Karlsruhe Institute of Technology

Grundbegriffe der Informatik - Tutorium 21

Christian Jülg
Wintersemester 2012/13
20. November 2012

http://gbi-tutor.blogspot.com

Übersicht

Übersicht

Aufgabenblatt 4

Blatt 4

- Punkte: Durchschnitt 14,3 von 19

häufige Fehler...

4.3: k_i bedeutet "Zustand von k zu Beginn der i-ten Iteration"

Übersicht

Aufgabenblatt 5

Blatt 5

- Abgabe: 23.11.2012 um 12:30 Uhr im Untergeschoss des Infobaus
- Punkte: maximal 21

Themen

- Grammatiken
- Sprachen

Übersicht

Aufgabenblatt 4

Aufgabenblatt 5

Kontextfreie Grammatiken

Relationen

Reflexiv-transitive Hülle

Abschluss

Aus der Vorlesung:

Definition 1

- für alle Alphabete A und alle $x \in A$ Funktionen $N_x : A^* \to \mathbf{N_0}$, die wie folgt festgelegt sind:
  - $N_x(\epsilon) = 0$
  - $\forall y \in A : \forall w \in A^* : N_x(yw) = \begin{cases} 1 + N_x(w) & \text{falls } y = x \\ N_x(w) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$
- Was gibt $N_x(w)$ an?

Aus der Vorlesung:

Definition 1

- für alle Alphabete A und alle $x \in A$ Funktionen $N_x : A^* \to \mathbf{N_0}$, die wie folgt festgelegt sind:
  - $N_x(\epsilon) = 0$
  - $\forall y \in A : \forall w \in A^* : N_x(yw) = \begin{cases} 1 + N_x(w) & \text{falls } y = x \\ N_x(w) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$
- Was gibt $N_x(w)$ an?

Definition 2

- Kont-fr. Grammatik $G = (N, T, S, P)$, wobei
  - N Nichtterminalsymbole
  - T Terminalsymbole
    - und $N \cap T = \emptyset$
  - S Startsymbol ($S \in N$)
  - P Produktionen ($P \subseteq N \times V^*$ und $V = N \cup T$)

Beispiele

Beispiel 1

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \epsilon \mid aX \mid bX\})$
- Was kann mit dieser Grammatik erstellt werden?

Beispiele

Karlsruhe Institute of Technology

Beispiel 1

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \epsilon \mid aX \mid bX\})$
- Was kann mit dieser Grammatik erstellt werden?
  - alle Wörter über $A = \{a, b\}$

Beispiele

Beispiel 1

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \epsilon \mid aX \mid bX\})$
- Was kann mit dieser Grammatik erstellt werden?
  - alle Wörter über $A = \{a, b\}$
  - also $L(G) = \{a, b\}^*$

Beispiele

Beispiel 1

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \epsilon \mid aX \mid bX\})$
- Was kann mit dieser Grammatik erstellt werden?
  - alle Wörter über $A = \{a, b\}$
  - also $L(G) = \{a, b\}^*$

Beispiel 2

- Gibt es eine Grammatik mit $L(G) = \emptyset$?

Beispiele

Beispiel 1

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \to \epsilon \mid aX \mid bX\})$
- Was kann mit dieser Grammatik erstellt werden?
  - alle Wörter über $A = \{a, b\}$
  - also $L(G) = \{a, b\}^*$

Beispiel 2

- Gibt es eine Grammatik mit $L(G) = \emptyset$?
- Ja

Beispiele

Beispiel 1

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \epsilon \mid aX \mid bX\})$
- Was kann mit dieser Grammatik erstellt werden?
  - alle Wörter über $A = \{a, b\}$
  - also $L(G) = \{a, b\}^*$

Beispiel 2

- Gibt es eine Grammatik mit $L(G) = \emptyset$?
- Ja
  - $P = \{X \rightarrow X\} \vee P = \{\}$

Beispiele

Beispiel 1

- $G = (\{X\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow \epsilon \mid aX \mid bX\})$
- Was kann mit dieser Grammatik erstellt werden?
  - alle Wörter über $A = \{a, b\}$
  - also $L(G) = \{a, b\}^*$

Beispiel 2

- Gibt es eine Grammatik mit $L(G) = \emptyset$?
- Ja
  - $P = \{X \rightarrow X\} \vee P = \{\}$
  - aber leeres Alphabet ($T = \{\}$) nicht zulässig

mehr Beispiele

weiteres (einfaches) Beispiel

mehr Beispiele

weiteres (einfaches) Beispiel

- $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \rightarrow XX \mid (X) \mid \epsilon\}$

mehr Beispiele

weiteres (einfaches) Beispiel

- $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \epsilon\}$
- Beispielableitungen:
  - $X \Rightarrow (X) \Rightarrow ((X)) \Rightarrow (((X))) \Rightarrow ((((X)))) \Rightarrow (((())))$ oder

mehr Beispiele

weiteres (einfaches) Beispiel

- $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \epsilon\}$
- Beispielableitungen:
  - $X \Rightarrow (X) \Rightarrow ((X)) \Rightarrow (((X))) \Rightarrow ((((X)))) \Rightarrow (((())))$ oder
  - $X \Rightarrow XX \Rightarrow XXX \Rightarrow XXXX \Rightarrow XXXXX \Rightarrow (X)XXXX \Rightarrow ... \Rightarrow (X)(X)(X)(X)(X) \Rightarrow ()()()()()$

mehr Beispiele

weiteres (einfaches) Beispiel

- $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to XX \mid (X) \mid \epsilon\}$
- Beispielableitungen:
  - $X \Rightarrow (X) \Rightarrow ((X)) \Rightarrow (((X))) \Rightarrow ((((X)))) \Rightarrow (((()))))$ oder
  - $X \Rightarrow XX \Rightarrow XXX \Rightarrow XXXX \Rightarrow XXXXX \Rightarrow (X)XXXX \Rightarrow ... \Rightarrow (X)(X)(X)(X)(X) \Rightarrow ()()()()()$
- Unterschied zu $G = (\{X\}, \{(,)\}, X, \{X \to (X)X \mid \epsilon\})$?

Aufgaben für euch

Aufgabe 1

- Sei $T = \{a, b\}$. Erstellt eine Grammatik, in der alle Wörter über T, die **baa** enthalten, vorkommen!

Aufgaben für euch

Aufgabe 1

- Sei $T = \{a, b\}$. Erstellt eine Grammatik, in der alle Wörter über T, die **baa** enthalten, vorkommen!
- $G = (\{X, Y\}, T, X, \{X \to Y\{baa\}Y, Y \to aY \mid bY \mid \epsilon\}$

Übersicht

Relationen – Überblick

Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen

Relationen – Überblick

Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

Relationen – Überblick

Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

Wozu brauchen wir das?

In der Informatik werden Relationen zur Modellierung von Systemen benötigt:

Relationen – Überblick

Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

Wozu brauchen wir das?

In der Informatik werden Relationen zur Modellierung von Systemen benötigt:

- Relationen sind Grundlage der verschiedenen Diagramme der Unified Modeling Language

Relationen – Überblick

Karlsruhe Institute of Technology

Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

Wozu brauchen wir das?

In der Informatik werden Relationen zur Modellierung von Systemen benötigt:

- Relationen sind Grundlage der verschiedenen Diagramme der Unified Modeling Language
- die graphische Darstellung von Relationen ergibt Graphen

Relationen mathematisch

Karlsruhe Institute of Technology

Definitionen - aus dem 1. Tutorium

- Das karthesische Produkt zweier Mengen ist definiert als $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- $R \subseteq A \times B$ heißt Relation

Relationen mathematisch

Definitionen - aus dem 1. Tutorium

- Das karthesische Produkt zweier Mengen ist definiert als $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- $R \subseteq A \times B$ heißt Relation

Definition

- Eine Relation R bezieht sich auf zwei Grundmengen M_1,M_2 und es gilt $R \subseteq M_1 \times M_2$.

Relationen mathematisch

Definitionen - aus dem 1. Tutorium

- Das karthesische Produkt zweier Mengen ist definiert als $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- $R \subseteq A \times B$ heißt Relation

Definition

- Eine Relation R bezieht sich auf zwei Grundmengen M_1,M_2 und es gilt $R \subseteq M_1 \times M_2$.
- Eine Relation R heißt homogen, wenn $M_1 = M_2$ gilt.

Relationen

Definition: Produkt

Sind $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen, dann heißt

Relationen

Karlsruhe Institute of Technology

Definition: Produkt

Sind $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$ das *Produkt der Relationen S und R*

Relationen

Definition: Produkt

Sind $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$ das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ heißt die *identische Abbildung*

Relationen

Definition: Produkt

Sind $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x,z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$ das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x,x) \mid x \in M\}$ heißt die *identische Abbildung*

Definition: Potenz

Sei $R \subseteq M \times M$ eine *binäre* Relation, dann heißt

- R^i *die i-te Potenz* von R und ist definiert als:

Relationen

Karlsruhe Institute of Technology

Definition: Produkt

Sind $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$ das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ heißt die *identische Abbildung*

Definition: Potenz

Sei $R \subseteq M \times M$ eine *binäre* Relation, dann heißt

- R^i *die i-te Potenz* von R und ist definiert als:
  - $R^0 = Id_M$

Relationen

Definition: Produkt

Sind $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$ zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$ das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ heißt die *identische Abbildung*

Definition: Potenz

Sei $R \subseteq M \times M$ eine *binäre* Relation, dann heißt

- R^i *die i-te Potenz* von R und ist definiert als:
  - $R^0 = Id_M$
  - $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$

Übersicht

Aufgabenblatt 4

Aufgabenblatt 5

Kontextfreie Grammatiken

Relationen

Reflexiv-transitive Hülle

Abschluss

Reflexiv-transitive Hülle

Karlsruhe Institute of Technology

mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv	xRx
transitiv	Aus xRy und yRz folgt xRz
symmetrisch	Aus xRy folgt yRx

Reflexiv-transitive Hülle

mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv	xRx
transitiv	Aus xRy und yRz folgt xRz
symmetrisch	Aus xRy folgt yRx

Gelten alle diese Eigenschaften, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

Reflexiv-transitive Hülle

mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv	xRx
transitiv	Aus xRy und yRz folgt xRz
symmetrisch	Aus xRy folgt yRx

Gelten alle diese Eigenschaften, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

Definition

Die sogenannte reflexiv-transitive Hülle einer Relation R ist

- $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

Reflexiv-transitive Hülle

mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv	xRx
transitiv	Aus xRy und yRz folgt xRz
symmetrisch	Aus xRy folgt yRx

Gelten alle diese Eigenschaften, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

Definition

Die sogenannte reflexiv-transitive Hülle einer Relation R ist

- $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

Sie ist die Erweiterung der Relation um die Paare, die notwendig sind um Reflexivität und Transitivität herzustellen.

Reflexiv-transitive Hülle

Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.
- $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$
- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$

Reflexiv-transitive Hülle

Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.
- $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$
- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- dann ist $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- und $R^1 = R$ und

Reflexiv-transitive Hülle

Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit"-Relation.
- $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$
- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- dann ist $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- und $R^1 = R$ und
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$
- $R^* = ?$

Reflexiv-transitive Hülle

Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$ sei die „ist-befreundet-mit"-Relation.
- $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$
- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \bigcup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- dann ist $R^0 = \{(Martin, Martin), ..., (Holger, Holger)\}$
- und $R^1 = R$ und
- $R^2 = \{(Martin, Nina), (Martin, Gertrud), (Martin, Martin), (Lars, Nina), (Lars, Lars), (Nina, Gertrud), (Nina, Martin), (Nina, Nina), (Nina, Lars), (Katja, Katja), (Katja, Holger), (Gertrud, Gertrud), (Gertrud, Martin), (Gertrud, Nina), (Holger, Holger), (Holger, Katja)\}$
- $R^* = ?$ Ist R^* eine Äquivalenzrelation?

Relationen graphisch

Ihr seid dran...

1. Überlegt euch, wie eine Relation graphisch aussehen könnte. Zeigt ein Beispiel mit mindestens 4 verschiedenen Elementen
2. Wie sieht nun graphisch die reflexiv-transitive Hülle aus?

Relationen graphisch

Ihr seid dran...

1. Überlegt euch, wie eine Relation graphisch aussehen könnte. Zeigt ein Beispiel mit mindestens 4 verschiedenen Elementen
2. Wie sieht nun graphisch die reflexiv-transitive Hülle aus?

mögliche Darstellung

- Relation als Pfeile von Element zu Element
- Relation als Matrix, d.h. wenn xRy ist Feld $[x,y] == 1$

Übersicht

Aufgabenblatt 4

Aufgabenblatt 5

Kontextfreie Grammatiken

Relationen

Reflexiv-transitive Hülle

Abschluss

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Was sind Grammatiken?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Was sind Grammatiken?
- Was lässt sich aus ihnen ableiten?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Was sind Grammatiken?
- Was lässt sich aus ihnen ableiten?

Ihr wisst was nicht?
Stellt **jetzt** Fragen!

Ende


VORSICHT! ICH BIN BISSIG!
UND OFFENSICHTLICH KANN ICH SCHREIBEN.
HEY, ICH KANN SCHREIBEN!
DANN KANN ICH AUCH LESEN.
WWW.NICHTLUSTIG.DE