Karlsruhe Institute of Technology

Grundbegriffe der Informatik - Tutorium 21

Christian Jülg
Wintersemester 2012/13
11. Dezember 2012

http://gbi-tutor.blogspot.com

Übersicht

Übersicht

Zum Warmwerden...

Ein ungerichteter Graph U...

1. ... kann eine Einbahnstraße modellieren
2. ... wurde definiert als $U = (N, T, S, P)$
3. ... hat ausschließlich symmetrische Kanten

Ein Pfad...

1. ... wird als Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ angegeben
2. ... mit $v_0 = v_n$ heißt geschlossen oder Zyklus
3. ... hat die Länge $|p|$

Ein Huffman Code C...

1. ... ist immer präfixfrei.
2. ... ist immer eindeutig.
3. ... kann definiert sein als $C : \{a, b, c\} \to \{0.1\}^*$ mit $C(a) = 00, C(b) = 010, C(c) = 001.$
4. ... codiert selten vorkommende Symbole durch kurze Wörter.
5. ... lässt sich mittels eines Baumes bestimmen.

Zum Warmwerden...

Ein ungerichteter Graph U...

1. ... kann eine Einbahnstraße modellieren
2. ... wurde definiert als $U = (N, T, S, P)$
3. ... hat ausschließlich symmetrische Kanten

Ein Pfad...

1. ... wird als Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ angegeben
2. ... mit $v_0 = v_n$ heißt geschlossen oder Zyklus
3. ... hat die Länge $|p|$

Ein Huffman Code C...

1. ... ist immer präfixfrei.
2. ... ist immer eindeutig.
3. ... kann definiert sein als $C : \{a, b, c\} \rightarrow \{0.1\}^*$ mit $C(a) = 00, C(b) = 010, C(c) = 001.$
4. ... codiert selten vorkommende Symbole durch kurze Wörter.
5. ... lässt sich mittels eines Baumes bestimmen.

Zum Warmwerden...

Ein ungerichteter Graph U...

1. ... kann eine Einbahnstraße modellieren
2. ... wurde definiert als $U = (N, T, S, P)$
3. ... hat ausschließlich symmetrische Kanten

Ein Pfad...

1. ... wird als Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ angegeben
2. ... mit $v_0 = v_n$ heißt geschlossen oder Zyklus
3. ... hat die Länge $|p|$

Ein Huffman Code C...

1. ... ist immer präfixfrei.
2. ... ist immer eindeutig.
3. ... kann definiert sein als $C : \{a, b, c\} \to \{0.1\}^*$ mit $C(a) = 00, C(b) = 010, C(c) = 001.$
4. ... codiert selten vorkommende Symbole durch kurze Wörter.
5. ... lässt sich mittels eines Baumes bestimmen.

Zum Warmwerden...

Ein ungerichteter Graph U...

1. ... kann eine Einbahnstraße modellieren
2. ... wurde definiert als $U = (N, T, S, P)$
3. ... hat ausschließlich symmetrische Kanten

Ein Pfad...

1. ... wird als Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^{(+)}$ angegeben
2. ... mit $v_0 = v_n$ heißt geschlossen oder Zyklus
3. ... hat die Länge $|p|$

Ein Huffman Code C...

1. ... ist immer präfixfrei.
2. ... ist immer eindeutig.
3. ... kann definiert sein als $C : \{a, b, c\} \to \{0.1\}^*$ mit $C(a) = 00, C(b) = 010, C(c) = 001$.
4. ... codiert selten vorkommende Symbole durch kurze Wörter.
5. ... lässt sich mittels eines Baumes bestimmen.

Übersicht

Aufgabenblatt 6

Blatt 6

- Abgaben: 19 / 19
- Punkte: Durchschnitt der abgegeben Blätter 13,5 von 21

häufige Fehler

- Notationen beachten:
  $(x, z) \in P \circ R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$

Aufgabenblatt 6

Blatt 6

- Abgaben: 19 / 19
- Punkte: Durchschnitt der abgegeben Blätter 13,5 von 21

häufige Fehler

- Notationen beachten:
  $(x, z) \in P \circ R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$
- Rekursionen brauchen immer auch Abbruchbedingungen

Übersicht

Aufgabenblatt 8

Blatt 8

- Abgabe: 14.12.2012 um 12:30 Uhr im Untergeschoss des Infobaus
- Punkte: maximal 19

Themen

- Graphen
  - Teilgraphen
  - Warshall-Algorithmus
  - Wegematrix

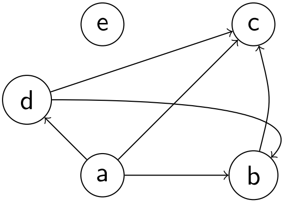
Übersicht

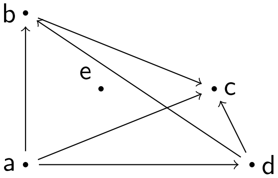
Gerichteter Graph

Definition

Ein gerichteter Graph G ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit

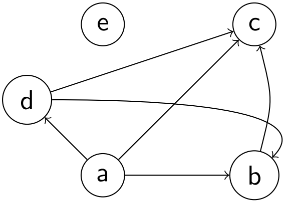
- der Grundmenge $V = \{v_i\}$ (die Menge der Ecken)
- der Relation $E \subseteq V \times V$ (die Menge der Kanten)
  Notationen für Kanten:
  - $(v, v') \in E$
  - $v \to_G v'$
  - $v \to v'$

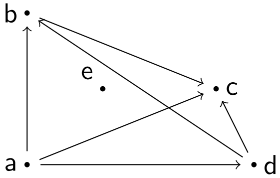




Sind die beiden Graphen isomorph?

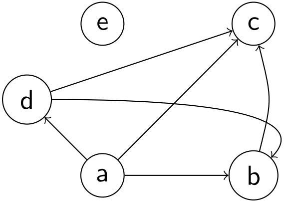
Gebt die Graphen in Tupelschreibweise an!

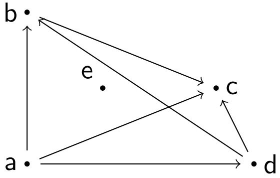




Ja, die beiden Graphen sind isomorph.

Gebt den Graph in Tupelschreibweise an!





Ja, die beiden Graphen sind isomorph.

$G = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, b), (d, c)\})$

Graphen

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).

Graphen

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.

Graphen

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.

Graphen

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.
- Ein Graph heißt **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt.

Graphen

Karlsruhe Institute of Technology

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.
- Ein Graph heißt **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt.
- $G' = (V', E')$ ist ein **Teilgraph** von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap V' \times V'$
- zwei Graphen sind isomorph, wenn es eine Bijektion der Knoten von G_1 gibt, so dass er mit G_2 identisch ist

Aufgabe

Karlsruhe Institute of Technology

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
  Lösung: n^2 Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
  Lösung: n^2 Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
  Lösung: $n(n-1)$ Kanten

gerichtete Bäume

Definition

In einem gerichteten Baum ...

gerichtete Bäume

Definition

In einem gerichteten Baum ...

- ... gibt es genau einen Knoten $r \in V$ so dass:
  für alle $x \in V$ ex. genau ein Pfad von r nach x

gerichtete Bäume

Definition

In einem gerichteten Baum ...

- ... gibt es genau einen Knoten $r \in V$ so dass:
  für alle $x \in V$ ex. genau ein Pfad von r nach x
- ... ist die Wurzel eindeutig

Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades

Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ und $v_1, \ldots, v_n$ je paarweise verschieden sind, also maximal v_0 und v_n gleich sind.

Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ und $v_1, \dots, v_n$ je paarweise verschieden sind, also maximal v_0 und v_n gleich sind.
- Falls $v_0 = v_n$ heißt der Pfad *geschlossen*. Dann ist der Pfad auch ein Zyklus.

Pfade

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \ldots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten $v_0, \ldots, v_{n-1}$ und $v_1, \ldots, v_n$ je paarweise verschieden sind, also maximal v_0 und v_n gleich sind.
- Falls $v_0 = v_n$ heißt der Pfad *geschlossen*. Dann ist der Pfad auch ein Zyklus.
- ein geschlossener und wiederholungsfreier Pfad ist ein *einfacher Zyklus*.

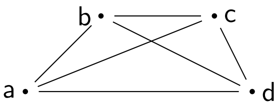
Übersicht

Ungerichteter Graph

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \land y \in V\}$ die Menge der Kanten.

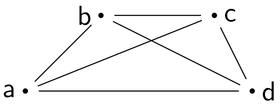


Ungerichteter Graph

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$ die Menge der Kanten.



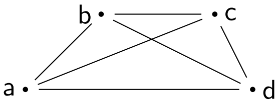
Wie sähe dieser ungerichtete Graph als Menge aus?

Ungerichteter Graph

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \land y \in V\}$ die Menge der Kanten.



Wie sähe dieser ungerichtete Graph als Menge aus?

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{d, b\}, \{d, c\}\})$$

Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Aufgabe

Karlsruhe Institute of Technology

Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
  Lösung: $n(n-1)/2$ Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

Aufgabe

Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
  Lösung: $n(n-1)/2$ Kanten
- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
  Lösung: $n(n+1)/2$ Kanten

zusammenhängende Graphen

Definition

Wir nennen ...

- einen gerichteten Graphen *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ gilt: Es gibt in G einen Pfad von x nach y.

zusammenhängende Graphen

Definition

Wir nennen ...

- einen gerichteten Graphen *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ gilt: Es gibt in G einen Pfad von x nach y.
- einen ungerichteten Graphen *zusammenhängend*, wenn der entsprechende gerichtete Graph *streng zusammenhängend* ist.

ungerichtete Bäume

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum

ungerichtete Bäume

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum
- Im ungerichteten Baum kann theoretisch jeder Knoten Wurzel sein.

ungerichtete Bäume

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum
- Im ungerichteten Baum kann theoretisch jeder Knoten Wurzel sein.
- Daher wird i.d.R. ein Knoten als Wurzel hervorgehoben.

Übersicht

Maximaler Fluss eines Graphen

Allgemein

- Gegeben ein Graph, dessen Kanten durch $c(u, v)$ gewichtet sind

Maximaler Fluss eines Graphen

Allgemein

- Gegeben ein Graph, dessen Kanten durch $c(u, v)$ gewichtet sind
- Der Graph besitze einen ausgezeichneten Anfangsknoten(Quelle) und Endknoten(Senke)

Maximaler Fluss eines Graphen

Karlsruhe Institute of Technology

Allgemein

- Gegeben ein Graph, dessen Kanten durch $c(u, v)$ gewichtet sind
- Der Graph besitze einen ausgezeichneten Anfangsknoten(Quelle) und Endknoten(Senke)
- Gesucht ist der maximale Fluss zwischen Quelle und Senke

Maximaler Fluss eines Graphen

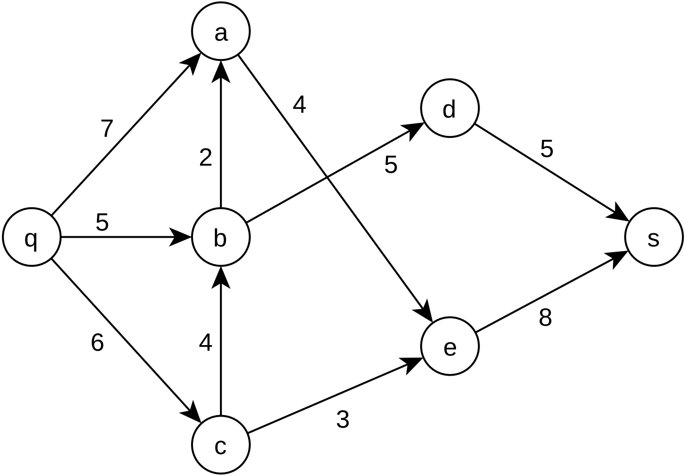
Allgemein

- Gegeben ein Graph, dessen Kanten durch $c(u, v)$ gewichtet sind
- Der Graph besitze einen ausgezeichneten Anfangsknoten(Quelle) und Endknoten(Senke)
- Gesucht ist der maximale Fluss zwischen Quelle und Senke

Beispiel

Gegeben sei ein Rohrsystem (von q nach s), durch das Wasser fließt. Wie viel Wasser kann auf einmal durch das Rohrsystem fließen?

Beispielgraph



Beispiel Routenplanung

Karlsruhe Institute of Technology

Beispiel

Was ist der kürzeste Weg von S nach Z wenn an den Kanten die Entfernung zwischen den Städten eingetragen ist?

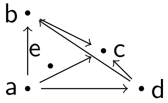
Matrizenrechnen!

Karlsruhe Institute of Technology

Wer wünscht sich dazu Beispiele?

Übersicht

Graphen im Rechner



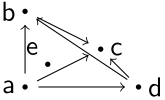
Ein Graph - verschiedene Schreibweisen

Für den oben angegebenen Graphen - in grafischer Darstellung - gibt es verschiedene Darstellungsarten:

Tupeldarstellung (aus dem letzten Tut):

$$G = (\{a, b, c, d, e\},$$
$$\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, b), (d, c)\})$$

Graphen im Rechner



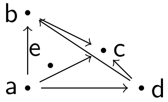
Ein Graph - verschiedene Schreibweisen

Für den oben angegebenen Graphen - in grafischer Darstellung - gibt es verschiedene Darstellungsarten:

Adjazenzliste :

a: [b,c,d]
b: [c]
c: []
d: [b, c]
e: []

Graphen im Rechner

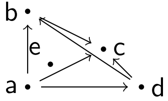


Ein Graph - verschiedene Schreibweisen

Für den oben angegebenen Graphen - in grafischer Darstellung - gibt es verschiedene Darstellungsarten:

Adjazenzmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Graphen im Rechner



Ein Graph - verschiedene Schreibweisen

Für den oben angegebenen Graphen - in grafischer Darstellung - gibt es verschiedene Darstellungsarten:

Adjazenzmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ was bedeutet $(A^2)_{ij}$?

Liste vs. Matrix

Adjazenzlisten

Adjanzenzmatrixen

Liste vs. Matrix

Adjazenzlisten

- einfacher Zugriff auf alle adjazenten Knoten

Adjanzenzmatrixen

Liste vs. Matrix

Adjazenzlisten

- einfacher Zugriff auf alle adjazenten Knoten
- Um zu überprüfen, ob eine Kante existiert, muss man eventuell alle Nachbarn durchgehen

Adjanzenzmatrixen

Liste vs. Matrix

Adjazenzlisten

- einfacher Zugriff auf alle adjazenten Knoten
- Um zu überprüfen, ob eine Kante existiert, muss man eventuell alle Nachbarn durchgehen

Adjanzenzmatrixen

- schnelle Überprüfung, ob eine Kante zwischen zwei Knoten i und j existiert

Liste vs. Matrix

Adjazenzlisten

- einfacher Zugriff auf alle adjazenten Knoten
- Um zu überprüfen, ob eine Kante existiert, muss man eventuell alle Nachbarn durchgehen

Adjanzenzmatrixen

- schnelle Überprüfung, ob eine Kante zwischen zwei Knoten i und j existiert
- Um auf einen Nachbarn zuzugreifen, muss man eventuell alle Knoten durchgehen

Liste vs. Matrix

Welche Darstellungsform ist geeigneter?

Für einen...

- vollständigen Graphen?

Liste vs. Matrix

Welche Darstellungsform ist geeigneter?

Für einen...

- vollständigen Graphen?
  Adjazenzmatrix
- Graphen mit nur wenigen Kanten?

Liste vs. Matrix

Welche Darstellungsform ist geeigneter?

Für einen...

- vollständigen Graphen?
  Adjazenzmatrix
- Graphen mit nur wenigen Kanten?
  Adjazenzliste
- Graphen, den wir später auf Reflexivität untersuchen wollen?

Liste vs. Matrix

Welche Darstellungsform ist geeigneter?

Für einen...

- vollständigen Graphen?
  Adjazenzmatrix
- Graphen mit nur wenigen Kanten?
  Adjazenzliste
- Graphen, den wir später auf Reflexivität untersuchen wollen?
  Adjazenzmatrix

Übersicht

Wegematrix I

Darstellung von Relationen

So wie die Adjazenzmatrix Relationen zwischen Knoten darstellt, können auch weitere Relationen als Matrix dargestellt werden. Ein Beispiel ist die Wegematrix, die eine Darstellungsform der Erreichbarkeitsrelation $E^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} E^i$.

Für die Wegematrix gilt

$$W_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls es in G einen Pfad von i nach j gibt} \\ 0, & \text{falls es in G keinen Pfad von i nach j gibt} \end{cases}$$

Aufwand

Zählweise

Beim Vergleich verschiedener Algorithmen in Bezug auf den Aufwand, sucht man nach einem Maß für die Anzahl der Rechenoperationen für eine Aufgabe der Größe n.

Beispiel

Aufwand

Zählweise

Beim Vergleich verschiedener Algorithmen in Bezug auf den Aufwand, sucht man nach einem Maß für die Anzahl der Rechenoperationen für eine Aufgabe der Größe n.

Beispiel

Summe aller Zahlen von 1 bis n:

$\sum_{i=0}^{n} i =$

Aufwand

Zählweise

Beim Vergleich verschiedener Algorithmen in Bezug auf den Aufwand, sucht man nach einem Maß für die Anzahl der Rechenoperationen für eine Aufgabe der Größe n.

Beispiel

Summe aller Zahlen von 1 bis n:
$\sum_{i=0}^{n} i = n * (n+1)/2$

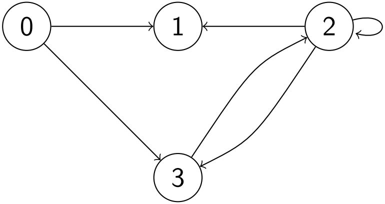
Algorithmus I


```
// Matrix A sei die Adjazenzmatrix
// Matrix W wird am Ende die Wegematrix enthalten

// Matrix M wird benutzt um A^i zu berechnen
W ← 0 // Nullmatrix
for i ← 0 to n - 1 do
  M ← Id // Einheitsmatrix
  for j ← 1 to i do
    M ← M · A // Matrixmultiplikation
  od
  W ← W + M // Matrixaddition
od
W ← sgn(W)
```

Algorithmus II

```
// Matrix A sei die Adjazenzmatrix
// Matrix W wird am Ende die Wegematrix enthalten

// Matrix M wird benutzt um A^i zu berechnen
W ← 0 // Nullmatrix
M ← Id // Einheitsmatrix
for i ← 0 to n - 1 do
  W ← W + M // Matrixaddition
  M ← M · A // Matrixmultiplikation
od
W ← sgn(W)
```

Wegematrix II

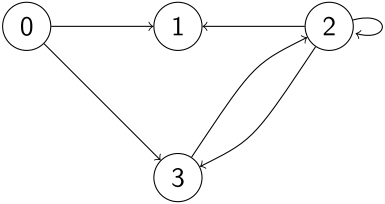


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihr seid dran...

- Wie sieht die Wegematrix zum oben gezeigten Graph aus?

Wegematrix II

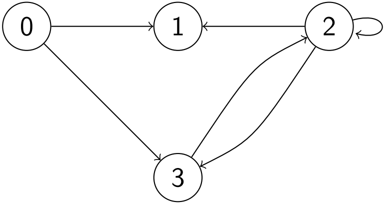


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihr seid dran...

- Wie sieht die Wegematrix zum oben gezeigten Graph aus?
- Wie sieht die Wegematrix für eine vollständig mit 1en gefüllte Matrix aus?

Wegematrix II



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihr seid dran...

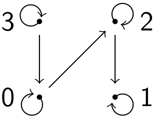
- Wie sieht die Wegematrix zum oben gezeigten Graph aus?
- Wie sieht die Wegematrix für eine vollständig mit 1en gefüllte Matrix aus?
- Wann gilt allgemein $W = A$? Wann gilt $E^1 = A$?

Übersicht

Reflexive Transitive Hülle nach Warshall

Gegeben sei eine reflexive Relation ρ über einer endlichen Eckenmenge $E = \{0, \ldots, n-1\}$. $\sigma^{(k)}$ sei folgende Relation:

$$\sigma^{(k)} = \{(i,j) \in E \times E | \exists \text{Weg } i \to e_1 \to \cdots \to e_{l-1} \to j \\ \text{mit } l \leq k+2, e_r \in \{0, \ldots, k\} \text{ für } 1 \leq r \leq l-1\}$$

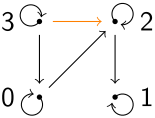


$$\sigma^{(0)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexive Transitive Hülle nach Warshall

Gegeben sei eine reflexive Relation ρ über einer endlichen Eckenmenge $E = \{0, \ldots, n-1\}$. $\sigma^{(k)}$ sei folgende Relation:

$$\sigma^{(k)} = \{(i,j) \in E \times E | \exists \text{Weg } i \to e_1 \to \cdots \to e_{l-1} \to j$$
$$\text{mit } l \leq k+2, e_r \in \{0, \ldots, k\} \text{ für } 1 \leq r \leq l-1\}$$

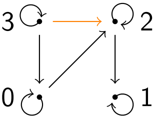


$$\sigma^{(0)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexive Transitive Hülle nach Warshall

Gegeben sei eine reflexive Relation ρ über einer endlichen Eckenmenge $E = \{0, \ldots, n-1\}$. $\sigma^{(k)}$ sei folgende Relation:

$$\sigma^{(k)} = \{(i,j) \in E \times E | \exists \text{Weg } i \to e_1 \to \cdots \to e_{l-1} \to j$$
$$\text{mit } l \leq k+2, e_r \in \{0, \ldots, k\} \text{ für } 1 \leq r \leq l-1\}$$

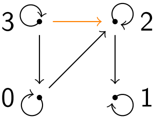


$$\sigma^{(0)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexive Transitive Hülle nach Warshall

Gegeben sei eine reflexive Relation ρ über einer endlichen Eckenmenge $E = \{0, \ldots, n-1\}$. $\sigma^{(k)}$ sei folgende Relation:

$$\sigma^{(k)} = \{(i,j) \in E \times E | \exists \text{Weg } i \to e_1 \to \cdots \to e_{l-1} \to j \\ \text{mit } l \leq k+2, e_r \in \{0, \ldots, k\} \text{ für } 1 \leq r \leq l-1\}$$

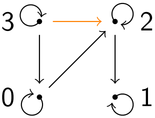


$$\sigma^{(0)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexive Transitive Hülle nach Warshall

Gegeben sei eine reflexive Relation ρ über einer endlichen Eckenmenge $E = \{0, \dots, n-1\}$. $\sigma^{(k)}$ sei folgende Relation:

$$\sigma^{(k)} = \{(i,j) \in E \times E \mid \exists \text{Weg } i \to e_1 \to \cdots \to e_{l-1} \to j$$
$$\text{mit } l \leq k+2, e_r \in \{0, \dots, k\} \text{ für } 1 \leq r \leq l-1\}$$



$$\sigma^{(0)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

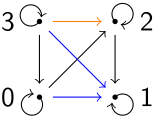
$$\sigma^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexive Transitive Hülle nach Warshall

Gegeben sei eine reflexive Relation ρ über einer endlichen Eckenmenge $E = \{0, \dots, n-1\}$. $\sigma^{(k)}$ sei folgende Relation:

$$\sigma^{(k)} = \{(i,j) \in E \times E \mid \exists \text{Weg } i \to e_1 \to \dots \to e_{l-1} \to j \\ \text{mit } l \leq k+2, e_r \in \{0, \dots, k\} \text{ für } 1 \leq r \leq l-1\}$$



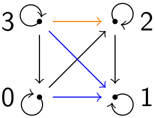
$$\sigma^{(0)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reflexive Transitive Hülle nach Warshall

Gegeben sei eine reflexive Relation ρ über einer endlichen Eckenmenge $E = \{0, \dots, n-1\}$. $\sigma^{(k)}$ sei folgende Relation:

$$\sigma^{(k)} = \{(i,j) \in E \times E \mid \exists \text{Weg } i \to e_1 \to \cdots \to e_{l-1} \to j \\ \text{mit } l \leq k+2, e_r \in \{0, \dots, k\} \text{ für } 1 \leq r \leq l-1\}$$



$$\sigma^{(0)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(1)} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{(3)} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Warshall-Algorithmus

Anforderungsbeschreibung

Eingabe: Adjazenzmatrix A einer Relation σ

Ausgabe: Adjanzenzmatrix S von σ^*

Der Warshall-Algorithmus

Anforderungsbeschreibung

Eingabe: Adjazenzmatrix A einer Relation σ

Ausgabe: Adjanzenzmatrix S von σ^* (entspricht der Erreichbarkeitsrelation)

Der Warshall-Algorithmus

Anforderungsbeschreibung

Eingabe: Adjazenzmatrix A einer Relation σ

Ausgabe: Adjanzenzmatrix S von σ^* (entspricht der Erreichbarkeitsrelation)

Der Algorithmus

```
S := A
 for i = 0,...,n-1 set s_ii := 1

 for k = 0,...,n-1
   for i = 0,...,n-1
     for j = 0,...,n-1
       if (s_ij + s_ik * s_kj) >= 1 set s_ij := 1
```

Übersicht

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?
- Wie werden Graphen im Rechner dargestellt?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?
- Wie werden Graphen im Rechner dargestellt?
- Vor- & Nachteile von Adjazenzliste und Adjazenzmatrix

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?
- Wie werden Graphen im Rechner dargestellt?
- Vor- & Nachteile von Adjazenzliste und Adjazenzmatrix
- Was ist eine Wegematrix?

Zum Schluss...

Karlsruhe Institute of Technology

Was ihr nun wissen solltet!

- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?
- Wie werden Graphen im Rechner dargestellt?
- Vor- & Nachteile von Adjazenzliste und Adjazenzmatrix
- Was ist eine Wegematrix?
- Was sind Gewichte von Graphen und wozu sind sie nützlich?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?
- Wie werden Graphen im Rechner dargestellt?
- Vor- & Nachteile von Adjazenzliste und Adjazenzmatrix
- Was ist eine Wegematrix?
- Was sind Gewichte von Graphen und wozu sind sie nützlich?

Ihr wisst was nicht?
Stellt **jetzt** Fragen!

Ende

MEINE FISCHE SIND WAS?
UND ICH DACHTE, ICH MÜSSTE
DAS AQUARIUM UMDREHEN.
TUT MIR LEID.
WWW.NICHTLUSTIG.DE