Università degli Studi di Milano

Corso di Laurea in
Sicurezza dei Sistemi e delle Reti Informatiche

Lezione 3 — Complessità per induzione

Roberto Aringhieri

Algoritmi e Strutture Dati

Modulo 1 — Unità Didattica 1

Indice

1. Introduzione e motivazioni

L'obiettivo di questa lezione è quello di richiamare la tecnica di dimostrazione per induzione. Questa tecnica può risultare utile nella dimostrazione della complessità di algoritmi.

Dopo aver ricordato lo schema di dimostrazione per induzione anche attraverso un esempio semplice, useremo la tecnica per dimostrare l'ordine di grandezza di un algoritmo.

2. Dimostrazione per induzione

L'induzione è una tecnica di dimostrazione molto potente. Lo schema classico di dimostrazione è composto di due parti: la **base dell'induzione** e l'**ipotesi induttiva**.

L'idea nasce da uno schema dimostrativo come il seguente. Dimostro una formula per un certo valore, ad esempio 1. Al passo successivo, allora cerco di dimostrare che la tesi vale per 2 sapendo che vale per 1, e così via. Spesso si denota con $n = k$.

Chiaramente, volendo dimostrare la tesi per un qualsiasi valore, non è pensabile di iterare questo procedimento all'infinito. Di conseguenza, si generalizza il ragionamento: si suppone che la tesi, che intendo dimostrare, sia valida per un certo valore n e cerco di dimostrare che è anche valida per $n + 1$. La generalizzazione del ragionamento prende il nome, appunto, di ipotesi induttiva. Spesso si denota con $n \Rightarrow n + 1$.

Affinché la generalizzazione funzioni è necessario dimostrare che almeno per un valore di $n = k$ la tesi è valida. Ovvero si dimostra la base dell'induzione.

Supponiamo di voler dimostrare la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

ovvero la formula che ci permette di calcolare la somma dei primi n numeri.

La base di una dimostrazione per induzione consiste nel verificare la nostra tesi per un dato valore prefissato. Nel caso in esempio significa identificare un valore di n per cui la formula (1) è verificata. Poniamo $n = 1$ ed otteniamo

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}.$$

Dopo aver dimostrato la base dell'induzione, occorre dimostrare l'ipotesi induttiva. Supponendo che la formula sia valida per il generico $n - 1$, dimostriamo che è valida per n. Otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

che conclude la dimostrazione.

Osserviamo che la scelta dei parametri dell'ipotesi induttiva segue la convenienza della dimostrazione: $n - 1 \Rightarrow n$ oppure $n \Rightarrow n + 1$ non cambiano il risultato in quanto n è generico.

In conclusione, osserviamo che l'ipotesi induttiva non significa solo che partendo dalla validità della tesi per n riesco a dimsotrare la tesi per $n + 1$. Significa anche se la tesi è valida per n, è valida anche per tutti i valori da k, base dell'induzione, sino a n.

3. Un esempio di applicazione

Si dimostri, per induzione, che

$$\sum_{i=1}^{n} i^h \tag{2}$$

è $O(n^{h+1})$.
Si procede per induzione su h.

$h = 0$:
Sostituendo, si ottiene che:

$$\sum_{i=1}^{n} i^0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

che risulta essere $O(n)$ è equivalente a $O(n^{0+1})$.

$h \Rightarrow h + 1$:
Si assuma quindi che la tesi sia vera per h e si consideri il caso con $h + 1$. Risulta che:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{h+1} = \sum_{i=1}^{n} i^h i \leq \sum_{i=1}^{n} i^h n = n \sum_{i=1}^{n} i^h$$

Visto che, per ipotesi induttiva,

$$\sum_{i=1}^{n} i^h \text{ è } O(n^{h+1})$$

segue che

$$\sum_{i=1}^{n} i^{h+1} \text{ è } O(n^{h+2}).$$