Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1 (1+2 Punkte)

a) Geben Sie eine möglichst kurze aussagenlogische Formel an, die zur Formel $\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ äquivalent ist.

b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, die zur Formel $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ äquivalent ist und in der nur ein Implikationspfeil $\Rightarrow$ vorkommt

Lösung 1.1

a) Wie in der Vorlesung bereits gezeigt lässt sich $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ schreiben als $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ Folglich lässt sich $\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ auch schreiben als $\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ was gleichbedeutend ist mit $\neg\mathcal{A}$

2.Möglichkeit: Halten wir uns nochmal die Wahrheitstabelle für die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ vor Augen:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Da in der zu untersuchenden Formel nur eine Variable vorhanden ist, haben wir auch nur 2 Fälle zu betrachten: Entweder $\mathcal{A}$ ist wahr, oder $\mathcal{A}$ ist falsch.

- Wenn $\mathcal{A}$ wahr ist, ist $\neg\mathcal{A}$ falsch. Ein Blick in die Wahrheitstabelle der Implikation (bzw. das Wissen, dass man aus etwas richtigem nichts falsches folgen kann) verrät uns, dass folglich die Implikation, also die Formel $\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$, in diesem Falle falsch ist.
- Wenn $\mathcal{A}$ falsch ist, ist $\neg\mathcal{A}$ wahr. Die Implikation wird folglich wahr.

Man sieht also, dass man als Ergebnis der Formel immer die Negation von $\mathcal{A}$ erhält. Folglich lässt sich $\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ auch schreiben als $\neg\mathcal{A}$.

b) Mit der gleichen Umformung aus Teilaufgabe a) lässt sich die Formel zum Beispiel schreiben als, $\neg\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$ oder auch als $\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$. Eine weitere äquivalente Formel ist $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$, deren Äquivalenz man anhand einer Wahrheitstabelle einsehen kann.

Aufgabe 1.2 (2+4+2 Punkte)

Es sei A die Menge aller Kinobesucher in einer Vorstellung und B die Menge aller Sitzplätze. Die Abbildung f ordnet den Kinobesuchern die Sitzplätze zu:

$$f : A \to B$$

a) Was wünschen sich die Kinobesucher: Eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung auf die Sitzplätze? Was wünscht sich der Kinobesitzer?

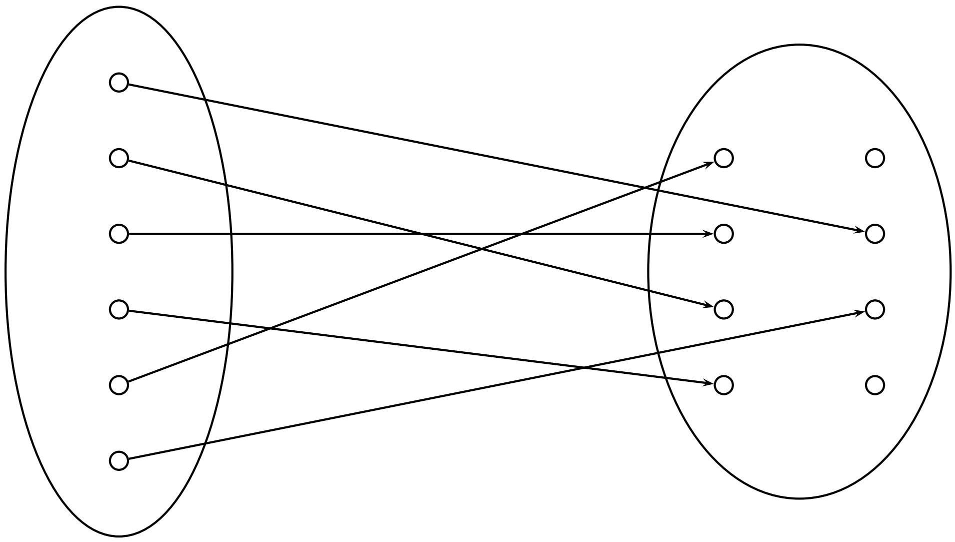
b) Erklären Sie jeweils, was es im Kino bedeutet, wenn f linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist.

c) In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, 6 Kinobesucher besuchten ein Kino mit 8 Plätzen. Zeichnen Sie eine injektive Abbildung f. Wie viele injektive Abbildungen gibt es?

Lösung 1.2

a) Im allgemeinen fühlen sich Kinobesucher recht wohl, wenn sie einen Sitzplatz für sich alleine haben. Sie wünschen sich folglich eine injektive Abbildung. Der Kinobesitzer möchte jedoch möglichst viele Eintrittskarten verkaufen und wünscht sich "mindestens" eine bijektive,im skrupellosen Fall sogar eine surjektive Abbildung, die nicht injektiv ist (Im wesentlichen also: Eine surjektive Abbildung).

b)
- linkstotal: jedem Kinobesucher wird ein Sitzplatz zugeteilt
- rechtstotal: jeder Sitzplatz ist von mindestens einem Kinobesucher belegt
- linkseindeutig: jeder Sitzplatz ist von höchstens einem Kinobesucher belegt
- rechtseindeutig: kein Kinobesucher belegt mehr als einen Sitzplatz



c)

Es gibt insgesamt $8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 = 20160$ injektive Abbildungen. Der "erste" Besucher hat 8 Plätze zur Auswahl. Da auf Grund der Injektivität der nächste Besucher einen anderen Sitzplatz wählen muss, stehen ihm noch 7 Plätze zur Auswahl. Das gleiche Szenario gilt für die restlichen 4 Besucher.

Aufgabe 1.3 (2 Punkte)

Stellen Sie für folgende Formel $\mathcal{F}$ eine Wahrheitstabelle auf:

$$\mathcal{F} = ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

Lösung 1.3

Wir schreiben im folgenden "1" für "wahr" und "0" für "falsch". Die kursiv gedruckten Zahlen zeigen an in welcher Reihenfolge die einzelnen Spalten ausgefüllt wurden.

		1.	*3.*	*2.*	*5.*	*4.*
A	B	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\Rightarrow$	$\neg B$	$\Rightarrow$	$\neg A$
0	0	1	1	1	**1**	1
0	1	1	0	0	**1**	1
1	0	0	1	1	**0**	0
1	1	1	0	0	**1**	0

Aufgabe 1.4 (2+4 Punkte)

Der Planet Fantasia wird von 2 Völkern bewohnt – dem grünen und dem roten Volk. Außerdem sind die Leute der nördlichen Hemisphäre – also die, die dort geboren wurden – von denen auf der südlichen Hemisphäre sehr verschieden: die grünen Nordler sagen immer die Wahrheit und die roten Nordler lügen immer; im Süden lügen die grünen Südler immer während die roten Südler die Wahrheit sagen.

a) In einer dunklen Nacht traf ein Besucher von der Erde einen Bewohner von Fantasia und fragte ihn: „Bist du rot?“ Der Bewohner bejahte dies.

   Von welcher Hemisphäre kommt er? (Begründen Sie kurz)

b) Zwei Bewohner namens Alice und Bob machten folgende Aussagen:

   Alice: Bob ist ein Nordler.
   Bob: Alice ist ein Südler.
   Alice: Bob ist rot.
   Bob: Alice ist grün.

   Welche Farbe hat Alice und woher stammt sie? Und Bob? (Begründen Sie kurz)

Lösung 1.4

a) Der Bewohner behauptet rot zu sein. Wir unterscheiden also 2 Fälle:

   - Wenn er die Wahrheit sagt, muss er von der südlichen Hemisphäre kommen, da rote Nordler ja bekanntlich immer lügen.
   - Wenn er lügt, heisst das, er ist in Wirklichkeit grün. Auch dann kommt er von der südlichen Hemisphäre, da ein grüner Nordler nur die Wahrheit spricht.

   Er kommt also in jedem Fall von der südlichen Hemisphäre.

b) Wenn die Aussagen von Alice war sind, ist Bob ein roter Nordler, und wenn ihre Aussagen falsch sind, ist Bob ein grüner Südler. In beiden Fällen ist Bob dann ein Lügner. $\Rightarrow$ Alice ist rot und kommt aus dem Norden und Bob ein grüner Südler.