Karlsruhe Institute of Technology

Grundbegriffe der Informatik - Tutorium 21

Christian Jülg
Wintersemester 2012/13
05. Februar 2013

http://gbi-tutor.blogspot.com

Übersicht

Übersicht

wozu soll das alles gut sein?

Grammatiken

- Spracherkenung
- Definition von Programmiersprachen
- $\Rightarrow$ Compiler

wozu soll das alles gut sein?

Grammatiken

- Spracherkenung
- Definition von Programmiersprachen
- $\Rightarrow$ Compiler

Automaten

- Netzwerk-Protokolle
- Internet
- Modellierung “echter Automaten”

Fortsetzung. . .

Codierungen

- Nachrichtentechnik
- $\Rightarrow$ Internet
- Rechnerarchitektur

Fortsetzung...

Codierungen

- Nachrichtentechnik
- $\Rightarrow$ Internet
- Rechnerarchitektur

Relationen

- Grundlage verschiedener Konzepte wie
- Funktionen,
- Graphen

Fortsetzung. . .

Graphen & Algorithmen auf ihnen

- Routenplanung
  - Kürzeste Wege
  - Wegfindung für KI
- Schaltpläne für Prozessoren/Mikrochips

Fortsetzung...

Graphen & Algorithmen auf ihnen

- Routenplanung
  - Kürzeste Wege
  - Wegfindung für KI
- Schaltpläne für Prozessoren/Mikrochips

Vektoren Matrizen etc.

- Visualisierungen aller Art
- Bildkorrektur in Digicams
- MRT - Magnetresonanztomographie

Fortsetzung...

Reguläre Ausdrücke

- Wort(muster)erkennung
- Validierung von Adressen, Telefonnummern, Emailadressen

Fortsetzung. . .

Reguläre Ausdrücke

- Wort(muster)erkennung
- Validierung von Adressen, Telefonnummern, Emailadressen

O-Kalkül

- Performanceabschätzung von Algorithmen
- wird sehr interessant sobald große Datenmengen verarbeitet werden
  - Bild/Video/Audiobearbeitung
  - Navigation
  - Suche

Fortsetzung. . .

Rekursion

- eignet sich “intuitiv” für viele Problemstellungen
- erlaubt für viele Algorithmen eine sehr einfache Notation

Fortsetzung. . .

Rekursion

- eignet sich “intuitiv” für viele Problemstellungen
- erlaubt für viele Algorithmen eine sehr einfache Notation

Turingmaschinen

- grundlegende Überlegungen zu Berechenbarkeit
- ermöglicht Vergleich der ”Mächtigkeit”von
  - Programmiersprachen
  - Programmiermodellen

Übersicht

Aufgabenblatt 13

Blatt 13

- Abgaben: 10 / 18
- Punkte: Durchschnitt 10,4 von 22

Ranking

- Platz 1: 183,5 Punkte
- Platz 2: 181 Punkte
- Platz 3: 158,5 Punkte

Aufgabenblatt 13

Blatt 13

- Abgaben: 10 / 18
- Punkte: Durchschnitt 10,4 von 22

Ranking

- Platz 1: 183,5 Punkte
- Platz 2: 181 Punkte
- Platz 3: 158,5 Punkte

Anmerkung

- Meldet Euch für den ÜB-Schein an!

Übersicht

Motivation

Aufgabenblatt 13

Halbordnungen

Ordnungen

Klausur am 07.03.13

Grammatiken

Abschluss

WDH: Definition von Äquivalenzrelationen

Vorraussetzungen

WDH: Definition von Äquivalenzrelationen

Vorraussetzungen

reflexiv	xRx
transitiv	Aus xRy und yRz folgt xRz
symmetrisch	Aus xRy folgt yRx

WDH: Definition von Äquivalenzrelationen

Vorraussetzungen

- reflexiv: xRx
- transitiv: Aus xRy und yRz folgt xRz
- symmetrisch: Aus xRy folgt yRx

Gelten alle diese Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$, handelt es sich um eine **Äquivalenzrelation**.

Definition einer Halbordnung

Vorraussetzungen

reflexiv	xRx
transitiv	Aus xRy und yRz folgt xRz

Definition einer Halbordnung

Vorraussetzungen

reflexiv xRx

transitiv Aus xRy und yRz folgt xRz

antisymmetrisch Aus xRy und yRx folgt $x = y$

Definition einer Halbordnung

Vorraussetzungen

reflexiv xRx

transitiv Aus xRy und yRz folgt xRz

antisymmetrisch Aus xRy und yRx folgt $x = y$

- Gelten alle diese Eigenschaften für alle x, y, handelt es sich bei $R \subseteq MxM$ um eine **Halbordnung**.

Definition einer Halbordnung

Vorraussetzungen

reflexiv	xRx
transitiv	Aus xRy und yRz folgt xRz
antisymmetrisch	Aus xRy und yRx folgt $x = y$

- Gelten alle diese Eigenschaften für alle x, y, handelt es sich bei $R \subseteq MxM$ um eine **Halbordnung**.
- Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man M eine **halbgeordnete Menge**.

Beispiel Mengeninklusion

Untersuchung der Mengeninklusion

Handelt es sich bei der Relation $\subseteq$ (Mengeninklusion) um eine **Äquivalenzrelation oder Halbordnung** auf Potenzmenge $P = 2^M$?

Beispiel Mengeninklusion

Untersuchung der Mengeninklusion

Handelt es sich bei der Relation $\subseteq$ (Mengeninklusion) um eine **Äquivalenzrelation oder Halbordnung** auf Potenzmenge $P = 2^M$?

- relfexiv: $\forall A \in P \colon A \subseteq A$

Beispiel Mengeninklusion

Untersuchung der Mengeninklusion

Handelt es sich bei der Relation $\subseteq$ (Mengeninklusion) um eine **Äquivalenzrelation oder Halbordnung** auf Potenzmenge $P = 2^M$?

- relfexiv: $\forall A \in P \colon A \subseteq A$
- transitiv: $\forall A, B, C \in P \colon A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

Beispiel Mengeninklusion

Karlsruhe Institute of Technology

Untersuchung der Mengeninklusion

Handelt es sich bei der Relation $\subseteq$ (Mengeninklusion) um eine **Äquivalenzrelation oder Halbordnung** auf Potenzmenge $P = 2^M$?

- relfexiv: $\forall A \in P\colon A \subseteq A$
- transitiv: $\forall A, B, C \in P\colon A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
- symmetrisch: $\forall A, B \in P\colon A \subseteq B \Longrightarrow B \subseteq A$

Beispiel Mengeninklusion

Untersuchung der Mengeninklusion

Handelt es sich bei der Relation $\subseteq$ (Mengeninklusion) um eine **Äquivalenzrelation oder Halbordnung** auf Potenzmenge $P = 2^M$?

- relfexiv: $\forall A \in P$: $A \subseteq A$
- transitiv: $\forall A, B, C \in P$: $A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
- symmetrisch: $\forall A, B \in P$: $A \subseteq B \Longrightarrow B \subseteq A$ gilt nicht. **ABER:** Aus **keiner Symmetrie** folgt nicht notwendig die Antisymmetrie!

Beispiel Mengeninklusion

Untersuchung der Mengeninklusion

Handelt es sich bei der Relation $\subseteq$ (Mengeninklusion) um eine **Äquivalenzrelation oder Halbordnung** auf Potenzmenge $P = 2^M$?

- relfexiv: $\forall A \in P \colon A \subseteq A$
- transitiv: $\forall A, B, C \in P \colon A \subseteq B$ und $B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- symmetrisch: $\forall A, B \in P \colon A \subseteq B \implies B \subseteq A$ gilt nicht. **ABER:** Aus **keiner Symmetrie** folgt nicht notwendig die Antisymmetrie!
- antisymmetrisch: $\forall A, B \in P \colon A \subseteq B$ und $B \subseteq A \implies A = B$ (Analogie zur Mengengleichheit)

Beispiel Mengeninklusion

Untersuchung der Mengeninklusion

Handelt es sich bei der Relation $\subseteq$ (Mengeninklusion) um eine **Äquivalenzrelation oder Halbordnung** auf Potenzmenge $P = 2^M$?

- relfexiv: $\forall A \in P\colon A \subseteq A$
- transitiv: $\forall A, B, C \in P\colon A \subseteq B$ und $B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- symmetrisch: $\forall A, B \in P\colon A \subseteq B \implies B \subseteq A$ gilt nicht. **ABER:** Aus **keiner Symmetrie** folgt nicht notwendig die Antisymmetrie!
- antisymmetrisch: $\forall A, B \in P\colon A \subseteq B$ und $B \subseteq A \implies A = B$ (Analogie zur Mengengleichheit)

Die Mengeninklusion ist eine Halbordnung.

Ihr seid dran...

Aufgabe

Überprüft, ob es sich bei folgenden Relationen um Halbordnungen handelt:

- $\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$?

Ihr seid dran...

Aufgabe

Überprüft, ob es sich bei folgenden Relationen um Halbordnungen handelt:

- $\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$?
  - **Reflexivität**: gilt wegen $w_1\epsilon = w_1$
  - **Antisymmetrie**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_1$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_1$. Also ist $w_1 u_1 u_2 = w_2 u_2 = w_1$. Also muss $|u_1 u_2| = 0$ sein, also $u_1 = u_2 = \epsilon$, also $w_1 = w_2$.
  - **Transitivität**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_3$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_3$. Also ist $w_1(u_1 u_2) = (w_1 u_1)u_2 = w_2 u_2 = w_3$, also $w_1 \sqsubseteq w_3$.

Ihr seid dran...

Aufgabe

Überprüft, ob es sich bei folgenden Relationen um Halbordnungen handelt:

- $\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$?
  - **Reflexivität**: gilt wegen $w_1 \epsilon = w_1$
  - **Antisymmetrie**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_1$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_1$. Also ist $w_1 u_1 u_2 = w_2 u_2 = w_1$. Also muss $|u_1 u_2| = 0$ sein, also $u_1 = u_2 = \epsilon$, also $w_1 = w_2$.
  - **Transitivität**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_3$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_3$. Also ist $w_1(u_1 u_2) = (w_1 u_1) u_2 = w_2 u_2 = w_3$, also $w_1 \sqsubseteq w_3$.
- $\sqsubseteq$ auf A^* mit $w_1 \sqsubseteq w_2 \Leftrightarrow |w_1| \leq |w_2|$?

Ihr seid dran...

Aufgabe

Überprüft, ob es sich bei folgenden Relationen um Halbordnungen handelt:

- $\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$?
  - **Reflexivität**: gilt wegen $w_1 \epsilon = w_1$
  - **Antisymmetrie**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_1$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_1$. Also ist $w_1 u_1 u_2 = w_2 u_2 = w_1$. Also muss $|u_1 u_2| = 0$ sein, also $u_1 = u_2 = \epsilon$, also $w_1 = w_2$.
  - **Transitivität**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_3$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_3$. Also ist $w_1(u_1 u_2) = (w_1 u_1) u_2 = w_2 u_2 = w_3$, also $w_1 \sqsubseteq w_3$.
- $\sqsubseteq$ auf A^* mit $w_1 \sqsubseteq w_2 \Leftrightarrow |w_1| \leq |w_2|$?
  - Antisymmetrie ist verletzt.

Ihr seid dran...

Aufgabe

Überprüft, ob es sich bei folgenden Relationen um Halbordnungen handelt:

- $\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$?
  - **Reflexivität**: gilt wegen $w_1\epsilon = w_1$
  - **Antisymmetrie**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_1$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_1$. Also ist $w_1 u_1 u_2 = w_2 u_2 = w_1$. Also muss $|u_1 u_2| = 0$ sein, also $u_1 = u_2 = \epsilon$, also $w_1 = w_2$.
  - **Transitivität**: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq w_3$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1 u_1 = w_2$ und $w_2 u_2 = w_3$. Also ist $w_1(u_1 u_2) = (w_1 u_1) u_2 = w_2 u_2 = w_3$, also $w_1 \sqsubseteq w_3$.
- $\sqsubseteq$ auf A^* mit $w_1 \sqsubseteq w_2 \Leftrightarrow |w_1| \leq |w_2|$?
  - Antisymmetrie ist verletzt.
  - Reflexivität und Transitivität sind erfüllt.

Hassediagramm

Konstruktion

Zur **Veranschaulichung einer Halbordnung** lassen sich Hassediagramme folgendermaßen erstellen:

Hassediagramm

Konstruktion

Zur **Veranschaulichung einer Halbordnung** lassen sich Hassediagramme folgendermaßen erstellen:

1. Darstellung der Halbordnung als Graph

Hassediagramm

Konstruktion

Zur **Veranschaulichung einer Halbordnung** lassen sich Hassediagramme folgendermaßen erstellen:

1. Darstellung der Halbordnung als Graph
2. Entfernen aller reflexiven und transitiven Kanten

Extreme „Elemente“ I

Karlsruhe Institute of Technology

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

Extreme „Elemente“ I

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

minimale und maximale Elemente

- $x \in T$ heißt **minimales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.

Extreme „Elemente“ I

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

minimale und maximale Elemente

- $x \in T$ heißt **minimales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.
- $x \in T$ heißt **maximales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

Extreme „Elemente“ I

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

minimale und maximale Elemente

- $x \in T$ heißt **minimales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.
- $x \in T$ heißt **maximales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

kleinstes und größtes Element

- $x \in T$ heißt **kleinstes Element** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

Extreme „Elemente“ I

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

minimale und maximale Elemente

- $x \in T$ heißt **minimales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.
- $x \in T$ heißt **maximales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

kleinstes und größtes Element

- $x \in T$ heißt **kleinstes Element** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
- $x \in T$ heißt **größtes Element** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

Extreme „Elemente“ I

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

minimale und maximale Elemente

- $x \in T$ heißt **minimales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.
- $x \in T$ heißt **maximales Element** von T, wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

kleinstes und größtes Element

- $x \in T$ heißt **kleinstes Element** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
- $x \in T$ heißt **größtes Element** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

Eine Teilmenge T kann mehrere minimale (bzw. maximale) Elemente besitzen, aber nur ein kleinstes (bzw. größtes)!

Beispiel mit Hassediagramm

Karlsruhe Institute of Technology

Beispiel

- Male das Hassediagramm zur Halbordnung $(\{\{\}, a, b, c, ab, bc, ac\}, \subseteq)$

Beispiel mit Hassediagramm

Beispiel

- Male das Hassediagramm zur Halbordnung $(\{\{\}, a, b, c, ab, bc, ac\}, \subseteq)$
- woran erkennt man Minima?

Beispiel mit Hassediagramm

Karlsruhe Institute of Technology

Beispiel

- Male das Hassediagramm zur Halbordnung $(\{\{\}, a, b, c, ab, bc, ac\}, \subseteq)$
- woran erkennt man Minima?
- woran Maxima?

Extreme „Elemente“ II

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

Extreme „Elemente“ II

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

Untere und obere Schranken

- $x \in M$ heißt **untere Schranke** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

Extreme „Elemente“ II

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

Untere und obere Schranken

- $x \in M$ heißt **untere Schranke** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
- $x \in M$ heißt **obere Schranke** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

Extreme „Elemente“ II

Sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$

Untere und obere Schranken

- $x \in M$ heißt **untere Schranke** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
- $x \in M$ heißt **obere Schranke** von T, wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

Also: Schranken von T dürfen außerhalb von T liegen.

Extreme „Elemente“ III

Supremum und Infimum

- Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das **Supremum** von T ($sup(T)$)

Extreme „Elemente“ III

Supremum und Infimum

- Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das **Supremum** von T ($sup(T)$)
- Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das **Infimum** von T ($inf(T)$)

Extreme „Elemente“ III

Supremum und Infimum

- Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das **Supremum** von T ($sup(T)$)
- Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das **Infimum** von T ($inf(T)$)
- **Achtung**: Existieren nicht, wenn
  - überhaupt keine oberen (unteren) Schranken vorhanden

Extreme „Elemente“ III

Supremum und Infimum

- Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das **Supremum** von T ($sup(T)$)
- Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das **Infimum** von T ($inf(T)$)
- **Achtung**: Existieren nicht, wenn
  - überhaupt keine oberen (unteren) Schranken vorhanden
  - keine eindeutig kleinste (größte) Schranke aller oberer (unterer) Schranken

Vollständige Halbordnungen

aufsteigende Kette

wird definiert als

- abzählbar unendliche Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ von Elementen
- mit Eigenschaft: $\forall i \in N_0 \colon x_i \sqsubseteq x_{i+1}$

Vollständige Halbordnungen

aufsteigende Kette

wird definiert als

- abzählbar unendliche Folge $(x_0, x_1, x_2, ...)$ von Elementen
- mit Eigenschaft: $\forall i \in N_0$: $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$

vollständige Halbordnung

Eine Halbordnung heißt **vollständig**, wenn

- sie ein kleinstes Element $\perp$ hat und
- jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq ...$ ein Supremum x_i besitzt

Vollständige Halbordnungen II

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

- Beispiel aus dem Skript
- Gegeben sei:
- Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$,

Vollständige Halbordnungen II

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

- Beispiel aus dem Skript
- Gegeben sei:
- Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$,
- D die halbgeordnete Potenzmenge $D = 2^{T^*}$ der Menge aller Wörter
- mit Inklusion als Halbordnungsrelation.

Vollständige Halbordnungen II

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

- Beispiel aus dem Skript
- Gegeben sei:
- Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$,
- D die halbgeordnete Potenzmenge $D = 2^{T^*}$ der Menge aller Wörter
- mit Inklusion als Halbordnungsrelation.
- Elemente der Halbordnung sind also Mengen von Wörtern, d.h. formale Sprachen.

Vollständige Halbordnungen II

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

- Beispiel aus dem Skript
- Gegeben sei:
- Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$,
- D die halbgeordnete Potenzmenge $D = 2^{T^*}$ der Menge aller Wörter
- mit Inklusion als Halbordnungsrelation.
- Elemente der Halbordnung sind also Mengen von Wörtern, d.h. formale Sprachen.
- Kleinstes Element der Halbordnung ist die leere Menge $\emptyset$.

Vollständige Halbordnungen II

Karlsruhe Institute of Technology

Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

- Beispiel aus dem Skript
- Gegeben sei:
- Terminalzeichenalphabet $T = \{a, b\}$,
- D die halbgeordnete Potenzmenge $D = 2^{T^*}$ der Menge aller Wörter
- mit Inklusion als Halbordnungsrelation.
- Elemente der Halbordnung sind also Mengen von Wörtern, d.h. formale Sprachen.
- Kleinstes Element der Halbordnung ist die leere Menge $\emptyset$.
- Wie weiter vorne erwähnt, ist diese Halbordnung vollständig.

Vollständige Halbordnungen III

Beweis

- Es sei $v \in T^*$ ein Wort und $f_v : D \to D$ die Abbildung $f_v(L) = \{v\}L$, die vor jedes Wort von L vorne v konkateniert.
- Behauptung: f_v ist stetig.
- Beweis: Es sei $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots$ eine Kette und $L = \bigcup L_i$ ihr Supremum.
  $f_v(L_i) = \{vw | w \in L_i\}$, also
  $\bigcup_i f_v(L_i) = \{vw | \exists i \in N_0 : w \in L_i\} = \{v\}\{w | \exists i \in N_0 : w \in L_i\}$
  $= \{v\} \bigcup_i L_i = f(\bigcup_i L_i)$.
- analog für Konkatenation von rechts

Übersicht

Totale Ordnung

Definition

Relation $R \subseteq MxM$ ist eine Ordnung oder genauer **totale Ordnung**, wenn

- R Halbordnung ist

Totale Ordnung

Karlsruhe Institute of Technology

Definition

Relation $R \subseteq MxM$ ist eine Ordnung oder genauer **totale Ordnung**, wenn

- R Halbordnung ist
- und gilt: $\forall x, y \in M$: $xRy \vee yRx$

Totale Ordnung

Definition

Relation $R \subseteq MxM$ ist eine Ordnung oder genauer **totale Ordnung**, wenn

- R Halbordnung ist
- und gilt: $\forall x, y \in M$: $xRy \vee yRx$

Anmerkungen

- $\Rightarrow$: Es gibt keine unvergleichbaren Elemente.

Totale Ordnung

Beispiele

- $(N_0, \leq)$

Totale Ordnung

Beispiele

- $(N_0, \leq)$
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ „wie im Wörterbuch“

Totale Ordnung

Beispiele

- $(N_0, \leq)$
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ „wie im Wörterbuch“
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_2)$ mit $w_1 \sqsubseteq_2 w_2$ genau dann, wenn

Totale Ordnung

Beispiele

- $(N_0, \leq)$
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ „wie im Wörterbuch"
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_2)$ mit $w_1 \sqsubseteq_2 w_2$ genau dann, wenn
  - entweder $|w_1| < |w_2|$

Totale Ordnung

Karlsruhe Institute of Technology

Beispiele

- $(N_0, \leq)$
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ „wie im Wörterbuch“
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_2)$ mit $w_1 \sqsubseteq_2 w_2$ genau dann, wenn
  - entweder $|w_1| < |w_2|$
  - oder $|w_1| = |w_2|$ und $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ gilt

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 bba$?

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaaa \sqsubseteq_1 bba$?

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaaa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaab \sqsubseteq_1 aab$?

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaaa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaab \sqsubseteq_1 aab$?

Beispiele für $\sqsubseteq_2$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_2 aabba$?

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaaa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaab \sqsubseteq_1 aab$?

Beispiele für $\sqsubseteq_2$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_2 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_2 bba$?

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaaa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaab \sqsubseteq_1 aab$?

Beispiele für $\sqsubseteq_2$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_2 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_2 bba$?
- Warum ist $bba \sqsubseteq_2 aaaaa$? (vergleiche $\sqsubseteq_1$!)

Ihr seid dran...

Beispiele für $\sqsubseteq_1$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaaa \sqsubseteq_1 bba$?
- Warum ist $aaaab \sqsubseteq_1 aab$?

Beispiele für $\sqsubseteq_2$:

- Warum ist $aa \sqsubseteq_2 aabba$?
- Warum ist $aa \sqsubseteq_2 bba$?
- Warum ist $bba \sqsubseteq_2 aaaaa$? (vergleiche $\sqsubseteq_1$!)
- Warum ist $aab \sqsubseteq_2 aaaab$? (vergleiche $\sqsubseteq_1$!)

Bleibt dran...

Aufgabe

Ist die Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{a, b\}^*$ eine totale Ordnung?

Definition

$\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$

Bleibt dran...

Aufgabe

Ist die Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{a, b\}^*$ eine totale Ordnung?

Definition

$\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \Leftrightarrow \exists u : vu = w$

Lösung

Es handelt sich um eine Halbordnung, allerdings mit unvergleichbaren Element wie z.B. a, b. Daher ist die Relation $\sqsubseteq_p$ **keine** totale Ordnung.

Übersicht

Klausur am Dienstag, 7. März 2013

14:00 - 16:00

- Anmeldebeginn: schon möglich
- Anmeldung überprüfen: wenige Tage nach der Anmeldung sollte diese im Selbstbedienungsportal sichtbar sein.

Alle Angaben sind wie immer ohne Gewähr.

Themen

Themen

- siehe Vorlesungshinweis, bzw. alles was behandelt wurde
- z.B. :

Themen

Themen

- siehe Vorlesungshinweis, bzw. alles was behandelt wurde
- z.B. :
- Mengenlehre, **Abbildungen**, Aussagenlogik, Quantoren, Wörter,
- Palindrome, **Formale Sprachen**, Grammatiken,
- Zahlensysteme, Huffman-Codes,
- **Graphen**, Adjazenzliste, Adjazenzmatrix, Wegematrix,
- Mealy- / Moore- **Automaten**, Akzeptor, Regulärer Ausdruck,
- **Äquivalenzrelationen**, Nerode-Relation, Ordnungen

Anmerkung

WICHTIG!

- Meldet Euch **rechtzeitig** zur Klausur an!

Übersicht

Motivation

Aufgabenblatt 13

Halbordnungen

Ordnungen

Klausur am 07.03.13

Grammatiken

Abschluss

Aufgabe

Gib zu den folgenden Sprachen L_1 ,L_2 jeweils eine Grammatik höchstmöglichen Typs an (das heißt Typ i mit i möglichst groß aus 0,1,2,3), welche die Sprache erzeugt.

(a) $L_1 = \{a^m(bc)^{2m} | m > 0\}$

(b) $L_2 = \{a^n b^m c^m d^n | m >= 0, n >= 1\}$

Aufgabe

Gib zu den folgenden Sprachen L_1 ,L_2 jeweils eine Grammatik höchstmöglichen Typs an (das heißt Typ i mit i möglichst groß aus 0,1,2,3), welche die Sprache erzeugt.

(a) $L_1 = \{a^m(bc)^{2m} | m > 0\}$

(b) $L_2 = \{a^n b^m c^m d^n | m >= 0, n >= 1\}$

Lösung:

(a) $G = (\Sigma, N, P, A)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}, N = \{A\}$ und
$P = \{A \rightarrow aAbcbc | abcbc\}$

(b) $G = (\Sigma, N, P, A)$ mit $\Sigma = \{a, b, c, d\} N = \{\}$ und
$P = \{A \rightarrow ad | aAd | aBd$
$B \rightarrow bBc | bc\}$

Aufgabe

Die hawaiianische Sprache kennt nur die folgenden Buchstaben:

- die Vokale a, e, i, o, u
- die Konsonanten h, k, l, m, n, p, w

Es gelten dabei folgende Regeln: Ein Wort beginnt mit einem Konsonanten oder einem Vokal. Auf einen Konsonanten muss mindestens ein Vokal folgen. Es können beliebig viele Vokale aufeinander folgen. Konsonanten dürfen nicht am Ende eines Wortes stehen. Ein Wort hat mindestens einen Buchstaben.

(a) Gib eine Grammatik des Typs 2 an, die diese Sprache erzeugt.
Hinweis: Es gibt hier auch eine Typ-3 Grammatik, aber diese ist recht umfangreich und daher als Lösung nicht sinnvoll.

(b) Erzeuge mittels der Grammatik aus (a) das Wort kaiulani.

(c) Erstelle einen regulären Ausdruck für die hawaiianische Sprache.

(d) Erstelle einen Akzeptor, der die hawaiianische Sprache akzeptiert.

Lösung

(a) $G = (\Sigma, N, P, S)$
$\Sigma = \{a, e, i, o, u, h, k, l, m, n, p, w\} \quad N = \{S, V, K\}$
$P = \{S \rightarrow V|VS|KV|KVS$
$V \rightarrow a|e|i|o|u$
$K \rightarrow h|k|l|m|n|p|w\}$

Lösung

(a) $G = (\Sigma, N, P, S)$
$\Sigma = \{a, e, i, o, u, h, k, l, m, n, p, w\}$ $N = \{S, V, K\}$
$P = \{S \rightarrow V|VS|KV|KVS$
$V \rightarrow a|e|i|o|u$
$K \rightarrow h|k|l|m|n|p|w\}$

(b) $S \Rightarrow KVS \Rightarrow kVS \Rightarrow kaS \Rightarrow kaVS \Rightarrow kaiS \Rightarrow kaiVS \Rightarrow kaiuS \Rightarrow kaiuKVS \Rightarrow kaiulVS \Rightarrow kaiulaS \Rightarrow kaiulaKV \Rightarrow kaiulanV \Rightarrow kaiulani$

Lösung

(a) $G = (\Sigma, N, P, S)$
$\Sigma = \{a, e, i, o, u, h, k, l, m, n, p, w\} \quad N = \{S, V, K\}$
$P = \{S \to V|VS|KV|KVS$
$V \to a|e|i|o|u$
$K \to h|k|l|m|n|p|w\}$

(b) $S \Rightarrow KVS \Rightarrow kVS \Rightarrow kaS \Rightarrow kaVS \Rightarrow kaiS \Rightarrow kaiVS \Rightarrow kaiuS \Rightarrow kaiuKVS \Rightarrow kaiulVS \Rightarrow kaiulaS \Rightarrow kaiulaKV \Rightarrow kaiulanV \Rightarrow kaiulani$

(c)
$((a|e|i|o|u)|(h|k|l|m|n|p|w)(a|e|i|o|u))((a|e|i|o|u)|(h|k|l|m|n|p|w)(a|e|i|o$

Übersicht

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie unterscheiden sich Äquivalenzrelation und Halbordnung? Was sind typische Beispiele?

Zum Schluss...

Karlsruhe Institute of Technology

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie unterscheiden sich Äquivalenzrelation und Halbordnung? Was sind typische Beispiele?
- Warum Hassediagramme? Welche „extremen“ Elemente treten bei Halbordnungen auf?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie unterscheiden sich Äquivalenzrelation und Halbordnung? Was sind typische Beispiele?
- Warum Hassediagramme? Welche „extremen“ Elemente treten bei Halbordnungen auf?
- Was besagt eine totale Ordnung?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie unterscheiden sich Äquivalenzrelation und Halbordnung? Was sind typische Beispiele?
- Warum Hassediagramme? Welche „extremen“ Elemente treten bei Halbordnungen auf?
- Was besagt eine totale Ordnung?
- Meldet euch bitte für Schein und KLAUSUR an!
  Solange ihr euch nicht für den Schein anmeldet, kann er euch auch nicht eingetragen werden.

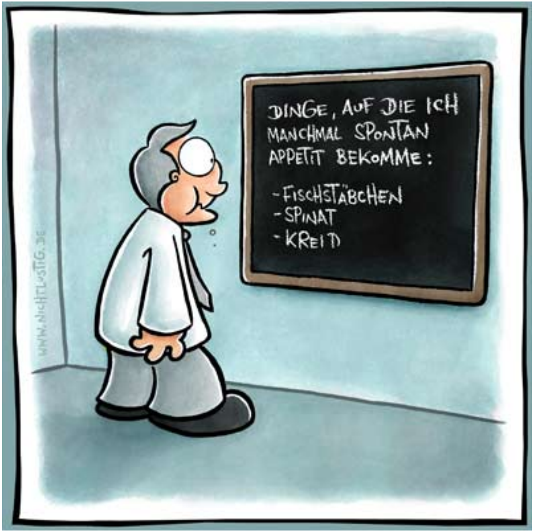
Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie unterscheiden sich Äquivalenzrelation und Halbordnung? Was sind typische Beispiele?
- Warum Hassediagramme? Welche „extremen“ Elemente treten bei Halbordnungen auf?
- Was besagt eine totale Ordnung?
- Meldet euch bitte für Schein und KLAUSUR an!
  Solange ihr euch nicht für den Schein anmeldet, kann er euch auch nicht eingetragen werden.

Ihr wisst was nicht?
Stellt **jetzt** Fragen!

Ende


DINGE, AUF DIE ICH MANCHMAL SPONTAN APPETIT BEKOMME:
- FISCHSTÄBCHEN
- SPINAT
- KREID
WWW.NICHTLUSTIG.DE