4.11.2011

Willkommen zur dritten Übung zur Vorlesung

Grundbegriffe der Informatik

Karlsruhe Institute of Technology

Matthias Janke
email: matthias.janke ät kit.edu

Überblick

erstes Übungsblatt

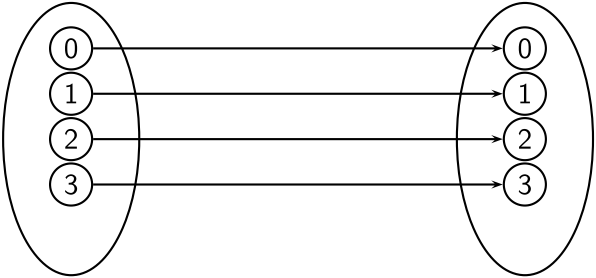
Mengen

formale Sprachen

Anmerkungen zum ersten Übungsblatt

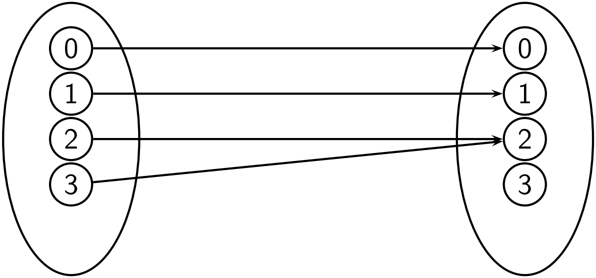
- häufiger Fehler bei Aufgabe 1.2:
  Was kann man über Surjektivität, Injektivität, Bijektivität folgender "Abbildungen" sagen?

- häufiger Fehler bei Aufgabe 1.2:
  Was kann man über Surjektivität, Injektivität, Bijektivität folgender "Abbildungen" sagen?
- **KANN** bijektiv sein



Anmerkungen zum ersten Übungsblatt

- häufiger Fehler bei Aufgabe 1.2:
  Was kann man über Surjektivität, Injektivität, Bijektivität folgender "Abbildungen" sagen?
- **KANN** bijektiv sein
- muss aber nicht



Überblick

erstes Übungsblatt

Mengen

formale Sprachen

Verknüpfungen von Mengen

- $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$
- Allgemein: $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- Endliche Mengen A, B: $|A \circ B| \leq |A| \cdot |B|$

Verknüpfungen von Mengen

- $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$
- Allgemein: $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- Endliche Mengen A, B: $|A \circ B| \leq |A| \cdot |B|$

Verknüpfungen von Mengen

- $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$
- Allgemein: $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- Endliche Mengen A, B: $|A \circ B| \leq |A| \cdot |B|$

Beispiel Multiplikation:
$\{1,2,3,4,5\} \cdot \{1,2,3,4,5\}$:

Beispiel Multiplikation:

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cdot \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

Beispiel Multiplikation:

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cdot \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

·	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 25\}$

25 Einträge, 14 verschiedene Elemente

Es seien L_1, L_2 beliebige formale Sprachen, mit $L_1, L_2 \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

a) Geben Sie ein Beispiel für L_1 und L_2 an, so dass $|L_1| = |L_2| = 3$ und $|L_1 \cdot L_2| = |L_1| \cdot |L_2|$ gilt.
Geben Sie zudem alle Elemente von $L_1 \cdot L_2$ an.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| = n^2$.

c) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest. Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| \leq 2n$.

a) Geben Sie ein Beispiel für L_1 und L_2 an, so dass $|L_1| = |L_2| = 3$ und $|L_1 \cdot L_2| = |L_1| \cdot |L_2|$ gilt.
Geben Sie zudem alle Elemente von $L_1 \cdot L_2$ an.

b) Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| = n^2$.

c) Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| \leq 2n$.

- $L_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{aaa}\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}, \mathtt{bbb}\}$
  $L_1 \cdot L_2 =$
  $\{\mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbb}, \mathtt{aab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aabbb}, \mathtt{aaab}, \mathtt{aaabb}, \mathtt{aaabbb}\}$
- $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$
- $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$
  Es ist dann $L_1 \cdot L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 2 \leq i \leq 2n\}$

a) Geben Sie ein Beispiel für L_1 und L_2 an, so dass $|L_1| = |L_2| = 3$ und $|L_1 \cdot L_2| = |L_1| \cdot |L_2|$ gilt.
Geben Sie zudem alle Elemente von $L_1 \cdot L_2$ an.

b) Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| = n^2$.

c) Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| \leq 2n$.

- $L_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{aaa}\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}, \mathtt{bbb}\}$
  $L_1 \cdot L_2 =$
  $\{\mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbb}, \mathtt{aab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aabbb}, \mathtt{aaab}, \mathtt{aaabb}, \mathtt{aaabbb}\}$
- $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$
- $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$
  Es ist dann $L_1 \cdot L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 2 \leq i \leq 2n\}$

a) Geben Sie ein Beispiel für L_1 und L_2 an, so dass $|L_1| = |L_2| = 3$ und $|L_1 \cdot L_2| = |L_1| \cdot |L_2|$ gilt.
Geben Sie zudem alle Elemente von $L_1 \cdot L_2$ an.

b) Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| = n^2$.

c) Geben Sie zwei formale Sprachen L_1 und L_2 mit $|L_1| = |L_2| = n$ an, so dass $|L_1 \cdot L_2| \leq 2n$.

- $L_1 = \{\mathtt{a}, \mathtt{aa}, \mathtt{aaa}\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}, \mathtt{bb}, \mathtt{bbb}\}$
  $L_1 \cdot L_2 =$
  $\{\mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abbb}, \mathtt{aab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aabbb}, \mathtt{aaab}, \mathtt{aaabb}, \mathtt{aaabbb}\}$
- $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{b}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$
- $L_1 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$
  Es ist dann $L_1 \cdot L_2 = \{\mathtt{a}^i \mid 2 \leq i \leq 2n\}$

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

- $\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

- $\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$
- Kürzer: $\forall x, y \in M : x \circ y \in M$

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

- $\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$
- Kürzer: $\forall x, y \in M : x \circ y \in M$
- Noch kürzer: $M \circ M \subseteq M$

Verknüpfungen von Mengen

Menge M abgeschlossen bezüglich Operation $\circ$:

- $\forall x \in M : \forall y \in M : x \circ y \in M$
- Kürzer: $\forall x, y \in M : x \circ y \in M$
- Noch kürzer: $M \circ M \subseteq M$
- Ganz arg kurz: $M^2 \subseteq M$.

$L \subseteq A^*$
Was ist $L \cdot \{\}$?

Was ist $L \cdot \{\}$?
Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.

Was ist $L \cdot \{\}$?
Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.
Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.

Was ist $L \cdot \{\}$?
Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.
Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$

Widerspruchsbeweise

Was ist $L \cdot \{\}$?
Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.
Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$
$\exists w_2 \in \{\}$???

Was ist $L \cdot \{\}$?
Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.
Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$
Widerspruch zur Definition der leeren Menge!

Was ist $L \cdot \{\}$?
Annahme: $L \cdot \{\} \neq \{\}$.
Sei dann $w \in L' = L \cdot \{\}$ beliebig, aber fest gewählt.
$\Rightarrow \exists w_1 \in L : \exists w_2 \in \{\} : w = w_1 w_2$
Widerspruch zur Definition der leeren Menge!
$\Rightarrow$ Annahme war falsch, und $L \cdot \{\} = \{\}$ muss gelten.

Überblick

erstes Übungsblatt

Mengen

formale Sprachen

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor } \}$.

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor }\}$.
Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$
Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor }\}.$
Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$
Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$
$aabaa \in L$?

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor }\}$.
Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$
Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$
$aabaa \in L$? Unklar!

Wenn etwas unklar ist: Tutoren fragen, Übungsleiter fragen, Annahmen treffen.

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor }\}$.
Beispiele: $abacbccbc, abc, bbabbcbb \in L$
Gegenbeispiele: $abacaba, ca, cbbba \notin L$
$aabaa \in L$!

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor }\}$.
Struktur: Erst beliebig viele a und b, dann ein c, danach keine a mehr
oder: Nur a und b

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{nach dem ersten } c \text{ kommt kein } a \text{ mehr vor } \}$.
Struktur: Erst beliebig viele a und b, dann ein c, danach keine a mehr
$\{a, b\}^*\{c\}\{b, c\}^*$
oder: Nur a und b
$\cup\{a, b\}^*$

Beschreibungen von Sprachen

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
Beispiele: $aaacbbbbaaaca, acacbac \in L$
Gegenbeispiele: $ab, acabbcba \notin L$

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\ \}$.
Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c
$\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+$

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c
$\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+$, wenn nur ein b-Block vorhanden.

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c
$(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$ für beliebig viele b-Blöcke.

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c
außer, wenn das erste Zeichen ein b ist!
$(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

$A = \{a, b, c\}$
$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
Struktur: Vor erstem b in einem Block steht ein c
außer, wenn das erste Zeichen ein b ist!
$(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$
Ausklammern: $(\{b\}^+ \cup \{\epsilon\})(\{a, c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
$(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$
Ausklammern: $(\{b\}^+ \cup \{\epsilon\})(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$
Erinnern: $\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.
$\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$
Obligatorischer “Mist, ich habe was vergessen”-Moment:
Wörter aus der angegebenen Sprache enden mit b, falls ein b vorkommt.

$L = \{w \in A^* \mid \text{direkt vor einem } b \text{ steht nie ein } a\}$.

$\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*$

Obligatorischer "Mist, ich habe was vergessen"-Moment:

Wörter aus der angegebenen Sprache enden mit b, falls ein b vorkommt.

$\{b\}^*(\{a,c\}^*\{c\}\{b\}^+)^*\{a,c\}^*$

- Für ein Wort w und ein Symbol $\mathtt{x}$ bezeichne $N_{\mathtt{x}}(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse von $\mathtt{x}$ in w.
- Für $k \geq 1$ sei die Sprache L_k definiert als die Menge aller Wörter w über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, für die gilt:
  - $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$.
  - Für alle Präfixe v von w gilt: $N_{\mathtt{a}}(v) \geq N_{\mathtt{b}}(v)$ und $N_{\mathtt{a}}(v) - N_{\mathtt{b}}(v) \leq k$.

- Für ein Wort w und ein Symbol $\mathtt{x}$ bezeichne $N_{\mathtt{x}}(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse von $\mathtt{x}$ in w.
- Für $k \geq 1$ sei die Sprache L_k definiert als die Menge aller Wörter w über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, für die gilt:
  - $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$.
  - Für alle Präfixe v von w gilt: $N_{\mathtt{a}}(v) \geq N_{\mathtt{b}}(v)$ und $N_{\mathtt{a}}(v) - N_{\mathtt{b}}(v) \leq k$.

Beispielwörter:

- $\mathtt{abab} \in L_1$, $\mathtt{aa} \notin L_1$
- $\mathtt{aababb} \in L_2$, $\mathtt{aaa} \notin L_1$

Menge der Wörter aus L_1, L_2?

- Für ein Wort w und ein Symbol $\mathtt{x}$ bezeichne $N_{\mathtt{x}}(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse von $\mathtt{x}$ in w.
- Für $k \geq 1$ sei die Sprache L_k definiert als die Menge aller Wörter w über dem Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, für die gilt:
  - $N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)$.
  - Für alle Präfixe v von w gilt: $N_{\mathtt{a}}(v) \geq N_{\mathtt{b}}(v)$ und $N_{\mathtt{a}}(v) - N_{\mathtt{b}}(v) \leq k$.

Beispielwörter:

- $\mathtt{abab} \in L_1$, $\mathtt{aa} \notin L_1$
- $\mathtt{aababb} \in L_2$, $\mathtt{aaa} \notin L_1$

Menge der Wörter aus L_1, L_2?

- $(\{\mathtt{a}\}\{\mathtt{b}\})^*$
- $(\{\mathtt{a}\}(\{\mathtt{a}\}\{\mathtt{b}\})^*\{\mathtt{b}\})^*$

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Die Sprache $L \subseteq A^*$ sei definiert durch $L = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$.
Zeigen Sie, dass jedes Wort w aus $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, das mindestens einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält, in L liegt.

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Die Sprache $L \subseteq A^*$ sei definiert durch $L = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$.
Zeigen Sie, dass jedes Wort w aus $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, das mindestens einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält, in L liegt.

- Wir führen eine Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $\mathtt{b}$ in w durch.)

- Sei k die Anzahl der Vorkommen von $\mathtt{b}$ in einem Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.
- **Induktionsanfang**: $k = 1$:
  - für $k = 1$ lässt sich das Wort$w$ aufteilen in $w = w_1 \cdot \mathtt{b} \cdot w_2$, wobei w_1 und w_2 keine $\mathtt{b}$ enthalten und somit in $\{\mathtt{a}\}^*$ liegen.
  - Damit gilt $w \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$
  - und somit auch $w \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$.

- Sei k die Anzahl der Vorkommen von $\mathtt{b}$ in einem Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.
- **Induktionsanfang**: $k = 1$:
  - für $k = 1$ lässt sich das Wort$w$ aufteilen in $w = w_1 \cdot \mathtt{b} \cdot w_2$, wobei w_1 und w_2 keine $\mathtt{b}$ enthalten und somit in $\{\mathtt{a}\}^*$ liegen.
  - Damit gilt $w \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$
  - und somit auch $w \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$.

- Sei k die Anzahl der Vorkommen von $\texttt{b}$ in einem Wort $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$.
- **Induktionsanfang**: $k = 1$:
  - für $k = 1$ lässt sich das Wort$w$ aufteilen in $w = w_1 \cdot \texttt{b} \cdot w_2$, wobei w_1 und w_2 keine $\texttt{b}$ enthalten und somit in $\{\texttt{a}\}^*$ liegen.
  - Damit gilt $w \in \{\texttt{a}\}^*\{\texttt{b}\}\{\texttt{a}\}^*$
  - und somit auch $w \in (\{\texttt{a}\}^*\{\texttt{b}\}\{\texttt{a}\}^*)^* = L$.

- Sei k die Anzahl der Vorkommen von $\mathtt{b}$ in einem Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.
- **Induktionsvoraussetzung**: Für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N}_+$ gilt, dass alle Wörter über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, die genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthalten, in L liegen.

- **Induktionsschritt**: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält.
- Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
- Im IA wurde gezeigt: w_1 liegt in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
- Nach IV liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$,
- $\rightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
- Somit liegt $w = w_1 w_2$ in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
- und die Behauptung ist gezeigt.

- **Induktionsschritt**: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält.
- Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
- Im IA wurde gezeigt: w_1 liegt in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
- Nach IV liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$,
- $\rightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
- Somit liegt $w = w_1 w_2$ in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
- und die Behauptung ist gezeigt.

- **Induktionsschritt**: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält.
- Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
- Im IA wurde gezeigt: w_1 liegt in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
- Nach IV liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$,
- $\to \exists i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
- Somit liegt $w = w_1 w_2$ in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
- und die Behauptung ist gezeigt.

- **Induktionsschritt**: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält.
- Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
- Im IA wurde gezeigt: w_1 liegt in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
- Nach IV liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$,
- $\rightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
- Somit liegt $w = w_1 w_2$ in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
- und die Behauptung ist gezeigt.

- **Induktionsschritt**: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k + 1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält.
- Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
- Im IA wurde gezeigt: w_1 liegt in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
- Nach IV liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$,
- $\rightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
- Somit liegt $w = w_1 w_2$ in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
- und die Behauptung ist gezeigt.

- **Induktionsschritt**: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält.
- Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
- Im IA wurde gezeigt: w_1 liegt in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
- Nach IV liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$,
- $\rightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
- Somit liegt $w = w_1 w_2$ in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
- und die Behauptung ist gezeigt.

- **Induktionsschritt**: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k+1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält.
- Dann kann man w zerlegen in $w = w_1 w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
- Im IA wurde gezeigt: w_1 liegt in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$.
- Nach IV liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$,
- $\rightarrow \exists i \in \mathbb{N}_0$, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
- Somit liegt $w = w_1 w_2$ in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
- und die Behauptung ist gezeigt.

Themen für das dritte Übungsblatt:

- nochmal: vollständige Induktion
- rekursive Definitionen
- formale Sprachen

Schönes Wochenende!