Karlsruhe Institute of Technology

# Grundbegriffe der Informatik - Tutorium 21

**Christian Jülg**

**Wintersemester 2012/13**

**04. Dezember 2012**

http://gbi-tutor.blogspot.com

# Übersicht

Aufwachen

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

# Übersicht

# Zum Warmwerden...

Es gilt:

1. ... Ein Homomorphismus ist immer präfixfrei.
2. ... $100101011101_2 = 0x95C = 4535_8$
3. ... $3 \ + 2 \ = 11$

Zu einer Relation R ...

1. ... gilt $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1}$
2. ... lässt sich immer die reflexive transitive Hülle bilden
3. ... gibt es viele Darstellungsmöglichkeiten

# Zum Warmwerden...

Es gilt:

1. ... Ein Homomorphismus ist immer präfixfrei.
2. ... $100101011101_2 = 0x95C = 4535_8$
3. ... $3_4 + 2_4 = 11_4$

Zu einer Relation R ...

1. ... gilt $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1}$
2. ... lässt sich immer die reflexive transitive Hülle bilden
3. ... gibt es viele Darstellungsmöglichkeiten

# Zum Warmwerden...

Es gilt:

1. ... Ein Homomorphismus ist immer präfixfrei.
2. ... $100101011101_2 = 0x95C = 4535_8$
3. ... $3_4 + 2_4 = 11_4$

Zu einer Relation R ...

1. ... gilt $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1}$
2. ... lässt sich immer die reflexive transitive Hülle bilden
3. ... gibt es viele Darstellungsmöglichkeiten

# Übersicht

# Aufgabenblatt 7

## Blatt 7

- Abgabe: 07.12.2012 um 12:30 Uhr im Untergeschoss des Infobaus
- Punkte: maximal 20

## Themen

- Graphen

# Übersicht

# Aus der Vorlesung:

## Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort $w \in A^*$ indem

# Aus der Vorlesung:

Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort $w \in A^*$ indem
- häufigere Symbole durch kürzere Wörter

# Aus der Vorlesung:

Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort $w \in A^*$ indem
- häufigere Symbole durch kürzere Wörter
- und seltener vorkommende Symbole durch längere Wörter kodiert werden

# Huffman-Code

Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:

2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Huffman-Code

Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:
   - Blätter entsprechen $x \in A$

2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Huffman-Code

## Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:
   - Blätter entsprechen $x \in A$
   - Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen
2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Huffman-Code

## Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:
   - Blätter entsprechen $x \in A$
   - Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen
   - An jedem Blatt wird das Symbol $x$ und dessen Häufigkeit notiert
2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Huffman-Code

## Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:
   - Blätter entsprechen $x \in A$
   - Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen
   - An jedem Blatt wird das Symbol $x$ und dessen Häufigkeit notiert
   - die zwei Elemente mit der geringsten Häufigkeit werden zu einem Elternknoten zusammengefasst
2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Aufgabe

## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. 1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
   Erstelle den Huffman-Code-Baum.

# Aufgabe

## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. 1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
   Erstelle den Huffman-Code-Baum.
   Wie lange wird die Kodierung von $w = badcfehg$?

# Aufgabe

## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. 1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
   Erstelle den Huffman-Code-Baum.
   Wie lange wird die Kodierung von $w = badcfehg$?
2. 2. Fall: Zeichen a und b kommen zweimal, c viermal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vor.
   Erstelle den Huffman-Code-Baum. Wie lange wird die Kodierung von $w = badcafehg$?

# Aufgabe

## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. 1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
   Erstelle den Huffman-Code-Baum.
   Wie lange wird die Kodierung von $w = badcfehg$?
2. 2. Fall: Zeichen a und b kommen zweimal, c viermal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vor.
   Erstelle den Huffman-Code-Baum. Wie lange wird die Kodierung von $w = badcafehg$?
3. Wie lange wird ein Wort mit zweiter Zeichenverteilung, wenn man es mit dem ersten Code codiert?
4. Wie lange wird ein Wort mit erster Zeichenverteilung, wenn man es mit dem zweiten Code codiert?

# Aufgabe

## Aufgabe 2

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und die Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(a) = \frac{3}{10}$, $p(b) = \frac{1}{10}$, $p(c) = \frac{1}{10}$, $p(d) = \frac{1}{7}$, $p(e) = \frac{1}{7}$, $p(f) = \frac{1}{7}$ und $p(g) = \frac{1}{14}$.

- Erzeuge einen Huffman-Code C.

# Aufgabe

## Aufgabe 2

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und die Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(a) = \frac{3}{10}$, $p(b) = \frac{1}{10}$, $p(c) = \frac{1}{10}$, $p(d) = \frac{1}{7}$, $p(e) = \frac{1}{7}$, $p(f) = \frac{1}{7}$ und $p(g) = \frac{1}{14}$.

- Erzeuge einen Huffman-Code C.

## Lösung 2

| Zeichen: | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit: | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{14}$ |
| Code: | 00 | 101 | 110 | 010 | 011 | 100 | 111 |

# viele Codes

Karlsruhe Institute of Technology

## mehrdeutig?

- im Allgemeinen sind Huffman-Codes nicht indeutig:
- es können mehrere Zeichen gleichhäufig vorkommen
- Außerdem ist nicht festgelegt, welcher Knoten linker Nachfolger und welcher rechter Nachfolger eines inneren Knotens wird

$\Rightarrow$ Huffman-Codes sind nicht eindeutig

- Das macht aber nichts: alle, die sich für ein Wort *w* ergeben können, sind „gleich gut“

# Übersicht

Aufwachen

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

# Motivation

## Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen

# Motivation

## Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen

# Motivation

## Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

# Motivation

## Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

## Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen

# Motivation

## Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

## Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen
- Irrgarten

# Motivation

## Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

## Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen
- Irrgarten
- Stromnetz

# Motivation

## Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

## Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen
- Irrgarten
- Stromnetz

## Nicht modellierbar

- mehrspurige Verbindungen in gleicher Richtung

# Gerichteter Graph

Definition

Ein gerichteter Graph $G$ ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der Grundmenge $V = \{v_i\}$ (die Menge der Ecken)
- der Relation $E \subseteq V \times V$ (die Menge der Kanten)
  Notationen für Kanten:
  - $(v, v') \in E$
  - $v \rightarrow_G v'$
  - $v \rightarrow v'$

# Zeichnerische Darstellung von gerichteten Graphen

Ihr seid dran...

Ein kluger Ersti möchte gerne über die Weihnachtstage mit dem Zug nach Hause fahren. Um zu sehen über welche Strecken er alles fahren kann, malt er sich einen Graphen auf.

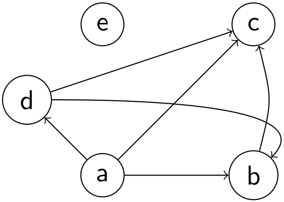
# Zeichnerische Darstellung von gerichteten Graphen

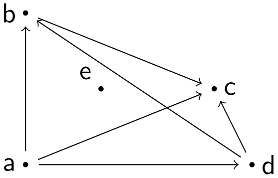
Ihr seid dran...

Ein kluger Ersti möchte gerne über die Weihnachtstage mit dem Zug nach Hause fahren. Um zu sehen über welche Strecken er alles fahren kann, malt er sich einen Graphen auf.

Aus Aachen fahren Züge nach Berlin, Chemnitz und Dortmund. Während er von Berlin nur Chemnitz erreichen kann, gibt es Züge von Dortmund nach Chemnitz und Berlin. Essen ist leider von keiner dieser Städte erreichbar.

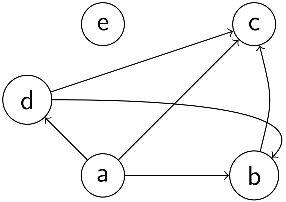
Hinweis: Man malt die Ecken als Kreise und die Kanten als Pfeile.

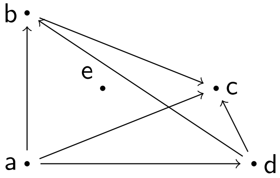



Sind die beiden Graphen isomorph?

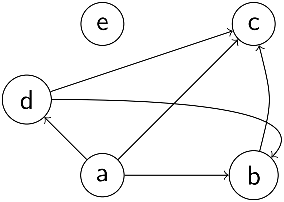
Gebt die Graphen in Tupelschreibweise an!

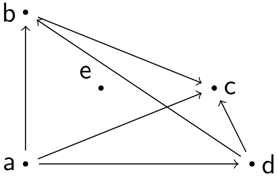



Ja, die beiden Graphen sind isomorph.

Gebt den Graph in Tupelschreibweise an!




Ja, die beiden Graphen sind isomorph.

$$G = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, b), (d, c)\})$$

# Graphen

## Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn $V$ endlich ist ($|V| < \infty$).

# Graphen

## Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn $V$ endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.

# Graphen

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn $V$ endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.

# Graphen

## Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn $V$ endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.
- Ein Graph heißt **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt.

# Graphen

## Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn $V$ endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.
- Ein Graph heißt **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt.
- $G' = (V', E')$ ist ein **Teilgraph** von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap V' \times V'$

# Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

# Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
  **Lösung:** $n^2$ $\mathbf{n^2}$ Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

# Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
  **Lösung:** $n^2$ n² Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
  **Lösung:** $n(n-1)$ Kanten

# gerichtete Bäume

Definition

In einem gerichteten Baum ...

# gerichtete Bäume

Definition

In einem gerichteten Baum ...

- ... gibt es genau einen Knoten $r \in V$ so dass:
  für alle $x \in V$ ex. genau ein Pfad von $r$ nach $x$

# gerichtete Bäume

Definition

In einem gerichteten Baum ...

- ... gibt es genau einen Knoten $r \in V$ so dass:
  für alle $x \in V$ ex. genau ein Pfad von $r$ nach $x$
- ... ist die Wurzel eindeutig

# Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

# Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades

# Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ und $v_1, \dots, v_n$ je paarweise verschieden sind, also maximal $v_0$ und $v_n$ gleich sind.

# Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ und $v_1, \ldots, v_n$ je paarweise verschieden sind, also maximal $v_0$ und $v_n$ gleich sind.
- Falls $v_0 = v_n$ heißt der Pfad *geschlossen*. Dann ist der Pfad auch ein Zyklus.

# Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ und $v_1, \dots, v_n$ je paarweise verschieden sind, also maximal $v_0$ und $v_n$ gleich sind.
- Falls $v_0 = v_n$ heißt der Pfad *geschlossen*. Dann ist der Pfad auch ein Zyklus.
- ein geschlossener und wiederholungsfreier Pfad ist ein *einfacher Zyklus*.

# Übersicht

Aufwachen

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

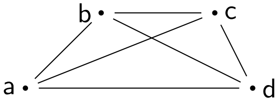
Abschluss

# Ungerichteter Graph

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$ die Menge der Kanten.

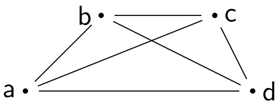


# Ungerichteter Graph

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$ die Menge der Kanten.



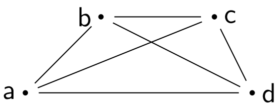

Wie sähe dieser ungerichtete Graph als Menge aus?

# Ungerichteter Graph

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$ die Menge der Kanten.




Wie sähe dieser ungerichtete Graph als Menge aus?

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{d, b\}, \{d, c\}\})$$

# Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

# Aufgabe

### Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
  **Lösung:** $n(n-1)/2$ Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

# Aufgabe

### Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
  **Lösung:** $n(n-1)/2$ Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
  **Lösung:** $n(n+1)/2$ Kanten

# zusammenhängende Graphen

Definition

Wir nennen ...

- einen gerichteten Graphen *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ gilt: Es gibt in $G$ einen Pfad von $x$ nach $y$.

# zusammenhängende Graphen

Definition

Wir nennen ...

- einen gerichteten Graphen *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ gilt: Es gibt in $G$ einen Pfad von $x$ nach $y$.
- einen ungerichteten Graphen *zusammenhängend*, wenn der entsprechende gerichtete Graph *streng zusammenhängend* ist.

# ungerichtete Bäume

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum

# ungerichtete Bäume

Karlsruhe Institute of Technology

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum
- Im ungerichteten Baum kann theoretisch jeder Knoten Wurzel sein.

# ungerichtete Bäume

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum
- Im ungerichteten Baum kann theoretisch jeder Knoten Wurzel sein.
- Daher wird i.d.R. ein Knoten als Wurzel hervorgehoben.

# Übersicht

# Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

# Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?

# Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?

# Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?
- Was bedeutet gerichtet, bzw. ungerichtet?

# Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?
- Was bedeutet gerichtet, bzw. ungerichtet?
- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?

# Zum Schluss...

Karlsruhe Institute of Technology

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?
- Was bedeutet gerichtet, bzw. ungerichtet?
- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?

Ihr wisst was nicht?
Stellt **jetzt** Fragen!

# Ende


BITTE GEHEN SIE WEITER. ES GIBT HIER NICHTS ZU SEHEN! GEHEN SIE BITTE WEITER!
WWW.NICHTLUSTIG.DE