Übung “Grundbegriffe der Informatik”

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 034

email: schulz@ira.uka.de

Huffman-Codierung

Artikel im ...

- Deutschen: der, die, das

.

Huffman-Codierung

Artikel im ...

- Deutschen: der, die, das
- Englischen: the

.

Huffman-Codierung

Artikel im ...

- Deutschen: der, die, das
- Englischen: the
- Französischen: le, la

.

Huffman-Codierung

Artikel im ...

- Deutschen: der, die, das
- Englischen: the
- Französischen: le, la
- Schwedischen: fattningsförmaga

Huffman-Codierung

Artikel im ...

- Deutschen: der, die, das
- Englischen: the
- Französischen: le, la
- Schwedischen: fattningsförmaga

Plausibel?

Huffman-Codierung

Artikel im ...

- Deutschen: der, die, das
- Englischen: the
- Französischen: le, la
- Schwedischen: fattningsförmaga

$\rightarrow$ Häufig gebrauchte Wörter im Allgemeinen kurz!

Huffman-Codierung

$w = aabaacabaacaabaaacacaabbaccabbaaaabbaccaaa$
$aaaabaacaabbabbacaabaacaaccaaaaaaaccaaaaaaaccacc$

.

Huffman-Codierung

$w = aabaacabaacaabaaacacaabbaccabbaaaabbaccaaa$
$aaaabaacaabbabbacaabaacaaccaaaaaaaccaaaaaaaccacc$

- Schritt 1: Wort in Blöcke unterteilen (hier: Länge 3):

  $aab\ aac\ aba\ aca\ aba\ aac\ aca\ abb\ acc\ abb\ aaa\ abb\ acc\ aaa\ aaa\ aba$
  $aca\ \ abb\ \ abb\ \ aca\ \ aba\ \ aca\ \ acc\ \ aaa\ \ aaa\ \ acc\ \ aaa\ \ aaa\ \ acc\ \ acc$

.

Huffman-Codierung

$w = aabaacabaacaabaaacacaabbaccabbaaaabbaccaaa$
$aaaabaacaabbabbacaabaacaaccaaaaaaaccaaaaaaaccacc$

- Schritt 1: Wort in Blöcke unterteilen (hier: Länge 3):

  $aab\ aac\ aba\ aca\ aba\ aac\ aca\ abb\ acc\ abb\ aaa\ abb\ acc\ aaa\ aaa\ aba$
  $aca\ abb\ abb\ aca\ aba\ aca\ acc\ aaa\ aaa\ acc\ aaa\ aaa\ acc\ acc$

- Schritt 2: Vorkommen zählen:

  $aab - 1, aac - 2, aba - 4, aca - 5, abb - 5, acc - 6, aaa - 7$

.

Huffman-Codierung

$w = aabaacabaacaabaaacacaabbaccabbaaaabbaccaaa$
$aaaabaacaabbabbacaabaacaaccaaaaaaaccaaaaaaaccacc$

- Schritt 1: Wort in Blöcke unterteilen (hier: Länge 3):

  $aab\ aac\ aba\ aca\ aba\ aac\ aca\ abb\ acc\ abb\ aaa\ abb\ acc\ aaa\ aaa\ aba$
  $aca\ abb\ abb\ aca\ aba\ aca\ acc\ aaa\ aaa\ acc\ aaa\ aaa\ acc\ acc$

- Schritt 2: Vorkommen zählen:

  $aab - 1, aac - 2, aba - 4, aca - 5, abb - 5, acc - 6, aaa - 7$

- Schritt 3: Baum erstellen.

Huffman-Codierung

$w = aabaacabaacaabaaacacaabbaccabbaaaabbaccaaa$
$aaaabaacaabbabbacaabaacaaccaaaaaaaccaaaaaaaccacc$

- Schritt 4: Codierung der einzelnen Blöcke ablesen:

  $aab - 0000, aac - 0001, aba - 001, aca - 100,$
  $abb - 101, acc - 01, aaa - 11$

.

Huffman-Codierung

$w = aabaacabaacaabaaacacaabbaccabbaaaabbaccaaa$
$aaaabaacaabbabbacaabaacaaccaaaaaaaccaaaaaaaccacc$

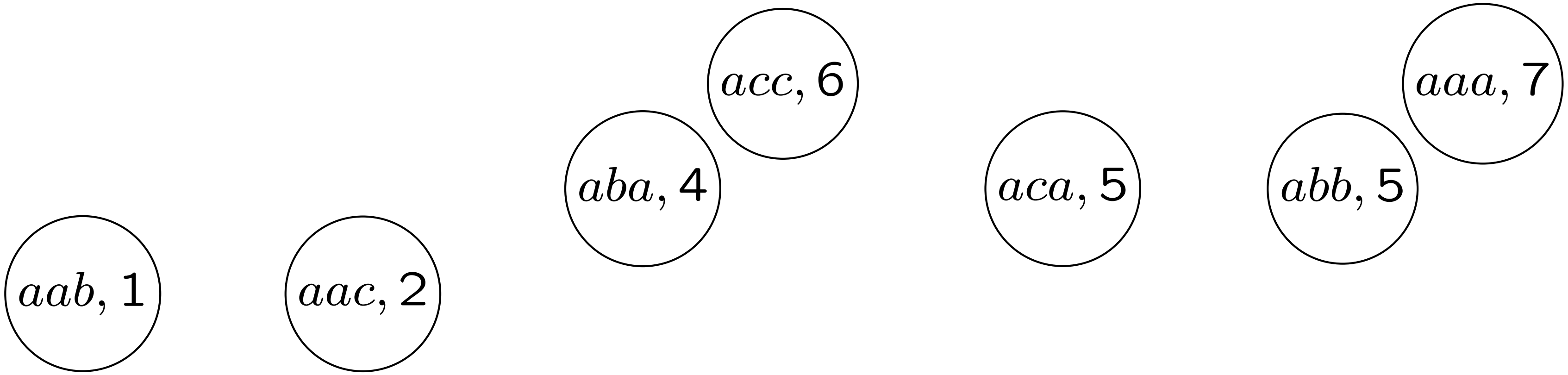
- Schritt 4: Codierung der einzelnen Blöcke ablesen:

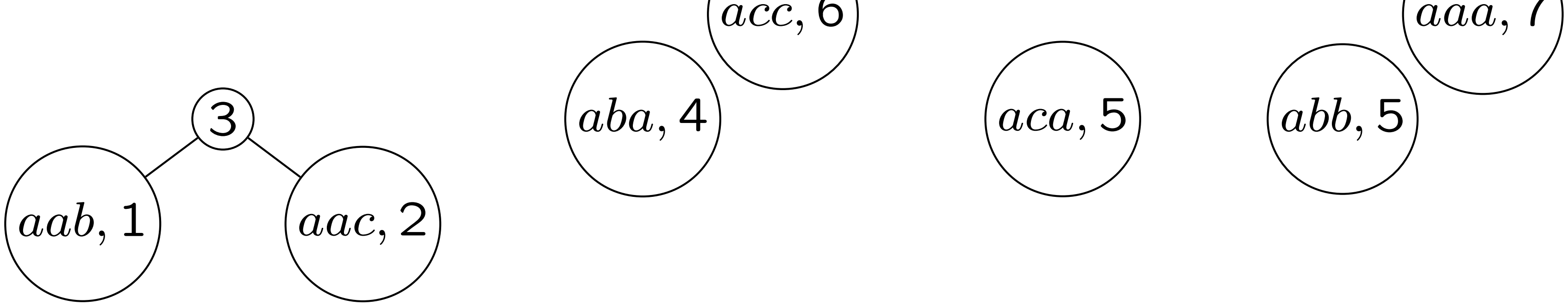
  $aab - 0000, aac - 0001, aba - 001, aca - 100,$
  $abb - 101, acc - 01, aaa - 11$

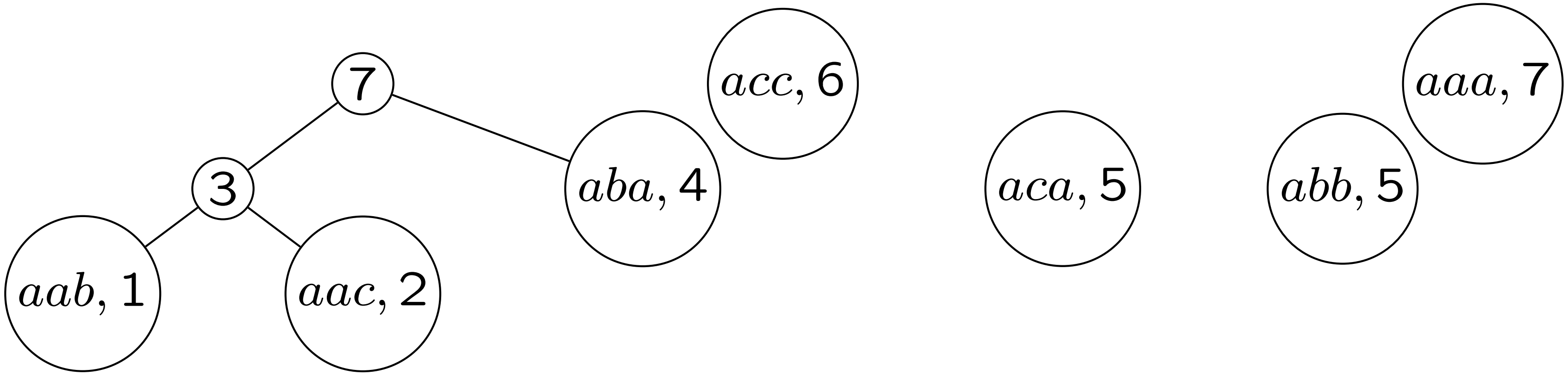
- Schritt 5: Übersetzen:

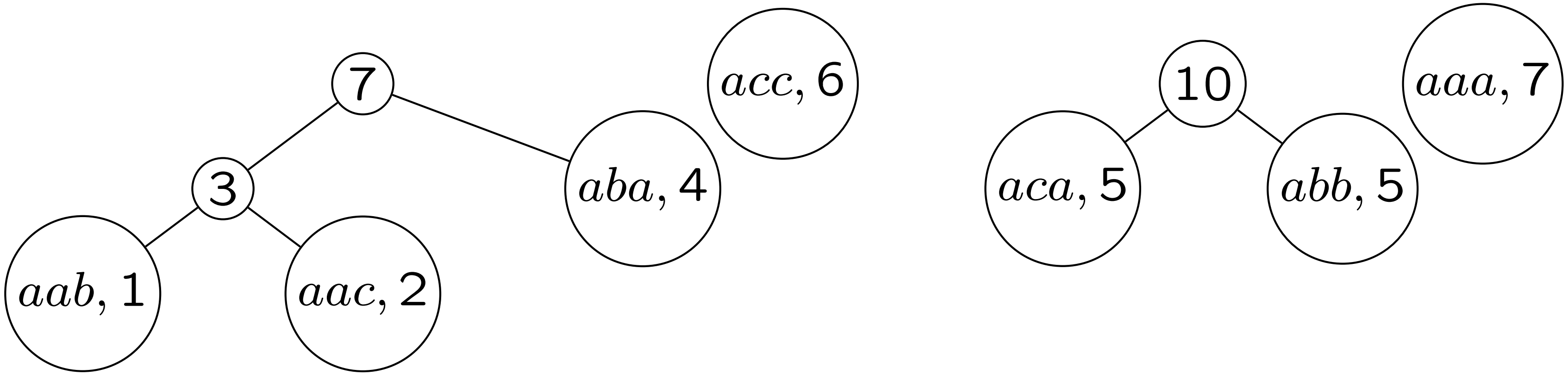
  $c(w) = 0000000100110000100011001010110111101011 1$
  $110011001011011000011000111110111110101$

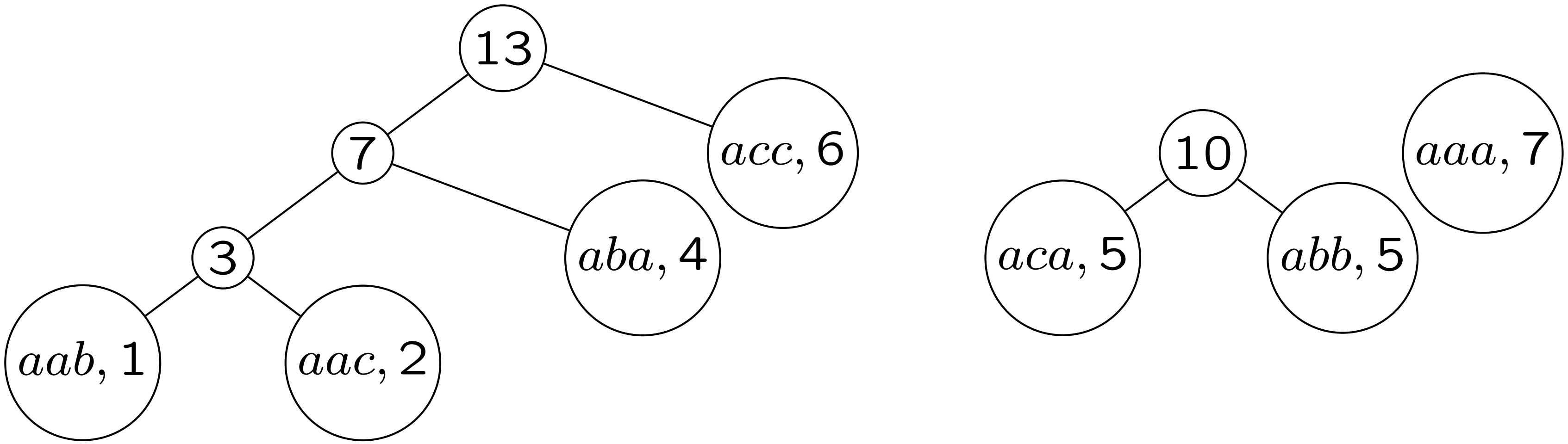
.

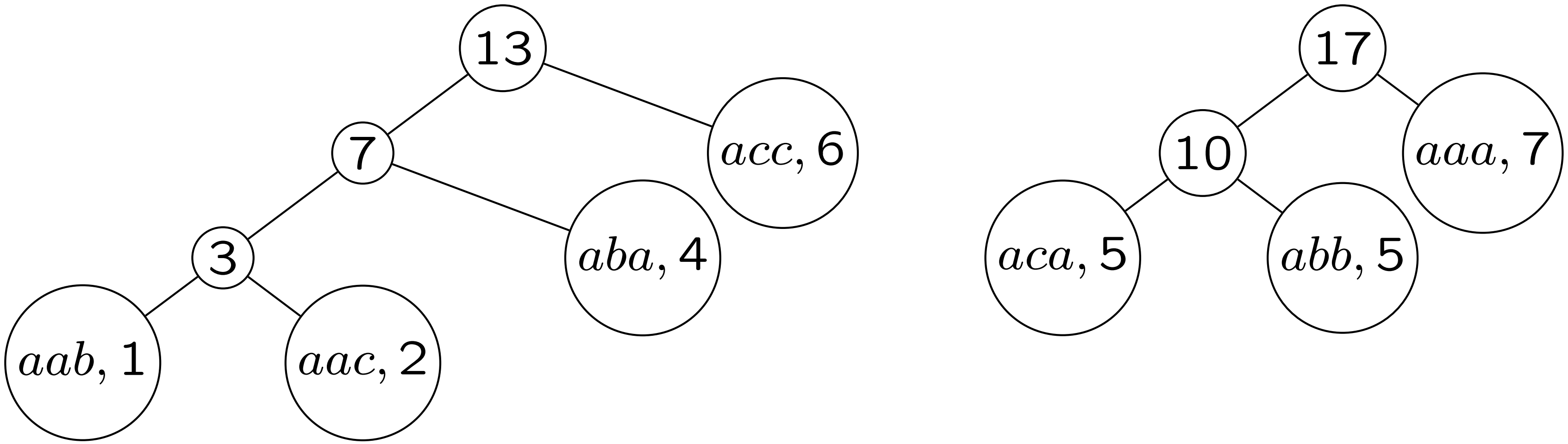

$acc, 6$
$aaa, 7$
$aba, 4$
$aca, 5$
$abb, 5$
$aab, 1$
$aac, 2$

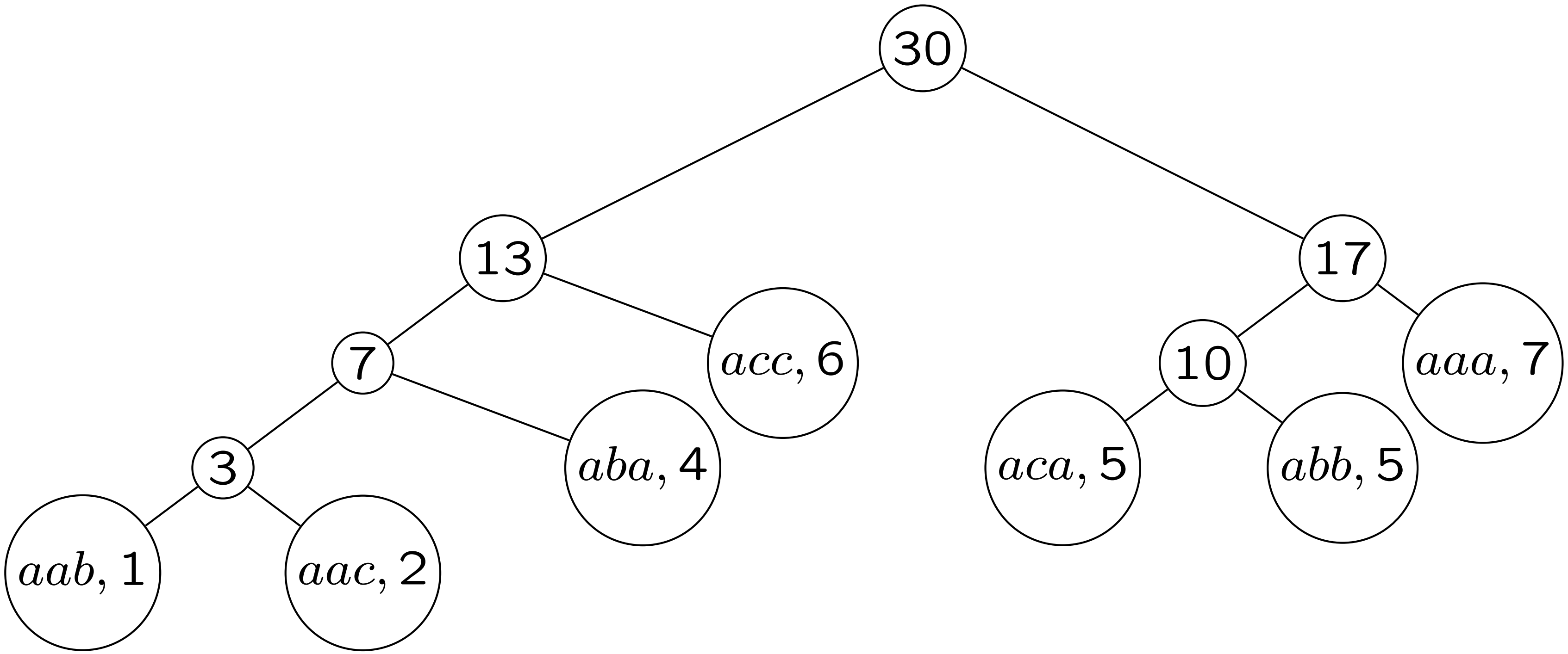

3
aab, 1
aac, 2
aba, 4
acc, 6
aca, 5
abb, 5
aaa, 7

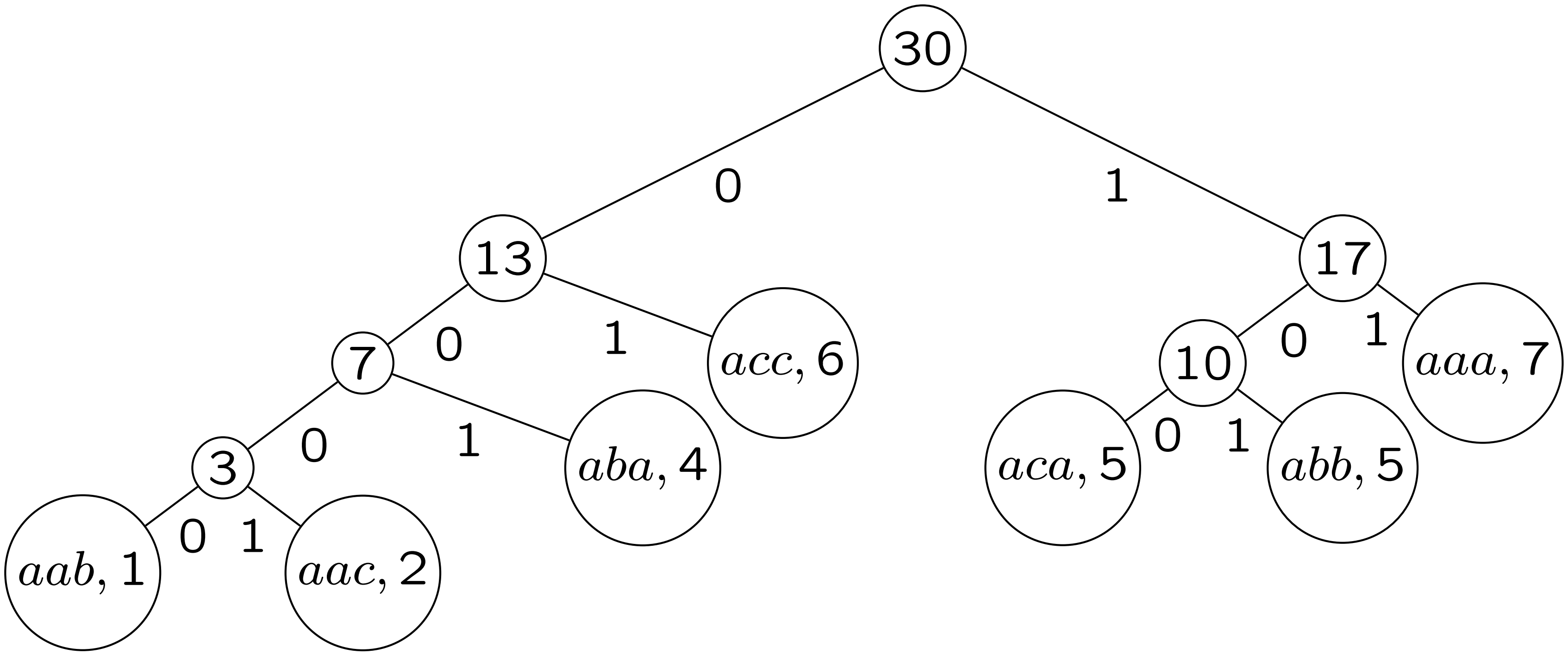

7
3
aab, 1
aac, 2
aba, 4
acc, 6
aca, 5
abb, 5
aaa, 7


7
3
aab, 1
aac, 2
aba, 4
acc, 6
10
aca, 5
abb, 5
aaa, 7


13
7
3
aab, 1
aac, 2
aba, 4
acc, 6
10
aca, 5
abb, 5
aaa, 7


13
7
$acc, 6$
3
$aba, 4$
$aab, 1$
$aac, 2$
17
10
$aaa, 7$
$aca, 5$
$abb, 5$


30
13
17
7
$acc, 6$
10
$aaa, 7$
3
$aba, 4$
$aca, 5$
$abb, 5$
$aab, 1$
$aac, 2$


30
0
1
13
17
7
0
1
$acc, 6$
10
0
1
$aaa, 7$
3
0
1
$aba, 4$
$aca, 5$
0
1
$abb, 5$
$aab, 1$
0
1
$aac, 2$

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

.

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

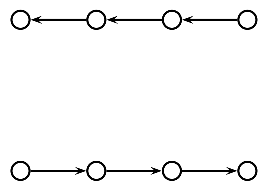
Also: Knotenbeschriftungen weglassen!

.

Graphen

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

Beispiel für isomorphe Graphen:



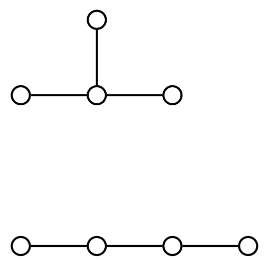
Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

Überlegung: Betrachte erstmal alle **ungerichteten** Bäume mit vier Knoten.

.

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

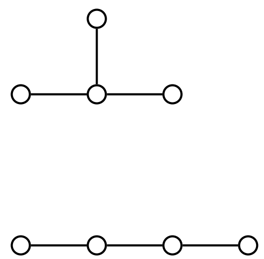
Überlegung: Betrachte erstmal alle **ungerichteten** Bäume mit vier Knoten.



Graphen

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

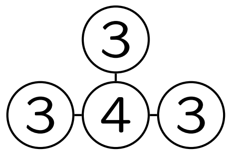
Überlegung: Welche Knoten sind “gleichwertig”?

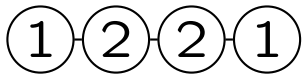


Graphen

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

Überlegung: Welche Knoten sind “gleichwertig”?

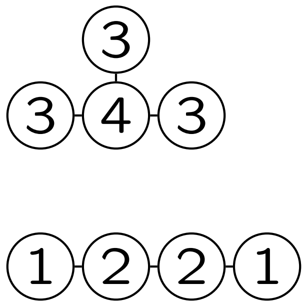




Graphen

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

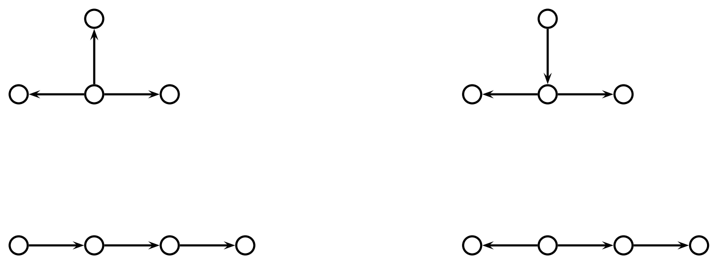
Pro gleichwertigen Knoten v: Ein Baum mit Wurzel v.



Graphen

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

Pro gleichwertigen Knoten v: Ein Baum mit Wurzel v.



$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

.

$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

Schritt 1: Knoten halbwegs übersichtlich anordnen.

.

Graphen

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

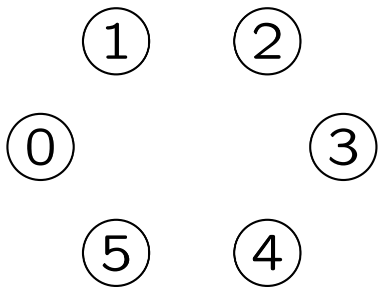
Zeichne G_6, G_8, G_9.

Schritt 1: Knoten halbwegs übersichtlich anordnen.

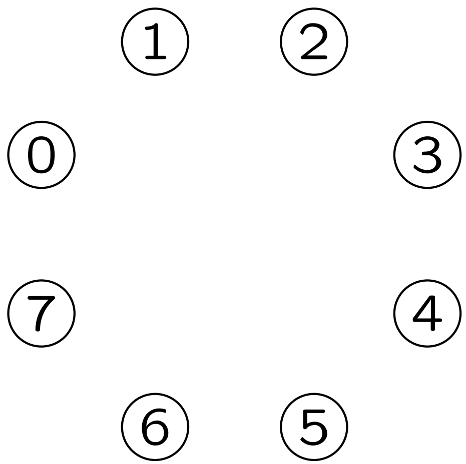
$\rightarrow$ Guter Start: (Halbwegs) Regelmäßiges $|V|$-Eck.

.

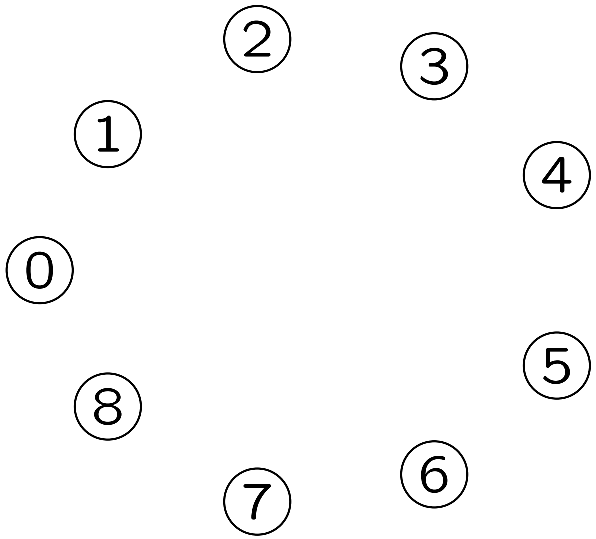
G_6:



G_8:



G_9:



Graphen

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x,y\} \mid ggt(|x-y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x,y\} \in E$.

.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x, y\} \in E$.

Beispiel: $G_6, x = 0, y \in \{1, 5\}$

.

Graphen

$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x, y\} \in E$.

Beispiel: $G_8, x = 2, y \in \{1, 3, 5, 7\}$

.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x, y\} \in E$.

Beispiel: $G_9, x = 5, y \in \{0, 1, 3, 4, 6, 7\}$

.

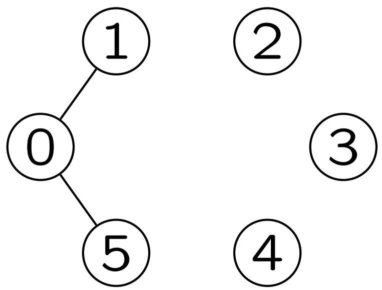
$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

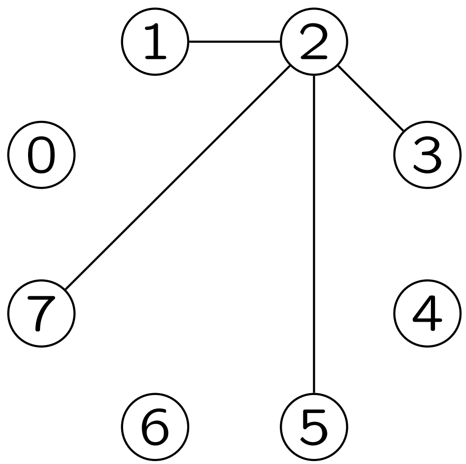
Schritt 3: Verbinde x mit allen y, für die $\{x, y\} \in E$ gilt.

.

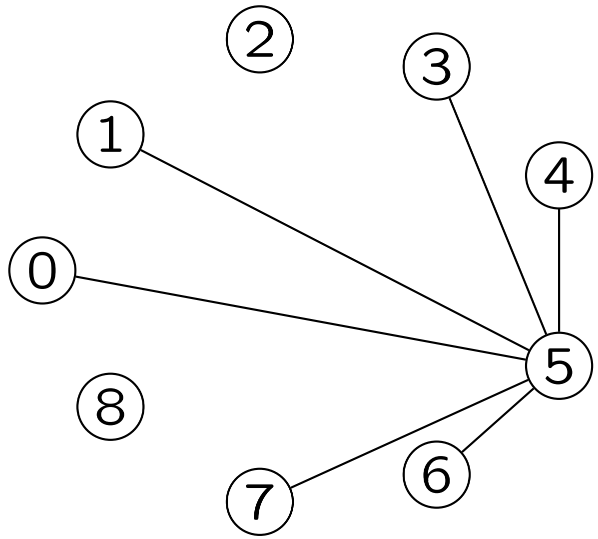
G_6:



G_8:



G_9:



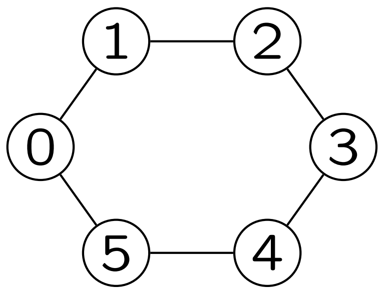
$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

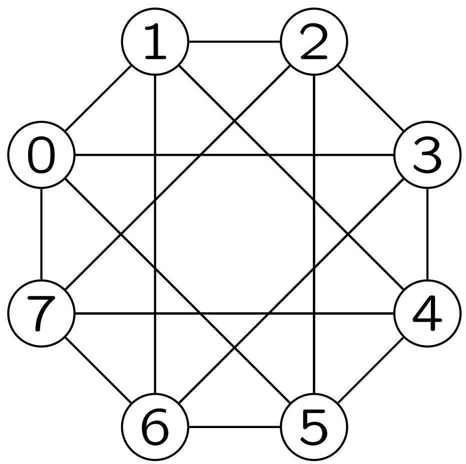
Schritt 4: Wiederhole Schritte 2, 3 für alle Knoten.

.

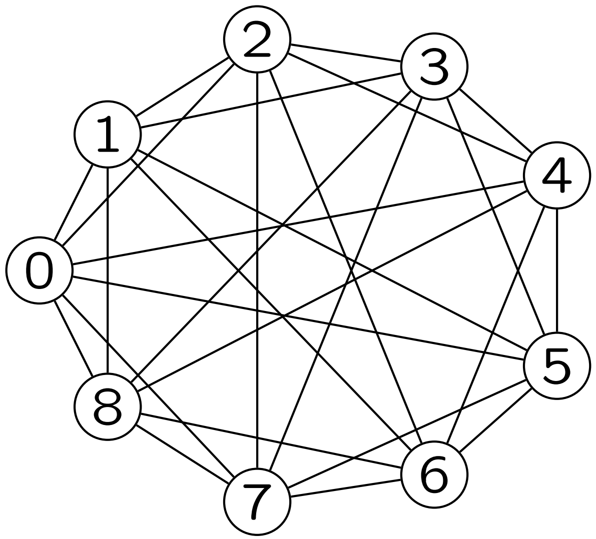
G_6:



G_8:



G_9:



$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 1: Für $n \geq 3$ gilt $n^2 \geq n \Rightarrow \mathbb{G}_n \subseteq \mathbb{G}_{n^2} \Rightarrow V_n \subseteq V_{n^2}$.

.

$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n)\\
V_n &= \mathbb{G}_n\\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x-y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x-y|, n) = 1$.

.

$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x-y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x-y|, n) = 1$.
Sei $g = ggt(|x-y|, n^2)$. Angenommen, $g \neq 1$.

.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x - y|, n) = 1$.
Sei $g = ggt(|x - y|, n^2)$. Angenommen, $g \neq 1$.
Sei p eine Primzahl, die g teilt.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x-y|, n) = 1\}$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x-y|, n) = 1$.
Sei $g = ggt(|x-y|, n^2)$. Angenommen, $g \neq 1$.
Sei p eine Primzahl, die g teilt. Dann teilt p $|x-y|$ und n^2.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x - y|, n) = 1$.
Sei $g = ggt(|x - y|, n^2)$. Angenommen, $g \neq 1$.
Sei p eine Primzahl, die g teilt. Dann teilt p $|x - y|$ und n^2.
Dann teilt p $|x - y|$ und $n \Rightarrow ggt(|x - y|, n) \geq p \neq 1$.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x - y|, n) = 1$.
Sei $g = ggt(|x - y|, n^2)$. Angenommen, $g \neq 1$.
Dies führt zu einem Widerspruch, und es folgt $ggt(|x - y|, n^2) = 1$

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x - y|, n) = 1$.

Es folgt $ggt(|x - y|, n^2) = 1$ und damit $\{x, y\} \in E_{n^2}$.

$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+ : n \geq 3 \Rightarrow G_n$ ist Teilgraph von G_{n^2}.

Schritt 2: $E_n \subseteq E_{n^2}$:

Sei $\{x, y\} \in E_n \Rightarrow ggt(|x - y|, n) = 1$.

Es folgt $ggt(|x - y|, n^2) = 1$ und damit $\{x, y\} \in E_{n^2}$.
Daraus folgt die Behauptung.

Nachtrag

Braucht man so etwa wie $F : B^A \times A \to B^A$ in der Praxis?

.

Nachtrag

Braucht man so etwa wie $F : B^A \times A \to B^A$ in der Praxis?

Beispiel: Integral!

.

Nachtrag

Braucht man so etwa wie $F : B^A \times A \to B^A$ in der Praxis?

Beispiel: Integral!

$F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$(f, a) \mapsto (x \mapsto \int_a^x f(u)\, du)$ oder
$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \forall a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : (F(f, a))(x) = \int_a^x f(u)\, du$

.

Aufgabe 4.3

$$(S \Rightarrow^* w) \Rightarrow N_S(w) + N_a(w) > N_b(w)$$

.

Aufgabe 4.3

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (S \Rightarrow^i w) \Rightarrow N_S(w) + N_a(w) > N_b(w)$$

Induktionsanfang: $i = 0$: Klar.

.

Aufgabe 4.3

$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (S \Rightarrow^i w) \Rightarrow N_S(w) + N_a(w) > N_b(w)$

Induktionsvoraussetzung: $(S \Rightarrow^i w) \Rightarrow N_S(w) + N_a(w) > N_b(w)$.

.

Aufgabe 4.3

$\forall i \in \mathbb{N}_0 : (S \Rightarrow^i w) \Rightarrow N_S(w) + N_a(w) > N_b(w)$

Induktionsschluss: $(S \Rightarrow^{i+1} w') \Rightarrow N_S(w) + N_a(w) > N_b(w)$:

$(S \Rightarrow^{i+1} w') \Rightarrow S \Rightarrow^i w \Rightarrow w'$
$\Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \{a, b, S\}^* : w = w_1 S w_2 \wedge w' \in \{w_1 a w_2, w_1 a S b w_2, w_1 a S w_2\}.$

Für jeden Fall mit IV Behauptung zeigen.

.