

Procedimento para gerar a tubeira otimizada de Rao

Guilherme Bertoldo

2 de Setembro de 2020

- Revisão 5 (02/09/2020): Ajustes no texto.
- Revisão 4 (15/05/2020): Na Eq. 19 do artigo do Rao (Ref. [1]) falta um sinal negativo no lado esquerdo da igualdade.
- Revisão 3 (15/05/2020): Atualização no procedimento e nomenclatura das variáveis.
- Revisão 2 (07/05/2020): Correção do coeficiente de empuxo (na dedução foi definido como $E/(2A_t p_0)$ ao invés de $E/(A_t p_0)$).
- Revisão 1 (24/04/2020): Erros de dedução e de digitação corrigidos.
- Revisão 0 (23/04/2020): Primeira versão do texto.

Com base na Fig. 1, onde x e y estão parametrizados em termos do raio da garganta, e considerando prescritos a distribuição do número de Mach, o ângulo θ do vetor velocidade com relação ao eixo x ao longo da linha TT' , bem como a razão p_a/p_0 (pressão ambiente/pressão de estagnação) e o número de Mach M_E no ponto E, o procedimento para gerar a tubeira otimizada de Rao consiste nos seguintes passos:

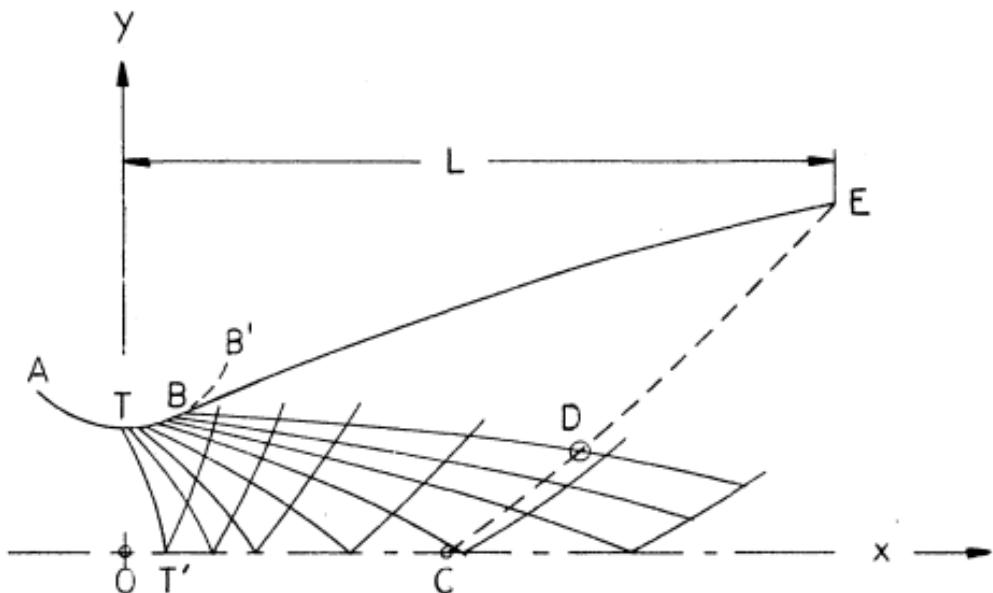


Fig. 1(a) Characteristics net and control surface

Figura 1: Esquema para a construção da tubeira de Rao (fonte: Ref. [1])

1. Gera-se características à direita a partir da seção de expansão TB';
2. Determina-se o ângulo θ_E do vetor velocidade, e consequentemente da inclinação da parede, no ponto E com a Eq. (14) do artigo de Rao (Ref. [1]). Em termos dos parâmetros adimensionais, esta equação é dada por

$$\sin(2\theta_E) = \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{p_a}{p_0 p_r(M_E)}\right) \frac{\sqrt{M_E^2 - 1}}{M_E^2}, \quad (1)$$

onde γ é a razão de calores específicos e $p_r(M)$ é a razão entre a pressão local p e a pressão de estagnação p_0 :

$$p_r(M) = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (2)$$

Obs.: No artigo de Rao (Ref. [1]), a Eq. (1) está escrita em termos de $\cot \alpha$, onde α é o ângulo de Mach. Considerando que

$$\sin \alpha = 1/M \quad (3)$$

e

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (4)$$

então

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}, \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (6)$$

e

$$\cot \alpha = \sqrt{M^2 - 1}, \quad (7)$$

todos positivos, pois $0 < \alpha < 90^\circ$.

3. As características à direita que emanam de TB' interceptam a superfície de controle (linha tracejada na Fig. 2 e linha CE na Fig. 1). Este passo consiste primeiramente em determinar as coordenadas (x_D, y_D) do ponto D e as coordenadas (x_E, y_E) do ponto E da superfície de controle e, por fim, toda a linha DE. O procedimento é iterativo:

- (a) Escolhe-se uma característica à direita da seção TB', e.g. de B_1 a D_1 . Determinam-se as coordenadas (x_{D_1}, y_{D_1}) para as quais a Eq. (17) do artigo de Rao (Ref. [1]) é satisfeita:

$$M^* \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} = M_E^* \frac{\cos(\theta_E - \alpha_E)}{\cos \alpha_E} \quad (8)$$

onde

$$M^* = \left[\frac{1}{\gamma - 1 + \frac{2}{M^2}} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Na Eq. (8) existe um intervalo de M para o qual há dois valores de θ . Por isso, numericamente, é conveniente determinar $M(\theta)$.

- (b) Com as coordenadas (x_{D_1}, y_{D_1}) , determina-se y_E através da Eq. (18) do artigo de Rao (Ref. [1]):

$$\eta = \frac{y}{y_E} = \frac{g(M_E, \theta_E)}{g(M, \theta)}, \quad (10)$$

onde

$$g(M, \theta) = \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} p_r(M) \sin^2 \theta. \quad (11)$$

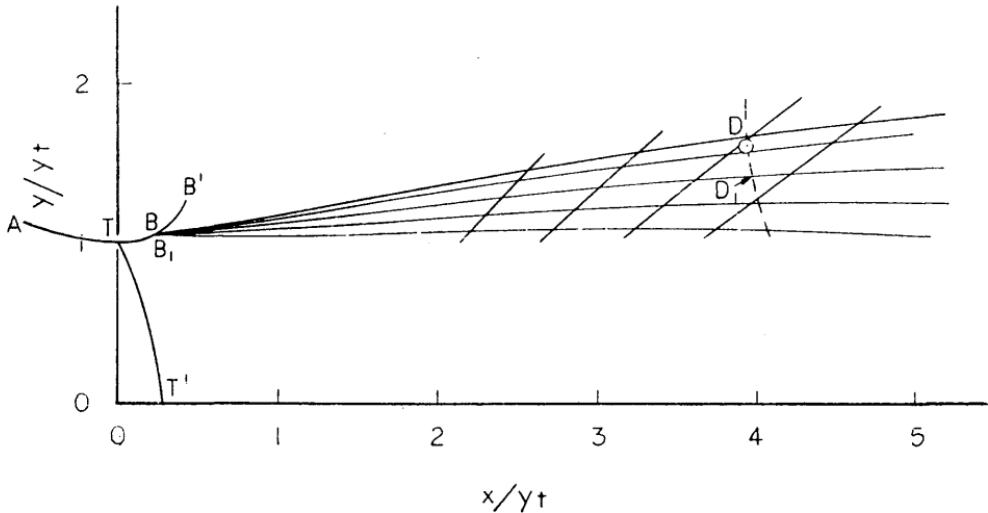


Fig. 2 Selection of the extent of initial expansion

Figura 2: Determinação dos pontos B e D (fonte: Ref. [1])

- (c) Com os valores de (x_{D_1}, y_{D_1}) e y_E , avalia-se se a Eq. (19) do artigo de Rao (Ref. [1]) é satisfeita (o sinal negativo falta na eq. original):

$$-I_3 + y_E^2 I_1(\eta_{D_1}) = 0, \quad (12)$$

onde

$$I_3 = \int_{x_{B_1}}^{x_{D_1}} \frac{\rho_r \sqrt{T_r}}{\cos(\theta - \alpha)} y dx, \quad (13)$$

com a integral ao longo da característica $B_1 D_1$, e

$$I_1(\eta) = \int_{\eta}^1 \frac{\rho_r \sqrt{T_r}}{\sin(\theta + \alpha)} \eta' d\eta', \quad (14)$$

com a integral ao longo da superfície de controle, onde ρ_r é a razão entre a massa específica local ρ e a massa específica de estagnação ρ_0 :

$$\rho_r(M) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (15)$$

T_r é a razão entre a temperatura local T e a temperatura de estagnação T_0 :

$$T_r(M) = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}, \quad (16)$$

Para calcular a integral Eq. (14), $M(\eta)$ e $\theta(\eta)$ são obtidos invertendo-se as Eqs. (10), e (8) e α é obtido da Eq. (3).

- (d) Caso os valores de x_{D_1} , y_{D_1} e y_E não satisfaçam a Eq. (12), repetir as etapas (a)-(c) para outra característica à direita. Se necessário, interpolar as características. Ao final do processo, serão determinadas as coordenadas (x_B, y_B) , (x_D, y_D) e y_E .
- (e) Para determinar as coordenadas x ao longo da superfície de controle DE, basta lembrar que esta superfície é uma característica à esquerda e, portanto, deve satisfazer

$$\frac{dx}{dy} = \cot(\theta + \alpha) \quad (17)$$

ou

$$x = x_D + \int_{y_D}^y \cot(\theta + \alpha) dy', \quad y_D \leq y \leq y_E, \quad (18)$$

ou ainda

$$x = x_E - y_E I_2(\eta), \quad \eta_D = y_D/y_E \leq \eta \leq 1, \quad (19)$$

onde

$$x_E = x_D + y_E I_2(\eta_D), \quad \eta_D = y_D/y_E \quad (20)$$

e

$$I_2(\eta) = \int_\eta^1 \cot(\theta + \alpha) d\eta', \quad \eta_D \leq \eta \leq 1. \quad (21)$$

Para calcular a integral Eq. (21), $M(\eta)$ e $\theta(\eta)$ são obtidos invertendo-se as Eqs. (10), e (8) e α é obtido da Eq. (3).

4. Conhecidas a característica à direita BD e a característica à esquerda DE, resta construir a rede de características que permitirá determinar o contorno da tubeira (Fig. 3).

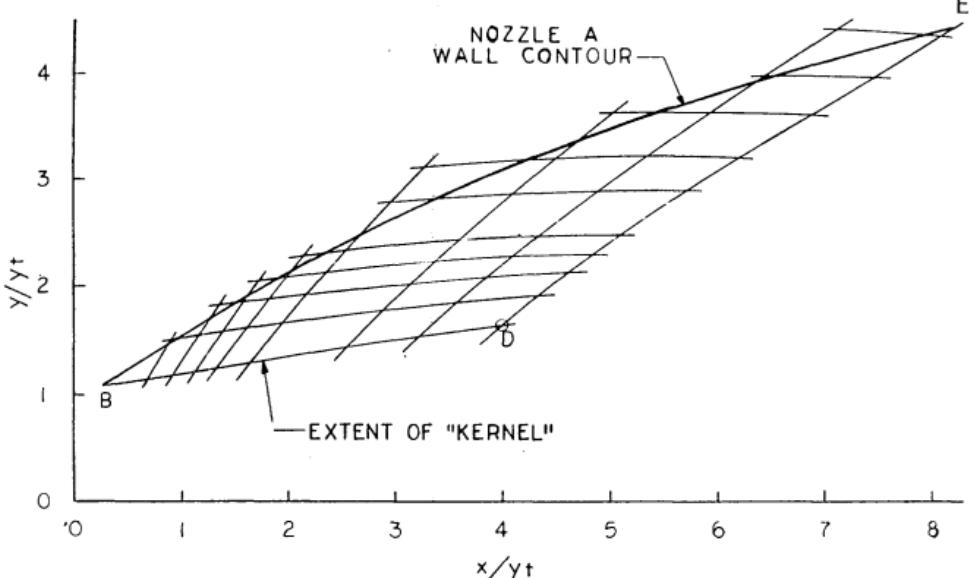


Fig. 4 Construction of the nozzle contour

Figura 3: Esquema para a determinação do contorno ótimo (fonte: Ref. [1])

5. O contorno da tubeira é obtido através da linha de corrente entre o ponto B e o ponto E (Fig. 3). A linha de corrente que satisfaz esta condição é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta. \quad (22)$$

6. O coeficiente de empuxo C_T é obtido integrando-se a distribuição de pressão e o fluxo de momento linear axial ao longo de T'TE:

$$C_T = \int_0^{y_E} 2p_r \left[1 + \gamma M^2 \sin \theta \cos \theta \left(\cot \theta - \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy - \frac{p_a}{p_0} y_E^2. \quad (23)$$

Como ao longo de TE não há fluxo ($\frac{dx}{dy} = \cot \theta$), a integral da Eq. (23) é reescrita como

$$C_T = \int_0^1 2p_r \left[1 + \gamma M^2 \sin \theta \cos \theta \left(\cot \theta - \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy \\ + \int_1^{y_E} 2p_r y dy - \frac{p_a}{p_0} y_E^2. \quad (24)$$

A primeira integral da Eq. (24) representa a contribuição da pressão e do fluxo de momento linear para C_T na seção TT' e, portanto, não depende do perfil do divergente da tubeira. Numa primeira aproximação (desprezando-se θ e $\frac{dx}{dy}$), tem-se

$$\int_0^1 2p_r \left[1 + \gamma M^2 \sin \theta \cos \theta \left(\cot \theta - \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy \approx p_r(M) [1 + \gamma M^2], \quad (25)$$

onde M é o número de Mach (constante) ao longo da seção TT'.

A Eq. (14) do artigo do Rao na forma adimensional

Eq.(14)

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{\rho - \rho_a}{\rho w^2} \cot \alpha$$

$$\alpha = \alpha(M)$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{(1 - \frac{\rho_a}{\rho}) \cot \alpha}{\frac{\rho w^2}{f_2 p}}$$

$$W = M \cdot a$$

$$W^2 = M^2 a^2 = M^2 \gamma R_f T$$

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{\rho}{\rho_{RT}} = \frac{1}{R_f T}$$

$$\frac{\rho w^2}{f_2 p} = \frac{1}{2} \frac{1}{R_f T} \cdot M^2 \gamma R_f T$$

$$= \frac{M^2 \gamma}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2}{M^2 \gamma} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \cot \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{M}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{M^2} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)^{1/2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}/M}{1/M} = \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M^2}$$

OK

$$\frac{\rho_a}{\rho} \frac{\rho}{p} = \frac{\rho_a}{\rho_0} \cdot \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$= \rho_r^{-1}$$

- A eq.(17) fornece $\theta(M)$ ao longo da superfície de controle.
- A eq.(18) fornece $\frac{\rho}{\rho_a}$ para um dado $\theta(M) \in M$.
- Das eq.s (17) e (18) é possível construir $M(\frac{\theta}{\rho}) \in \theta(\frac{\rho}{\rho_a})$.

Figura 4: Equação 14 do artigo do Rao na forma adimensional

B Eq. (19) do artigo do Rao na forma adimensional

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tilde{y}_t \cdot M}{\int_{\tilde{x}_t}^{\tilde{x}_{D_1}} \frac{f_w \sin \alpha}{\cos(\theta - \alpha)} \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_t} d\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}_t}\right)} = \\
 & - \tilde{y}_t^2 \int_{\tilde{x}_t}^{\tilde{x}_{D_1}} \frac{f_w \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_E} d\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_E}\right) \\
 & y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_t}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}_t}, \quad \eta = \frac{y}{y_E} \\
 & - \int_{x_{B_1}}^{x_{D_1}} \frac{f_w \sin \alpha}{\cos(\theta - \alpha)} y dx = \\
 & y_E^2 \int_{1}^{\eta_{D_1}} \frac{f_w \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} \eta dy \\
 & f = f_0 \cdot \frac{f_r}{f_0} = f_0 \cdot f_r \\
 & f_r = \left[1 + \frac{T-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{1}{T-1}} \\
 & W = Ma = M \sqrt{g T} \\
 & = M \underbrace{\sqrt{g T_0}}_{a_0} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/2} \\
 & = M T_r^{1/2} a_0
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 T_r = \left[1 + \frac{T-1}{2} M^2 \right]^{-1} \\
 f_w = f_0 f_r \cdot M T_r^{1/2} a_0 \\
 f_w = f_0 a_0 \cdot f_r T_r^{1/2} M \\
 - \int_{x_{B_1}}^{x_{D_1}} \frac{f_r T_r^{1/2} M \sin \alpha}{\cos(\theta - \alpha)} y dx + \\
 y_E^2 \int_{1}^{\eta_{D_1}} \frac{f_r T_r^{1/2} M \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} \eta dy = 0 \\
 I_1(\eta_{D_1}) \\
 I_1(\eta) = \int_{\eta}^1 \frac{f_r T_r^{1/2}}{\sin(\theta + \alpha)} \eta' d\eta' \\
 I_3 = \int_{x_{B_1}}^{x_{D_1}} \frac{f_r T_r^{1/2}}{\cos(\theta - \alpha)} y dx \\
 -I_3 + y_E^2 I_2(\eta_{D_1}) = 0
 \end{array} \right|$$

Figura 5: Equação 19 do artigo do Rao na forma adimensional

$$\beta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\beta + \theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \phi\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos(\theta - \phi)$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} \sin(\theta - \phi)$$

$$= \sin(\phi - \theta)$$

$$d\bar{m} = \rho W \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi} 2\pi r dr$$

$$\frac{dr}{ds} = \tan \phi$$

$$ds = \frac{dr}{\tan \phi}$$

$$ds = \frac{dx}{\cos \phi}$$

$$d\bar{m} = \rho W \frac{\sin(\phi - \theta)}{\cos \phi} 2\pi r dx$$

$$\phi = \theta - \alpha$$

$$\phi - \theta = -\alpha$$

$$\frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi} = \frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{\sin(\alpha - \theta)}$$

$$\frac{\sin(\phi - \theta)}{\cos \phi} = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(\theta - \alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \theta)}$$

Figura 6: Equação 19 do artigo do Rao na forma adimensional

C Coef. de empuxo - Eq. (2) do artigo do Rao na forma adimensional

$$\dot{m}_{3D} = - \int_{\eta_D}^{\eta_E} \rho W \frac{\sin \alpha}{\cos(\theta + \alpha)} 2\pi r dr$$

$$\dot{m}_{DE} = \int_{\eta_D}^{\eta_E} \rho W \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin(\phi)} 2\pi r dr$$

$\phi = \theta + \alpha$

$\phi - \theta = \alpha$

$$\dot{m}_{DE} = \int_{\eta_D}^{\eta_E} \rho W \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} 2\pi r dr$$

$$\dot{m}_{DE} = + \eta_E^2 \int_{\eta_D}^1 \frac{\rho W \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} \frac{2\pi \left(\frac{\eta}{\eta_E} \right) dr}{\eta_E}$$

$$\dot{m}_{3D} + \dot{m}_{DE} = 0$$

$$-I_0 + \eta_E^2 I_2(\eta_D) = 0$$

Figura 7: Equação 19 do artigo do Rao na forma adimensional

Cof. de empuxo

$$E = \int [(\rho - \rho_0) + \rho M^2 \frac{\sin(\phi - \theta) \cos \theta}{\sin \phi}] 2\pi \tilde{y} dy \quad \text{Res eq(2)}$$

$$\rho M^2 = \gamma M^2 \chi_{RgT} = \gamma M^2 \rho = \gamma M^2 \rho_r \cdot \rho_0$$

$$\tilde{y} = y_t y$$

$$E = 2\pi \rho_0 y_t^2 \int \left[\left(\rho_r - \frac{\rho_0}{\rho_0} \right) + \gamma M^2 \rho_r \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi} \right] y dy$$

$$C_T = \frac{E}{2\pi y_t^2 \rho_0}$$

$$C_T = 2 \int \left[\rho_r - \frac{\rho_0}{\rho_0} + \gamma M^2 \rho_r \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi} \right] y dy$$

$$\rho_r = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

$$\sin \phi = \frac{dy}{ds}, \quad \sin(\phi - \theta) = \sin \phi \cos \theta - \sin \theta \cos \phi$$

$$\frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin \phi} \equiv \cos \theta - \sin \theta \cot \phi$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi &= 1 & \cos \phi &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \\ && &= \pm \left| \frac{dx}{ds} \right| = \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

Figura 8: Coeficiente de empuxo - parte 1

$$\cot \phi = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dy}} = \frac{dx}{dy} \quad \rightarrow \quad \cot \phi = \frac{dx}{dy}$$

$$C_T = 2 \int_0^{y_E} \left[p_r - \frac{p_a}{p_0} + \gamma M^2 p_r \left(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy$$

$$C_T = 2 \int_0^{y_E} \left[p_r + \gamma M^2 p_r \cos \theta \operatorname{sen} \theta \left(1 - \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy$$

$$C_T = 2 \int_0^{y_E} \left[p_r + \gamma M^2 p_r \cos \theta \operatorname{sen} \theta \left(\cot \theta - \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy - 2 \frac{p_a}{p_0} \int_0^{y_E} y dy$$

As longas de TE $\frac{dx}{dy} = \cot \theta$, assim

$$C_T = 2 \int_0^1 p_r \left[1 + \gamma M^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \left(\cot \theta - \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy$$

$$+ 2 \int_1^{y_E} p_r y dy - \frac{p_a}{p_0} \frac{y_E^2}{2}$$

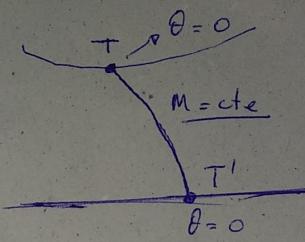
$$\cos \theta \operatorname{sen} \theta \left(\cot \theta - \frac{dx}{dy} \right) = \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} - \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{dx}{dy}$$

$$= \cos^2 \theta - \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{dx}{dy}$$

Figura 9: Coeficiente de empuxo - parte 2

$$\frac{\text{Na } \sec\theta}{\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \theta \ll 1$$

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$$



$$\cos^2\theta \approx \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^2 \approx 1 - \theta^2$$

$$\cos\theta \operatorname{sen}\theta \approx \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\theta \approx \theta$$

$$\cos^2\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\theta \frac{dx}{dy} \approx 1 - \theta^2 - \theta \frac{dx}{dy}$$

Como em $T'T$ $\theta \ll 1$ e $\left|\frac{dx}{dy}\right| \ll 1$, temos

primeira aproximação:

$$\int_0^1 2 p_n \left[1 + \gamma M^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left(\cot\theta - \frac{dx}{dy} \right) \right] y dy \approx \int_0^1 2 p_n \left[1 + \gamma M^2 \right] y dy$$

$$= 2 p_n(\mu) (1 + \gamma M^2) \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{p_n(\mu) (1 + \gamma M^2)}{2}$$

Figura 10: Coeficiente de empuxo - parte 3

Referências

- [1] RAO, G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. *Journal of Jet Propulsion*, 1958.