Übung “Grundbegriffe der Informatik”

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 034

email: schulz@ira.uka.de

DFG-Projekt “Weltbilder der Informatik”

Einfluss des Informatik-Studiums auf Weltbilder und Handlungskompetenzen.

Vergleich Erstsemester - Höhere Semester durch Interviews

richter@informatik.uni-kl.de **und** pschmitt@ira.uka.de

Aufgabe 3.1

Anzahl x in w:

$N_x(\epsilon) = 0$
$N_x(wy) = N_x(w) + \delta_x(y)$

.

Aufgabe 3.1

Algorithmus:

$v \leftarrow w$

$r \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 0$ **to** $|v| - 1$ **do**

  $r \leftarrow r + \delta_x(v(i))$

od

.

Aufgabe 3.1

$P(w, i)$: Präfix von w der Länge i.

Schleifeninvariante: $r = N_x(P(w, i))$

Problem: Stimmt zu Beginn des Schleifendurchlaufs, nicht am Ende.

$v \leftarrow w$
$r \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $|v| - 1$ **do**
    $r \leftarrow r + \delta_x(v(i))$
od

.

Aufgabe 3.1

Lösung: Zusätzliche Variable j, die anfangs i und später $i + 1$ ist:

$v \leftarrow w$
$r \leftarrow 0$
$j \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $|v| - 1$ **do**
    $r \leftarrow r + \delta_x(v(i))$
    $j \leftarrow j + 1$
od

Schleifeninvariante: $r = N_x(P(w, j))$

.

Aufgabe 3.1

Per Induktion zeigen:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : j_i = i \wedge r_i = N_x(P(w, j_i)).$$

.

Aufgabe 3.2

$k = tm_1, g = tm_2 \Rightarrow g - k = (m_1 - m_2)t$
$k = tm_1, g - k = tm_2 \Rightarrow g = (m_1 + m_2)t$

$ggt(k, g)$ teilt $k, g - k \Rightarrow ggt(k, g) \leq ggt(k, g - k)$
$ggt(k, g - k)$ teilt $k, g \Rightarrow ggt(k, g - k) \leq ggt(k, g)$
$\Rightarrow ggt(k, g) = ggt(k, g - k)$.

.

Aufgabe 3.2

$x \leftarrow a$

$y \leftarrow b$

for $i \leftarrow 0$ **to** $a + b + 1$ **do**

  $k \leftarrow min(x, y)$

  $g \leftarrow max(x, y)$

  $x \leftarrow k$

  $y \leftarrow g - k$

od

Schleifeninvariante: $ggt(x, y) = ggt(a, b)$.

.

Aufgabe 3.2

$x \leftarrow a$

$y \leftarrow b$

for $i \leftarrow 0$ **to** $a + b + 1$ **do**

$\quad k \leftarrow min(x, y)$

$\quad g \leftarrow max(x, y)$

$\quad x \leftarrow k$

$\quad y \leftarrow g - k$

od

$x + y$ pro Schleife um mindestens 1 kleiner, falls $x \neq 0 \neq y$.

.

Aufgabe 3.2

$x \leftarrow a$
$y \leftarrow b$
for $i \leftarrow 0$ **to** $a + b + 1$ **do**
    $k \leftarrow min(x, y)$
    $g \leftarrow max(x, y)$
    $x \leftarrow k$
    $y \leftarrow g - k$
od

$x + y$ pro Schleife um mindestens 1 kleiner, falls $x \neq 0 \neq y$.
Nach spätestens $a + b$ Schleifen $x = 0 \vee y = 0$.

.

Aufgabe 3.2

$x \leftarrow a$
$y \leftarrow b$
for $i \leftarrow 0$ **to** $a+b+1$ **do**
    $k \leftarrow min(x,y)$
    $g \leftarrow max(x,y)$
    $x \leftarrow k$
    $y \leftarrow g-k$
od

$x+y$ pro Schleife um mindestens 1 kleiner, falls $x \neq 0 \neq y$.
Nach spätestens $a+b$ Schleifen $x=0 \vee y=0$.
Nach $a+b+1$ Schleifen $x=0, ggt(x,y)=ggt(a,b) \Rightarrow y = ggt(a,b)$.

.

Produkt von Relationen

Definition: $x(S \circ R)z \iff \exists y : xRy \wedge ySz$.

Beispiel: Funktionen f, g.

$x(f \circ g)z \iff f(g(x)) = z$

Mit $g(x) = y$ gilt: $g(x) = y \wedge f(y) = z \Rightarrow xgy \wedge yfz$.

.

Produkt von Relationen

“Verdrehte” Schreibweise von Funktionen $\Rightarrow$ verdrehte Schreibweise für Relationenprodukt.

.

Produkt von Relationen

$< \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$< \circ < = ?$

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$

Welches $<$ hinter dem $\Rightarrow$ entspricht welchem $<$ vor dem $\Rightarrow$?

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$$

$$x(< \circ <)z \iff z \geq x + 2$$

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$$

$$x(< \circ <)z \iff z \geq x + 2$$

Beweis: $x(< \circ <)z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z \Rightarrow$
$\exists y \in \mathbb{N}_0 : y - x \geq 1 \wedge z - y \geq 1 \Rightarrow z - x \geq 2 \Rightarrow z \geq x + 2$

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$$

$$x(< \circ <)z \iff z \geq x + 2$$

Beweis: $z \geq x + 2 \Rightarrow z - 1 \geq x + 1 \Rightarrow x < z - 1 \wedge z - 1 < z \Rightarrow$
$\exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z \Rightarrow x(< \circ <)z$

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ <=?$

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ <=<$

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ <=<$

Beweis: $x(< \circ <)z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ <=<$

Beweis: $x(< \circ <)z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

$x < z \rightarrow x < \frac{x+z}{2} \wedge \frac{x+z}{2} < z$
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x(< \circ <)z$

.

Produkt von Relationen

$<, >\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$> \circ <=?$

.

Produkt von Relationen

$<, > \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$> \circ < = ?$

$x(> \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \land y > z$

.

Produkt von Relationen

$<, > \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$> \circ < = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$x(> \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y > z$
$\forall x, z \in \mathbb{N}_0 : x < x + z + 1 \wedge x + z + 1 > z$

.

Homomorphismen

“Übersetzen ist sehr einfach:”
“Translating is very easy:”

.

Homomorphismen

“Man übersetzt jedes einzelne Wort ...”
“You translate each single word ...”

.

“um sie danach in der gleichen Reihenfolge zusammen zu setzen.”
“to them afterwards in the same sequence together to put.”

.

Homomorphismen

“’This account of you we have from all quarters received.’ A Frenchman or Russian could not have written that. It is the German who is so uncourteous to his verbs.”

Sherlock Holmes in Arthur Conan Doyles “A Scandal in Bohemia”

Homomorphismen

$A = \{$alle Wörter der deutschen Sprache$\}, L_A \subseteq A^*$ Menge aller grammatikalisch korrekten Sätze.

$B = \{$alle Wörter der englischen Sprache$\}, L_B \subseteq B^*$ Menge aller grammatikalisch korrekten Sätze.

"Übersetzungsabbildung" $t : L_A \to L_B$ ist **kein** Homomorphismus!

.

Homomorphismen

Homomorphismus ist *einfache* Funktion.

$h : A^* \to B^*$ ist Homomorphismus
$\Rightarrow \forall w_1, w_2 \in A^* : h(w_1 w_2) = h(w_1)h(w_2)$.

h definiert durch Funktionswerte von h auf Zeichen aus A.

.

Codierung - Decodierung

Ist Homomorphismus $c : \{a, b\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$
mit $c(a) = 10, c(b) = 100$ Codierung (also injektiv)?

.

Codierung - Decodierung

Ist Homomorphismus $c : \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$
mit $c(a) = 10, c(b) = 100$ Codierung (also injektiv)?

$c(aaaba) = 10101010010$
$c(babba) = 1001010010010$
$c(aaaaa) = 1010101010$

.

Codierung - Decodierung

Ist Homomorphismus $c : \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$
mit $c(a) = 10, c(b) = 100$ Codierung (also injektiv)? Ja!

Decodierung?

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100$

Decodierung $u : \{0, 1\}^* \to \{a, b, \perp\}$?

$u(\epsilon) = \epsilon$.

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100$

Decodierung $u : \{0, 1\}^* \to \{a, b, \perp\}$?

$u(\epsilon) = \epsilon$.
$u(0w) = u(11w) = \perp$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100$

Decodierung $u : \{0, 1\}^* \to \{a, b, \perp\}$?

$u(\epsilon) = \epsilon.$
$u(0w) = u(11w) = \perp$
$u(10w) =$?

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100$

Decodierung $u : \{0, 1\}^* \to \{a, b, \perp\}$?

$u(\epsilon) = \epsilon.$
$u(0w) = u(11w) = \perp$
$u(100w) = bu(w)$
$u(101w) = au(1w)$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100$

Decodierung $u : \{0, 1\}^* \to \{a, b, \perp\}$?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ au(1w') & \text{falls } w = 101w' \\ bu(w') & \text{falls } w = 100w' \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

“Vorausschauend” decodieren!

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$c(adddb) = 10000000100$
$c(bddda) = 10000000010$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \end{cases}$$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ du(w') & \text{falls } w = 00w' \end{cases}$$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ du(w') & \text{falls } w = 00w' \\ ad^k & \text{falls } w = 10^{2k+1} \end{cases}$$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ du(w') & \text{falls } w = 00w' \\ ad^k & \text{falls } w = 10^{2k+1} \\ bd^k & \text{falls } w = 10^{2k+2} \end{cases}$$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ du(w') & \text{falls } w = 00w' \\ ad^k & \text{falls } w = 10^{2k+1} \\ bd^k & \text{falls } w = 10^{2k+2} \\ ad^k u(1w') & \text{falls } w = 10^{2k+1}1w' \end{cases}$$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ du(w') & \text{falls } w = 00w' \\ ad^k & \text{falls } w = 10^{2k+1} \\ bd^k & \text{falls } w = 10^{2k+2} \\ ad^k u(1w') & \text{falls } w = 10^{2k+1}1w' \\ bd^k u(1w') & \text{falls } w = 10^{2k+2}1w' \end{cases}$$

.

Codierung - Decodierung

$c : \{a, b, d\}^* \to \{0, 1\}^*$
$c(a) = 10, c(b) = 100, c(d) = 00$

Decodierung?

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ du(w') & \text{falls } w = 00w' \\ ad^k & \text{falls } w = 10^{2k+1} \\ bd^k & \text{falls } w = 10^{2k+2} \\ ad^k u(1w') & \text{falls } w = 10^{2k+1}1w' \\ bd^k u(1w') & \text{falls } w = 10^{2k+2}1w' \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A \times B}$

.

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A\times B}$

$f \in (C^B)^A \Rightarrow f(a) : B \to C$
$\Rightarrow (f(a))(b) = c.$

.

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A\times B}$

$f \in (C^B)^A \Rightarrow f(a) : B \to C$
$\Rightarrow (f(a))(b) = c.$

$g \in C^{A\times B} \Rightarrow g(a, b) = c.$

.

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A\times B}$

$f \in (C^B)^A \Rightarrow f(a) : B \to C$
$\Rightarrow (f(a))(b) = c.$

$g \in C^{A\times B} \Rightarrow g(a,b) = c.$

Definiere: $(F(f))(a,b) = (f(a))(b)$

.

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A \times B}$

Definiere: $(F(f))(a,b) = (f(a))(b)$

Injektiv: $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists a \in A : f_1(a) \neq f_2(a)$

.

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A\times B}$

Definiere: $(F(f))(a,b) = (f(a))(b)$

Injektiv: $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists a \in A : f_1(a) \neq f_2(a)$
$\Rightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : (f_1(a))(b) \neq (f_2(a))(b)$

.

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A \times B}$

Definiere: $(F(f))(a, b) = (f(a))(b)$

Injektiv: $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists a \in A : f_1(a) \neq f_2(a)$
$\Rightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : (f_1(a))(b) \neq (f_2(a))(b)$
$\Rightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : (F(f_1))(a, b) \neq (F(f_2))(a, b)$

.

Abbildungen von Abbildungen auf Abbildungen

Suche bijektive Abbildung $F : (C^B)^A \to C^{A \times B}$

Definiere: $(F(f))(a, b) = (f(a))(b)$

Injektiv: $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists a \in A : f_1(a) \neq f_2(a)$
$\Rightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : (f_1(a))(b) \neq (f_2(a))(b)$
$\Rightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : (F(f_1))(a, b) \neq (F(f_2))(a, b)$
$\Rightarrow F(f_1) \neq F(f_2)$

.

Fragen zum vierten Übungsblatt?

(für nächste Woche)