

7 Graphen

7.1 Gerichtete Graphen und Teilgraphen

7.1.1 Graphen:

- zur Motivation:
 - Einbahnstraßensystem,
 - wie würde man Zweibahnstraßen modellieren? die Fahrspuren für beide Richtungen separat
 - **Achtung:** analoge Idee für Autobahmodellierung (mehrere Spuren in die gleiche Richtung zwischen zwei Knoten) geht nicht: $E \subseteq V \times V$ erlaubt nur: es gibt *keine* Kante von x nach y oder es gibt *eine* Kante. Sogenannte Mehrfachkanten sind bei uns nicht möglich und geben bei Lösungen auf jeden Fall Punktabzug.
- Beispiele malen:
 - einschließlich Extremfälle mit 0 Kanten bzw. maximal vielen Kanten; mit Schlingen und ohne Schlingen.
 - Sonderfälle wie Bäume (siehe weiter unten) und Zyklen
 - Beim Malen darauf hinweisen, dass man den gleichen Graphen unterschiedlich hinmalen kann, z. B. den vollständigen Graphen K_4 mit sich kreuzenden Kanten oder ohne.
- Eigenschaften von Graphen an Beispielen diskutieren
 - beim Straßensystem: Man möchte von jedem Knoten zu jedem kommen.
 - Wenn die Knoten Rechner sind und die Kanten Kabel: Man möchte von x nach y nur über möglichst „wenige“ Kanten laufen müssen (egal wo x und y)
- Wenn ein Graph n Knoten hat:
 - Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
 n^2
 - Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
 $n(n - 1)$

7.1.2 Definition Teilgraph:

- Beachte: zu jeder Kante, die man in E' haben will, müssen auch Anfangs- und Endknoten in V' vorhanden sein!
- hinreichend großes Beispiel machen, bei dem sowohl $(\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2)\})$ als auch $(\{3, 4, 5\}, \{(3, 4), (3, 5)\})$ Teilgraph ist:
 - **Achtung:** formal sind das verschiedene (Teil-)Graphen
 - **aha:** aber sie sehen gleich aus: so was nennt man isomorphe Graphen

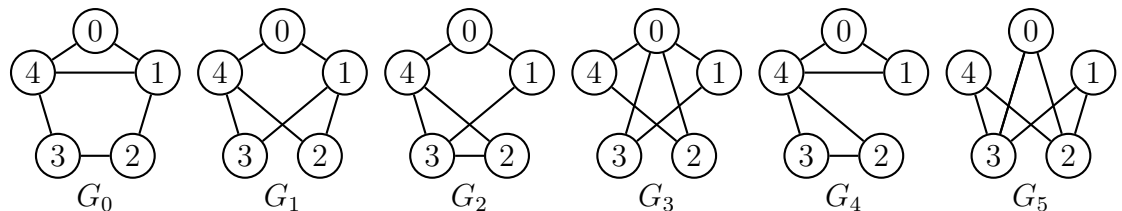
7.2 Pfade und Erreichbarkeit

7.2.1 Definition Pfade:

- Beispiel machen, in dem zwar ein Pfad von x nach y existiert, aber nicht umgekehrt.
- beachte: für aufeinanderfolgende Knoten im Pfad muss die Kante in die richtige Richtung weisen!
- Beachte: Knoten dürfen in Pfad mehrfach vorkommen
- Beispiel machen, in dem von x nach y unterschiedlich lange Pfade vorkommen.

7.3 Isomorphie von Graphen

- Da hatten wir z.B. im WS10/11 eine Aufgabe auf dem Übungsblatt 8 zum Erkennen von isomorphen Graphen. Das macht das ganze vielleicht klar:
 - Für welche der folgenden sechs Graphen gibt es einen Isomorphismus zu einem der anderen fünf Graphen? Geben Sie jeweils den zugehörigen Isomorphismus an.



7.4 Ein Blick zurück auf Relationen

7.4.1 Pfade, E^*

- E^2 ist wieder Relation auf V : kann man also als Graph malen: Beispiel machen
- analog für E^3, \dots
- und E^* ist auch wieder eine Relation auf V : kann man also als Graph malen: Beispiel: aus Zyklus der Länge 5 wird der sogenannte vollständige Graph K_5

7.5 Ungerichtete Graphen

- **Achtung:** man reite noch mal auf der Formalisierung von Kanten herum:
 - für $x \neq y$ ist $\{x, y\}$ eine zweielementige Menge, *ohne* eine Festlegung von Reihenfolge
 - für $x = y$ ist die Menge $\{x, y\} = \{x\}$ eine *einelementige* Menge
- Wie ist das mit der Anzahl Kanten eines ungerichteten Graphen mit n Knoten:
 - Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
 $n(n-1)/2$
Begründung: von jedem Knoten zu jedem *anderen*; durch zwei, weil sonst jede Kante zweimal gezählt wird.
 - Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er Schlingen haben darf?
 $n(n+1)/2$
Begründung: $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$

7.6 Anmerkung zu Relationen

7.6.1 Äquivalenzrelationen:

Falls schon Fragen kommen: mit dem Bild einer Nicht-Äquivalenzrelation anfangen und so lange Pfeile dazu malen, bis alle Forderungen erfüllt sind:

- Schlingen an allen Knoten
- zu jedem Pfeil hin auch der zurück
- wenn ein Pfad von x nach y existiert, dann auch eine direkte Kante

Ergebnis: einige Klumpen, äh, Cliques (die den Äquivalenzklassen entsprechen)

7.7 Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

7.7.1 kantenmarkierte Graphen:

- Noch mal einen Huffman-Baum hinmalen und diskutieren
- für Zahlen als Kantenmarkierungen siehe gleich

7.7.2 Graphen mit gewichteten Kanten

- Beispielgraphen hinmalen und die Studenten kurze und lange Wege suchen lassen
- Beispielgraphen hinmalen und die Studenten große Flüsse suchen lassen.

7.8 alte (Klausur-)Aufgaben

- Aufgabe aus ÜB7 (WS08/09): Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{0, 1\}^3$ und $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\}$.
 - a) Graphen zeichnen lassen.
 - b) Geben Sie einen Zyklus in G an, der außer dem Anfangs- und Endknoten jeden Knoten von G genau einmal enthält.
 - c) Geben Sie einen geschlossenen Pfad in G an, der jede Kante von G genau einmal enthält.
- So ziemlich in jeder der letztjährigen Klausuren kam was zu Graphen dran z.B. <http://gbi.ira.uka.de/archiv/2010/k-mar11.pdf> oder <http://gbi.ira.uka.de/archiv/2010/k-sep11.pdf>.
Adjazenz-/Wegematrizen sind allerdings noch nicht bekannt.