

Lezione 1 – Postulati dell'algebra booleana

Architettura degli elaboratori

Modulo 1 – Fondamenti architetturali

Unità didattica 3 – Algebra booleana e
circuiti elettronici

Nello Scarabottolo

Università degli Studi di Milano - Ssri - CDL ONLINE

L'algebra booleana

**Definita dal matematico inglese George Boole
nel 1854.**

**Nasce per operare su affermazioni che possono
assumere solo due valori: **VERO** o **FALSO**.**

Adatta a trattare grandezze binarie:

- 0 o 1;
- tensione nulla o tensione positiva;
- circuito spento o circuito acceso.

Postulato P1

Definita X come (grandezza) variabile dell'algebra booleana:

(P1) $X = 0$ if $X \neq 1$

(P1') $X = 1$ if $X \neq 0$

Questo postulato afferma solo che stiamo trattando grandezze binarie.

Postulato P2

Definito \bar{X} il valore opposto di quello assunto dalla variabile X (dove X e \bar{X} sono i due LETTERALI della stessa variabile) :

(P2) if $X = 0$ then $\bar{X} = 1$

(P2') if $X = 1$ then $\bar{X} = 0$

Si è definita l'operazione di NEGAZIONE (NOT):
 X è il NEGATO di \bar{X} .

Postulati P3, P4 e P5

$$(P3) \ 0 \cdot 0 = 0$$

$$(P3') \ 1 \oplus 1 = 1$$

$$(P4) \ 1 \cdot 1 = 1$$

$$(P4') \ 0 + 0 = 0$$

$$(P5) \ 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$(P5') \ 0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

Si sono definite le due operazioni di **PRODOTTO LOGICO** (AND) e di **SOMMA LOGICA** (OR).

Principio di dualità

Ogni postulato P_i dell'algebra booleana ha una seconda versione P_i^d che si ottiene sostituendo:

- ogni valore 0 con un valore 1 (e viceversa);
- ogni operatore \cdot con un operatore $+$ (e viceversa).



Tutti i teoremi che discendono da questi postulati devono godere della dualità.

Teorema di De Morgan

$$\overline{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)} = \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \dots \cdot \bar{X}_n$$

$$\overline{(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n$$

Consente di trasformare prodotti logici in somme e viceversa utilizzando i negatori.

Utilissimo se la tecnologia elettronica scelta **facilita la realizzazione** di sommatore logici piuttosto che di moltiplicatori logici, o viceversa.

In sintesi...

Un'algebra per grandezze a due valori.

Consente di operare su grandezze a due valori mediante tre operatori fondamentali:

- NOT (negazione);
- AND (prodotto logico);
- OR (somma logica).

Gode del principio di dualità: per ogni espressione, ne esiste una duale con:

- scambio tra 0 e 1;
- scambio tra prodotti e somme.

