5 Kontextfreie Grammatiken

5.1 Beispielgrammatiken

- Bitte auf den Unterschied zwischen dem einfachen Pfeil $\rightarrow$ bei Produktionen und dem Doppelpfeil $\Rightarrow$ bei Ableitungsschritten achten)

  Beachte: Wenn $w_1 \rightarrow w_2$ gilt, dann auch $w_1 \Rightarrow w_2$, aber nicht unbedingt umgekehrt, wie man an der Grammatik $(\{X, Y\}, \{\mathtt{a}\}, X\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow \mathtt{a}\})$ sieht:

  - Es gilt z.B. $XY \Rightarrow X\mathtt{a}$, aber es gibt keine Produktion $XY \rightarrow X\mathtt{a}$

- arbeiten Sie ein bisschen mit $G = (\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X\})$

  - Was kann man alles ableiten? ε, $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, $\mathtt{aa}$, ...
  - aha: alle Wörter überhaupt: $L(G) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$

- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

  - suchen lassen ...
  - z. B. $(\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \rightarrow X\})$.
  - wir haben sogar leere Produktionenmenge zugelassen: $(\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{\})$ tuts auch.
  - allerdings: leere Alphabete haben wir verboten, also $(\{X\}, \{\}, X, P)$ geht *nicht*.

- Man arbeite mit $G = (\{X\}, \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}, X, \{X \rightarrow XX \mid \mathtt{(}X\mathtt{)} \mid \varepsilon\}$

  - man mache Beispielableitungen
    - erste einfache wie $X \Rightarrow \mathtt{(}X\mathtt{)} \Rightarrow \mathtt{((}X\mathtt{))} \Rightarrow \mathtt{(((}X\mathtt{)))} \Rightarrow \mathtt{((((}X\mathtt{))))} \Rightarrow$ $\mathtt{(((())))}$ oder
    - $X \Rightarrow XX \Rightarrow XXX \Rightarrow XXXX \Rightarrow XXXXX$ und dann irgendwie weiter
  - Welche Wörter w sind ableitbar?
    - anschaulich: ableitbar sind genau die „*wohlgeformten Klammerausdrücke*“
    - jedenfalls gleich viele $\mathtt{(}$ und $\mathtt{)}$: $N_{\mathtt{(}}(w) = N_{\mathtt{)}}(w)$
    - Das ist aber nur notwendig aber nicht hinreichend für Ableitbarkeit, denn $\mathtt{)(}$ ist z. B. nicht ableitbar.
    - Man diskutiere die Adjektive „*notwendig*“ und „*hinreichend*“.

  - ∗ zusätzliche Eigenschaften? erst mal raten/ nachdenken/ rumprobieren lassen
  - ∗ aha: für jedes Präfix (es heißt *das* Präfix) v eines $w \in L(G)$ gilt: $N_{\texttt{(}}(v) \geq N_{\texttt{)}}(v)$
    Das kann man sich gerade noch klar machen; aber der Beweis, dass man damit eine notwendige und hinreichende Bedingung für Ableitbarkeit hat, also eine Charakterisierung der Klammerausdrücke, ist wohl zu schwierig; ich sehe jedenfalls auf Anhieb keine vernünftige Erklärung.

- Man arbeite mit $G = (\{X\}, \{\texttt{(}, \texttt{)}\}, X, \{X \to \texttt{(}X\texttt{)}X \mid \varepsilon\})$.
  - siehe da: auch damit sind genau die wohlgeformten Klammerausdrücke ableitbar

- Und dann auch Grammatiken konstruieren *lassen*, z. B. für die folgenden formalen Sprachen über dem Alphabet $T = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$.
  - die Menge aller Wörter über T, in denen irgendwo das Teilwort $\texttt{baa}$ vorkommt,
    z. B. so: $(\{X, Y\}, T, X, P)$ mit $P = \{X \to Y\texttt{baa}Y, Y \to \texttt{a}Y|\texttt{b}Y|\varepsilon\}$
  - die Menge aller Wörter $w \in T^*$ mit der Eigenschaft, dass für alle Präfixe v von w gilt: $|N_{\texttt{a}}(v) - N_{\texttt{b}}(v)| \leq 1$.
    - ∗ Man überlege sich erst mal, welche Struktur Wörter der Länge 2, 4, ... haben: wenn ich das richtig sehe: $\{\texttt{ab}, \texttt{ba}\}^*$
    - ∗ Also leistet die Grammatik $(\{X, Y\}, T, X, P)$ mit $P = \{X \to \texttt{ab}X|\texttt{ba}X|\texttt{a}|\texttt{b}|\varepsilon\}$ das Gewünschte.

- **Achtung**: bitte nicht aus Versehen mit Grammatiken bzw. formalen Sprachen vom Aufgabenblatt 5 rumspielen

5.2 Unterschied $\Rightarrow$ versus $\Rightarrow^*$

- bitte sicherstellen, dass der Unterschied zwischen $\Rightarrow$, also „*genau ein Schritt*“, und $\Rightarrow^*$, also „*eine beliebige Anzahl Schritte*“ klar ist.

6 Relationen (Teil 2)

6.1 nochmal Relationen

- Standard-Definitionen aus der Vorlesung

  - für $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$:
    $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
  - $\mathrm{I}_M = \{(x,x) \mid x \in M\}$
  - $R^0 = \mathrm{I}_M$ und $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$
  - $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

- reflexive und transitive Relationen:
  - Definitionen klar machen:
    - Beispiel: Gleichheit von Zahlen
    - Beispiel: $\leq$
    - Beispiel: Reihenfolge der Wörter im Duden (o.ä.)
      - **Achtung:** Wir haben Asiaten in der Vorlesung; *langsam* anfangen (oder wissen Sie, wie in Japan Wörter sortiert werden?)
  - Wenn man eine Relation hin malt: Elemente $x, y \in M$ als Punkte und einen Pfeil von x nach y, falls xRy:
    - Wie sieht das Bild aus, wenn die Relation reflexiv ist? Schlingen.
    - Wie, wenn sie transitiv ist? (schwieriger zu beschreiben; nur Beispiele ansehen; Wenn man man einen Zyklus dabei hat: jeder mit jedem verbunden)

- z. B. in der Vorlesung offen gelassen:
  - Es sei R eine beliebige Relation und S eine Relation, die reflexiv und transitiv ist. Wenn $R \subseteq S$, dann ist sogar $R^* \subseteq S$.
  - Man beweise das, indem man durch vollständige Induktion zeigt: Für alle $i \in \mathbb{N}_0$: Wenn $R \subseteq S$, dann $R^i \subseteq S$.

6.2 Infixschreibweise

von Relationen

  - das kennt jeder von $x \leq y$ etc.
  - sicherstellen, dass das klar ist: xRy ist nichts anderes als $(x,y) \in R$