11 GRAPHEN

In den bisherigen Einheiten kamen schon an mehreren Stellen Diagramme und Bilder vor, in denen irgendwelche „Gebilde" durch Linien oder Pfeile miteinander verbunden waren. Man erinnere sich etwa an die Ableitungsbäume wie in Abbildung 8.2 in der Einheit über Grammatiken, an Huffman-Bäume wie in Abbildung 10.2 der Einheit über Codierungen, oder an die Abbildung am Ende von Abschnitt 2.4.

Das sind alles Darstellungen sogenannter Graphen. Sie werden in dieser Einheit sozusagen vom Gebrauchsgegenstand zum Untersuchungsgegenstand. Dabei unterscheidet man üblicherweise gerichtete und ungerichtete Graphen, denen im folgenden getrennte Abschnitte gewidmet sind.

11.1 GERICHTETE GRAPHEN

11.1.1 Graphen und Teilgraphen

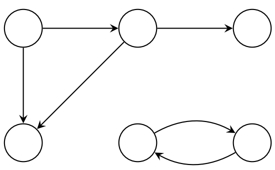
Ein *gerichteter Graph* ist festgelegt durch ein Paar $G = (V, E)$, wobei $E \subseteq V \times V$ ist. Die Elemente von V heißen *Knoten*, die Elemente von E heißen *Kanten*. Wir verlangen (wie es üblich ist), dass die Knotenmenge nicht leer ist. Und wir beschränken uns in dieser Vorlesung auf *endliche* Knotenmengen. Die Kantenmenge darf leer sein.

gerichteter Graph
Knoten
Kanten

Typischerweise stellt man Graphen graphisch dar. Statt zu schreiben

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{(0,1), (0,3), (1,2), (1,3), (4,5), (5,4)\}$$

malt man lieber Abbildungen wie diese:



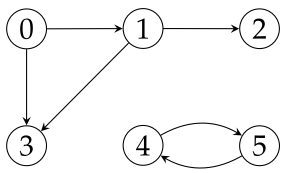


Abbildung 11.1: zweimal der gleiche Graph: links ohne Angabe der Knotenidentitäten, rechts mit

Ob man die Knoten als anonyme dicke Punkte oder Kringel darstellt wie auf der linken Seite in Abbildung 11.1, oder ob man jeweils das entsprechende Element von V mit notiert wie auf der rechten Seite in Abbildung 11.1, hängt von den

Umständen ab. Beides kommt vor. Eine Kante (x, y) wird durch einen Pfeil von dem Knoten x in Richtung zu dem Knoten y dargestellt. Wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt, dann sagt man auch, die Knoten x und y seien *adjazent*.

adjazente Knoten

Außerdem ist die Anordnung der Knoten in der Darstellung irrelevant. Abbildung 11.2 zeigt den gleichen Graphen wie Abbildung 11.1:

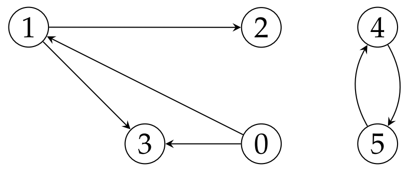


Abbildung 11.2: eine andere Zeichnung des Graphen aus Abbildung 11.1

Wir wollen noch zwei weitere Beispiele betrachten. Im ersten sei $G = (V, E)$ definiert durch

- $V = \{1\} \left(\bigcup_{i=0}^{2} \{0, 1\}^i\right)$ und
- $E = \{(w, wx) \mid x \in \{0, 1\} \wedge w \in V \wedge wx \in V\}$.

Schreibt man die beiden Mengen explizit auf, ergibt sich

- $V = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$
- $E = \{(1, 10), (1, 11), (10, 100), (10, 101), (11, 110), (11, 111)\}$

Im einem Bild kann man diesen Graphen so hinmalen:

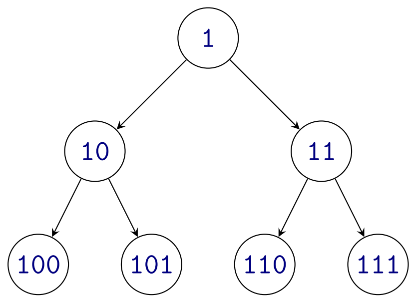


Abbildung 11.3: ein Graph, der ein sogenannter Baum ist

Als zweites Beispiel wollen wir den Graphen $G = (V, E)$ betrachten, für den gilt:

- $V = \{0, 1\}^3$
- $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{0, 1\} \wedge w \in \{0, 1\}^2\}$

Die Knotenmenge ist also einfach $V = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$. Die Kantenmenge wollen wir gar nicht mehr vollständig aufschreiben. Nur zwei Kanten schauen wir uns beispielhaft kurz an:

- Wählt man $x = y = 0$ und $w = 00$ dann ist laut Definition von E also $(000, 000)$ eine Kante.
- Wählt man $x = 0$, $y = 1$ und $w = 10$ dann ist laut Definition von E also $(010, 101)$ eine Kante.

Graphisch kann man diesen Graphen z. B. wie in Abbildung 11.4 darstellen. Es handelt sich um einen sogenannten De Bruijn-Graphen. Wie man sieht, können

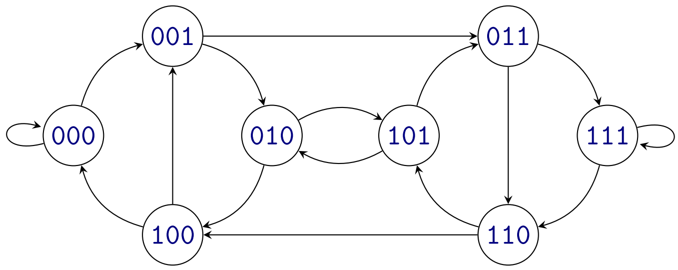


Abbildung 11.4: Der de Bruijn-Graphen mit 8 Knoten

bei einer Kante Start- und Zielknoten gleich sein. Eine solche Kante, die also von der Form $(x, x) \in E$ ist, heißt auch eine *Schlinge*. Manchmal ist es bequem, davon auszugehen, dass ein Graph keine Schlingen besitzt. Ein solcher Graph heißt *schlingenfrei*.

Schlinge

schlingenfrei

Ein ganz wichtiger Begriff ist der eines Teilgraphen eines gegebenen Graphen. Wir sagen, dass $G' = (V', E')$ ein *Teilgraph* von $G = (V, E)$ ist, wenn $V' \subseteq V$ ist und $E' \subseteq E \cap V' \times V'$. Knoten- und Kantenmenge von G' müssen also Teilmenge von V resp. E sein, und die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

Teilgraph

Als Beispiel zeigen wir einen Teilgraphen des oben dargestellten de Bruijn-Graphen:

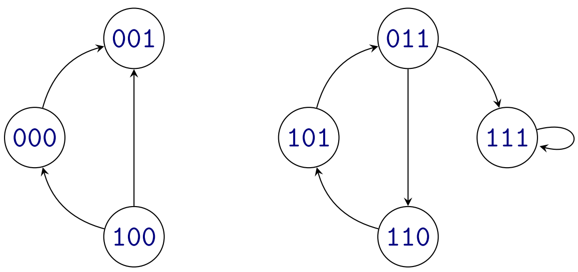


Abbildung 11.5: Ein Teilgraph des de Bruijn-Graphen aus Abbildung 11.4

11.1.2 Pfade und Erreichbarkeit

Im folgenden benutzen wir die Schreibweise $M^{(+)}$ für die Menge aller nichtleeren Listen, deren Elemente aus M stammen. Und solch eine Liste notieren wir in der Form $(m_1, m_2 \dots, m_k)$.

Pfad

Länge eines Pfades

Ein weiteres wichtiges Konzept sind Pfade. Wir wollen sagen, dass eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten ein *Pfad* in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Die Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!) heißt die *Länge* des Pfades. Auch wenn wir Pfade als Knotenlisten definiert haben, wollen wir davon sprechen, dass „in einem Pfad" $(v_0, \dots, v_n)$ Kanten vorkommen; was wir damit meinen sind die Kanten (v_i, v_{i+1}) für $i \in \mathbb{G}_n$.

erreichbar

Wenn $p = (v_0, \dots, v_n)$ ein Pfad ist, sagt man auch, dass v_n von v_0 aus *erreichbar* ist.

wiederholungsfreier Pfad

Ein Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt *wiederholungsfrei*, wenn gilt: Die Knoten $v_0, \dots, v_{n-1}$ sind paarweise verschieden und die Knoten $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise verschieden. Die beiden einzigen Knoten, die gleich sein dürfen, sind also v_0 und v_n.

geschlossener Pfad

Ein Pfad mit $v_0 = v_n$ heißt *geschlossen*.

Zyklus

einfacher Zyklus

Ein geschlossener Pfad $(v_0, \dots, v_n)$ heißt auch *Zyklus*. Er heißt ein *einfacher Zyklus*, wenn er außerdem wiederholungsfrei ist. Zum Beispiel ist in Abbildung 11.5 der Pfad (011, 110, 101, 011) ein einfacher Zyklus der Länge 3. Manchmal bezeichnet man auch den Teilgraphen, der aus den verschiedenen Knoten des Zyklus und den dazugehörigen Kanten besteht, als Zyklus.

Wie man in Abbildung 11.5 auch sieht, kann es unterschiedlich lange Pfade von einem Knoten zu einem anderen geben: von 100 nach 001 gibt es einen Pfad der Länge 1 und einen Pfad der Länge 2. Und es gibt in diesem Graphen auch Knotenpaare, bei denen gar kein Pfad von einem zum anderen existiert.

streng zusammenhängender Graph

Ein gerichteter Graph heißt *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ gilt: Es gibt in G einen Pfad von x nach y. Zum Beispiel ist der de Bruijn-Graph aus Abbildung 11.4 streng zusammenhängend (wie man durch Durchprobieren herausfindet), aber der Teilgraph aus Abbildung 11.5 eben nicht.

Baum

Wurzel

Sozusagen eine sehr viel einfachere Variante von Zusammenhang ist bei Graphen mit einer speziellen Struktur gegeben, die an ganz vielen Stellen in der Informatik immer wieder auftritt. Auch in dieser Vorlesung kam sie schon mehrfach vor: Bäume. Ein (gerichteter) *Baum* ist ein Graph $G = (V, E)$, in dem es einen Knoten $r \in V$ gibt mit der Eigenschaft: Für jeden Knoten $x \in V$ gibt es in G genau einen Pfad von r nach x. Wir werden uns gleich kurz überlegen, dass es nur einen Knoten r mit der genannten Eigenschaft geben kann. Er heißt die *Wurzel* des Baumes. In Abbildung 11.3 ist ein Baum dargestellt, dessen Wurzel 1 ist.

11.1 Lemma. Die Wurzel eines gerichteten Baumes ist eindeutig.

11.2 Beweis. Angenommen, r und r' wären verschiedene Wurzeln des gleichen Baumes. Dann gäbe es

- einen Pfad von r nach r', weil r Wurzel ist, und
- einen Pfad von r' nach r, weil r' Wurzel ist.

Durch „Hintereinanderhängen" dieser Pfade der Länge > 0 ergäbe sich ein Pfad von r nach r, der vom Pfad (r) verschieden wäre. Also wäre der Pfad von r nach r gar nicht eindeutig. ■

Es kommt immer wieder vor, dass man darüber reden will, wieviele Kanten in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ zu einem Knoten hin oder von ihn weg führen. Der *Eingangsgrad* eines Knoten y wird mit $d^-(y)$ bezeichnet und ist definiert als *Eingangsgrad*

$$d^-(y) = |\{x \mid (x, y) \in E\}|$$

Analog nennt man

$$d^+(x) = |\{y \mid (x, y) \in E\}|$$

den *Ausgangsgrad* eines Knotens x. Die Summe $d(x) = d^-(x) + d^+(x)$ heißt auch der *Grad* des Knotens x. *Ausgangsgrad* *Grad*

In einem gerichteten Baum gibt es immer Knoten mit Ausgangsgrad 0. Solche Knoten heißen *Blätter*. *Blatt eines Baums*

11.1.3 Isomorphie von Graphen

Wir haben eingangs davon gesprochen, dann man von Graphen manchmal nur die „Struktur" darstellt, aber nicht, welcher Knoten wie heißt. Das liegt daran, dass manchmal eben nur die Struktur interessiert und man von allem weiteren abstrahieren will. Hier kommt der Begriff der Isomorphie von Graphen zu Hilfe. Ein Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt *isomorph* zu einem Graphen $G_2 = (V_2, E_2)$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft: *isomorph*

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : (x, y) \in E_1 \iff (f(x), f(y)) \in E_2$$

Mit anderen Worten ist f einfach eine „Umbenennung" der Knoten. Die Abbildung f heißt dann auch ein (Graph-)*Isomorphismus*. *Isomorphismus*

Man kann sich überlegen:

- Wenn G_1 isomorph zu G_2 ist, dann ist auch G_2 isomorph zu G_1: Die Umkehrabbildung zu f leistet das Gewünschte.
- Jeder Graph ist isomorph zu sich selbst: Man wähle $f = I_V$.
- Wenn G_1 isomorph zu G_2 ist (dank f) und G_2 isomorph zu G_3 (dank g), dann ist auch G_1 isomorph zu G_3: Man betrachte die Abbildung $g \circ f$.

11.1.4 Ein Blick zurück auf Relationen

Vielleicht haben Sie bei der Definition von gerichteten Graphen unmittelbar gesehen, dass die Kantenmenge E ja nichts anderes ist als eine binäre Relation auf der Knotenmenge V (vergleiche Abschnitt 3.2). Für solche Relationen hatten wir in Abschnitt 8.3 Potenzen definiert. Im folgenden wollen wir uns klar machen, dass es einen engen Zusammenhang gibt zwischen den Relationen E^i für $i \in \mathbb{N}_0$ und Pfaden der Länge i im Graphen. Daraus wird sich dann auch eine einfache Interpretation von E^* ergeben.

Betrachten wir zunächst den Fall $i = 2$.

Ein Blick zurück in Abschnitt 8.3 zeigt, dass $E^2 = E \circ E^1 = E \circ E \circ \mathrm{I} = E \circ E$ ist. Nach Definition des Relationenproduktes ist

$$E \circ E = \{(x,z) \in V \times V \mid \exists y \in V : (x,y) \in E \wedge (y,z) \in E\}$$

Ein Pfad der Länge 2 ist eine Knotenliste $p = (v_0, v_1, v_2)$ mit der Eigenschaft, dass $(v_0, v_1) \in E$ ist und ebenso $(v_1, v_2) \in E$.

Wenn ein Pfad $p = (v_0, v_1, v_2)$ vorliegt, dann ist also gerade $(v_0, v_2) \in E^2$. Ist umgekehrt $(v_0, v_2) \in E^2$, dann gibt es einen Knoten v_1 mit $(v_0, v_1) \in E$ und $(v_1, v_2) \in E$. Und damit ist dann (v_0, v_1, v_2) ein Pfad im Graphen, der offensichtlich Länge 2 hat.

Also ist ein Paar von Knoten *genau dann* in der Relation E^2, *wenn* die beiden durch einen Pfad der Länge 2 miteinander verbunden sind.

Analog, aber noch einfacher, kann man sich überlegen, dass ein Paar von Knoten genau dann in der Relation $E^1 = E$, wenn die beiden durch einen Pfad der Länge 1 miteinander verbunden sind.

Und die entsprechende Aussage für $i = 0$ gilt auch: Sind zwei Knoten x und y in der Relation $E^0 = \mathrm{I}_V$, dann ist $x = y$ und folglich ist in der Tat (x) ein Pfad der Länge 0 von x nach $y = x$. Umgekehrt: Ein Pfad der Länge 0 von x nach y ist von der Form (z) und fängt mit $z = x$ an und hört mit $z = y$ auf, also ist $x = y$, und folglich $(x,y) = (x,x) \in \mathrm{I}_V = E^0$.

Damit haben wir uns explizit davon überzeugt, dass für alle $i \in \mathbb{G}_3$ gilt: Ein Paar von Knoten ist genau dann in der Relation E^i, wenn die beiden Knoten durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind. Und es ist wohl klar, dass man durch vollständige Induktion beweisen kann, dass diese Aussage sogar für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt.

11.3 Lemma. Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^i, wenn x und y in G durch einen Pfad der Länge i miteinander verbunden sind.

Damit gibt es nun auch eine anschauliche Intepretation von E^*, das wir ja definiert hatten als Vereinigung aller E^i für $i \in \mathbb{N}_0$:

11.4 **Korollar.** Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Paar von Knoten (x, y) ist genau dann in der Relation E^*, wenn x und y in G durch einen Pfad (evtl. der Länge 0) miteinander verbunden sind.

Folglich gilt auch:

11.5 **Korollar.** Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn $E^* = V \times V$ ist.

11.2 UNGERICHTETE GRAPHEN

Manchmal hat man mit Graphen zu tun, bei denen für *jede* Kante $(x, y) \in E$ stets $(y, x) \in E$ auch eine Kante in E ist. In einem solchen Fall ist meist angebracht, üblich und übersichtlicher, in der graphischen Darstellung nicht einen Pfeil von x nach y und einen Pfeil von y nach x zu zeichnen, sondern die beiden Knoten einfach durch *einen* Strich (ohne Pfeilspitzen) miteinander zu verbinden. Und man spricht dann auch nur von *einer* Kante. Üblicherweise passt man dann auch die

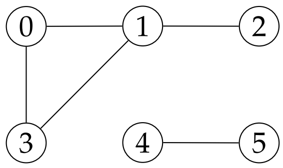


Abbildung 11.6: ein ungerichteter Graph

Formalisierung an und definiert: Ein *ungerichteter Graph* ist eine Struktur $U = (V, E)$ mit einer endlichen nichtleeren Menge V von Knoten und einer Menge E von Kanten, wobei $E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V\}$. Analog zum gerichteten Fall heißen zwei Knoten eines ungerichteten Graphen *adjazent*, wenn sie durch eine Kante miteinander verbunden sind. *ungerichteter Graph* *adjazent*

Eine Kante, bei der Start- und Zielknoten gleich sind, heißt wie bei gerichteten Graphen eine *Schlinge*. In der Formalisierung schlägt sich das so nieder, dass aus $\{x, y\}$ einfach $\{x\}$ wird. Wenn ein ungerichteter Graph keine Schlingen besitzt, heißt er auch wieder *schlingenfrei*. *Schlinge* *schlingenfrei*

Wir sagen, dass $U' = (V', E')$ ein *Teilgraph* eines ungerichteten Graphen $U =$ *Teilgraph*

(V, E) ist, wenn $V' \subseteq V$ ist und $E' \subseteq E \cap \{ \{x, y\} \mid x, y \in V'\}$. Knoten- und Kantenmenge von U' müssen also Teilmenge von V resp. E sein, und die Endpunkte jeder Kante von E' müssen auch zu V' gehören.

Bei gerichteten Graphen haben wir von Pfaden geredet. Etwas entsprechendes wollen wir auch bei ungerichteten Graphen können. Aber da Kanten anders formalisiert wurden, wird auch eine neue Formalisierung des Analogons zu Pfaden benötigt. Wir wollen sagen, dass eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^{(+)}$ von Knoten ein *Weg* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt: $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Die Anzahl $n = |p| - 1$ der Kanten (!) heißt die *Länge* des Weges.

Weg
Länge eines Weges

Bei gerichteten Graphen war E eine binäre Relation auf V und infolge dessen waren alle E^i definiert. Bei ungerichteten Graphen ist E nichts, was unter unsere Definition von binärer Relation fällt. Also ist auch E^i nicht definiert. Das ist schade und wir beheben diesen Mangel umgehend: Zur Kantenmenge E eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ definieren wir die *Kantenrelation* $E_g \subseteq V \times V$ vermöge:

Kantenrelation

$$E_g = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E\} .$$

Damit haben wir eine Relation auf V. Und folglich auch einen gerichteten Graphen $G = (V, E_g)$ mit der gleichen Knotenmenge V wie U. Und wenn in U zwei Knoten x und y durch eine Kante miteinander verbunden sind, dann gibt es in G die (gerichtete) Kante von x nach y und umgekehrt auch die Kante von y nach x (denn $\{x, y\} = \{y, x\}$). Man sagt auch, dass (V, E_g) der zu (V, E) gehörige gerichtete Graph ist.

Man sagt, ein ungerichteter Graph (V, E) sei *zusammenhängend*, wenn der zugehörige gerichtete Graph (V, E_g) streng zusammenhängend ist.

zusammenhängender ungerichteter Graph

Der Übergang von ungerichteten zu gerichteten Graphen ist auch nützlich, um festzulegen, wann zwei ungerichtete Graphen die „gleiche Struktur" haben: $U_1 = (V_1, E_1)$ und $U_2 = (V_2, E_2)$ heißen *isomorph*, wenn die zugehörigen gerichteten Graphen U_{1g} und U_{2g} isomorph sind. Das ist äquivalent dazu, dass es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt mit der Eigenschaft:

isomorph

$$\forall x \in V_1 : \forall y \in V_1 : \{x, y\} \in E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in E_2$$

Auch für ungerichtete Graphen ist Isomorphie eine Äquivalenzrelation.

Eben war es bequem, von einem ungerichteten zu dem zugehörigen gerichteten Graphen überzugehen. Die umgekehrte Richtung ist manchmal auch ganz praktisch. Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, dann definieren wir $E_u = \{ \{x, y\} \mid (x, y) \in E\}$ und nennen $U = (V, E_u)$ den zu G gehörigen ungerichteten Graphen. Er entsteht aus G also sozusagen dadurch, dass man in G alle Pfeilspitzen „entfernt" (oder „vergisst" oder wie auch immer Sie das nennen wollen).

Damit definieren wir nun, was wir im ungerichteten Fall als Baum bezeichnen wollen: Ein ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt ein *Baum*, wenn es einen gerichteten Baum $G = (V, E')$ gibt mit $E = E'_u$. Abbildung 11.7 zeigt zwei ungerichtete Bäume.

ungerichteter Baum

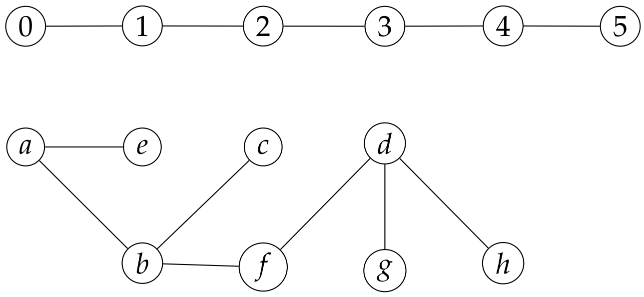


Abbildung 11.7: zwei ungerichtete Bäume

Man beachte einen Unterschied zwischen gerichteten und ungerichteten Bäumen. Im gerichteten Fall ist die Wurzel leicht zu identifizieren: Es ist der einzige Knoten, von dem Pfade zu den anderen Knoten führen. Im ungerichteten Fall ist das anders: Von jedem Knoten führt ein Weg zu jedem anderen Knoten. Nichtsdestotrotz ist manchmal „klar“, dass ein Knoten die ausgezeichnete Rolle als Wurzel spielt. Im Zweifelsfall sagt man es eben explizit dazu.

Auch für ungerichtete Graphen führt man den Grad eines Knotens ein (aber nicht getrennt Eingangs- und Ausgangsgrad). In der Literatur findet man zwei unterschiedliche Definitionen. Wir wollen in dieser Vorlesung die folgende benutzen: Der *Grad* eines Knotens $x \in V$ ist

Grad

$$d(x) = |\{y \mid y \neq x \wedge \{x, y\} \in E\}| + \begin{cases} 2 & \text{falls } \{x, x\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

11.2.1 Anmerkung zu Relationen

Die Kantenrelation eines ungerichteten Graphen hat eine Eigenschaft, die auch in anderen Zusammenhängen immer wieder auftritt. Angenommen $(x, y) \in E_g$. Das kann nur daher kommen, dass $\{x, y\} \in E$ ist. Dann ist aber auch „automatsich“ $(y, x) \in E_g$. Also: Wenn $(x, y) \in E_g$, dann $(y, x) \in E_g$. Dieser Eigenschaft, die eine Relation haben kann, geben wir einen Namen:

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *symmetrisch* wenn für alle $x \in M$ und $y \in M$ gilt:

symmetrische Relation

$$(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R \,.$$

Äquivalenzrelation

Und wir wollen an dieser Stelle schon einmal erwähnen, dass eine Relation, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist, eine sogenannte *Äquivalenzrelation* ist.

Wir habe weiter vorne in dieser Einheit auch eine erste interessante Äquivalenzrelation kennengelernt: die Isomorphie von Graphen. Man lese noch einmal aufmerksam die drei Punkte der Aufzählung am Ende von Unterabschnitt 11.1.3.

11.3 Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

Häufig beinhaltet die Graphstruktur nicht die Gesamtheit an Informationen, die von Interesse sind. Zum Beispiel sind bei Ableitungsbäumen die Nichtterminalsymbole an den inneren Knoten und die Terminalsymbole und ε an den Blättern wesentlich. Bei Huffman-Bäumen haben wir Markierungen an Kanten benutzt, um am Ende die Codierungen von Symbolen herauszufinden.

knotenmarkierter Graph

Allgemein wollen wir davon sprechen, dass ein Graph mit Knotenmarkierungen oder *knotenmarkierter Graph* vorliegt, wenn zusätzlich zu $G = (V, E)$ auch noch eine Abbildung $m_V : V \to M_V$ gegeben ist, die für jeden Knoten v seine Markierung $m_V(v)$ festlegt. Die Wahl der Menge M_V der möglichen Knotenmarkierungen ist abhängig vom einzelnen Anwendungsfall. Bei Huffman-Bäumen hatten wir als Markierungen natürliche Zahlen (nämlich die Häufigkeiten von Symbolmengen); es war also $M_V = \mathbb{N}_+$.

Aus Landkarten, auf denen Länder mit ihren Grenzen eingezeichnet sind, kann man auf verschiedene Weise Graphen machen. Hier ist eine Möglichkeit: Jedes Land wird durch einen Knoten des (ungerichteten) Graphen repräsentiert. Eine Kante verbindet zwei Knoten genau dann, wenn die beiden repräsentierten Länder ein Stück gemeinsame Grenzen haben. Nun ist auf Landkarten üblicherweise das Gebiet jedes Landes in einer Farbe eingefärbt, und zwar so, dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben (damit man sie gut unterscheiden kann). Die Zuordnung von Farben zu Knoten des Graphen ist eine Knotenmarkierung. (Man spricht auch davon, dass der Graph gefärbt sei.) Wofür man sich interessiert, sind „legale“ Färbungen, bei denen adjazente Knoten verschiedene Farben haben: $\{x, y\} \in E \Longrightarrow m_V(x) \neq m_V(y)$. Ein Optimierungsproblem besteht dann z. B. darin, herauszufinden, welches die minimale Anzahl von Farben ist, die ausreicht, um den Graphen legal zu färben. Solche Probleme müssen nicht nur (vielleicht) von Verlagen für Atlanten gelöst werden, sondern sie werden auch etwa von modernen Compilern beim Übersetzen von Programmen bearbeitet.

kantenmarkierter Graph

Ein Graph mit Kantenmarkierungen oder *kantenmarkierter Graph* liegt vor, wenn zusätzlich zu $G = (V, E)$ auch noch eine Abbildung $m_E : E \to M_E$ gegeben ist, die für jede Kante $e \in E$ ihre Markierung $m_E(e)$ festlegt. Die Wahl der Menge der Markierungen ist abhängig vom einzelnen Anwendungsfall. Bei Huffman-Bäumen hatten wir als Markierungen an den Kanten die Symbole `0` und `1`, es war also $M_E = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$.

11.3.1 Gewichtete Graphen

Ein Spezialfall von markierten Graphen sind *gewichtete Graphen*. Bei ihnen sind die Markierungen z. B. Zahlen. Nur diesen Fall werden wir im folgenden noch ein wenig diskutieren. Im allgemeinen sind es vielleich auch mal Vektoren von Zahlen o. ä.; jedenfalls soll die Menge der Gewichte irgendeine Art von algebraischer Struktur aufweisen, so dass man „irgendwie rechnen" kann.

gewichtete Graphen

Als Motiviation können Sie sich vorstellen, dass man z. B. einen Teil des Straßen- oder Eisenbahnnetzes modelliert. Streckenstücke ohne Abzweigungen werden als einzelne Kanten repräsentiert. Das Gewicht jeder Kante könnte dann z. B. die Länge des entsprechenden echten Streckenstückes sein oder die dafür benötigte Fahrzeit. Oder man stellt sich vor, man hat einen zusammenhängenden Graphen gegeben. Die Kante stellen mögliche Verbindungen dar und die Gewichte sind Baukosten. Die Aufgabe bestünde dann darin, einen Teilgraphen zu finden, der immer noch zusammenhängend ist, alle Knoten umfasst, aber möglichst wenige, geeignet gewählte Kanten, so dass die Gesamtkosten für den Bau minimal werden. Für den Fall eines Stromnetzes in der damaligen Tschechoslowakei war dies die tatsächliche Aufgabe, die in den Zwanziger Jahren O. Borůvka dazu brachte, seinen Algorithmus für minimale aufspannende Bäume zu entwickeln. Ihnen werden Graphalgorithmen noch an vielen Stellen im Studium begegnen.

Eine andere Interpretation von Kantengewichten kann man bei der Modellierung eines Rohrleitungsnetzes, sagen wir eines Wasserleitungsnetzes, benutzen: Das Gewicht einer Kante ist dann vielleicht der Querschnitt des entsprechenden Rohres; das sagt also etwas über Transportkapazitäten aus. Damit wird es sinnvoll zu fragen, welchen Fluss man maximal („über mehrere Kanten parallel") erzielen kann, wenn Wasser von einem Startknoten s zu einem Zielknoten t transportiet werden soll.