MoCA - v1.0.0
Organização e Verificação do código

Guilherme Bertoldo

2 de Setembro de 2020

1 Organização do código

O código MoCA v1.0.0 (Method of Characteristics for Axisymmetric flows) está organizado como segue:

- Utilitários (Utils)
  - CSVHandler.h: arquivo com diversas classes para manipulação de arquivos CSV;
  - StringManip.h: arquivo com funções para manipulação de strings;
- Entrada e saída (IO)
  - io.h: arquivo com funções para gestão de entrada e saída;
  - json.hpp: arquivo para leitura e escrita no formato json desenvolvido por N. Lohmann
    JSON for Modern C++
    version 3.8.0
    `https://github.com/nlohmann/json`
    Licensed under the MIT License `http://opensource.org/licenses/MIT`
- Utilitários numéricos
  - Numerics.h: arquivo com parâmetros numéricos;
  - NumIntegration: classe para integração numérica;
  - NumInterpolation1DOption: classe para interpolação unidimensional;
  - NumRootFinding: namespace com funções para determinação de raízes de funções;
- Utilitários para o método das características
  - IsentropicFlowRelations: classe para determinar relações termodinâmicas em escoamentos isentrópicos;
  - MoCToolBox: classe para calcular as operações unitárias do método das características;
  - MoCVerification: classe para verificação dos resultados da classe MoCToolBox;
- Linha inicial

- KliegelLevineBoundaryLine: classe para gerar a linha inicial de acordo com as aproximações de Kliegel e Levine [1];

- Perfil do divergente da tubeira
  - Wall: classe abstrata para gerar a parede da tubeira;
  - WallCircularSection: classe concreta de uma parede tipo seção circular;
  - WallConicalDivergent: classe concreta de uma parede tipo seção circular seguida por um segmento de reta (divergente cônico);
  - WallInterpolatedDivergent: classe concreta de uma parede interpolada;

- Solvers
  - NozzleMoCInterface: classe abstrata para resolver o escoamento em tubeiras;
  - NozzleMoC: classe concreta que utiliza o método das características para resolver o escoamento na tubeira;
  - NozzleMoCAdaptive: classe concreta que utiliza o método das características e procedimentos adaptativos para resolver o escoamento na tubeira;
  - NozzleMoCRao: classe concreta que utiliza o método de Rao [2] para determinar o perfil que maximiza o coeficiente de empuxo;
  - RaoControlSurface: classe auxiliar da classe NozzleMoCRao para gerar a superfície de controle;
  - RaoNozzleOptContour: classe auxiliar da classe NozzleMoCRao para gerar o perfil otimizado;

- Driver
  - Driver.h: arquivo com funções para gerenciar a execução do programa (maestro).

2 Verificação de código

2.1 Classe IsentropicFlowRelations

A verificação de código foi realizada comparando-se os resultados para a razão T_r de temperatura local e a temperatura de estagnação, a razão p_r de pressão local e a pressão de estagnação e a razão ρ_r de massa específica local e a massa específica de estagnação da classe com resultados calculados em uma planilha eletrônica para cinco valores de Mach 0,1; 0,5; 1; 2; 10. Considerou-se $\gamma = 1,23$. Os resultados foram idênticos (Tab. 1).

2.2 Classe MoCToolBox

Tabela 1: Propriedades termodinâmicas calculadas em uma planilha eletrônica e diferença relativa com relação aos resultados da classe IsentropicFlowRelations.

	Planilha			Dif. relativa		
M	T_r	p_r	ρ_r	T_r	p_r	ρ_r
0,1	0,998 85	0,993 87	0,995 02	0,00	0,00	0,00
0,5	0,972 05	0,859 35	0,884 05	0,00	0,00	0,00
1	0,896 86	0,558 70	0,622 96	0,00	0,00	0,00
2	0,684 93	0,132 15	0,192 94	0,00	0,00	0,00
10	0,080 00	0,000 00	0,000 02	0,00	$5{,}46 \times 10^{-12}$	$2{,}53 \times 10^{-12}$

2.2.1 Função de Prandtl-Meyer e ângulo de Mach

A classe MocToolBox implementa métodos para o cálculo da função de Prandtl-Meyer $\nu(M)$ (Ref. [3]), a função inversa de Prandtl-Meyer $M = \nu^{-1}$ e o ângulo de Mach μ. A partir da Tab. 2 é possível comparar os valores de ν e μ obtidos com o software Maxima [4] e com a classe MoCToolBox para $\gamma = 1,23$.

Tabela 2: Função de Prandtl-Meyer ν e ângulo de Mach μ.

	$\nu(M)$		$\nu^{-1}(\nu(M))$	$\mu(M)$	
M	Maxima	MoCToolBox	MoCToolBox	Maxima	MoCToolBox
1	0,000 000 000 000 00	0,000 000 000 000 00	1,0	1,570 796 326 794 90	1,570 796 326 794 90
1,5	$2{,}323\,237\,062\,722\,19 \times 10^{-1}$	$2{,}323\,237\,062\,722\,19 \times 10^{-1}$	1,5	$7{,}297\,276\,562\,269\,66 \times 10^{-1}$	$7{,}297\,276\,562\,269\,66 \times 10^{-1}$
3	1,065 185 514 219 86	1,065 185 514 219 87	3	$3{,}398\,369\,094\,541\,22 \times 10^{-1}$	$3{,}398\,369\,094\,541\,22 \times 10^{-1}$
10	2,476 105 665 431 89	2,476 105 665 431 89	10	$1{,}001\,674\,211\,615\,60 \times 10^{-1}$	$1{,}001\,674\,211\,615\,60 \times 10^{-1}$
100	3,233 394 608 171 65	3,233 394 608 171 65	100	$1{,}000\,016\,667\,416\,71 \times 10^{-2}$	$1{,}000\,016\,667\,416\,71 \times 10^{-2}$

2.2.2 Operações unitárias

A classe MoCToolBox implementa operações unitárias [3, 5, 6, 7] para determinar pontos de interseção das características. As operações implemntadas são

- Intersecção entre C_- e C_+;
- Intersecção entre C_- e a linha de simetria axial;
- Intersecção entre C_+ e a linha de simetria axial;
- Intersecção entre C_- e uma parede;
- Intersecção entre C_+ e uma parede;
- Intersecção entre uma C_+ partindo de uma parede com uma C_-;
- Intersecção entre uma C_- partindo de uma parede com uma C_+;

As equações discretizadas para o cálculo das operações unitárias acima foram implementadas também no software Maxima. Substituindo-se as soluções obtidas com a classe MoCToolBox no Maxima, os resíduos das equações discretizadas foram da ordem do erro de máquina em todos os casos.

A classe *MoCToolBox* também fornece métodos para interpolação linear entre dois *MoCPoints*. Um *MoCPoints* é uma estrutura de dados que contém as seguintes informações: a coordenada axial x, a coordenada radial r, o número de Mach M, o ângulo θ do vetor velocidade com relação à x, a função de Prandtl-Meyer ν e o ângulo de Mach μ. É possível selecionar x, r, M ou θ como variável independente na interpolação. Em todos os métodos, a interpolação no ponto médio entre dois pontos arbitrariamente escolhidos p_1 e p_2 produziu o resultado analítico (para a interpolação linear). Observação: μ e ν não são interpolados, mas calculados a partir de M.

2.3 NumRootFinding

O *namespace* NumRootFinding implementa o método da bissecção através da função *bisection*. Para testar este método, a raíz de

$$f(x) = x^2 - 4, \tag{1}$$

foi determinada no intervalo [-1,5] com tolerância de 1×10^{-13}. O resultado obtido foi 1,99999-99999999574, que está de acordo com a solução analítica dentro da tolerância especificada.

2.4 NumIntegration

O *namespace* NumIntegration implementa o método dos trapézios através da função *int_trapezoidal_rule*. Este método deve produzir resultados exatos para funções lineares e erro de segunda ordem para demais funções.

Para testar o método, considerou-se a integral

$$\int_{-1}^{2} x \mathrm{d}x, \tag{2}$$

para o primeiro teste.

O intervalo de integração foi particionado de acordo com a seguinte distribuição não uniforme:

$$x_i = 3\left(\frac{i}{N-1}\right)^{1,1} - 1, \quad 0 \le i \le N-1, \tag{3}$$

onde N é o número de pontos.

Considerando $N = 10$, obteve-se numericamente 1,5 para a integral, como esperado.

No segundo teste tomou-se

$$\int_{-1}^{2} x^4 \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Como se pode observar na Tab. 3, a solução numérica converge para a analítica e a ordem efetiva converge para 2.

Tabela 3: Solução numérica da Eq. (4), erro e ordem efetiva p_E.

N	Sol. num.	Erro	p_E
10	6,971 376	0,371 376	
20	6,683 590	0,083 590	2,151 485
40	6,619 855	0,019 855	2,073 794
80	6,604 840	0,004 840	2,036 417
160	6,601 195	0,001 195	2,018 094
320	6,600 297	0,000 297	2,009 021

2.5 NumInterpolation1D

A classe *NumInterpolation1D* fornece uma interface simplificada aos métodos de interpolação 1D disponíveis na biblioteca *GNU Scientific Library* (GSL) Ref. [8]. Para avaliar a classe, considerou-se quatro funções teste: $\{x, x^2, x^3, x^4\}$. Além disso, foram aplicados os métodos de interpolação: *linear*, *cspline*, *steffen* e *akima*. As funções testes foram discretizadas utilizando-se 10 pontos e o particionamento da Eq. (3). Estes dados foram utilizados para realizar as interpolações. Em seguida, as funções teste foram interpoladas em 50 pontos, conforme a discretização da Eq. (3). O módulo do erro absoluto das interpolações é apresentado nas Figs. 1-4.

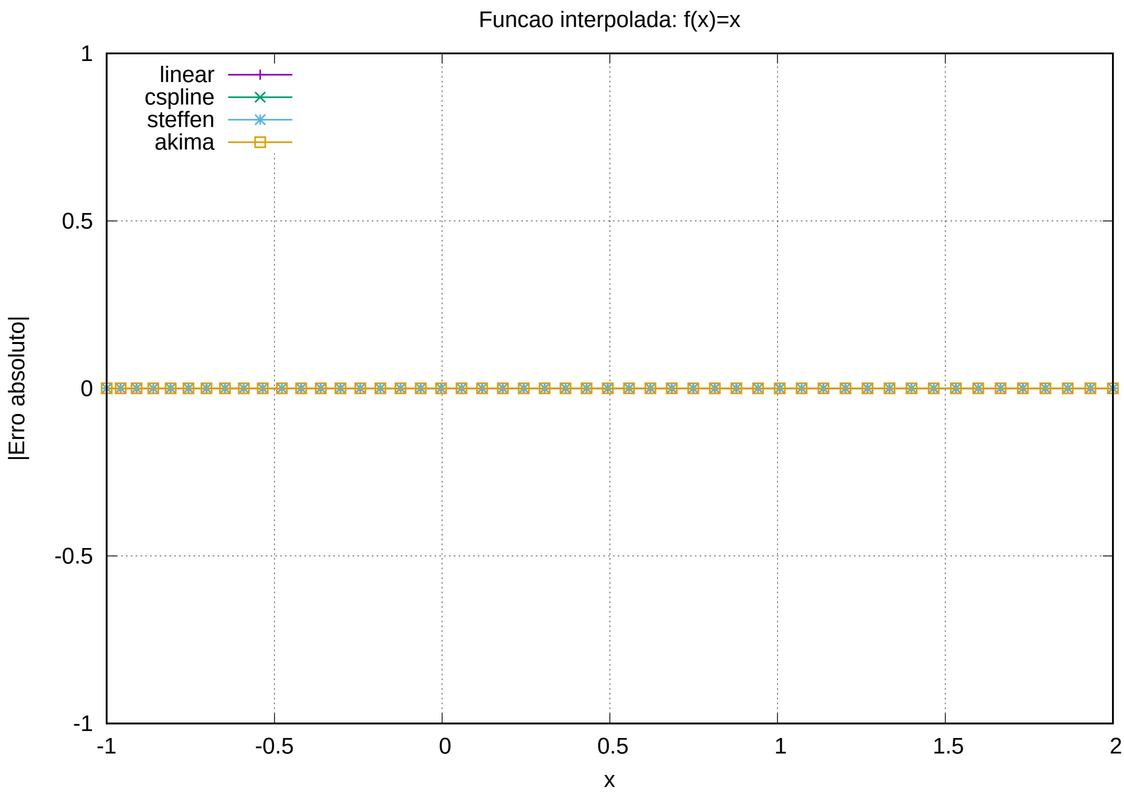


Figura 1: Erro absoluto na interpolação de uma função linear com diversos interpoladores.

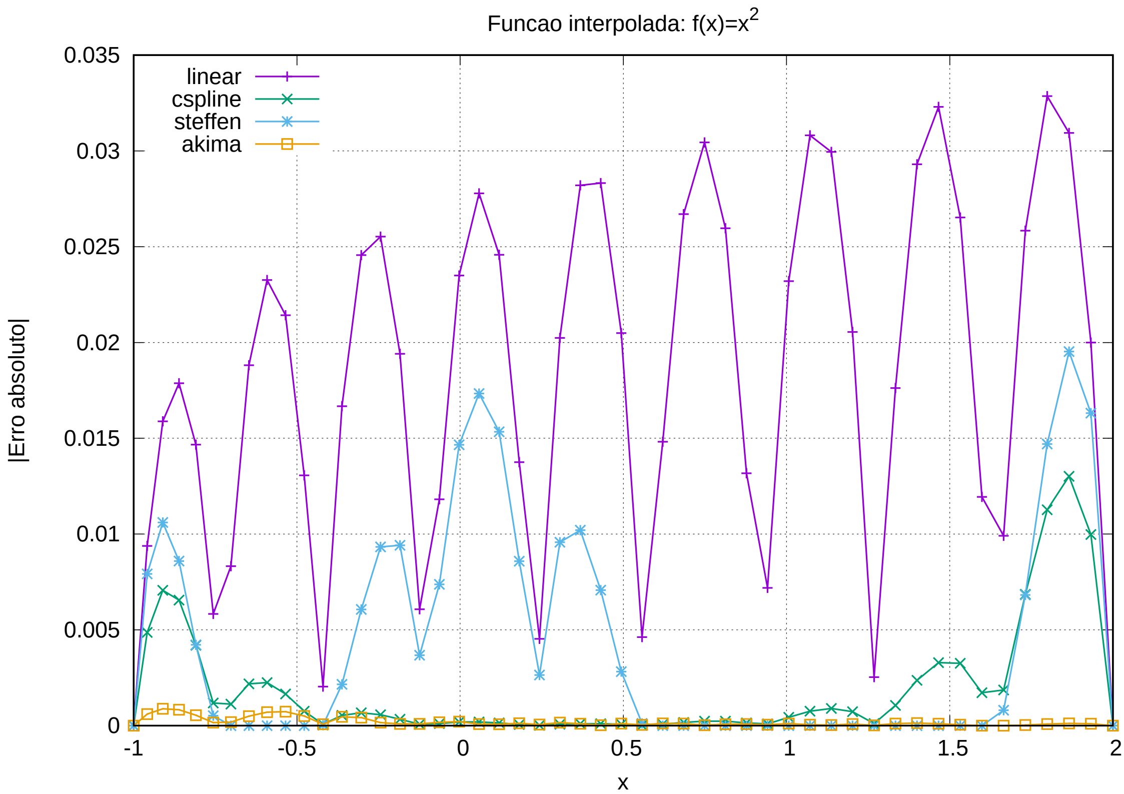


Figura 2: Erro absoluto na interpolação de uma função quadrática com diversos interpoladores.

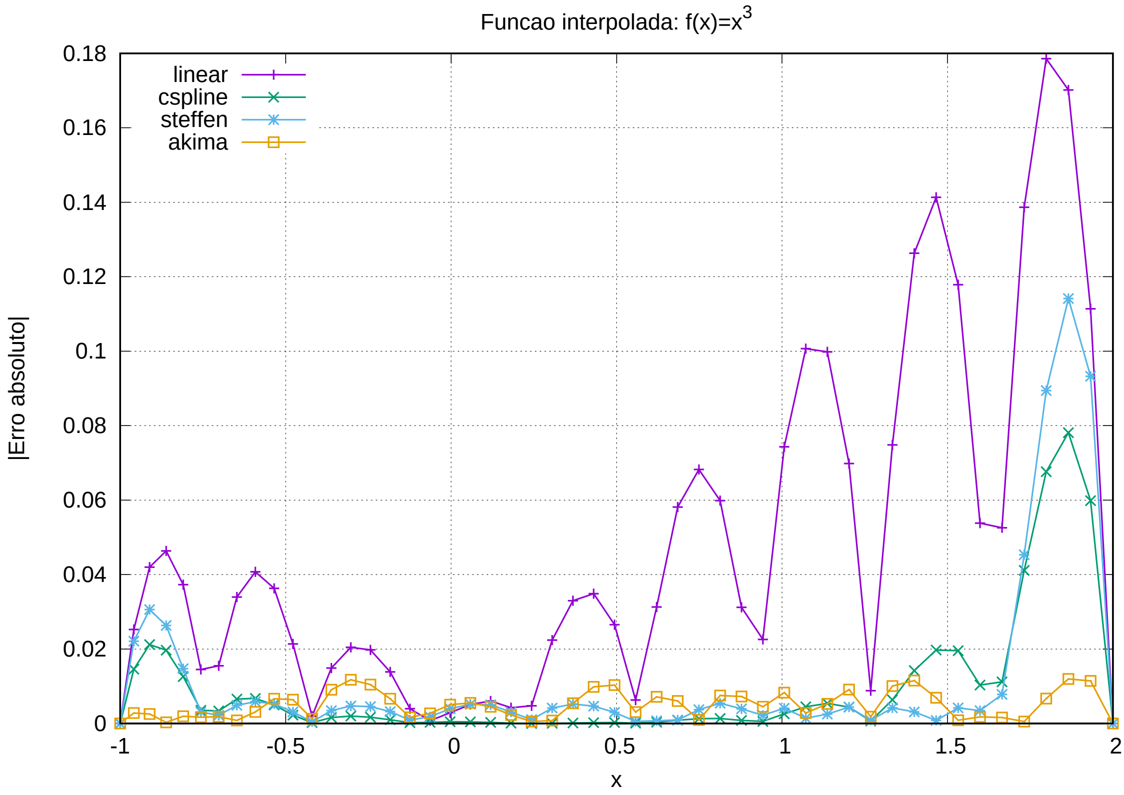


Figura 3: Erro absoluto na interpolação de uma função cúbica com diversos interpoladores.

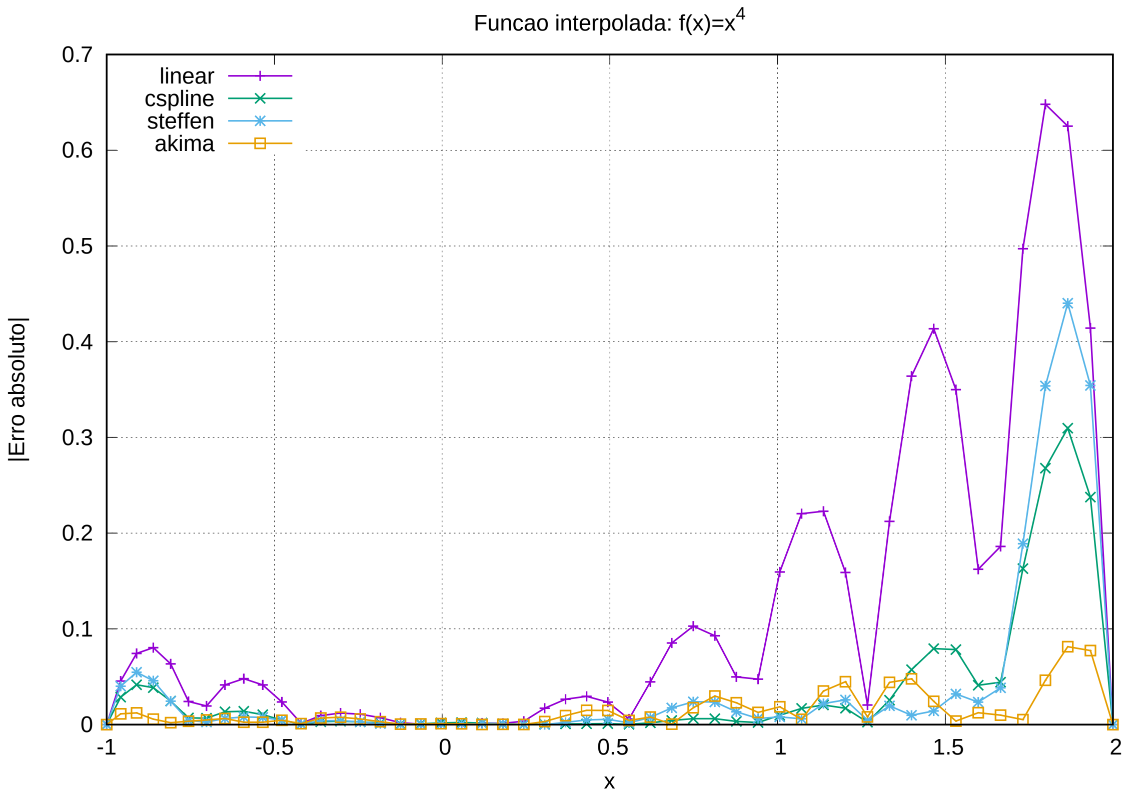


Figura 4: Erro absoluto na interpolação de uma função quártica com diversos interpoladores.

2.6 NozzleMoC

A classe *NozzleMoC* aplica o método das características para determinar o escoamento na seção divergente de uma tubeira com parede prescrita. Para testar a classe, comparou-se os resultados obtidos por ela com os calculados pelo SU2 [9] com base no modelo de Euler. A tubeira avaliada, Fig. 5, tem convergente de 30°, divergente de 15°, raio de curvatura de garganta 1,5 r_{th}, onde r_{th} é o raio da garganta. O comprimento da seção divergente é 2,61333 r_{th}, medido a partir da garganta. A razão de calores específicos foi 1,23, enquanto a pressão e temperatura de estagnação foram, respectivamente, $p_0 = 1,03835 \times 10^6$ Pa e $T_0 = 824,4$ K. A linha inicial para o MoC foi obtida a partir da solução do SU2 (malha 1600x160) como a linha de Mach constante que passa pela garganta da tubeira.

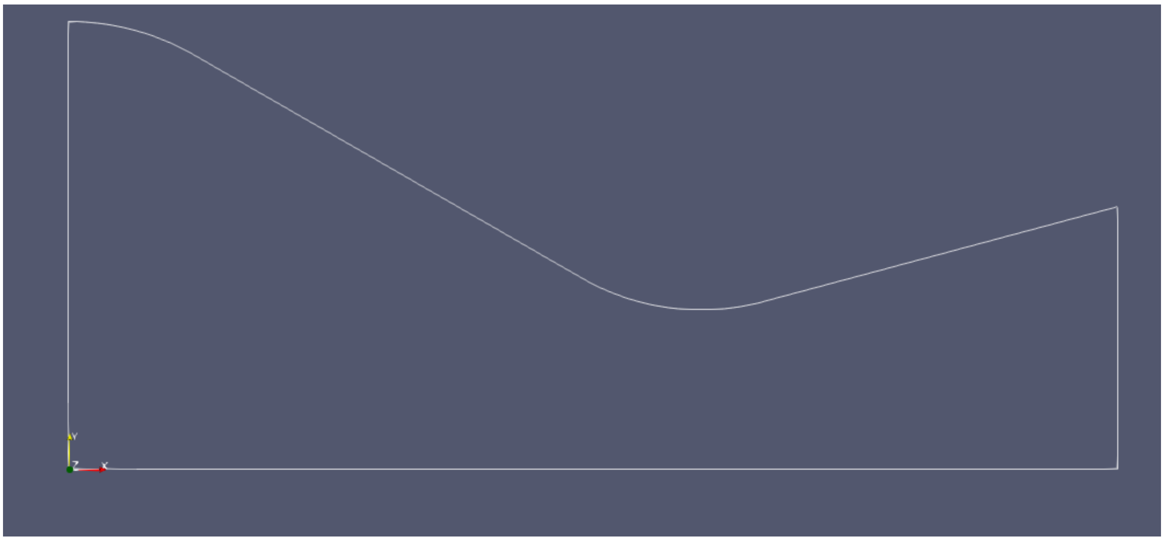


Figura 5: Contorno da tubeira.

Na Fig. 6 são apresentadas as características C_- calculadas com a classe *NozzleMoC*.

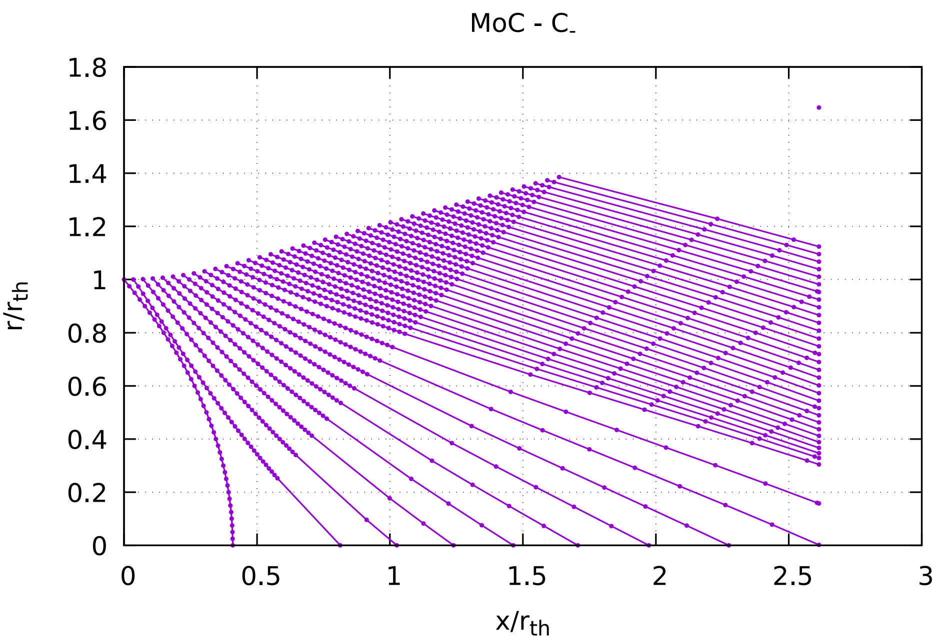


Figura 6: Características C_- para a tubeira 30-15.

As Figs. 7 e 8 comparam o número de Mach e $\cos\theta$ (θ é o ângulo do vetor velocidade), respectivamente, obtidos com MoC e com o SU2.

O coeficiente de empuxo obtido com a classe *NozzleMoC* e com o SU2 é dado na Tab. 4. Nesta tabela, C_{tpd} é a parte do coeficiente de empuxo devido ao fluxo de momento linear em x

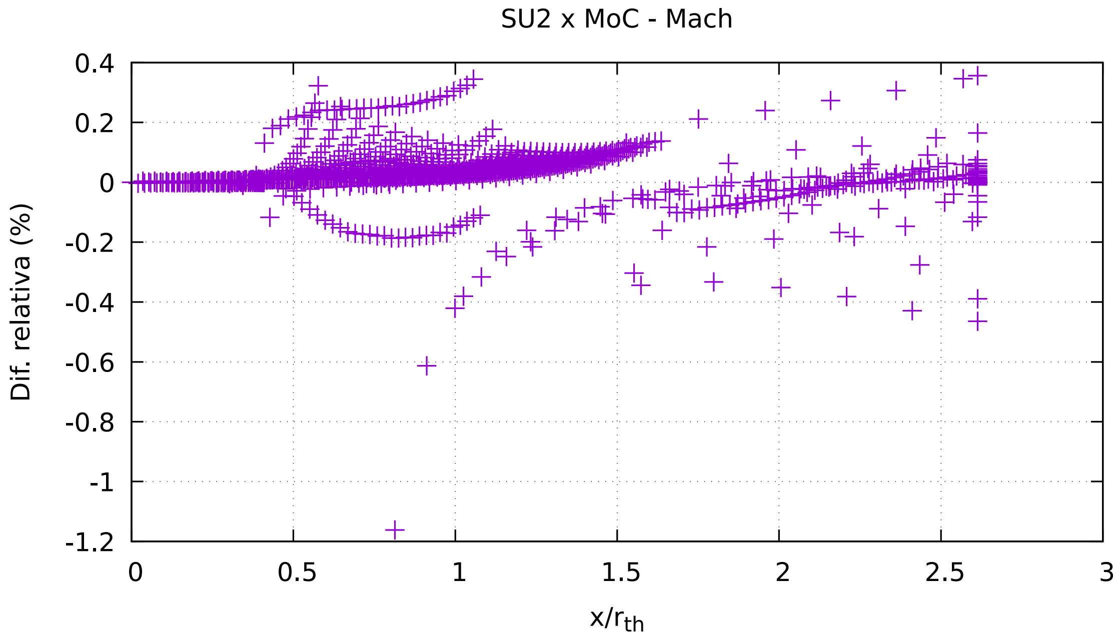


Figura 7: Diferença relativa entre o número de Mach obtido com o método das características e com o SU2.

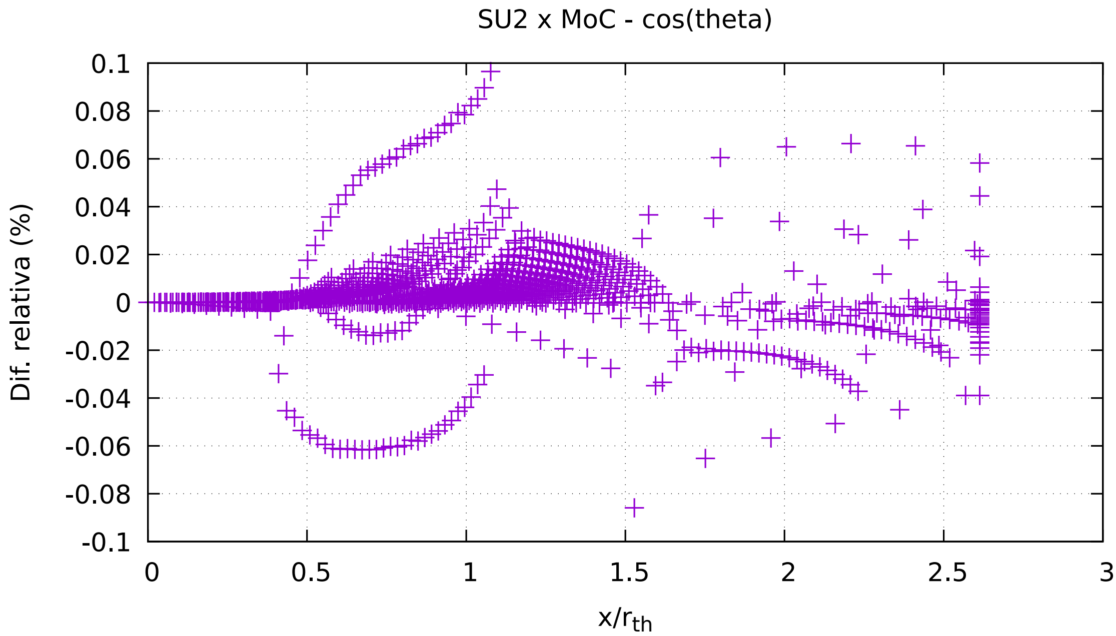


Figura 8: Diferença relativa entre $\cos\theta$ obtido com o método das características e com o SU2.

na garganta, C_{tpd} é a parte do coeficiente de empuxo devido à pressão na seção divergente da tubeira e C_{tpe} é a parte do coeficiente de empuxo devido à diferença entre a pressão de saída e a pressão atmosférica ambiente. A diferença relativa entre as soluções do *NozzleMoC* e do SU2 é de 0,03%.

Tabela 4: Comparação do coeficiente de empuxo obtido pelo método das características (*NozzleMoC*) com o coeficiente de empuxo obtido com o modelo de Euler através do SU2.

NozzleMoC	C_{tm}	1.2418790096622183
	C_{tpd}	0.2581190483222504
	C_{tpe}	0.0000000000000000
	C_t	1.4999980579844687
SU2	C_t	1.4994749035497612

2.7 NozzleMoCAdaptive

Como se pode observar na Fig. 6, existem características muito espaçadas. Numa tentativa de aumentar o número de características, a classe *NozzleMoCAdaptive* implementa três modificações com relação à classe *NozzleMoC*:

1. Cada ponto da linha inicial (linha de Mach constante que passa pela garganta) gera-se uma C_-. Desta forma, o número de C_- aumentou significativamente (compare as Figs. 6 e 9). Ao gerar as características desta forma, percebeu-se que para os pontos da linha inicial mais próximos da garganta, o ângulo da C_- era menor que o ângulo entre dois pontos desta linha. Como consequência, estes pontos não podem ser utilizados como pontos de partida de uma C_-.

2. Caso a distância entre dois pontos ao longo de uma C_- seja maior que l_-, utiliza-se interpolação linear para inserir pontos na linha e garantir essa condição.

3. Caso a distância entre dois pontos consecutivos de duas C_-, e.g. C_{-1} e C_{-2}, seja maior que l_+, gera-se um ponto na parede da tubeira entre as duas características e a partir de dele e da característica C_{-1} gera-se uma terceira característica C_{-3}, para a qual o procedimento é repetido até que a condição seja satisfeita. As características que não satisfazem a condição são descartadas.

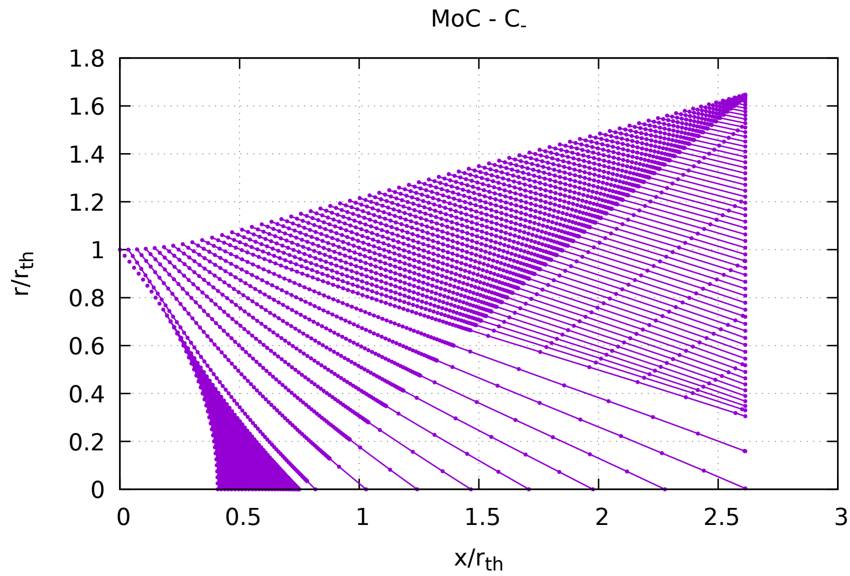
As Figs. 9 a 11 ilustram os resultados para a rede de C_-, para a diferença relativa do número de Mach obtido com MoC e com o SU2 (Euler) e a mesma comparação para $\cos\theta$, respectivamente. Cada figura contém duas subfiguras, a primeira obtida com $l_- = l_+ = 100$ e a segunda obtida com $l_- = 0,05$ e $l_+ = 0,1$. Como se pode observar, o aumento no número de características praticamente não reduziu as diferenças relativas. No entanto, uma rede de características mais densa pode ser útil na aplicação do método de Rao para obtenção de tubeiras ótimas.

O coeficiente de empuxo obtido com a classe *NozzleMoCAdaptive* é comparado com o obtido pelo modelo de Euler na Tab. 5. A comparação considera a linha inicial para a geração das características obtida pelo método de Kliegel-Levine e a partir da simulação com o SU2 (Euler). Em ambos os casos, são considerados $N_p = 20$ e $N_p = 40$ pontos.

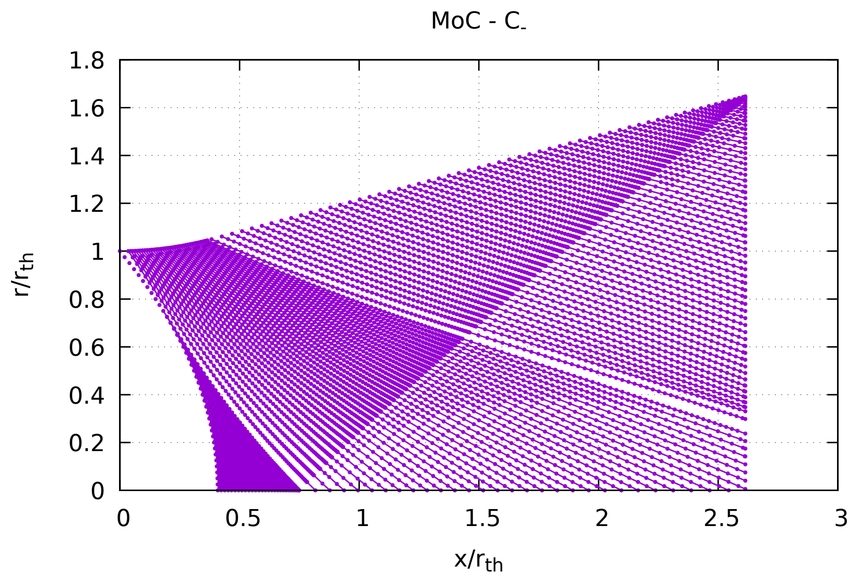
2.8 Classe RaoControlSurface

A classe *RaoControlSurface* tem a finalidade de determinar a superfície de controle de Rao [2] que, por sua vez, é utilizada para calcular o perfil geométrico que maximiza o coeficiente de empuxo. Para mais detalhes sobre as variáveis apresentados a seguir, veja o documento "Procedimento para gerar a tubeira otimizada de Rao".

Para testar esta classe, os resultados das seguintes variáveis foram comparados com os obtidos com o software Maxima:



(a) $l_- = l_+ = 100$



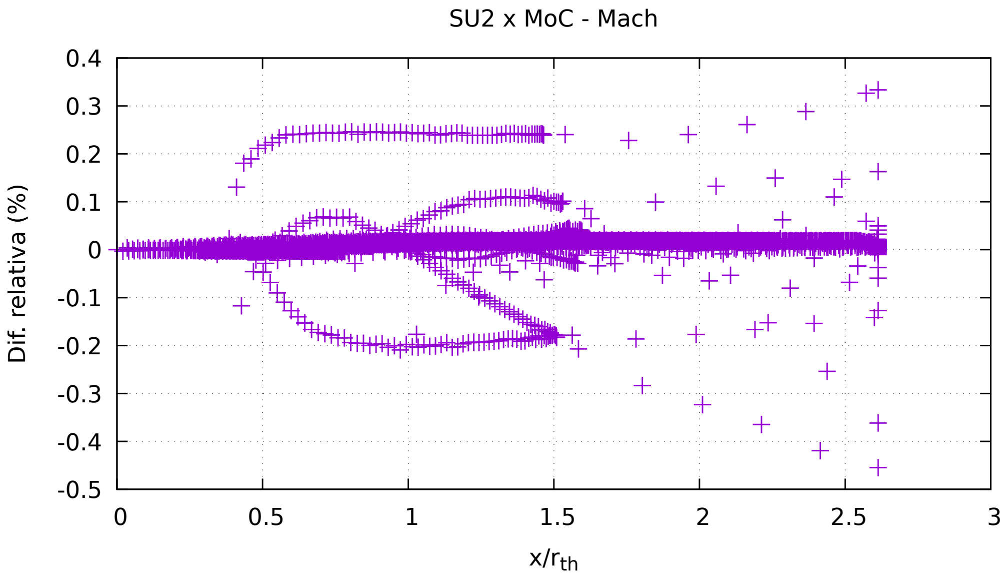
(b) $l_- = 0,05$ e $l_+ = 0,1$

Figura 9: Características C_- para a tubeira 30-15. Aplicação da classe *NozzleMoCAdaptive*.

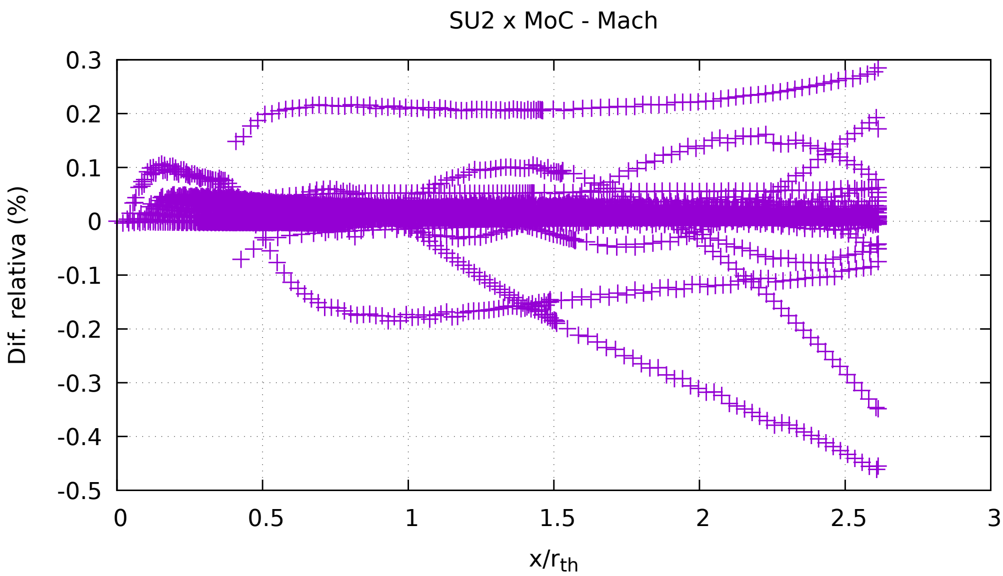
Tabela 5: Comparação do coeficiente de empuxo obtido pelo método das características com o coeficiente de empuxo obtido com o modelo de Euler através do SU2.

Linha inicial	l_-	l_+	N_p	MoC	SU2-Euler	DR
Kliegel-Levine	100	100	20	1,500 608 5	1,499 474 9	0.08%
Kliegel-Levine	100	100	40	1,500 836 1	1,499 474 9	0.09%
SU2	100	100	20	1,499 120 8	1,499 474 9	-0.02%
SU2	100	100	40	1,499 356 3	1,499 474 9	-0.008%
SU2	0,05	0,1	40	1,499 339 5	1,499 474 9	-0.009%

- θ_E: inclinação da saída da tubeira (Eq. (14) do artigo do Rao);



(a) $l_- = l_+ = 100$



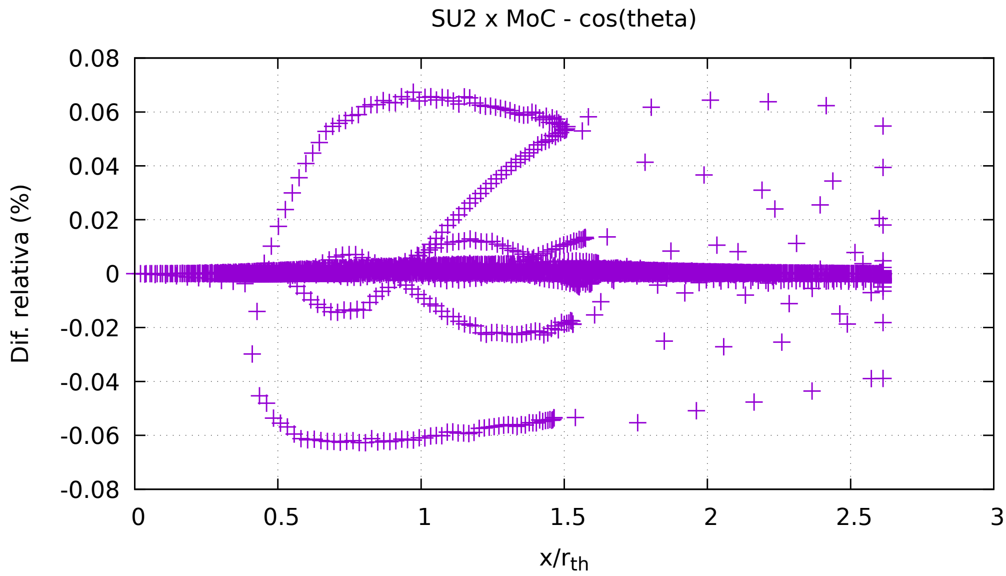
(b) $l_- = 0,05$ e $l_+ = 0,1$

Figura 10: Diferença relativa entre o número de Mach obtido com o método das características e com o SU2. Aplicação da classe *NozzleMoCAdaptive*.

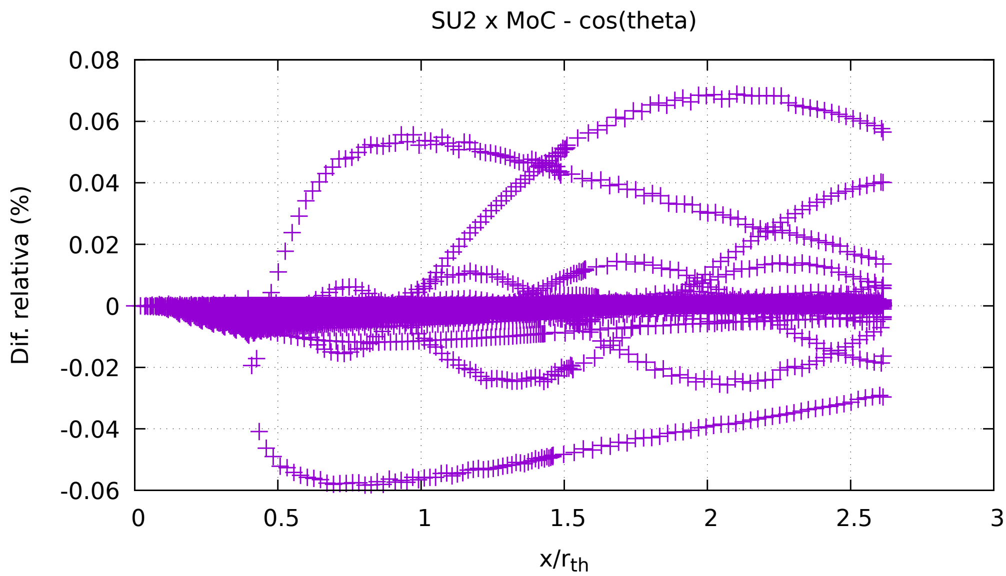
- $M(\theta)$: número de Mach sobre a superfície de controle como função do ângulo do vetor velocidade (Eq. (17) do artigo do Rao);
- $\eta = r/r_E$: razão entre a coordenada radial r ao longo da superfície de controle e o raio de saída da tubeira (Eq. (18) do artigo do Rao).

Para todos os testes, a diferença relativa entre os resultados foi da ordem do erro de máquina para precisão dupla.

As integrais $I_1(\eta)$ e $I_2(\eta)$ foram calculadas em uma planilha eletrônica e comparadas com os resultados da classe *RaoControlSurface*. A diferença relativa entre os resultados foi da ordem do erro de máquina para precisão dupla.



(a) $l_- = l_+ = 100$



(b) $l_- = 0,05$ e $l_+ = 0,1$

Figura 11: Diferença relativa entre $\cos\theta$ obtido com o método das características e com o SU2. Aplicação da classe *NozzleMoCAdaptive*.

Como $I_1(\eta)$, $I_2(\eta)$ e $\theta(\eta)$ foram obtidos de modo discreto, a interpolação utilizada foi averiguada comparando-se graficamente os valores discretos com os valores interpolados entre dois pontos discretos (Fig. 12). Em nenhum gráfico se observou discrepâncias ou ondulações nas funções interpoladas.

A classe *RaoControlSurface* também fornece métodos para determinar as característica C_- BD e C_+ DE. Para aplicar estes métodos, as características C_- geradas na seção TT' foram obtidas com a classe *NozzleMoCAdaptive* com $l_- = 0,01$ e $l_+ = 100$ (Fig. 13a). Foram utilizados os mesmos dados do exemplo do artigo do Rao: $\gamma = 1,23$, a seção de expansão é circular com raio de curvatura igual a 0,45 o raio da garganta e a linha inicial foi obtida a partir de uma simulação com o SU2. Na Fig. 13b são apresentados os gráficos de $M(\theta)$ para as características C_-, bem como para a relação $M(\theta)$ da Eq. (17) do artigo de Rao. Para determinar a superfície de controle de Rao, é necessário determinar a característica C_- BD que satisfaz as Eqs. (17), (18) e (19) do artigo do Rao. Esta característica é apresentada na Fig. 13b e em detalhes na Fig. 13c. A característica C_+ DE e os campos de M e θ ao longo desta característica são exibidos na Fig. 14.

Na Tab. 6 são apresentados alguns resultados obtidos com a classe *RaoControlSurface* e os correspondentes do artigo do Rao. Os dados referentes ao ponto D foram obtidos de figura e incluem a incerteza de leitura. A maior diferença relativa ocorre no ponto B. Os dados dos pontos D e E também foram calculados em uma planilha eletrônica a partir de alguns dados de entrada da própria classe *RaoControlSurface*. Os resultados foram idênticos aos da Tab. 6. Neste teste foram verificados os procedimentos de cálculo de I_3 e η_D.

Tabela 6: Resultados obtidos com a classe *RaoControlSurface versus* resultados do exemplo do artigo do Rao.

	C++			
	x	r	θ	M
Ponto B	0,243 567 29	1,071 615 31	0,571 935 63	2,162 148 60
Ponto D	3,928 235 70	1,623 985 21	0,405 738 40	3,561 144 41
Ponto E	8,223 966 05	4,407 530 37	0,230 704 47	3,500 000 00
	Rao			
	x	r	θ	M
Ponto B (Tab. 1)	0,25	1,08	0,600 39	2,11
Pointo D (gráficos)	3,96(3)	1,62(2)	0,4037(5)	3,559 10(1)
Pointo E (Tab. 1)	8,19	4,4	0,230 73	3,5
	Diferença relativa			
	x	r	θ	M
Pointo B	2.64%	0.78%	4.98%	-2.41%
Pointo D	0.76%	-0.23%	-0.50%	-0.06%
Pointo E	-0.41%	-0.17%	0.01%	0.00%

2.9 Classe RaoNozzleOptContour

A classe *RaoNozzleOptContour* constrói o perfil otimizado da tubeira de Rao a partir das características C_- BD e C_+ DE. Nesta classe há dois métodos: *contourPoint* e *optContour*. O primeiro método determina o próximo ponto do contorno p_4, dados um ponto do contorno p_1 e dois pontos ao longo de uma característica p_2 e p_3. O segundo método constrói a rede de características entre as características BD, DE e o contorno da tubeira, e retorna os pontos da tubeira otimizada.

Para verificar o primeiro método, avaliou-se o resíduo da equação discretizada. Em todos os casos o resíduo foi menor que a tolerância prescrita.

2.10 Classe NozzleMoCRao

No artigo do Rao há um exemplo de perfil de tubeira otimizado para o qual o número de Mach na saída deve ser $M = 3,5$. O perfil otimizado foi tabulado, juntamente com a inclinação local e a distribuição do número de Mach ao longo da seção otimizada da tubeira. A Fig. 15 ilustra os resultados de Rao e os obtidos com a classe *NozzleMoCRao*. Na Tab. 7 são apresentadas as diferenças relativas entre os resultados da Fig. 15. Como se pode observar, as maiores diferenças relativas ocorrem no primeiro ponto ($x = 0{,}25$) e para θ.

Tabela 7: Diferença relativa entre os resultados da classe *NozzleMoCRao versus* resultados do exemplo do artigo do Rao.

	Dif. relativa (%)		
x	r	M	θ
0,25	0,394	−2,535	4,934
0,33	0,23	−0,377	−0,324
0,94	0,037	0,033	−0,575
1,03	0,266	0,104	−0,742
1,17	−0,143	−0,385	−1,004
1,47	−0,154	−0,118	−0,405
1,88	−0,371	−0,168	−0,277
2,31	−0,409	0,054	−0,229
3,37	−0,058	−0,048	−0,29
4,2	−0,35	−0,2	−0,149
5,43	0,002	0,018	−0,274
6,5	−0,13	−0,014	−0,528
7,98	−0,214	−0,02	−0,842
8,19	0,011	0,076	−1,302

O coeficiente de empuxo do perfil otimizado foi calculado com o SU2 e com o método das características. A Tab. 8 apresenta os resultados obtidos com o SU2. Na simulação S022 foram utilizados os dados tabulados do artigo do Rao com interpolação de Stephen. A simulação S024 é idêntica a S022, exceto pelo fato de que mais pontos foram inseridos na interpolação. Os pontos adicionais foram criados na vizinhança dos pontos originais utilizando a inclinação local da parede θ e uma aproximação de diferenças finitas ($(y_{i+1} - y_{i-1})/(2h) = \tan(\theta_i)$, com $h = 0{,}001$). Na simulação S025 utilizou-se o perfil otimizado obtido da classe *NozzleMoCRao* e interpolado com o método de Stephen. Por fim, a simulação S026 é feita para uma tubeira cônica com o mesmo comprimento de divergente e área de saída da tubeira otimizada obtida com a classe *NozzleMoCRao*.

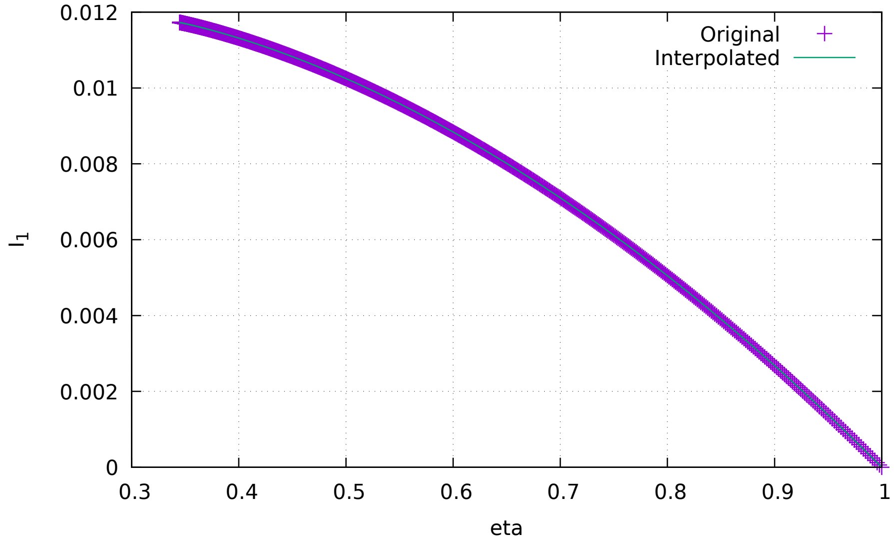
Tabela 8: Coeficiente de empuxo C_t calculado com o SU2.

			C_t			
N_x	N_y	h	S022	S024	S025	S026
200	10	1	1,830 404	1,830 649	1,831 431	1,815 305
400	20	0,5	1,771 859	1,771 980	1,773 136	1,760 908
800	40	0,25	1,752 840	1,752 899	1,753 826	1,740 695
1600	80	0,125	1,746 289	1,746 335	1,747 231	1,732 654

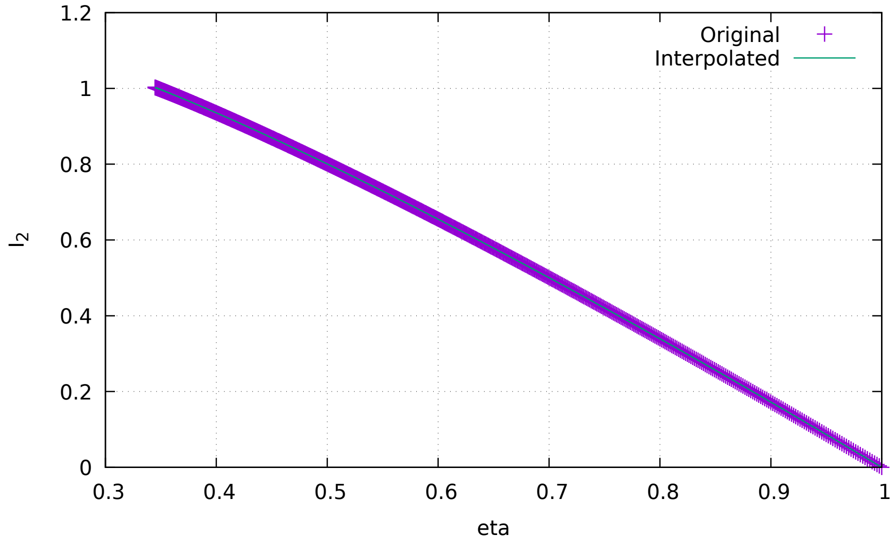
Para melhor comparar os resultados, a Tab. 9 apresenta os coeficientes de empuxo obtidos com o SU2 utilizando multiextrapolação de Richardson (aproximação de 4^a ordem), os mesmos coeficientes obtidos com o método das características (MoC) e a diferença relativa (DR) entre os resultados. A estimativa de erro apresentada na coluna 3 foi obtida da última extrapolação no processo de multiextrapolação.

Tabela 9: Comparação dos coeficientes de empuxo C_t.

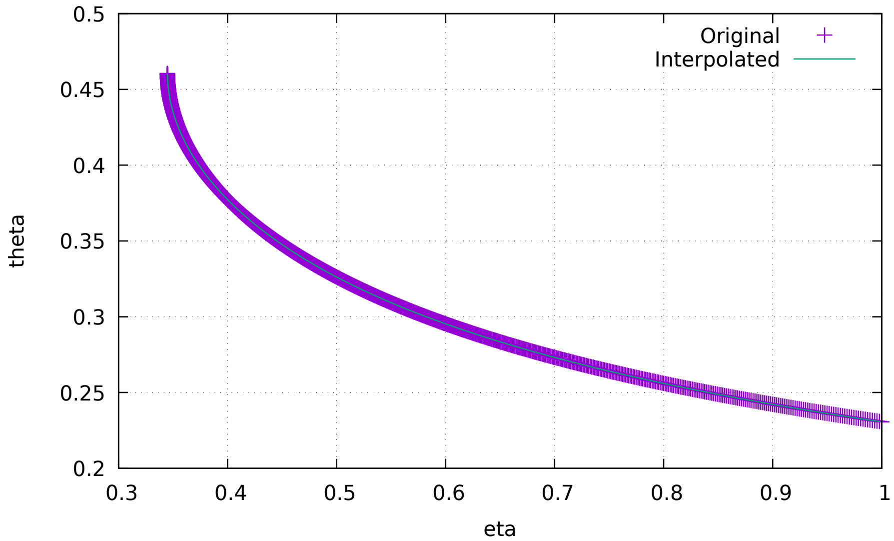
	C_t		
	MoC	SU2	DR (%)
Rao - interp.	1,745	1,7419(2)	−0,190
Rao - C++	1,743	1,7429(2)	−0,004
Cone	1,725	1,7261(1)	0,050



(a) $I_1(\eta)$

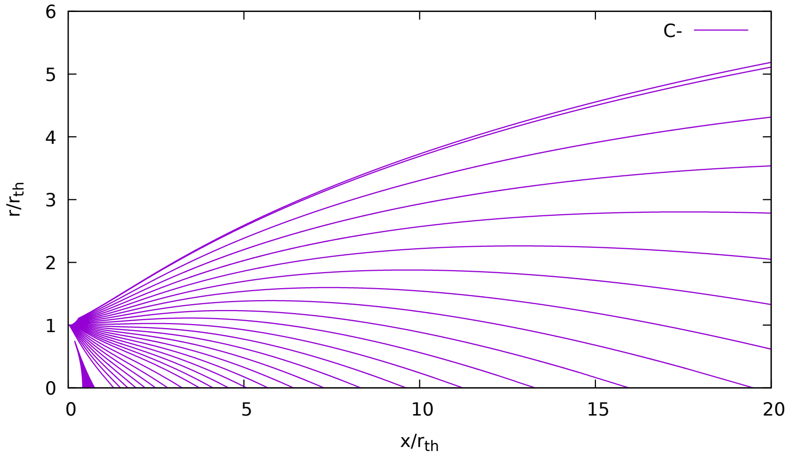


(b) $I_2(\eta)$

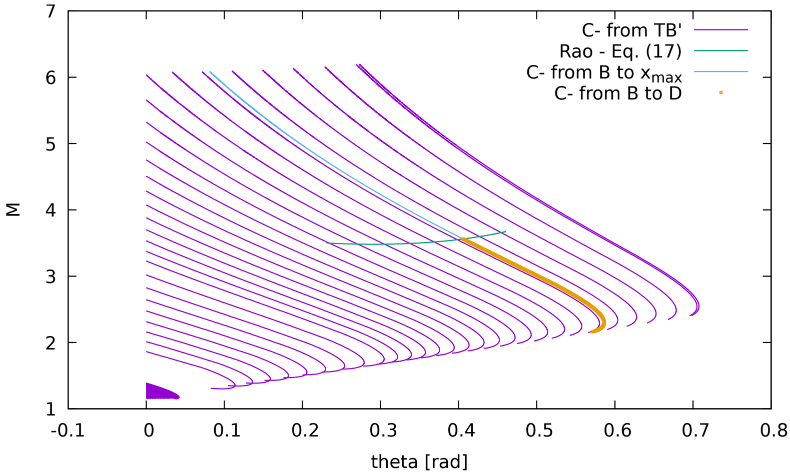


(c) $\theta(\eta)$

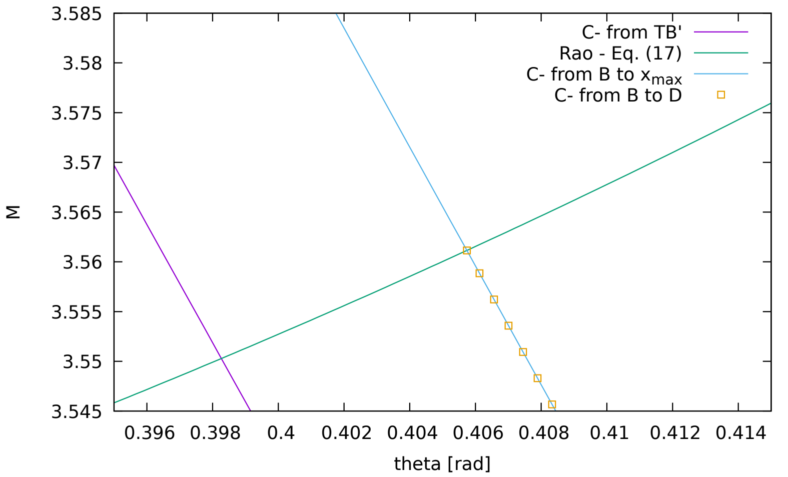
Figura 12: Comparação dos valores discretos com os valores interpolados para as funções $I_1(\eta)$, $I_2(\eta)$ e $\theta(\eta)$. Aplicação da classe *RaoControlSurface*.



(a) Características C_- oriundas da seção de expansão.

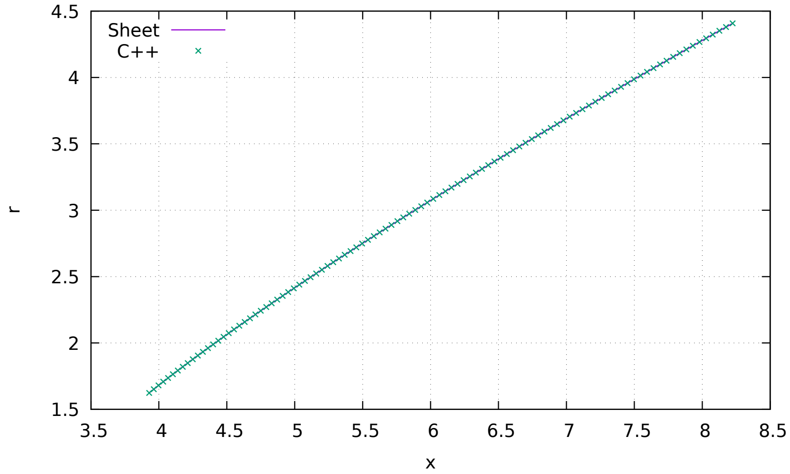


(b) $M(\theta)$ das características da seção de expansão e ao longo da superfície de controle de Rao.

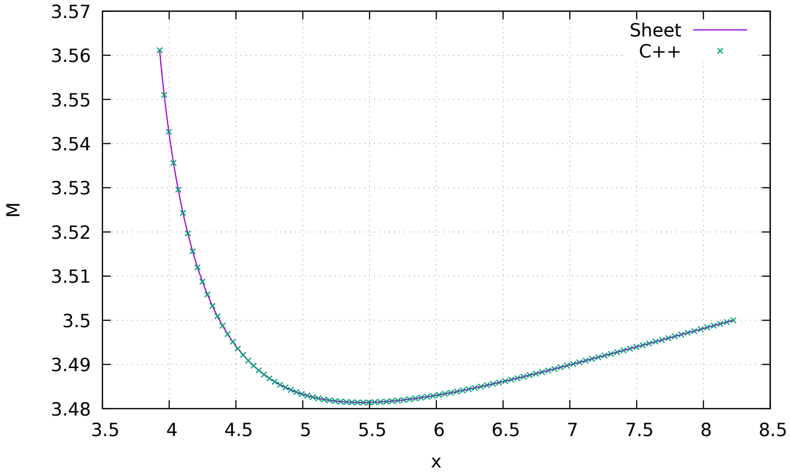


(c) Ampliação da região de interseção das funções $M(\theta)$ das características da seção de expansão e ao longo da superfície de controle de Rao.

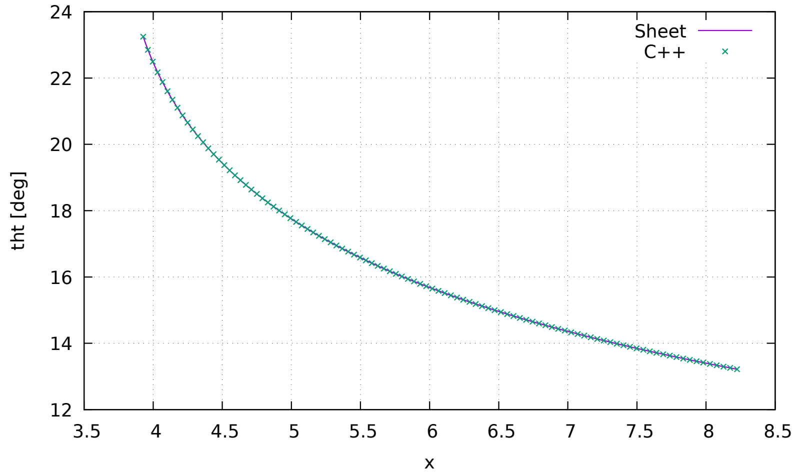
Figura 13: Aplicação da classe *RaoControlSurface* para determinar as características C_- BD e C_+ DE.



(a) Característica C_+ de D a E.

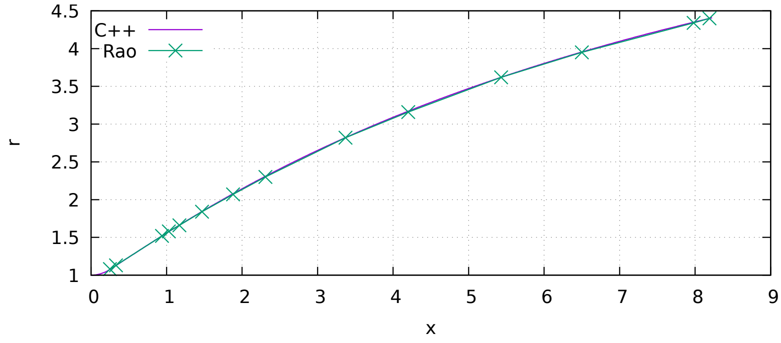


(b) M ao longo da característica C_+ de D a E.

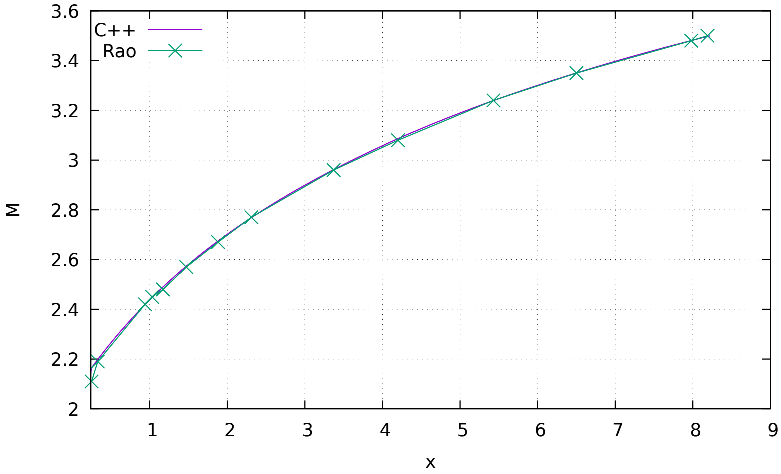


(c) θ ao longo da característica C_+ de D a E.

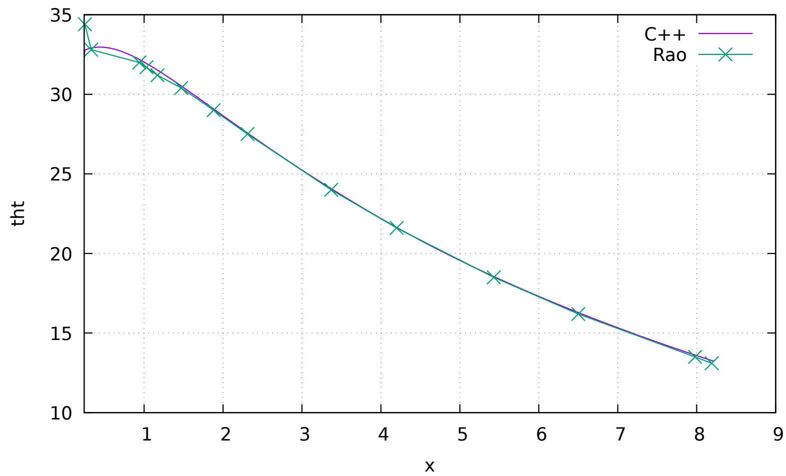
Figura 14: Característica C_+ DE obtida pela classe *RaoControlSurface* e calculada em uma planilha eletrônica.



(a) Contorno da seção otimizada da tubeira.



(b) M ao longo da seção otimizada da tubeira.



(c) θ ao longo da da seção otimizada da tubeira.

Figura 15: Comparação dos resultados da classe *NozzleMoCRao* para seção otimizada da tubeira e os resultados de Rao.

Referências

[1] KLIEGEL, J. R.; LEVINE, J. N. Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles. *AIAA*, v. 7, n. 7, p. 1375–1378, 1969.

[2] RAO, G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. *Journal of Jet Propulsion*, 1958.

[3] ANDERSON, JR., J. D. *Modern compressible flow: with historical perspective*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003.

[4] MAXIMA. Maxima, a computer algebra system. version 5.34.1, 2014.

[5] SHAPIRO, A. H. *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*. New York: Ronald Press Co, 1954. v. 2.

[6] ZUCROW, M. J.; HOFFMAN, J. D. *Gas dynamics*. Jhon Wiley & Sons, 1976. v. 1.

[7] ZUCROW, M. J.; HOFFMAN, J. D. *Gas dynamics*. Jhon Wiley & Sons, 1977. v. 2.

[8] GALASSI, M. E. A. GNU Scientific Library Reference Manual (3rd ed.). ISBN 0954612078.

[9] ECONOMON, T. D.; PALACIOS, F.; COPELAND, S. R.; LUKACZYK, T. W.; ALONSO, J. J. SU2: An Open-Source Suite for Multiphysics Simulation and Design. *AIAA JOURNAL*, 1801 ALEXANDER BELL DRIVE, STE 500, RESTON, VA 22091-4344 USA, v. 54, n. 3, p. 828–846, MAR 2016. 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Grapevine, TX, JAN 06-11, 2013.