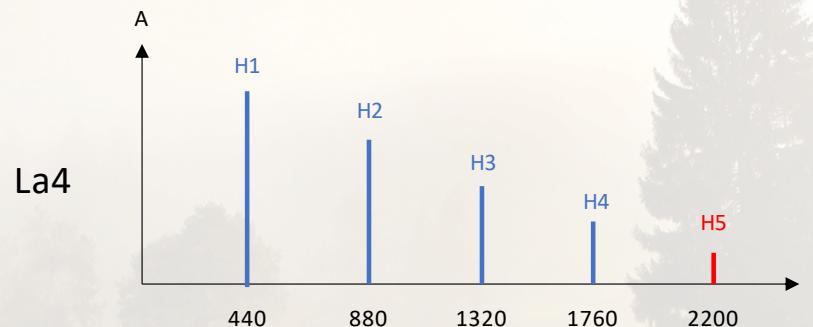


Ré 586.67



La 440 + Ré 586.67

A la recherche d'une 5^e harmonique commune



La 440



Do# 550



La 440 + Do# 550



La 440

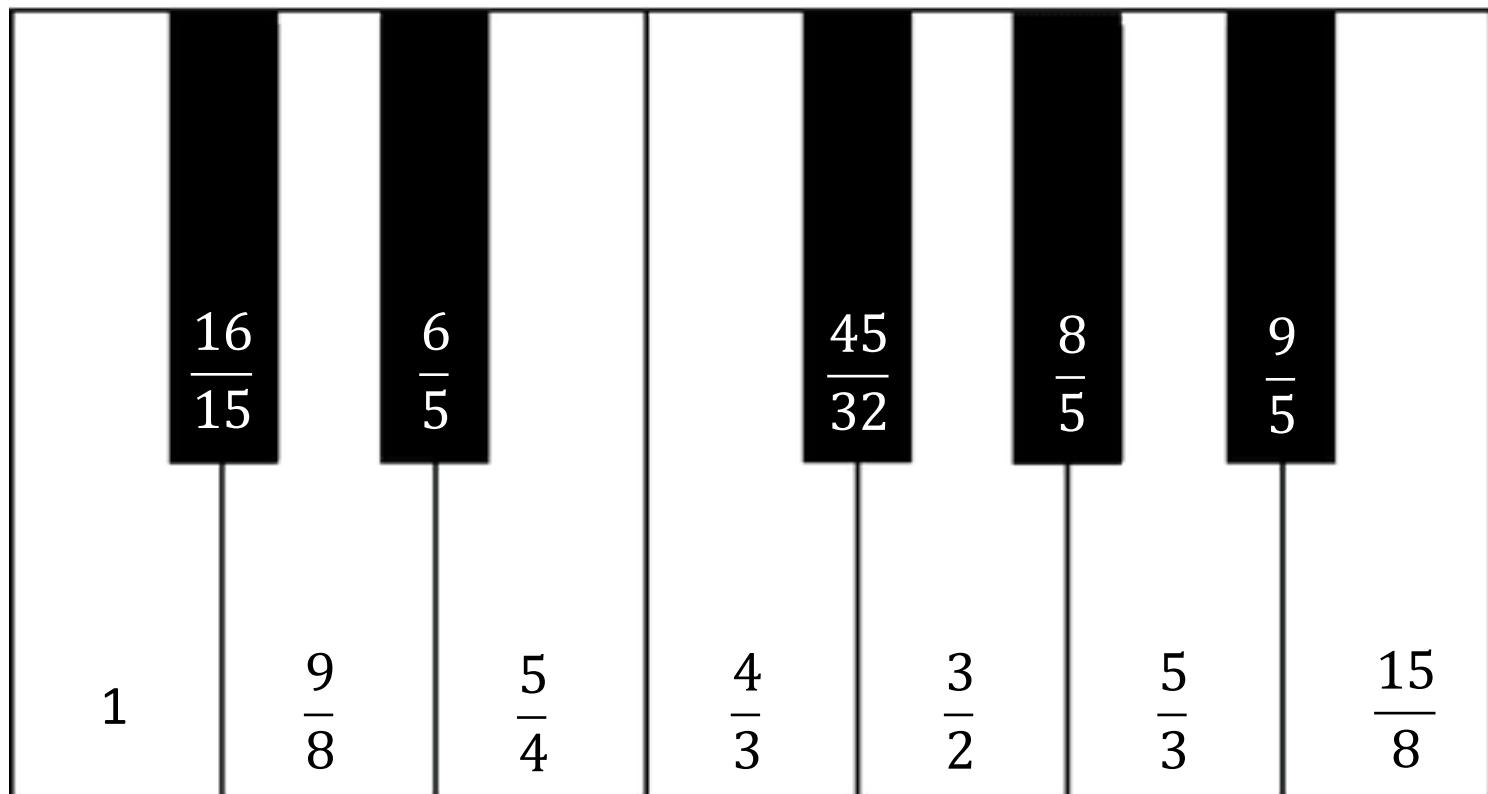


Fa# 733.33



La 440 + Fa# 733.33

La gamme de Zarlino

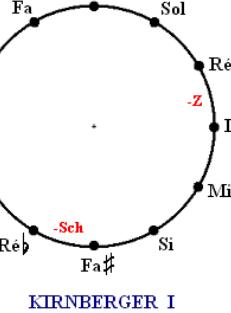
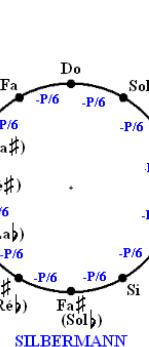
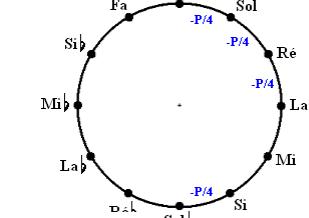
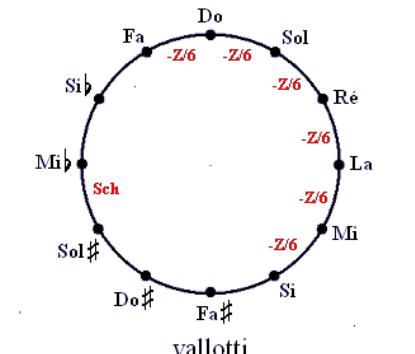
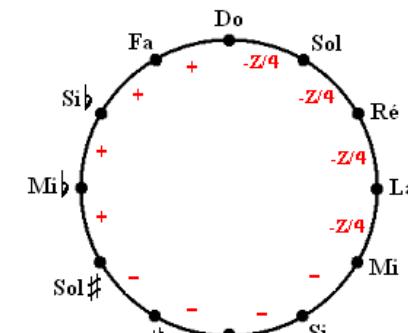
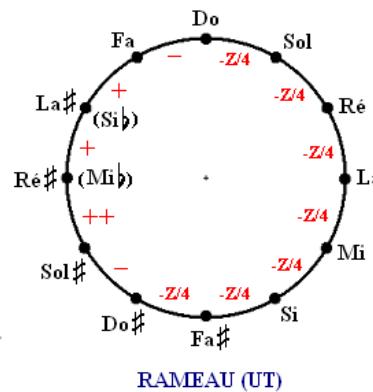
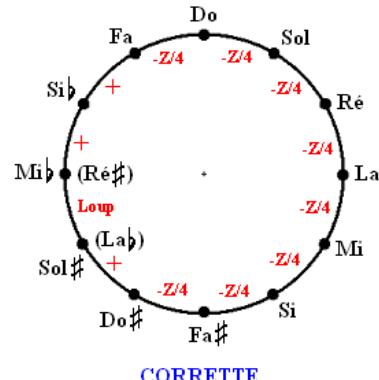
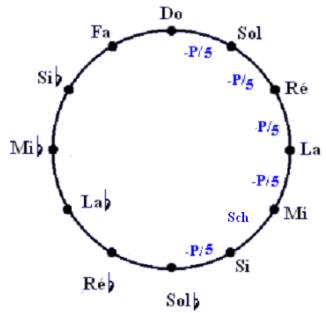
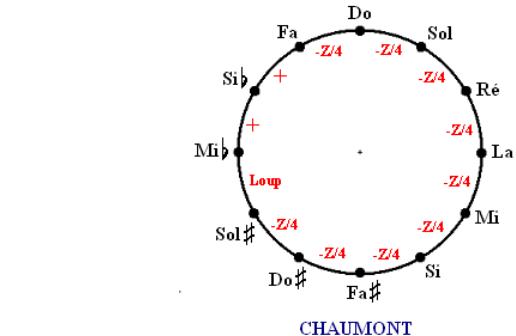
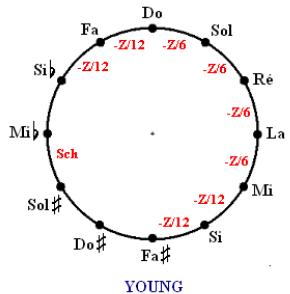


Zarlino



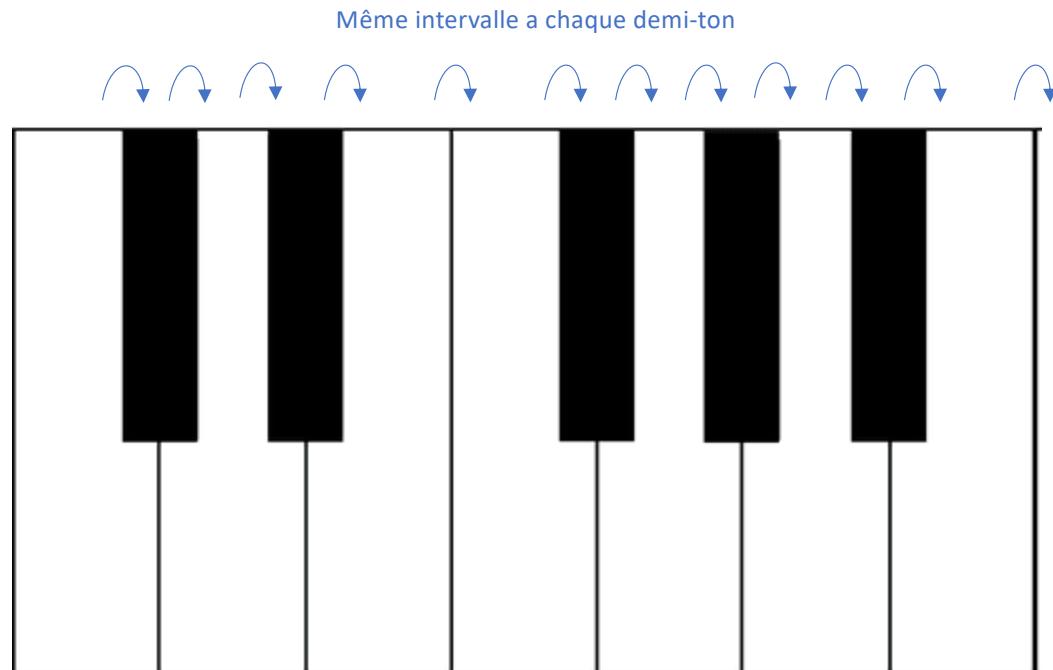
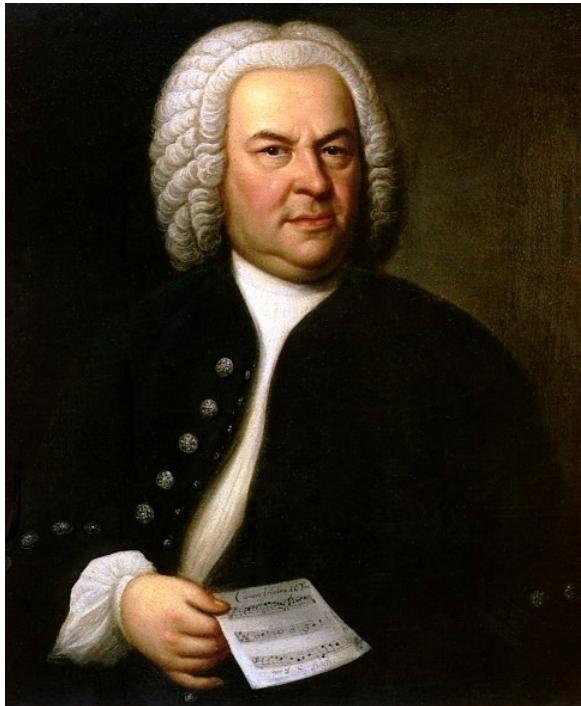
Pythagore

Les tempéraments inégaux du baroque



https://fr.wikipedia.org/wiki/Temp%C3%A9rament_in%C3%A9gal

Bach a mis tout le monde d'accord avec le tempérament égal



$$\frac{1}{2} \text{ ton} = \sqrt[12]{2} \approx 1.0594630944$$

$$1 \text{ comma} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$$

$$\frac{1}{2} \text{ ton} \approx 4.26 \text{ comma}$$

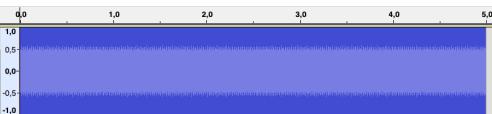
Les battements sont maintenant « dilués » un peu partout

La quinte et la quarte ne sont plus parfaites
Mais sont très proches de la perfection

Les battements d'entendent légèrement sur les harmoniques



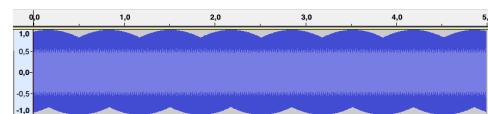
5te parfaite
La 440 + Mi5 660



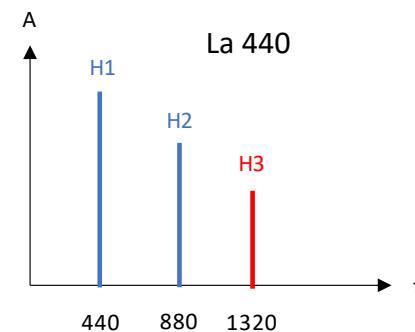
0 battements / sec



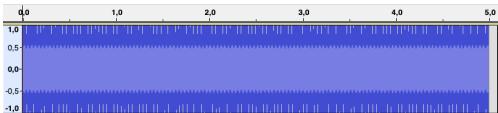
5te juste
La 440 + Mi5 659.26



1.48 battements / sec



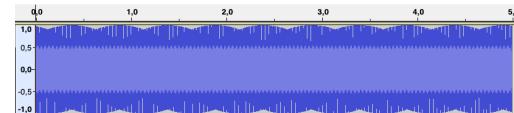
4te parfaite
La 440 + Ré5 586.67



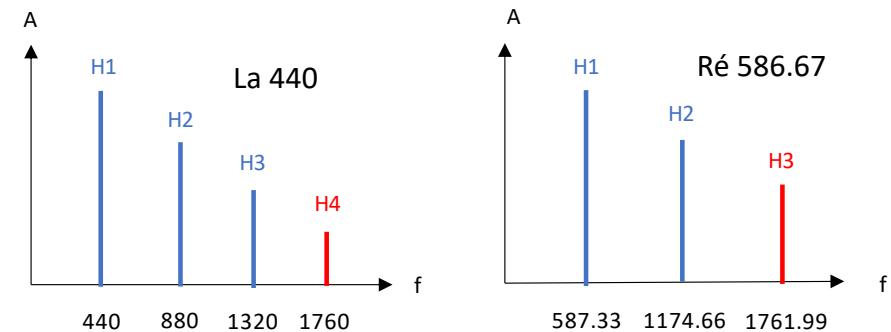
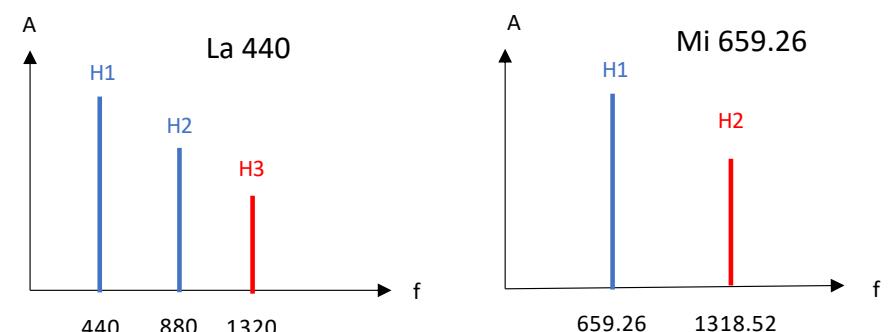
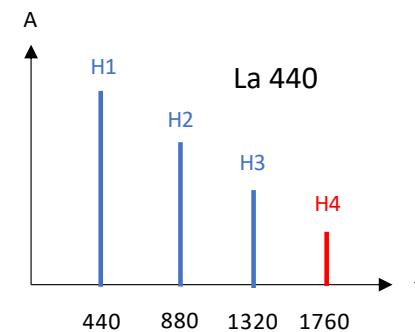
0 battements / sec



4te juste
La 440 + Ré5 587.33



1.99 battements / sec



PRAELUDIEN

Seite 4



Seite 8



Seite 12



Seite 18



Seite 24



Seite 28



FUGEN

a 4 voci

a 3 voci

a 3 voci

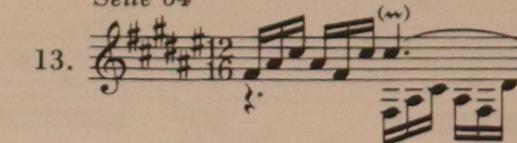
a 5 voci

a 4 voci

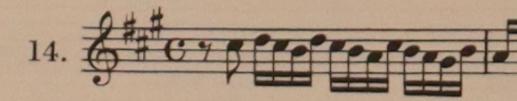
a 3 voci

PRAELUDIEN

Seite 64



Seite 68



Seite 72



Seite 78



Seite 82



FUGEN

a 3 voci

a 4 voci

a 3 voci

a 4 voci

a 4 voci

Le clavier bien tempéré est aux détracteurs argumentant que ce tempérament « tuait » les tonalités

Comparaison des 3 tempéraments évoqués



Pythagore



Zarlino



Bach

Note	Pythagore	Zarlino	Bach
La4	440.00	440.00	440.00
La#4	469.86	469.33	466.16
Si4	495.00	495.00	493.88
Do5	528.60	528.00	523.25
Do#5	556.88	550.00	554.37
Ré5	594.67	586.67	587.33
Ré#5	626.48	618.75	622.25
Mi5	660.00	660.00	659.26
Fa5	704.79	704.00	698.46
Fa#5	742.50	733.33	739.99
Sol5	792.89	792.00	783.99
Sol#5	835.32	825.00	830.61

Fréquences (Hz)

La quarte tempérée
est un peu haute

La quinte tempérée est
un peu basse

Le tempérament à division multiple



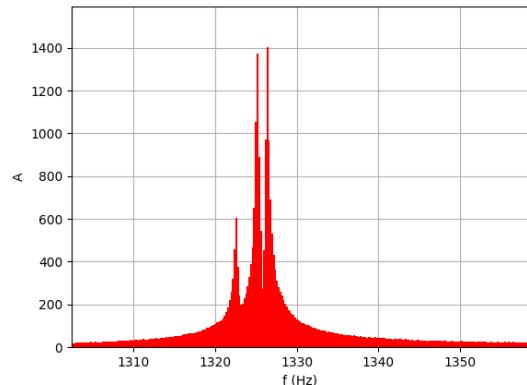
Un clavier réalisant le
tempérament à 19 intervalles
égaux



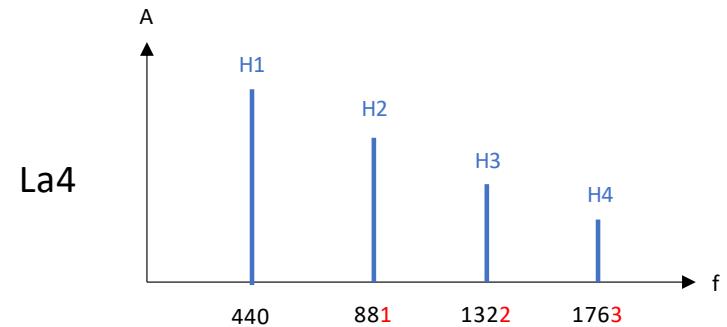
Une gamme à 19 « demi-tons »

L'accordage du piano

- Le La4 s'accorde au diapason
- L'octave central s'accorde exclusivement par l'écoute des battements
- Le reste s'accorde par octave et unisons



Il y a jusqu'à 3 cordes par note (unisons) !



Le piano est inharmonique !

C'est risqué, mais possible !



pour votre attention