

## Grundbegriffe der Informatik Musterlösung zu Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 3.1 (2+2+3 Punkte)

Es sei  $A = \{a, b\}$ . Beschreiben Sie unter Benutzung nur der Symbole  $\{, \}, a, b, \epsilon, \cup, *$  und  $+$ , sowie runde Klammer auf, runde Klammer zu und Komma, die folgenden formalen Sprachen:

- a) die Menge aller Wörter über  $A$ , bei denen  $bb$  direkt vor jedem  $a$  steht;
- b) die Menge aller Wörter über  $A$ , die ungerade Länge haben;
- c) die Menge aller Wörter über  $A$ , die gleiche viele Teilwörter  $ab$  und  $ba$  enthalten.

### Lösung 3.1

- a)  $\{b, bba\}^*$  oder auch  $(\{b\}^*\{bba\}^*\{b\}^*)^*$
- b)  $(\{a\} \cup \{b\})\{aa, ab, ba, bb\}^*$
- c)  $\{a\}^+(\{b\}^+\{a\}^+)^* \cup \{b\}^+(\{a\}^+\{b\}^+)^*$

### Aufgabe 3.2 (1+1+1 Punkte)

Es sei  $A = \{a, b\}$  und  $L = \{aa, aaa, b\}$ .

Geben Sie (wenn möglich) für folgende Sprachen je 2 Wörter über  $A$  an die in der Sprache liegen und je 2 Wörter über  $A$  die nicht in der Sprache liegen.

- a)  $L_1 = \{w \mid w \in L^2 \wedge w \in L^3\}$
- b)  $L_2 = \{w \in A^* \mid \exists u \in A^* : \exists v \in L : w = uv\}$
- c)  $L_3 = \{w \in L^* \mid \exists u \in A^* : uw = w^2u\}$

### Lösung 3.2

- a)  $aaaaaa$  ist das einzige Wort  $\in L_1$  und z.B.  $\{a, b\} \notin L_1$
- b) Z.B.  $\{aa, ab\} \in L_2$  und z.B.  $\{\epsilon, a, ba\} \notin L_2$
- c)  $\epsilon$  ist das einzige Wort  $\in L_3$  und z.B.  $\{a, b\} \notin L_3$

**Aufgabe 3.3 (3+3+4 Punkte)**

Gegeben seien beliebige formale Sprachen  $L_1, L_2, L_3 \subseteq A^*$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

a)

$$|L_1^2| = |L_1 \times L_1|$$

b)

$$(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_3^* = (L_1 \cdot L_3^*) \cup (L_2 \cdot L_3^*)$$

c)

$$(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2^*)^*$$

*Hinweis:* Sie dürfen folgende Umformung benutzen:  $L^* = L^* L^* = (L^*)^*$

**Lösung 3.3**

a) Gegenbeispiel:  $L_1 = \{\varepsilon, \mathbf{a}\}$  :

$$|L_1^2| = |\{\varepsilon, \mathbf{a}\} \cdot \{\varepsilon, \mathbf{a}\}| = |\{\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{aa}\}| = 3$$

$$|L_1 \times L_1| = |\{\varepsilon, \mathbf{a}\} \times \{\varepsilon, \mathbf{a}\}| = |\{(\varepsilon, \varepsilon), (\varepsilon, \mathbf{a}), (\mathbf{a}, \varepsilon), (\mathbf{a}, \mathbf{a})\}| = 4$$

b) Gegenbeispiel:  $L_1 = \{\mathbf{a}\}, L_2 = \{\mathbf{b}\}, L_3 = \{\varepsilon\}$  :

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^* \cdot \{\varepsilon\} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*$$

$$\{\mathbf{a} \cdot \varepsilon\} \cup \{\mathbf{b} \cdot \varepsilon\} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$$

c) Es werden beiden Teilmengenbeziehungen gezeigt:

$$\bullet (L_1 \cup L_2)^* = (L_1 \cdot \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cdot L_2)^* \subseteq (L_1 \cdot L_2^* \cup L_1^* \cdot L_2)^* \subseteq (L_1^* \cdot L_2^* \cup L_1^* \cdot L_2^*)^* = (L_1^* \cdot L_2^*)^*$$

$$\bullet (L_1^* L_2^*)^* \subseteq ((L_1 \cup L_2)^* L_2^*)^* \subseteq ((L_1 \cup L_2)^* (L_1 \cup L_2)^*)^* = ((L_1 \cup L_2)^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

$$\text{Daraus folgt: } (L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2^*)^*$$

*Hinweis:* 1 Punkt für die richtige Annahme, 2 Punkte für das korrekte Gegenbeispiel, 3 Punkte für den korrekten Beweis