Übung “Grundbegriffe der Informatik”

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Janke, Gebäude 50.34, Raum 249

email: matthias.janke@kit.edu

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 247

email: schulz@ira.uka.de

Isomorphie von Graphen

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

D.h.: Die “Struktur“ der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.

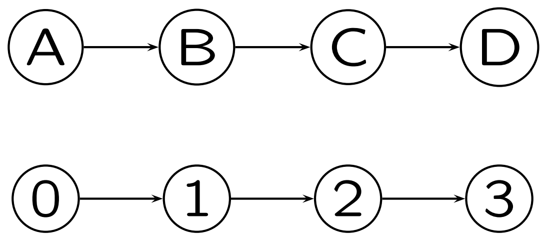
Isomorphie von Graphen

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

D.h.: Die “Struktur“ der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.

Beispiel für isomorphe Graphen:



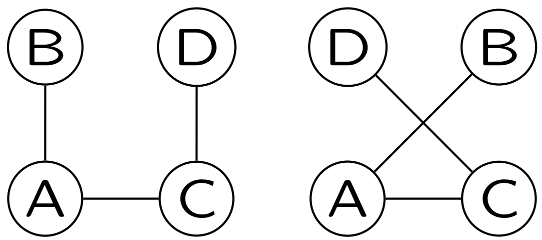
Isomorphie von Graphen

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

D.h.: Die “Struktur“ der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.

Beispiel für isomorphe Graphen:



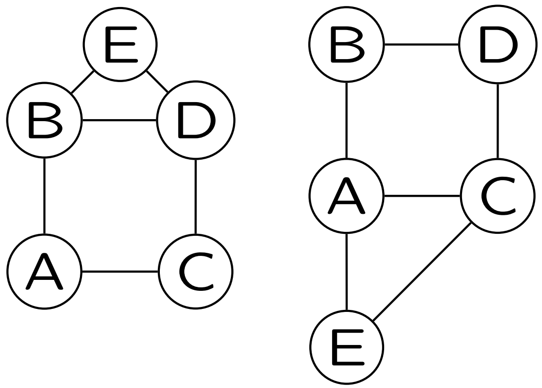
Isomorphie von Graphen

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

D.h.: Die "Struktur" der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.

Beispiel für isomorphe Graphen:



Isomorphie von Graphen

Eigenschaften von isomorphen Graphen G_1 und G_2:

1. $|V_1| = |V_2|$

2. $\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$

Isomorphie von Graphen

Eigenschaften von isomorphen Graphen G_1 und G_2:

1. $|V_1| = |V_2|$

2. $\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$

1.) folgt direkt aus der Bijektivität der Abbildung!

Isomorphie von Graphen

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) < d^+(f(x))$

Isomorphie von Graphen

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) < d^+(f(x))$

$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (f(x), f(z)) \in E_2 \wedge (x, z) \notin E_1$

Isomorphie von Graphen

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) < d^+(f(x))$

$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (f(x), f(z)) \in E_2 \wedge (x, z) \notin E_1$

Widerspruch zur Definition der Graphenisomorphie:

$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$

Isomorphie von Graphen

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) > d^+(f(x))$

Isomorphie von Graphen

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) > d^+(f(x))$

$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (x, z) \in E_1 \wedge (f(x), f(z)) \notin E_2$

Isomorphie von Graphen

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \land d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) > d^+(f(x))$

$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (x, z) \in E_1 \land (f(x), f(z)) \notin E_2$

Widerspruch zur Definition der Graphenisomorphie:

$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$

Apropos Knotengrade

In der letzten Übung wurde gezeigt:

$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$

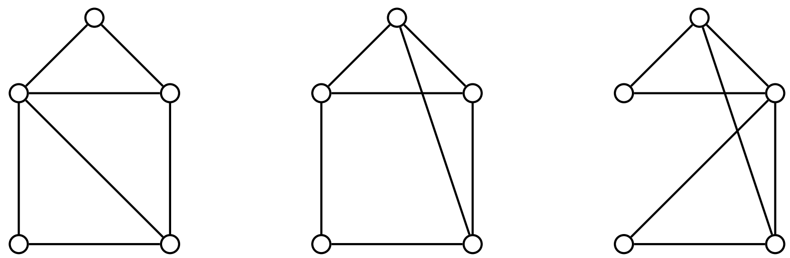
Für ungerichtete Graphen gilt:

$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

lässt sich per Induktion beweisen...

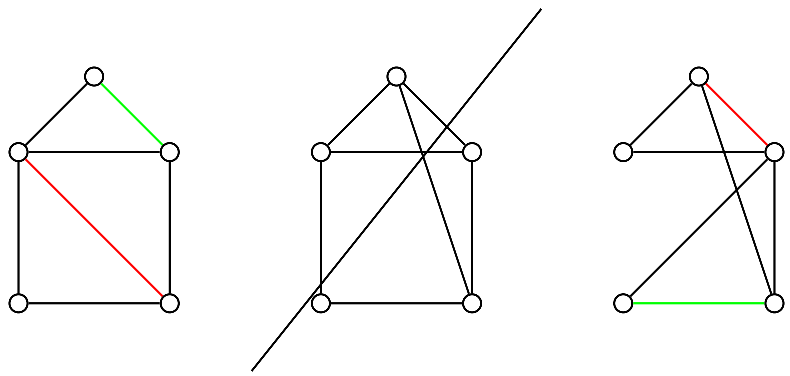
Isomorphie von Graphen

Isomorph?



Isomorphie von Graphen

Isomorph?



Isomorphie von Graphen

Isomorph!

Von der Spezifikation zum Graphen

$$\begin{aligned} V_{p,q} &= \{0, 1, \ldots, p \cdot q - 1\}, \\ E_{p,q} &= \{\{u, v\} : u, v \in V_{p,q} \wedge |u - v| \in \{p, q, p \cdot q - p, p \cdot q - q\}\} \end{aligned}$$

Zeichne $G_{2,3}$

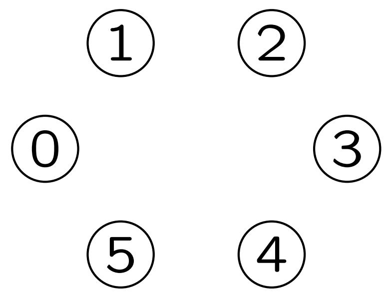
Wie fange ich da an?

Von der Spezifikation zum Graphen

$$
\begin{aligned}
V_{p,q} &= \{0, 1, \ldots, p \cdot q - 1\}, \\
E_{p,q} &= \{\{u, v\} : u, v \in V_{p,q} \wedge |u - v| \in \{p, q, p \cdot q - p, p \cdot q - q\}\}
\end{aligned}
$$

Zeiche $G_{2,3}$

Knoten "sinnvoll“ anordnen: Z.B. regelmäßiges $|V|$-Eck.

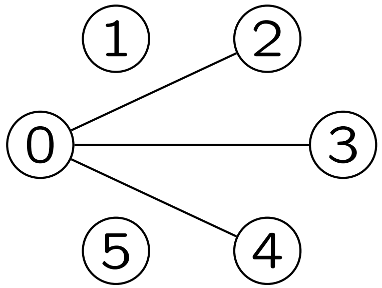


Von der Spezifikation zum Graphen

$$\begin{aligned} V_{p,q} &= \{0, 1, \ldots, p \cdot q - 1\}, \\ E_{p,q} &= \{\{u, v\} : u, v \in V_{p,q} \wedge |u - v| \in \{p, q, p \cdot q - p, p \cdot q - q\}\} \end{aligned}$$

Zeiche $G_{2,3}$

Einen Knoten x wählen und Kanten zeichen, z.B. $x = 0$

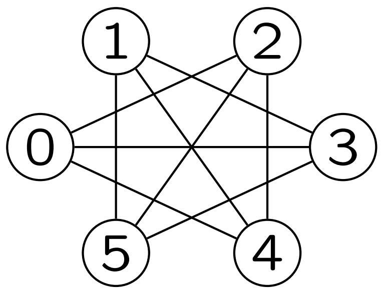


Von der Spezifikation zum Graphen

$$V_{p,q} = \{0, 1, \ldots, p \cdot q - 1\},$$
$$E_{p,q} = \{\{u, v\} : u, v \in V_{p,q} \wedge |u - v| \in \{p, q, p \cdot q - p, p \cdot q - q\}\}$$

Zeiche $G_{2,3}$

Und nun das ganze für alle Knoten:



Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

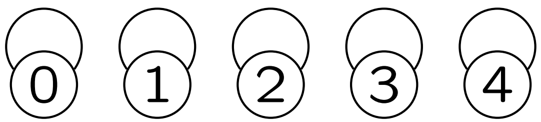
.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

Graph:



Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

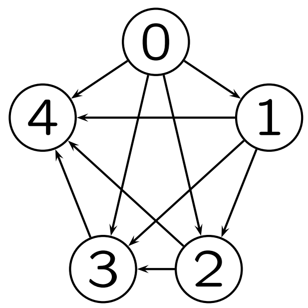
Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Ein paar Matrizen

Graph:



.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

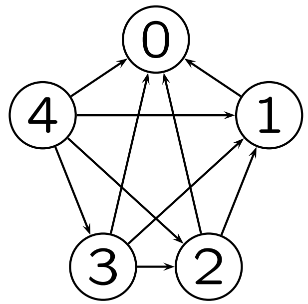
Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pfeile umkehren?

Ein paar Matrizen

Pfeile umkehren?



.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pfeile umkehren?

.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Ein paar Matrizen

Pfeile umkehren $\Rightarrow (x, y) \in E' \iff (y, x) \in E$
$\Rightarrow A'_{ij} = 1 \iff A_{ji} = 1 \Rightarrow A'_{ij} = A_{ji}$

Spiegeln an Diagonale!

.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ungerichteter Graph?

.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ungerichteter Graph $U = (V, E')$?

$$(x, y) \in E'_g \iff \{x, y\} \in E' \iff (x, y) \in E \vee (y, x) \in E$$

.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ungerichteter Graph $U = (V, E')$?

$$(x, y) \in E'_g \iff \{x, y\} \in E' \iff (x, y) \in E \vee (y, x) \in E$$

$$A'_{ij} = 1 \iff A_{ij} = 1 \vee A_{ji} = 1 \Rightarrow A'_{ij} = sgn(A_{ij} + A_{ji})$$

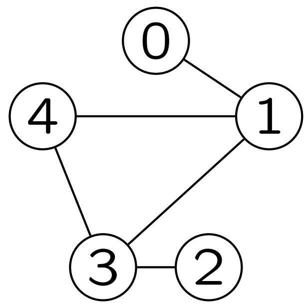
.

Ein paar Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

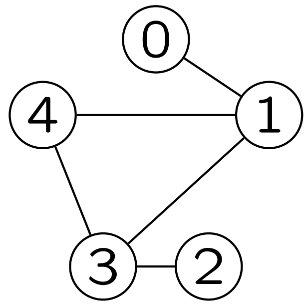
.

Wegematrizen von Graphen



.

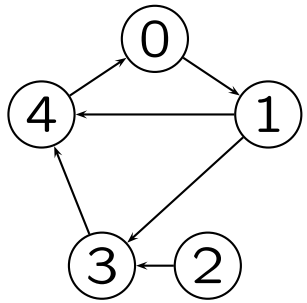
Wegematrizen von Graphen



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

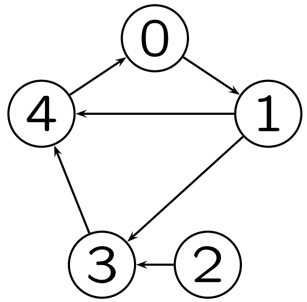
.

Wegematrizen von Graphen



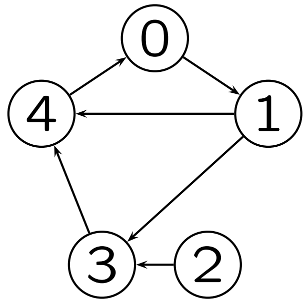
.

Wegematrizen von Graphen



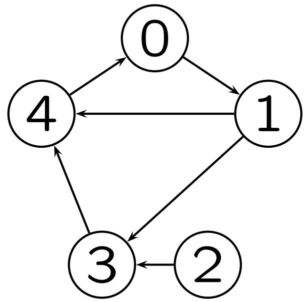
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegematrizen von Graphen



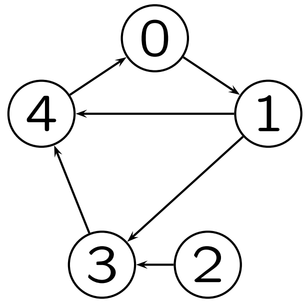
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegematrizen von Graphen



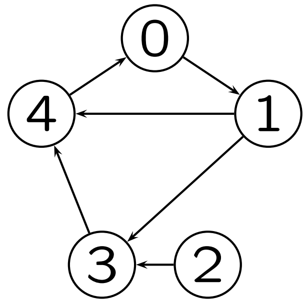
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrizen von Graphen



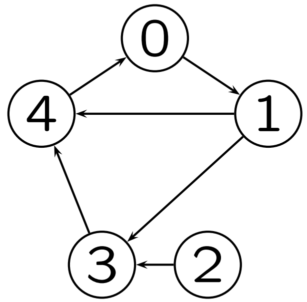
$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrizen von Graphen



$$Summe = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegematrizen von Graphen



$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Klausuraufgabe von letztem Jahr

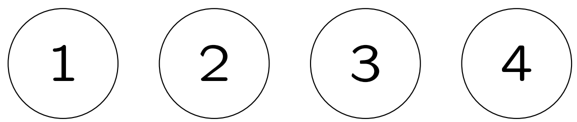
Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller gerichteten Graphen, für die gilt: Jeder Knoten hat den Ausgangsgrad 1 und es gibt einen Knoten, von dem aus alle anderen Knoten über einen Weg erreichbar sind.

Zeichnen Sie alle Graphen aus $\mathcal{G}$ mit vier Knoten, von denen keine zwei Graphen isomorph sind.

Klausuraufgabe von letztem Jahr

Zeichnen Sie alle Graphen aus $\mathcal{G}$ mit vier Knoten, von denen keine zwei Graphen isomorph sind.

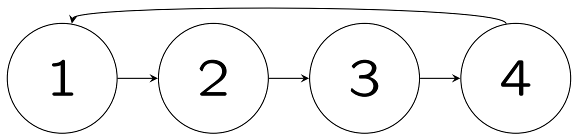
G_1 :



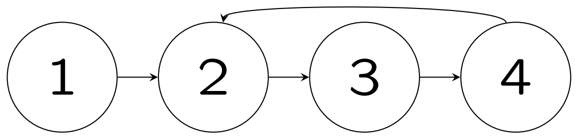
Klausuraufgabe von letztem Jahr

Zeichnen Sie alle Graphen aus $\mathcal{G}$ mit vier Knoten, von denen keine zwei Graphen isomorph sind.

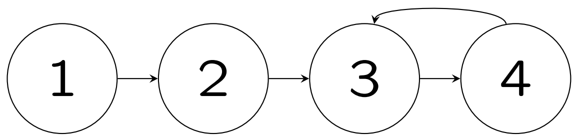
G_1 :



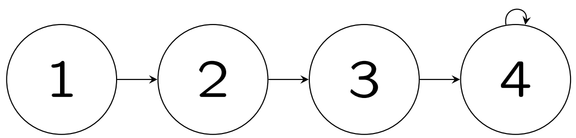
G_2 :



G_3 :



G_4 :



Klausuraufgabe von letztem Jahr

Geben Sie für die Hälfte der dargestellten Graphen die Adjazenzmatrix an. Machen Sie deutlich, welche Adjazenzmatrix zu welchem Graphen gehört.

Klausuraufgabe von letztem Jahr

Geben Sie für die Hälfte der dargestellten Graphen die Adjazenzmatrix an. Machen Sie deutlich, welche Adjazenzmatrix zu welchem Graphen gehört.

$$G_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_4 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$