1 Logisches

Wahrheitstabellen:

- Wenn man größere Formeln „auswerten“ will, dann kann man Wahrheitswerte unter die Konnektive schreiben (und gerne die Belegungen der Variablen links schreiben und nur die Konnektive auswerten):

    1. Wahrheitswerte für die Variablen (Ist den Leuten klar wie viele Zeilen so eine Tabelle hat?):

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	A
falsch		falsch		falsch
falsch		wahr		falsch
wahr		falsch		wahr
wahr		wahr		wahr

    2. Wahrheitswerte für die Teilformel $(A \wedge B)$:

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	A
falsch	falsch	falsch		falsch
falsch	falsch	wahr		falsch
wahr	falsch	falsch		wahr
wahr	wahr	wahr		wahr

    3. Wahrheitswerte für die ganze Formel

$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	A
falsch	falsch	falsch	falsch	falsch
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch
wahr	falsch	falsch	wahr	wahr
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr

    4. Man sehe die Äquivalenz von $(A \wedge B) \vee A$ und A.

- Als Beispiel kann man auch gerne Aufgabe 2 aus der Klausur vom September 2010 durchrechnen lassen.

Implikation:

- wurde in der Vorlesung ausführlich erklärt; bitte die Folien nochmal anschauen.

- wesentlich: $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$
- Auswirkung auf Beweis von Aussagen der Form $A \Rightarrow B$: Man muss nur etwas tun, wenn A wahr ist. (so etwas wird sehr oft vorkommen)

Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln

- Man bespreche noch einmal, was äquivalente Aussagen sind.
- Beachte: Äquivalente Aussagen enthalten „meistens“ die gleichen Aussagevariablen:
  - Die Formeln A und C sind nicht äquivalent.
  - Denn es kann ja A wahr sein und C falsch.
  - Ausnahmen sind so etwas wie z. B. $A \wedge \neg A$ und $C \wedge \neg C$

2 Wörter

- Ist die Definition $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq i \wedge i < n\}$ klar? Können alle so etwas lesen?
- Ist auch $\mathbb{G}_0 = \{\}$ klar?

2.1 Umständliche formale Definition von „Wort“

- Noch mal deutlich sagen: Zweck der umständlichen formalen Definition von „Wort“ ist, an einem einfachen Beispiel ein paar vielleicht noch unvertraute Dinge zu üben wie induktive Definitionen und typische Beweismethoden. Zu letzteren gehört vollständige Induktion, aber auch einfachere Vorgehensweisen. Siehe Skript.
- Beachte: wir lassen nur *surjektive* Abbildungen $w : \mathbb{G}_n \to B$ als Wörter zu. (Ansonsten gäbe es mehrere verschiedene leere Wörter.)
- Nichtsdestotrotz sagen wir, dass $w : \mathbb{G}_n \to B$ ein Wort *über dem Alphabet* A ist, auch wenn A größer ist als B.

2.2 Das leere Wort

- Das leere Wort sollte zumindest informell klar werden.
- An die formalistische Definition $\varepsilon : \{\} \to \{\}$ müssen sich etliche vermutlich erst noch gewöhnen.

- Was für eine Abbildung $\varepsilon : \{\} \to \{\}$ ist, sieht man auf dem Weg, dass das jedenfalls eine Relation $R \subseteq \{\} \times \{\}$ sein muss.
  - klar machen, dass $\{\} \times \{\} = \{\}$
  - damit gibt es für dieses R, also ε nur eine Möglichkeit
- Wichtig: ε hat zwar Länge 0, besteht also „aus keinen Symbolen“, ist aber trotzdem „etwas“. Die Menge $M = \{\varepsilon\}$, die das leere Wort enthält, ist *nicht* die leere Menge, sondern M enthält genau ein Element. Also $M \neq \emptyset$ und $|M| = 1$.

2.3 Konkatenation von Wörtern

- jedes Wort kann man auffassen als die Konkatenation seiner Symbole, z. B. $\mathtt{hallo} = \mathtt{h} \cdot \mathtt{a} \cdot \mathtt{l} \cdot \mathtt{l} \cdot \mathtt{o}$.
- evtl: auf wieviele verschiedene Arten kann man `abc` als Konkatenation nichtleerer Wörter schreiben?

  vier: $\mathtt{abc}$, $\mathtt{a} \cdot \mathtt{bc}$, $\mathtt{ab} \cdot \mathtt{c}$, $\mathtt{a} \cdot \mathtt{b} \cdot \mathtt{c}$
- evtl: auf wieviele verschiedene Arten kann man `hallo` als Konkatenation nichtleerer Wörter schreiben?

  das sind $2^{5-1} = 16$, oder?
- noch mal ganz klar sagen, dass bei Konkatenation die *Reihenfolge wichtig* ist. $\mathtt{OTTO} \neq \mathtt{TOTO}$

2.3.1 Konkatenation mit dem leeren Wort

- Ist $w \cdot \varepsilon = w$ klar?
- und $\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot w \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon = w$ auch?

2.3.2 Eigenschaften der Konkatenation

Hier hatten wir in der Vorlesung allgemein Eigenschaften von binären Operationen

- Beispiele für kommutative und nichtkommutative Operationen
- Beispiele für assoziative Operationen

2.3.3 Beispiel: Aufbau von E-Mails

Das ist “natürlich“ nicht für die Klausur relevant.

2.3.4 Iterierte Konkatenation

induktive Definitionen

- muss man immer darauf achten, dass
  - „für alle Fälle“ etwas definiert wird und
  - und nicht für den gleichen Fall widersprüchliche Dinge festgelegt werden (Gefahr z. B. bei Fallunterscheidungen). Das nennt man auch *Wohldefiniertheit*.
- Vorläufig kommen wir erst mal mit der einfachen Vorgehensweise aus, dass man sich von n nach $n+1$ weiterhangelt, wie bei

$$x_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2$$

- Solche Definitionen kann man erst mal benutzen, um Werte auszurechnen. Hier also z.B. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$ usw.. Man kommt hoffentlich auf die Hypothese:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

Potenzen von Wörtern

- klar machen,
  - was ist $\mathtt{a}^k$, was ist $\mathtt{b}^k$?
  - was ist $\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$?
  - was ist $(\mathtt{ab})^k$?

2.4 Vollständige Induktion

- Mit der Definition

$$x_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2$$

kann man die Hypothese

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$$

beweisen.

- Tun wir das ganz langsam und ausführlich:

  Induktionsanfang: Zeige, dass die Behauptung für $n = 0$ gilt.

  Zu zeigen: $x_0 = 0$

  Beweis: für x_0 gilt nach Definition: $x_0 = 0$. fertig

  Induktionsvoraussetzung: *Für ein beliebiges aber festes* n *gilt*: $x_n = 2n$

  Bitte darauf achten, dass hier *nicht* schon eine Behauptung für *alle* n hingeschrieben wird.

  Induktionsschritt: Zeige: Für das beliebige aber feste n gilt: $x_{n+1} = 2(n+1)$

  Beweis:

  $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2 && \text{nach Definition} \\ &= 2n + 2 && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= 2(n+1) && \text{fertig} \end{aligned}$$

- Wer das Prinzip der Induktion gerne an einem anschaulicheren Beispiel erklären möchte, kann auch gerne die Türme von Hanoi besprechen.