Übung "Grundbegriffe der Informatik"

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 034

email: schulz@ira.uka.de

Fehler bei Aufgabe 4.2

Es muss heißen: $a \diamond e = e \diamond a = a$.

Ursprünglich stand da: $a \diamond e = e \diamond a = e$.

.

Aufgabe 2.4

Beispiel: $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$
$n \mapsto 2n$.

M_0 sind die natürlichen Zahlen, M_1 die geraden Zahlen, M_2 die durch 4 teilbaren Zahlen usw.

$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \ldots$

.

Aufgabe 2.4

Wieso?

Alle Elemente aus M_1 liegen in M_0,
werden also auf Elemente aus M_1 abgebildet.

.

Aufgabe 2.4

Wieso?

Alle Elemente aus M_1 liegen in M_0,
werden also auf Elemente aus M_1 abgebildet.

Allgemein: Wenn $M_{i+1} \subseteq M_i$, liegen alle Elemente aus M_{i+1} auch in M_i und werden auf Elemente aus M_{i+1} abgebildet.

.

Aufgabe 2.4

Wieso?

Alle Elemente aus M_1 liegen in M_0,
werden also auf Elemente aus M_1 abgebildet.

Allgemein: Wenn $M_{i+1} \subseteq M_i$, liegen alle Elemente aus M_{i+1} auch in M_i und werden auf Elemente aus M_{i+1} abgebildet.

Nach Definition gilt dann: $M_{i+2} \subseteq M_{i+1}$.

.

Aufgabe 2.4

Wieso?

Alle Elemente aus M_1 liegen in M_0,
werden also auf Elemente aus M_1 abgebildet.

Allgemein: Wenn $M_{i+1} \subseteq M_i$, liegen alle Elemente aus M_{i+1} auch in M_i und werden auf Elemente aus M_{i+1} abgebildet.

Nach Definition gilt dann: $M_{i+2} \subseteq M_{i+1}$.

(Allgemein gilt: $A \subseteq B \Rightarrow \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq \{f(x) \mid x \in B\}$.)

.

Alternativer Blick auf L^*

Sprechweise: M kleinste Menge mit Eigenschaft X $\iff$ $\forall M'$ mit Eigenschaft X : $M \subseteq M'$.

$\rightarrow$ muss nicht immer existieren!

.

Alternativer Blick auf L^*

Sprechweise: $S \subseteq M$ ist abgeschlossen bezüglich Operation $\diamond : M \times M \to M \iff \forall x, y \in S : x \diamond y \in S$

.

Alternativer Blick auf L^*

Gegeben: $L \subseteq A^*$

Gesucht: Kleinste Menge $M \subseteq A^*$ mit $L \subseteq M \wedge M$ ist abgeschlossen bezüglich Konkatenation.

.

Alternativer Blick auf L^*

Gegeben: $L \subseteq A^*$

Gesucht: Kleinste Menge $M \subseteq A^*$ mit $L \subseteq M \wedge M$ ist abgeschlossen bezüglich Konkatenation.

Behauptung: $M = L^+$.

.

Alternativer Blick auf L^*

Beweis: Sei M eine Menge, die L enthält und abgeschlossen bezüglich Konkatenation ist.

Wir zeigen

- $L \subseteq L^+$ und L^+ ist abgeschlossen bezüglich Konkatenation.
- $\forall i \in \mathbb{N}_+ : L^i \subseteq M$.
- $L^+ \subseteq M$

.

Alternativer Blick auf L^*

$L^+ = L \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} L^i \Rightarrow L \subseteq L^+$.

L^+ abgeschlossen: $w_1, w_2 \in L^+ \Rightarrow \exists i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 : w_1 \in L^{i_1} \wedge w_2 \in L^{i_2}$.

Damit gilt $w_1 w_2 \in L^{i_1+i_2} \subseteq L^+$.

.

Alternativer Blick auf L^*

IA: $L^1 = L \subseteq M$ nach Voraussetzung.

IV: Für ein beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_+$ gilt $L^i \subseteq M$.

IS: Dann muss auch $L^{i+1} \subseteq M$ gelten.

Sei $w \in L^{i+1} \Rightarrow \exists w_1 \in L^i \exists w_2 \in L : w = w_1 w_2$
$\overset{IV}{\Rightarrow} \exists w_1 \in M \exists w_2 \in M : w = w_1 w_2$
$\Rightarrow w \in M$ wegen Abgeschlossenheit.

.

Alternativer Blick auf L^*

L^* entsprechend kleinste Menge M, die $L \cup \{\epsilon\}$ enthält und abgeschlossen bezüglich Konkatenation ist.

Damit leicht zu zeigen:

- $L \subseteq K \Rightarrow L^* \subseteq K^*$
- $L \subseteq K^* \Rightarrow L^* \subseteq K^*$
- $(L^*)^* = L^*$
- ...

Anna, Otto und der Reliefpfeiler

Ein Wort w, für das gilt $\forall i \in \mathbb{G}_{|w|} : w(i) = w(|w| - 1 - i)$ heißt Palindrom.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1.

2.

3.

4.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \rightarrow aXa \mid bXb \mid Y, Y \rightarrow aZb \mid bZa,$
$Z \rightarrow aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. ($X \rightarrow aXa \mid bXb$)

2.

3.

4.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. ($X \to aXa \mid bXb$)

2. Vorne und hinten verschiedenes Zeichen. ($X \to Y, Y \to aZb \mid bZa$)

3.

4.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. ($X \to aXa \mid bXb$)

2. Vorne und hinten verschiedenes Zeichen. ($X \to Y, Y \to aZb \mid bZa$)

3. Entweder Palindrom ... ($Z \to aZa \mid bZb \mid a \mid b \mid \epsilon$)

4.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. ($X \to aXa \mid bXb$)

2. Vorne und hinten verschiedenes Zeichen. ($X \to Y, Y \to aZb \mid bZa$)

3. Entweder Palindrom ... ($Z \to aZa \mid bZb \mid a \mid b \mid \epsilon$)

4. oder aus $L(G)$. ($Z \to X$)

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \rightarrow aXa \mid bXb \mid Y, Y \rightarrow aZb \mid bZa,$
$Z \rightarrow aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Definition: $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid X \Rightarrow^* w\}$

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Definition: $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid X \Rightarrow^* w\}$

Beschreibung:
$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists i \in \mathbb{G}_{|w|} : w(i) \neq w(|w| - 1 - i)\}$

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Beweis: Klar: $L(G)$ enthält keine Palindrome. (Irgendwann kommt Y, danach verschiedene Zeichen.)

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \rightarrow aXa \mid bXb \mid Y, Y \rightarrow aZb \mid bZa,$
$Z \rightarrow aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.

(Induktionsvoraussetzung: Für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Alle Wörter der Länge $m \leq n$, die keine Palindrome sind, liegen in $L(G)$.)

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.

- $ab, ba \in L(G)$.

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.

- $ab, ba \in L(G)$.

- $w = aw'a \overset{IV}{\Rightarrow} X \Rightarrow aXa \Rightarrow^* aw'a$

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.

- $ab, ba \in L(G)$.
- $w = aw'a \overset{IV}{\Rightarrow} X \Rightarrow aXa \Rightarrow^* aw'a$
- $w = aw'b$: Falls w' Palindrom: $X \Rightarrow Y \Rightarrow aZb \Rightarrow^* aw'b$, sonst $X \Rightarrow Y \Rightarrow aZb \Rightarrow aXb \Rightarrow^* aw'b$ wegen IV.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Ableitung von $w = aabaabbbbaaaa$:

$X \Rightarrow aXa \Rightarrow aaXaa \Rightarrow aaYaa \Rightarrow aabZaaa \Rightarrow aabXaaa \Rightarrow$
$aabaXaaaa \Rightarrow aabaYaaaa \Rightarrow aabaaZbaaaa \Rightarrow aabaabZbbaaaa \Rightarrow$
$aabaabbbbaaaa$

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \rightarrow aXa \mid bXb \mid Y, Y \rightarrow aZb \mid bZa,$
$Z \rightarrow aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

Ableitungsbaum von $w = aabaabbbbaaaa$: Siehe Tafel.

.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \rightarrow aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$

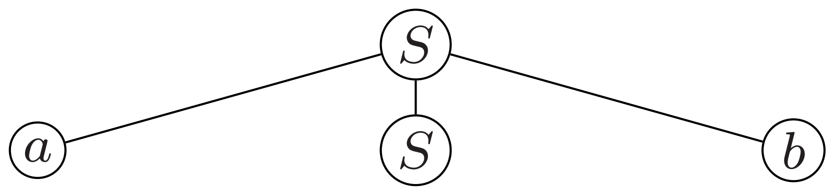
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:

S

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$

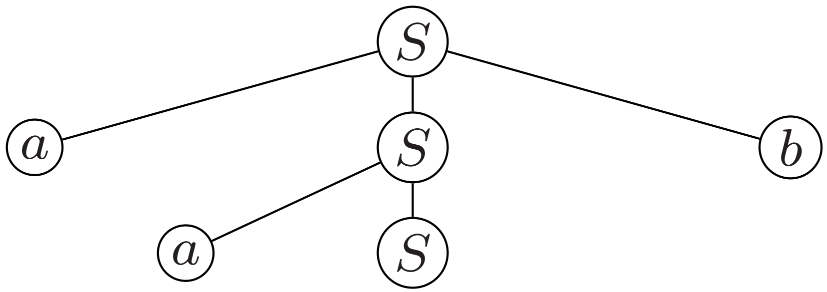
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \rightarrow aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$

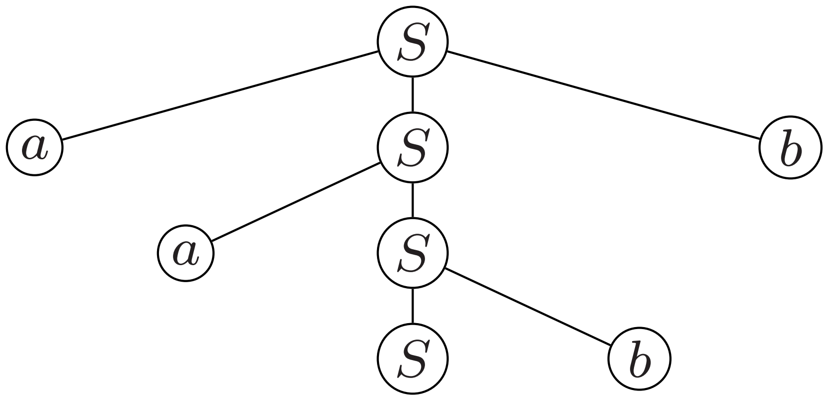
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$

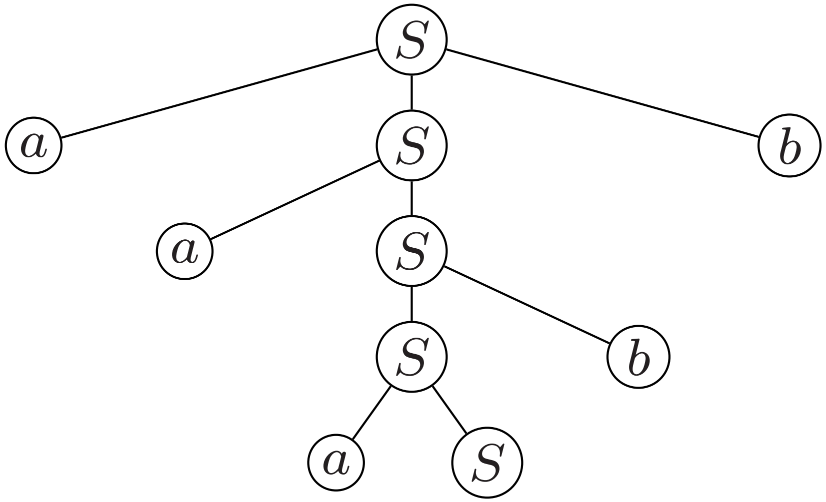
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$$

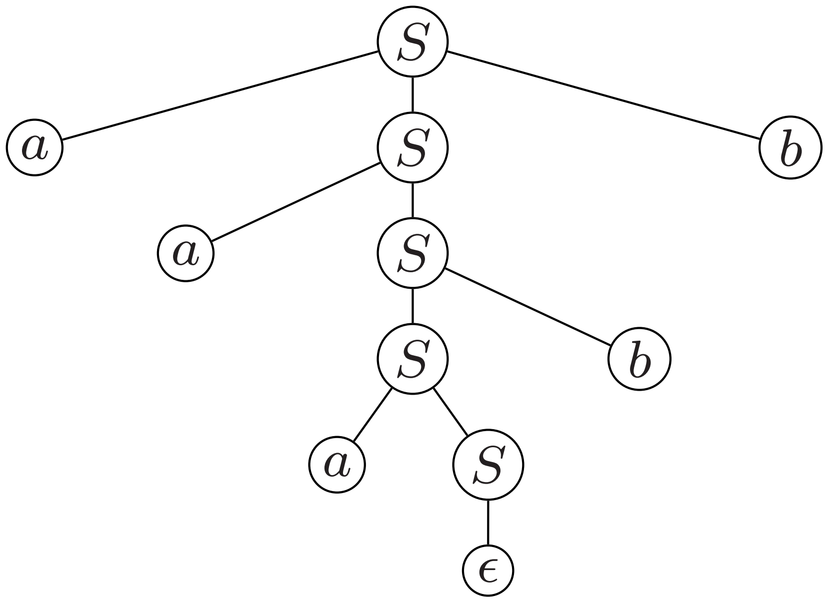
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$

Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



- $P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

- $P = \{S \rightarrow SS \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

- $P = \{S \rightarrow aS \mid bS \mid \epsilon\}$

- $P = \{S \rightarrow aSa \mid aaSa \mid b\}$

- $P = \{S \rightarrow S_1 S_2, S_1 \rightarrow \ldots, S_2 \rightarrow \ldots\}$

- $P = \{S \rightarrow S_1 \mid S_2, S_1 \rightarrow \ldots, S_2 \rightarrow \ldots\}$

- $P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\} \rightarrow$ Palindrome

- $P = \{S \rightarrow SS \mid a \mid b \mid \epsilon\} \rightarrow \{a, b\}^*$

- $P = \{S \rightarrow aS \mid bS \mid \epsilon\} \rightarrow \{a, b\}^*$

- $P = \{S \rightarrow aSa \mid aaSa \mid b\} \rightarrow \{a^n b a^m \mid m \leq n \leq 2m\}$

- $P = \{S \to S_1 S_2, S_1 \to \ldots, S_2 \to \ldots\}$
  $\to \{w \mid S_1 \Rightarrow^* w\} \cdot \{w \mid S_2 \Rightarrow^* w\}$

- $P = \{S \to S_1 \mid S_2, S_1 \to \ldots, S_2 \to \ldots\}$
  $\to \{w \mid S_1 \Rightarrow^* w\} \cup \{w \mid S_2 \Rightarrow^* w\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P = \{S \to aSa \mid aaSa \mid b\})$

Man beweise: Wenn $S \Rightarrow^* a^n X a^m$ gilt, folgt $m \le n \le 2m$.

Vollständige Induktion über Ableitungslänge!

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P = \{S \to aSa \mid aaSa \mid b\})$

Man beweise: Wenn $S \Rightarrow^* a^n S a^m$ gilt, folgt $m \leq n \leq 2m$.

IA: $S \Rightarrow^0 a^n S a^m \Rightarrow n = m = 0 \Rightarrow m \leq n \leq 2m$.

IV: Für festes, aber beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $S \Rightarrow^i a^n S a^m \Rightarrow m \leq n \leq 2m$.

IS: Zu zeigen: Dann muss auch gelten $S \Rightarrow^{i+1} a^{n'} S a^{m'} \Rightarrow m' \leq n' \leq 2m'$.

$(S \Rightarrow^{i+1} a^{n'} S a^{m'}) \Rightarrow (S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a S a a^m) \vee$
$(S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a a S a a^m)$.

1. Fall: $S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a S a a^m = a^{n+1} S a^{m+1}$.

Nach IV gilt $m \leq n \leq 2m$, und es folgt $m + 1 \leq n + 1 \leq 2m + 1 \leq 2(m + 1)$, weswegen die Behauptung in diesem Fall korrekt ist.

2. Fall: $S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a a S a a^m = a^{n+2} S a^{m+1}$.

Nach IV gilt $m \leq n \leq 2m$, und es folgt $m + 1 \leq n + 2 \leq 2m + 2 = 2(m + 1)$, weswegen die Behauptung auch in diesem Fall korrekt ist.

Achtung!

Bei Induktionsschritt verwendet:
$u \Rightarrow^{i+1} v \iff \exists w : u \Rightarrow^{i} w \Rightarrow v.$

Nach Definition: $u \Rightarrow^{i+1} v \iff \exists w : u \Rightarrow w \Rightarrow^{i} v.$

Beide Definitionen sind äquivalent!

Anschaulich: i Ableitungsschritte.
Formal: Nervige Rechnerei ...

Aber: Seien Sie sich **sehr sicher**, bevor Sie alternative Definitionen einfach so verwenden ...

Fragen zum dritten Übungsblatt?

(für nächste Woche)