Übung “Grundbegriffe der Informatik”

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 034

email: schulz@ira.uka.de

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$F = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\}$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))$$

Was erkennt dieser Automat?

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$F = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\}$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))$$

1. Automat hat zwei Register.

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$F = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\}$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))$$

1. Automat hat zwei Register.
$\rightarrow$ Betrachte Register einzeln.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$F = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\}$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))$$

2. Im ersten Register wechseln Zustände wie bei A_1.

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$F = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\}$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))$$

3. Betrachte $f_2^*(z_2, g(z_1, x))$ genauer.

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$

- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$
\begin{aligned}
F &= \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\} \\
f((z_1, z_2), x) &= (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))
\end{aligned}
$$

3. Betrachte $f_2^*(z_2, g(z_1, x))$ genauer.
Zustandsübergänge von A_2 bei Eingabe von $g(z_1, x)$.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$
\begin{aligned}
F &= \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\} \\
f((z_1, z_2), x) &= (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))
\end{aligned}
$$

4. Check, ob Typen so kompatibel sind.

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$
\begin{aligned}
F &= \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\} \\
f((z_1, z_2), x) &= (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))
\end{aligned}
$$

4. Check, ob Typen so kompatibel sind. ✓

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$\begin{aligned} F &= \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\} \\ f((z_1, z_2), x) &= (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x))) \end{aligned}$$

5. Bildliche Vorstellung ...

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$F = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\}$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))$$

6. Feststellung: A_2 verarbeitet Ausgabe von A_1.

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$

- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$F = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\}$$
$$f((z_1, z_2), x) = (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))$$

7. Formalisieren: $f^*((z_{01}, z_{02}, w) = (f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)))$

.

Abstrakt

- Mealy-Automat $A_1 = (Z_1, z_{01}, X, f_1, Y, g)$
- Endlicher Akzeptor $A_2 = (Z_2, z_{02}, Y, f_2, F_2)$

$A = (Z_1 \times Z_2, (z_{01}, z_{02}), X, f, F)$ mit

$$\begin{aligned} F &= \{(z_1, z_2) \mid z_2 \in F_2\} \\ f((z_1, z_2), x) &= (f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x))) \end{aligned}$$

8. Beweis durch vollständige Induktion.

.

Induktion für Wörter

Zu zeigen: Für alle Wörter $w \in A^*$ gilt Aussgae X.

Induktionsanfang: X gilt für ϵ.

Induktionsvoraussetzung: X gilt für beliebiges, aber festes Wort w.

Induktionsschluss: Sei $x \in A$ beliebig.

Wir zeigen: X gilt dann auch für wx.

Beweis-Skizze

$$(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))
\end{aligned}
$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(z_1, x)))
\end{aligned}
$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)), g(z_1, x)))
\end{aligned}
$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)), g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))
\end{aligned}
$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)), g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))\\
=&f((z_1, z_2), x)
\end{aligned}
$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)), g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))\\
=&f((z_1, z_2), x)\\
=&f((f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w))), x)
\end{aligned}
$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)), g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))\\
=&f((z_1, z_2), x)\\
=&f((f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w))), x)\\
\overset{IV}{=}&f(f^*((z_{01}, z_{02}), w), x)
\end{aligned}
$$

.

Beweis-Skizze

$$
\begin{aligned}
&(f_1^*(z_{01}, wx), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, wx)))\\
=&(f_1(f_1^*(z_{01}, w), x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(f_1^*(z_{01}, w), x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w)), g(z_1, x)))\\
=&(f_1(z_1, x), f_2^*(z_2, g(z_1, x)))\\
=&f((z_1, z_2), x)\\
=&f((f_1^*(z_{01}, w), f_2^*(z_{02}, g^{**}(z_{01}, w))), x)\\
\overset{IV}{=}&f(f^*((z_{01}, z_{02}), w), x) = f^*((z_{01}, z_{02}), wx)
\end{aligned}
$$

.

Besondere Zustände

$A = (Z, z_0, X, f, F)$

- $\forall x \in X \forall z \in F : f(z, x) \in F$

- $J \cap F = \emptyset \wedge \forall x \in X \forall z \in J : f(z, x) \in J$

.

Besondere Zustände

$A = (Z, z_0, X, f, F)$

- $\forall x \in X \forall z \in F : f(z, x) \in F$
  $\rightarrow$ Zustand aus F irgendwann erreicht $\Rightarrow$ Wort wird akzeptiert.

- $J \cap F = \emptyset \wedge \forall x \in X \forall z \in J : f(z, x) \in J$
  $\rightarrow$ Zustand aus J irgendwann erreicht $\Rightarrow$ Wort wird abgelehnt. (Müllzustände)

.

Besondere Zustände

$A = (Z, z_0, X, f, F)$

- $\forall x \in X \forall z \in F : f(z, x) \in F$
  $\rightarrow$ Zustand aus F irgendwann erreicht $\Rightarrow$ Wort wird akzeptiert.

- $J \cap F = \emptyset \wedge \forall x \in X \forall z \in J : f(z, x) \in J$
  $\rightarrow$ Zustand aus J irgendwann erreicht $\Rightarrow$ Wort wird abgelehnt. (Müllzustände)

In beiden Fällen möglich: $|F| = 1$ bzw. $|J| = 1$.

.

Teilwortsuche

$w \in X^*$, enthält Eingabe Teilwort w?
$A = (Z, z_0, X, f, F)$

.

Teilwortsuche

$w \in X^*$, enthält Eingabe Teilwort w?
$A = (Z, z_0, X, f, F)$

- $Z = \{$ Präfixe von $w\}$

.

Teilwortsuche

$w \in X^*$, enthält Eingabe Teilwort w?
$A = (Z, z_0, X, f, F)$

- $Z = \{$ Präfixe von $w\}$

- $z_0 = \epsilon$

.

Teilwortsuche

$w \in X^*$, enthält Eingabe Teilwort w?
$A = (Z, z_0, X, f, F)$

- $Z = \{$ Präfixe von $w\}$
- $z_0 = \epsilon$
- $F = w$

.

Teilwortsuche

$w \in X^*$, enthält Eingabe Teilwort w?
$A = (Z, z_0, X, f, F)$

- $Z = \{$ Präfixe von $w\}$

- $z_0 = \epsilon$

- $F = w$

- $f(u,x) = \begin{cases} u & \text{falls } u = w \\ \text{längstes Präfix von } w, & \\ \text{das Suffix von } ux \text{ ist} & \text{sonst} \end{cases}$