30.11.2012

Willkommen zur siebten Übung zur Vorlesung

Grundbegriffe der Informatik

Karlsruhe Institute of Technology

Matthias Janke

email: matthias.janke ät kit.edu

Organisatorisches

- Termin für **Probeklausur** steht fest
- 1. Februar 2013, 10 Uhr - 11 Uhr, Audimax
- Also statt der GBI-Übung
- Teilnahme rein freiwillig, ohne Bonus o.ä.
- komplett von Tutoren organisiert
- richtige Klausur dauert 2 Stunden

Überblick

Graphen

Isomorphie von Graphen

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

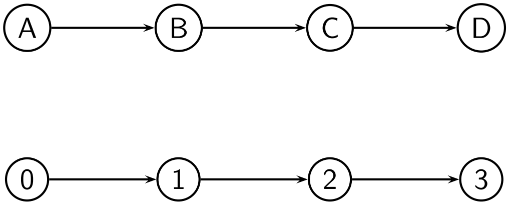
$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

D.h.: Die "Struktur" der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

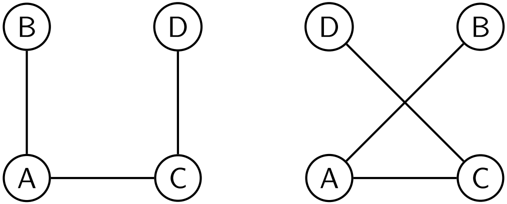
D.h.: Die "Struktur" der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.
Beispiel für isomorphe Graphen:



Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

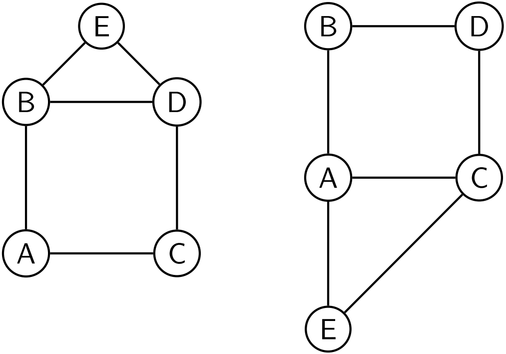
D.h.: Die "Struktur" der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.
Beispiel für isomorphe Graphen:



Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heissen isomorph, wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$$

D.h.: Die “Struktur“ der Graphen G_1 und G_2 ist gleich.
Beispiel für isomorphe Graphen:



(notwendige, nicht hinreichende) Eigenschaften von isomorphen Graphen G_1 und G_2:

1. $|V_1| = |V_2|$
2. $\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$

(notwendige, nicht hinreichende) Eigenschaften von isomorphen Graphen G_1 und G_2:

1. $|V_1| = |V_2|$
2. $\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \land d^-(x) = d^-(f(x))$

1.) folgt direkt aus der Bijektivität der Abbildung!

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) < d^+(f(x))$

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) < d^+(f(x))$
$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (f(x), f(z)) \in E_2 \wedge (x, z) \notin E_1$

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \land d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) < d^+(f(x))$
$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (f(x), f(z)) \in E_2 \land (x, z) \notin E_1$
Widerspruch zur Definition der Graphenisomorphie:
$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$

$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) > d^+(f(x))$

Isomorphie von Graphen

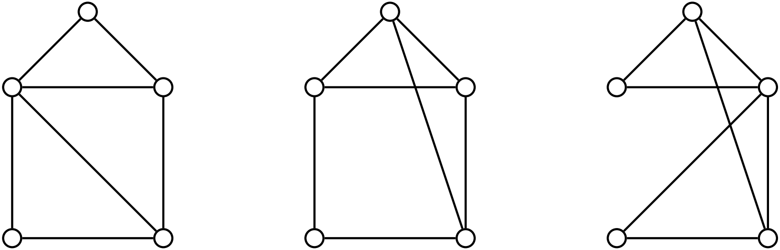
$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \land d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) > d^+(f(x))$
$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (x, z) \in E_1 \land (f(x), f(z)) \notin E_2$

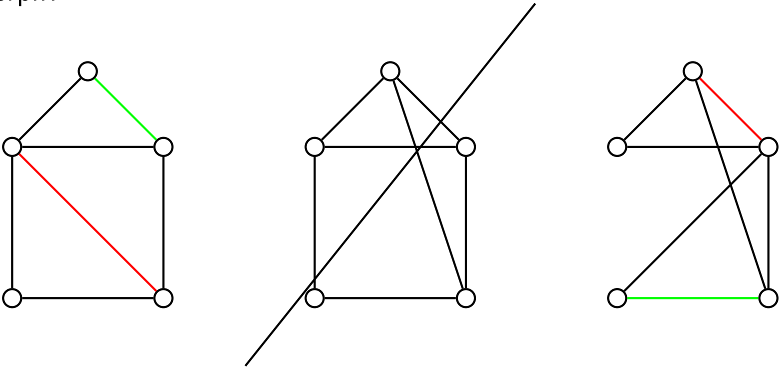
$$\forall x \in V_1 : d^+(x) = d^+(f(x)) \wedge d^-(x) = d^-(f(x))$$

Annahme: $\exists x \in V_1 : d^+(x) > d^+(f(x))$
$\Leftrightarrow \exists z \in V_1 : (x, z) \in E_1 \wedge (f(x), f(z)) \notin E_2$
Widerspruch zur Definition der Graphenisomorphie:
$\forall x, y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2$

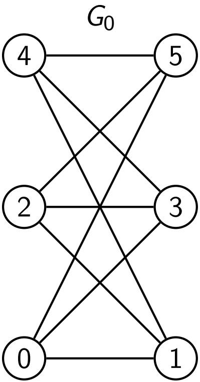
Isomorph?

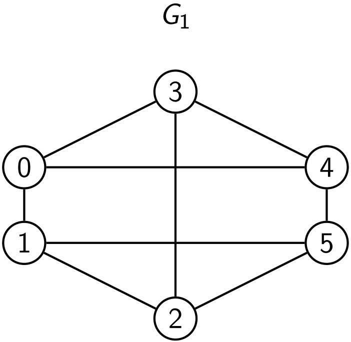


Isomorph?



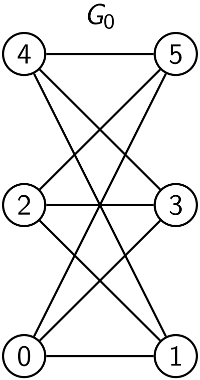
Isomorph?

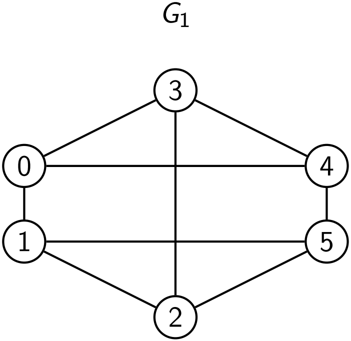




Isomorph?

$\rightarrow$ Nein, da G_1 z.B. einen Kreis der Länge 3 enthält, aber G_0 nicht.



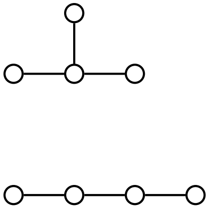


Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

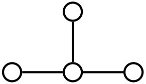
Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
Also: Knotenbeschriftungen weglassen!

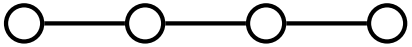
Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
Überlegung: Betrachte erstmal alle **ungerichteten** Bäume mit vier Knoten.

Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
Überlegung: Betrachte erstmal alle **ungerichteten** Bäume mit vier Knoten.

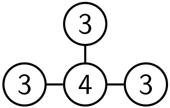


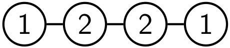
Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
Überlegung: Welche Knoten sind "gleichwertig"?



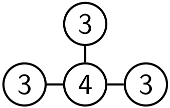


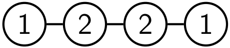
Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
Überlegung: Welche Knoten sind "gleichwertig"?



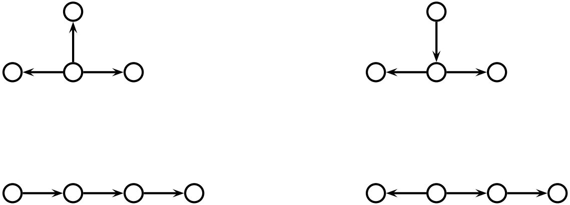


Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
Pro gleichwertigen Knoten v: Ein Baum mit Wurzel v.





Gesucht: Möglichst viele gerichtete Bäume mit 4 Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
Pro gleichwertigen Knoten v: Ein Baum mit Wurzel v.



$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.

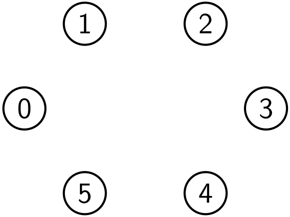
$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 1: Knoten halbwegs übersichtlich anordnen.

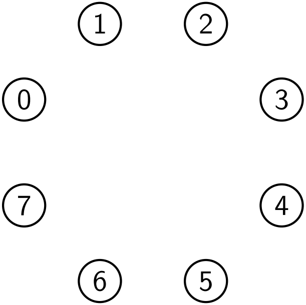
$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 1: Knoten halbwegs übersichtlich anordnen.
$\rightarrow$ Guter Start: (Halbwegs) Regelmäßiges $|V|$-Eck.

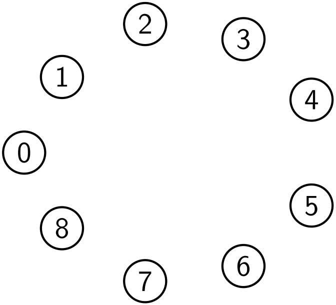
G_6:



G_8:



G_9:



$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x, y\} \in E$.

$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x, y\} \in E$.
Beispiel: $G_6, x = 0, y \in \{1, 5\}$

$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x, y\} \in E$.
Beispiel: $G_8, x = 2, y \in \{1, 3, 5, 7\}$

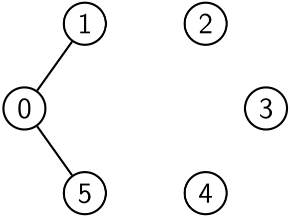
$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 2: Wähle Knoten x fest. Suche alle y mit $\{x, y\} \in E$.
Beispiel: $G_9, x = 5, y \in \{0, 1, 3, 4, 6, 7\}$

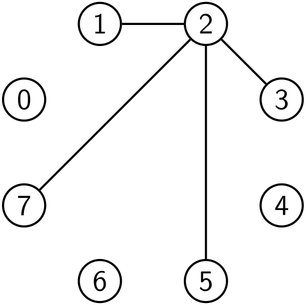
$$
\begin{aligned}
G_n &= (V_n, E_n) \\
V_n &= \mathbb{G}_n \\
E_n &= \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}
\end{aligned}
$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 3: Verbinde x mit allen y, für die $\{x, y\} \in E$ gilt.

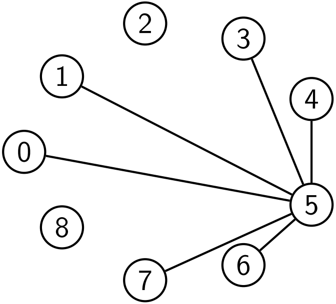
G_6:



G_8:



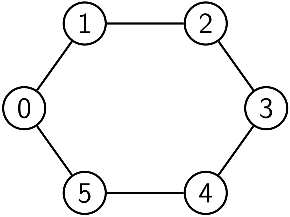
G_9:



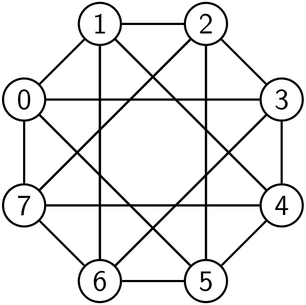
$$G_n = (V_n, E_n)$$
$$V_n = \mathbb{G}_n$$
$$E_n = \{\{x, y\} \mid ggt(|x - y|, n) = 1\}$$

Zeichne G_6, G_8, G_9.
Schritt 4: Wiederhole Schritte 2, 3 für alle Knoten.

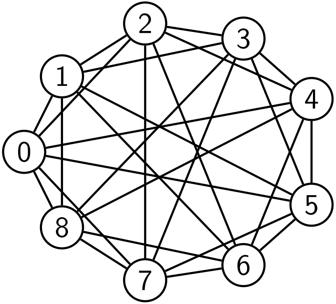
G_6:



G_8:



G_9:



Bäume

Wir erinnern uns: $T = (V, E)$ ist gerichteter Baum falls
$\exists r \in V : \forall v \in V$: Es gibt genau einen Pfad von r nach v.

Wir erinnern uns: $T = (V, E)$ ist gerichteter Baum falls
$\exists r \in V : \forall v \in V :$ Es gibt genau einen Pfad von r nach v.
In Einklang bringen mit “intuitivem Verständnis”.

Wir erinnern uns: $T = (V, E)$ ist gerichteter Baum falls
$\exists r \in V : \forall v \in V$: Es gibt genau einen Pfad von r nach v.
In Einklang bringen mit "intuitivem Verständnis".
Zeige: $\forall v \in V : d^-(v) \leq 1$

Annahme: $\exists v \in V : d^{-}(v) \geq 2$
$\Rightarrow |\{y \mid (y, v) \in E\}| \geq 2$
$\Rightarrow \exists x, y \in V : x \neq y \wedge (x, v) \in E \wedge (y, v) \in E.$

Annahme: $\exists v \in V : d^{-}(v) \geq 2$
$\Rightarrow |\{y \mid (y, v) \in E\}| \geq 2$
$\Rightarrow \exists x, y \in V : x \neq y \wedge (x, v) \in E \wedge (y, v) \in E$.

$\Rightarrow$ Es gibt Pfad von r nach v, dessen vorletzter Knoten x ist und es gibt Pfad von r nach v, dessen vorletzter Knoten y ist.
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens zwei Pfade von r nach v, im Widerspruch zur Definition.

M **endliche** Menge, $c : M \to \mathbb{N}$ Funktion, $T \subseteq M$.

$$\sum_{x \in T} c(x)$$

Nochmal Bäume

$T = (V, E)$ gerichteter Baum.
Zeige: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$.

Nochmal Bäume

$T = (V, E)$ gerichteter Baum.
Zeige: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$.
Annahme: $\forall v \in V : d^+(v) \geq 1$

$T = (V, E)$ gerichteter Baum.
Zeige: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$.
Annahme: $\forall v \in V : d^+(v) \geq 1$
$\Rightarrow \sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$

Nochmal Bäume

$T = (V, E)$ gerichteter Baum.
Zeige: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$.
Annahme: $\forall v \in V : d^+(v) \geq 1$
$\Rightarrow \sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$
Andererseits gilt $\sum_{v \in V} d^-(v) \leq \sum_{v \in V} 1 \leq |V|$

$T = (V, E)$ gerichteter Baum.
Zeige: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$.
Annahme: $\forall v \in V : d^+(v) \geq 1$
$\Rightarrow \sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$
Andererseits gilt $\sum_{v \in V} d^-(v) \leq \sum_{v \in V} 1 \leq |V|$
Geht nur, wenn $\sum_{v \in V} d^-(v) = |V|$ gilt und $\forall v \in V : d^-(v) = 1$

$T = (V, E)$ gerichteter Baum.
Zeige: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$.
Annahme: $\forall v \in V : d^+(v) \geq 1$
$\Rightarrow \sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$
Andererseits gilt $\sum_{v \in V} d^-(v) \leq \sum_{v \in V} 1 \leq |V|$
Geht nur, wenn $\sum_{v \in V} d^-(v) = |V|$ gilt und $\forall v \in V : d^-(v) = 1$
$d^-(r)$ muss jedoch 0 sein!

Nochmal Bäume

$T = (V, E)$ gerichteter Baum.
Zeige: $\exists v \in V : d^+(v) = 0$.
Annahme: $\forall v \in V : d^+(v) \geq 1$
$\Rightarrow \sum_{v \in V} d^+(v) \geq |V|$
Andererseits gilt $\sum_{v \in V} d^-(v) \leq \sum_{v \in V} 1 \leq |V|$
Geht nur, wenn $\sum_{v \in V} d^-(v) = |V|$ gilt und $\forall v \in V : d^-(v) = 1$
$d^-(r)$ muss jedoch 0 sein! **Widerspruch!**

Das wars für heute...

Themen für das siebte Übungsblatt:

- Graphen zeichnen
  - Definition **Kreis**: wiederholungsfreier geschlossener Weg, also "einfacher Zyklus in ungerichtetem Graphen"
- Feststellungen in Graphen beweisen/widerlegen

Schönes Wochenende!