Wörter, Wörter, Wörter

Sind folgende Wörter gleich:

Man
Man

.

Wörter, Wörter, Wörter

Und jetzt?

Man beachte den Kontext.
Man delights not me.

.

Wörter, Wörter, Wörter

1. $\texttt{Man} : \mathbb{G}_3 \to \{\texttt{M, a, n}\}$,
   $0 \mapsto \texttt{M}, 1 \mapsto \texttt{a}, 2 \mapsto \texttt{n}$.

2. $\texttt{Man} : \mathbb{G}_3 \to \{\texttt{M, a, n}\}$,
   $0 \mapsto \texttt{M}, 1 \mapsto \texttt{a}, 2 \mapsto \texttt{n}$.

Bei Wörtern interessiert uns der Kontext nicht! $\to$ Darum surjektiv!

Man vergleiche $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{G}_n \to A\}$ und $\mathcal{B} = A^n$.

.

Man vergleiche $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{G}_n \to A\}$ und $\mathcal{B} = A^n$.

Irgendwie gleich.

A, B seien nicht leere Mengen.

$\mathcal{A} = \{(f, A, B) \mid f : A \to B\}$,
$\mathcal{B} = \{(f, A, C) \mid C \subseteq B \wedge f : A \to C$ surjektiv$\}$.

$T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$,
$(f, A, B) \mapsto (\bar{f}, A, \{f(x) \mid x \in A\})$ mit $\forall x \in A : f(x) = \bar{f}(x)$.

T ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Ein bisschen was zu Aussagenlogik ...

- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) : A \iff B$.

- $(A \wedge A) \iff A$ immer wahr.

- $(A \vee A) \iff A$ immer wahr.

- $(A \wedge \neg A)$ immer falsch.

- $(A \vee \neg A)$ immer wahr.

Ein bisschen was zu Aussagenlogik ...

- $A \Rightarrow (A \vee B)$ immer wahr.
- $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ immer wahr.
- $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
- $(A \iff B) \iff (\neg B \iff \neg A)$.

Formel (I): $0 \notin A \vee \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n \in A \wedge n+1 \notin A)$

Behauptung: (I) gilt genau dann, wenn $\mathbb{N}_0 \not\subseteq A$ gilt.

$(\mathbb{N}_0 \not\subseteq A \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : n \notin A)$.

(I) $\Rightarrow \mathbb{N}_0 \not\subseteq A$ klar.

Formel (I): $0 \notin A \vee \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n \in A \wedge n + 1 \notin A)$

$\mathbb{N}_0 \not\subseteq A \Rightarrow$ (I):

n_0 kleinstes Element aus $\mathbb{N}_0 \setminus A$.

$n_0 = 0$ oder $n_0 - 1 \in A$.

Verwendet:

- Jede Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ hat kleinstes Element.
- Jedes $n \in \mathbb{N}_0$ außer 0 hat Vorgänger $n - 1 \in \mathbb{N}_0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_+ : n - 1 < n$.

Negation von (I) $\iff \mathbb{N}_0 \subseteq A$.

.

Negation von (I) $\iff \mathbb{N}_0 \subseteq A$.

$$0 \in A \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\neg(n \in A) \vee n+1 \in A)$$
$$\iff 0 \in A \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$$

Vollständige Induktion!

Menge $\{x_0, \ldots, x_n - 1\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\forall n \in \mathbb{G}_{n-1} : x_i \leq x_{i+1}$.

Zu zeigen: $\forall i \in \mathbb{G}_n \forall j \in \mathbb{G}_n : i \leq j \Rightarrow x_i \leq x_j$.

.

Menge $\{x_0, \ldots, x_n - 1\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\forall n \in \mathbb{G}_{n-1} : x_i \leq x_{i+1}$.

Zu zeigen: $\forall i \in \mathbb{G}_n \forall j \in \mathbb{G}_n : i \leq j \Rightarrow x_i \leq x_j$.

Äquivalent: $\forall i \in \mathbb{G}_n \forall k \in \mathbb{G}_n : i + k < n \Rightarrow x_i \leq x_{i+k}$.

Beweis durch vollständige Induktion über k.

Allgemein: Vollständige Induktion über Variable $k \in \mathbb{N}_0$

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).

- Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)

- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k+1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3-1/2 des Jobs.)

Allgemein: Vollständige Induktion über Variable $k \in \mathbb{N}_0$

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).

- Induktionsvoraussetzung (IV): Für **ein beliebiges aber festes** $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)

- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k+1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3-1/2 des Jobs.)

Allgemein: Vollständige Induktion über Variable $k \in \mathbb{N}_0$

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).

- Induktionsvoraussetzung (IV): Für **ein beliebiges aber festes** $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)

- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k+1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3-1/2 des Jobs.)

Allgemein: Vollständige Induktion über Variable $k \in \mathbb{N}_0$

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).

- Induktionsvoraussetzung (IV): Für **EIN BELIEBIGES ABER FESTES** $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)

- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k+1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3-1/2 des Jobs.)

Allgemein: Vollständige Induktion über Variable $k \in \mathbb{N}_0$

Merke: Wenn eine Induktion **über $\mathbf{k}$** durchgeführt wird, darf in der IV **auf gar keinen Fall** ein Allquantor vor dem $\mathbf{k}$ stehen.

Tip: Stellen Sie sich einen weiteren Quantor für "für ein beliebiges, aber festes ..." vor: $\mathbb{B}k \in \mathbb{N}_0$..., der bei der IV steht.

Menge $\{x_0, \ldots, x_n - 1\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\forall n \in \mathbb{G}_{n-1} : x_i \leq x_{i+1}$.

$\forall i \in \mathbb{G}_n \forall k \in \mathbb{G}_n : i + k < n \Rightarrow x_i \leq x_{i+k}$.

i sei beliebig, aber fest.

Induktionsanfang: $k = 0$: $x_i \leq x_i = x_{i+0} = x_{i+k}$. $\surd$

.

Menge $\{x_0, \ldots, x_n - 1\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\forall n \in \mathbb{G}_{n-1} : x_i \leq x_{i+1}$.

$\forall i \in \mathbb{G}_n \forall k \in \mathbb{G}_n : i + k < n \Rightarrow x_i \leq x_{i+k}$.

i sei beliebig, aber fest.

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{G}_n$ gilt:

$i + k < n \Rightarrow x_i \leq x_{i+k}$.

.

Menge $\{x_0, \ldots, x_n - 1\} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\forall n \in \mathbb{G}_{n-1} : x_i \leq x_{i+1}$.

$\forall i \in \mathbb{G}_n \forall k \in \mathbb{G}_n : i + k < n \Rightarrow x_i \leq x_{i+k}$.

i sei beliebig, aber fest.

Induktionsschluss: Zeigen, dass aus IV folgt: $i + k + 1 < n \Rightarrow x_i \leq x_{i+k+1}$.

Nach Definition gilt $x_{i+k} \leq x_{i+k+1}$.
Nach IV gilt $x_i \leq x_{i+k}$.
Also gilt $x_i \leq x_{i+k+1}$. $\square$