# 7 Graphen

## 7.1 Gerichtete Graphen und Teilgraphen

### 7.1.1 Graphen:

- zur Motivation:
  - Einbahnstraßensystem, .....
  - wie würde man Zweibahnstraßen modellieren? die Fahrspuren für beide Richtungen separat
  - **Achtung:** analoge Idee für Autobahmodellierung (mehrere Spuren in die gleiche Richtung zwischen zwei Knoten) geht nicht: $E \subseteq V \times V$ erlaubt nur: es gibt *keine* Kante von $x$ nach $y$ oder es gibt *eine* Kante. sogenannte Mehrfachkanten sind bei uns nicht möglich.
- Beispiele malen:
  - einschließlich Extremfälle mit 0 Kanten bzw. maximal vielen Kanten; mit Schlingen und ohne Schlingen.
  - Sonderfälle wie Bäume (siehe weiter unten) und Zyklen
  - Beim Malen darauf hinweisen, dass man den gleichen Graphen unterschiedlich hinmalen kann, z. B. den $K_4$ mit sich kreuzenden Kanten oder ohne.
- Eigenschaften von Graphen an Beispielen diskutieren
  - beim Straßensystem: Man möchte von jedem Knoten zu jedem kommen.
  - Wenn die Knoten Rechner sind und die Kanten Kabel: Man möchte von $x$ nach $y$ nur über möglichst „wenige“ Kanten laufen müssen (egal wo $x$ und $y$)
  - Wenn die Knoten Rechner sind und die Kanten Kabel: es sollen viele gleichzeitig Daten austauschen können: von einer Hälfte in die andere möglichst viele Kanten (egal welche Knoten in der einen Hälfte sind und welche in der anderen)
- Wenn ein Graph $n$ Knoten hat:
  - Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?
    $n^2$
    Begründung: klar

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?
  $n(n-1)$
  Begründung: $n^2 - n$

### 7.1.2 Definition Teilgraph:

- Beachte: zu jeder Kante, die man in $E'$ haben will, müssen auch Anfangs- und Endknoten in $V'$ vorhanden sein!
- hinreichend großes Beispiel machen, bei dem sowohl $(\{0,1,2\}, \{(0,1),(0,2)\})$ als auch $(\{3,4,5\}, \{(3,4),(3,5))\})$ Teilgraph ist:
  - **Achtung:** formal sind das verschiedene (Teil-)Graphen
  - **aha:** aber sie sehen gleich aus: so was nennt man isomorphe Graphen

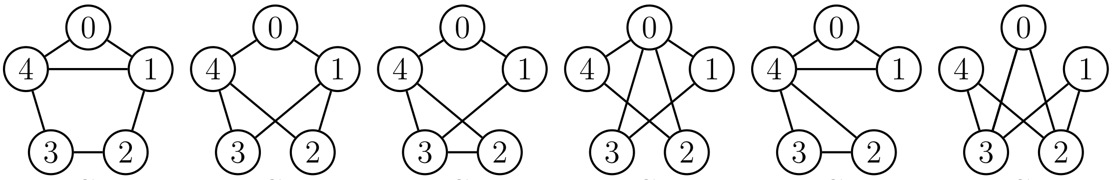
## 7.2 Pfade und Erreichbarkeit

### 7.2.1 Definition Pfade:

- Beispiel machen, in dem zwar ein Pfad von $x$ nach $y$ existiert, aber nicht umgekehrt.
- beachte: für aufeinanderfolgende Knoten im Pfad muss die Kante in die richtige Richtung weisen!
- Beachte: Knoten dürfen in Pfad mehrfach vorkommen
- Beispiel machen, in dem von $x$ nach $y$ unterschiedlich lange Pfade vorkommen.

## 7.3 Isomorphie von Graphen

- Da hatten wir z.B. letztes Jahr eine Aufgabe auf dem Übungsblatt 8 zum Erkennen von isomorphen Graphen. Das macht das ganze vielleicht klar:
  - Für welche der folgenden sechs Graphen gibt es einen Isomorphismus zu einem der anderen fünf Graphen? Geben Sie jeweils den zugehörigen Isomorphismus an.



$G_0$ $G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$ $G_5$

## 7.4 Ein Blick zurück auf Relationen

### 7.4.1 Pfade, $E^*$

- $E^2$ ist wieder Relation auf $V$: kann man also als Graph malen: Beispiel machen
- analog für $E^3, \ldots$
- und $E^*$ ist auch wieder eine Relation auf $V$: kann man also als Graph malen: Beispiel: aus Zyklus der Länge 5 wird der sogenannte vollständige Graph $K_5$

## 7.5 Ungerichtete Graphen

- **Achtung:** man reite noch mal auf der Formalisierung von Kanten herum:
  - für $x \neq y$ ist $\{x, y\}$ eine zweielementige Menge, *ohne* eine Festlegung von Reihenfolge
  - für $x = y$ ist die Menge $\{x, y\} = \{x\}$ eine *ein*elementige Menge
- Wie ist das mit der Anzahl Kanten eines ungerichteten Graphen mit $n$ Knoten:
  - Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist? $n(n-1)/2$ Begründung: von jedem Knoten zu jedem *anderen*; durch zwei weil sonst jede Kante zweimal gezählt.
  - Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er Schlingen haben darf ist? $n(n+1)/2$
    Begründung: $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$

## 7.6 Anmerkung zu Relationen

### 7.6.1 Äquivalenzrelationen:

Falls schon Fragen kommen: mit dem Bild einer Nicht-Äquivalenzrelation anfangen und so lange Pfeile dazu malen, bis alle Forderungen erfüllt sind:

- Schlingen an allen Knoten
- zu jedem Pfeil hin auch der zurück
- wenn ein Pfad von $x$ nach $y$ existiert, dann auch eine direkte Kante

Ergebnis: einige Klumpen, äh, Cliquen (die den Äquivalenzklassen entsprechen)

## 7.7 Graphen mit Knoten- oder Kantenmarkierungen

### 7.7.1 kantenmarkierte Graphen:

- Noch mal einen Huffman-Baum hinmalen und diskutieren
- für Zahlen als Kantenmarkierungen siehe gleich

### 7.7.2 Graphen mit gewichteten Kanten

- Beispielgraphen hinmalen und die Studenten kurze und lange Wege suchen lassen
- Beispielgraphen hinmalen und die Studenten große Flüsse suchen lassen.

## 7.8 alte (Klausur-)Aufgaben

- Aufgabe aus ÜB7 (WS08/09): Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^3$ und $E = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\} \wedge w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^2\}$.

    a) Graphen zeichnen lassen.
    b) Geben Sie einen Zyklus in $G$ an, der außer dem Anfangs- und Endknoten jeden Knoten von $G$ genau einmal enthält.
    c) Geben Sie einen geschlossenen Pfad in $G$ an, der jede Kante von $G$ genau einmal enthält.

- So ziemlich in jeder der letztjährigen Klausuren kam was zu Graphen dran z.B. http://gbi.ira.uka.de/archiv/2010/k-mar11.pdf
  oder http://gbi.ira.uka.de/archiv/2010/k-sep11.pdf.

  Adjazenz-/Wegematrizen sind allerdings noch nicht bekannt.