Grundbegriffe der Informatik

Einheit 12: Erste Algorithmen in Graphen

Prof. Dr. Tanja Schultz

Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2012/2013

Überblick

Überblick

Knoten, Kanten und Graphen als Objekte

```
class Vertex {
   String name;          // oder was auch immer
}

class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
}
```

Knoten, Kanten und Graphen als Objekte

```
class Vertex {
   String name;          // oder was auch immer
}

class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
}
```

Knoten, Kanten und Graphen als Objekte

```
class Vertex {
   String name;          // oder was auch immer
}

class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
}
```

Knoten, Kanten und Graphen als Objekte

```
class Vertex {
   int id;
}

class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
}
```

Adjazenzlisten

```
class Vertex {
   int id;
   Vertex[] neighbors;      // Feldlänge = Knotengrad
}

class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
}
```

Inzidenzlisten

```
class Vertex {
   int id;
   Edge[] incoming;
   Edge[] outgoing;
}

class Edge {
   Vertex start;
   Vertex end;
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
   Edge[] edges;
}
```

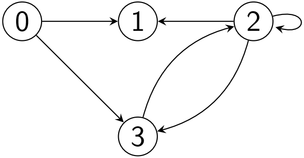
Variante von Adjazenzlisten

```
class Vertex {
   int id;
   boolean[] is_connected_to;     // Feldlänge = |V|
}

class Graph {
   Vertex[] vertices;
}
```

- Knoten: Objekte u, v der Klasse `Vertex`
- $u.\texttt{is\_connected\_to}[v.\texttt{id}] = \begin{cases} \texttt{true} & \text{falls } (u, v) \in E \\ \texttt{false} & \text{falls } (u, v) \notin E \end{cases}$

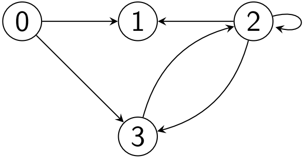
Beispielgraph



Objekt u, das Knoten 0 repräsentiert:

u.`id`	u.`is_connected_to`			
0	`false`	`true`	`false`	`true`
	0	1	2	3

Beispielgraph



Objekte für alle Knoten untereinander:

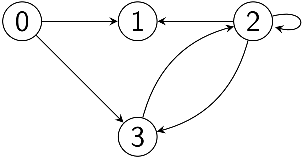
u.id	u.is_connected_to			
0	false	true	false	true
1	false	false	false	false
2	false	true	true	true
3	false	false	true	false
	0	1	2	3

Adjazenzmatrix

- *Adjazenzmatrix* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ist eine $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Beispiel:



$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

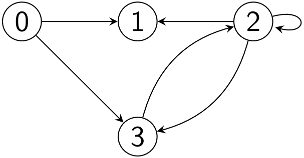
- Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ ist die Adjazenzmatrix von $G = (V, E_g)$

Adjazenzmatrix

- *Adjazenzmatrix* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ist eine $n \times n$-Matrix A mit der Eigenschaft:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Beispiel:



$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ ist die Adjazenzmatrix von $G = (V, E_g)$

Repräsentation von Relationen durch Matrizen

- endliche Menge M mit n Elementen
- binäre Relation $R \subseteq M \times M$
- repräsentiert durch $n \times n$-Matrix $A(R)$:

$$(A(R))_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in R \quad \text{d. h. also } iRj \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin R \quad \text{d. h. also } \neg(iRj) \end{cases}$$

- zu verschiedenen Relationen (über der gleichen Menge M) gehören verschiedene Matrizen und umgekehrt

Wegematrix eines Graphen

- Erreichbarkeitsrelation E^* als Matrix repräsentierbar
- die sogenannte *Wegematrix* W des Graphen:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{falls es in } G \text{ einen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \\ 0 & \text{falls es in } G \text{ keinen Pfad von } i \text{ nach } j \text{ gibt} \end{cases}$$

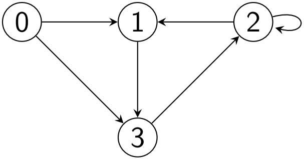
- algorithmisches Problem:
  - gegebene Probleminstanz: Adjazenzmatrix eines Graphen
  - gesucht: zugehörige Wegematrix des Graphen

Wegematrix: Beispiel

- Wegematrix:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

- Beispiel:



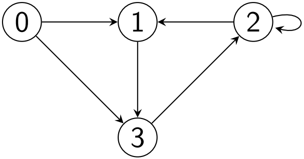
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

Wegematrix: Beispiel

- Wegematrix:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

- Beispiel:



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

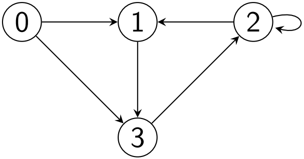
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} = W$$

Wegematrix: Beispiel

- Wegematrix:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

- Beispiel:



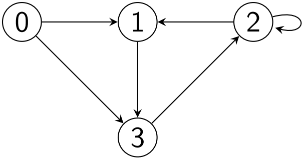
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = W$$

- Wegematrix:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

- Beispiel:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

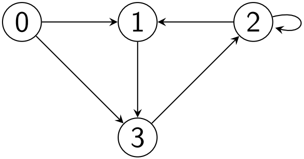
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = W$$

Wegematrix: Beispiel

- Wegematrix:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

- Beispiel:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

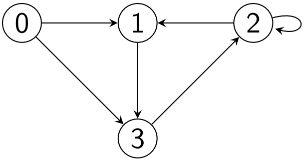
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = W$$

Wegematrix: Beispiel

- Wegematrix:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E^* \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E^* \end{cases}$$

- Beispiel:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = W \end{array}$$

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Repräsentation von Relationen als Matrizen
- z. B. Kantenrelation eines Graphen: Adjazenzmatrix

Das sollten Sie üben:

- zu gegebenem Graphen die Adjazenzmatrix hinschreiben
- zu gegebener Adjazenzmatrix den Graphen hinmalen
- z. B. für irgendwelche „speziellen“ Graphen und Matrizen

Überblick

Überblick

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

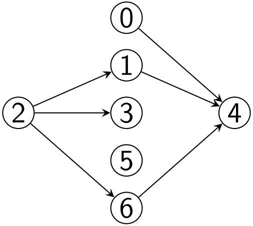
- 2-Erreichbarkeit an einem Beispiel
- Matrixmultiplikation
- Matrixaddition

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

- Potenzen der Adjazenzmatrix
- Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix
- Zählen durchzuführender arithmetischer Operationen
- Weitere Möglichkeiten für die Berechnung der Wegematrix

Algorithmus von Warshall

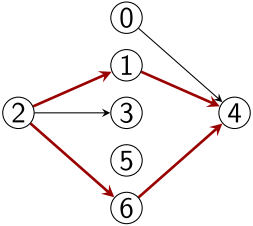
Ein Beispielgraph



$$\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- von Interesse: Pfade der Länge 2 von Knoten 2 zu Knoten 4

Ein Beispielgraph



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- von Interesse: Pfade der Länge 2 von Knoten 2 zu Knoten 4
- hinsehen: $(2, 1, 4)$ und $(2, 6, 4)$

Beispielgraph: systematische Suche nach Pfaden

- Wie findet man „systematisch“ alle solchen Pfade?
- prüfe *alle* Knoten $k \in V$:
  - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
  - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
  - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?
  - Ist $A_{2k} \cdot A_{k4} = 1$?
- durchlaufe nacheinander parallel
  - alle A_{2k} und alle A_{k4}, d. h.
  - *Zeile* für Knoten 2 und *Spalte* für Knoten 4

Beispielgraph: systematische Suche nach Pfaden

- Wie findet man „systematisch“ alle solchen Pfade?
- prüfe *alle* Knoten $k \in V$:
  - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
  - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
  - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?
  - Ist $A_{2k} \cdot A_{k4} = 1$?
- durchlaufe nacheinander parallel
  - alle A_{2k} und alle A_{k4}, d. h.
  - *Zeile* für Knoten 2 und *Spalte* für Knoten 4

Beispielgraph: systematische Suche nach Pfaden

- Wie findet man „systematisch“ alle solchen Pfade?
- prüfe *alle* Knoten $k \in V$:
  - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
  - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
  - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?
  - Ist $A_{2k} \cdot A_{k4} = 1$?
- durchlaufe nacheinander parallel
  - alle A_{2k} und alle A_{k4}, d. h.
  - *Zeile* für Knoten 2 und *Spalte* für Knoten 4

Beispielgraph: systematische Suche nach Pfaden

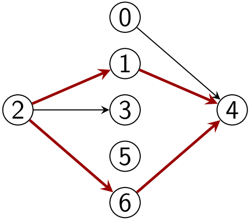
- Wie findet man „systematisch" alle solchen Pfade?
- prüfe *alle* Knoten $k \in V$:
  - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
  - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
  - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?
  - Ist $A_{2k} \cdot A_{k4} = 1$?
- durchlaufe nacheinander parallel
  - alle A_{2k} und alle A_{k4}, d. h.
  - *Zeile* für Knoten 2 und *Spalte* für Knoten 4

Beispielgraph: systematische Suche nach Pfaden

- Wie findet man „systematisch“ alle solchen Pfade?
- prüfe *alle* Knoten $k \in V$:
  - Ist $(2, k, 4)$ ein Pfad?
  - Ist $(2, k) \in E$ und $(k, 4) \in E$?
  - Ist $A_{2k} = 1$ und $A_{k4} = 1$?
  - Ist $A_{2k} \cdot A_{k4} = 1$?
- durchlaufe nacheinander parallel
  - alle A_{2k} und alle A_{k4}, d. h.
  - *Zeile* für Knoten 2 und *Spalte* für Knoten 4

$$A:\quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 1 & & \end{array}\right) \end{array}$$

$$A:\quad \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} \left(\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right)$$



0 1 0 0 0 0 1

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}
\quad
\begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Beispielgraph: Zählen der Pfade (2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & & 1 & &
\end{pmatrix}
$$

$$P_{24} = \sum_{k=0}^{6} A_{2k} \cdot A_{k4}$$

$$
\begin{array}{c}
0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{pmatrix}
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 2 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

Überblick

Matrixmultiplikation

- es sei
  - A eine $\ell \times n$-Matrix
  - B eine $n \times m$-Matrix
- die $\ell \times m$-Matrix C mit

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

- heißt das *Produkt* von A und B
- geschrieben $C = A \cdot B$
- Achtung: im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$!

- $$C_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} \cdot B_{kj}$$
- erst mal nur die naheliegende Möglichkeit
- es geht auch anders!

for $i \leftarrow 0$ **to** $\ell - 1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
    $C_{ij} \leftarrow 0$
    for $k \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
      $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$
    od
  od
od

Einheitsmatrizen

- *Einheitsmatrix*: $n \times n$-Matrix I, bei der für alle i und j gilt:

$$\mathrm{I}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

- für jede $m \times n$-Matrix A gilt:

$$\mathrm{I} \cdot A = A = A \cdot \mathrm{I}$$

- Beachte Größen der Einheitsmatrizen
  - links: $m \times m$
  - rechts: $n \times n$

Potenzen quadratischer Matrizen

$$A^0 = \mathrm{I}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : A^{n+1} = A^n \cdot A$$

- Quadrat der Adjazenzmatrix A enthält nach Definition der Matrixmultiplikation als Eintrag in Zeile i und Spalte j

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} A_{kj} \ .$$

- Jeder Summand $A_{ik} A_{kj}$ ist 1 gdw.
    - $A_{ik} = A_{kj} = 1$ ist, also gdw.
    - Kanten von i nach k und von k nach j existieren, also gdw.
    - (i, k, j) ein Pfad der Länge 2 von i nach j ist.

  und 0 sonst.
- Für $k_1 \neq k_2$ sind (i, k_1, j) und (i, k_2, j) verschiedene Pfade.
- Also ist

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{ik} A_{kj}$$

gleich der Anzahl der Pfade der Länge 2 von i nach j.

Überblick

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

- 2-Erreichbarkeit an einem Beispiel
- Matrixmultiplikation
- Matrixaddition

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

- Potenzen der Adjazenzmatrix
- Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix
- Zählen durchzuführender arithmetischer Operationen
- Weitere Möglichkeiten für die Berechnung der Wegematrix

Algorithmus von Warshall

Matrixaddition

- es seien A und B zwei $m \times n$-Matrizen
- die $m \times n$-Matrix C mit

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

- heißt die *Summe* von A und B
- geschrieben $C = A + B$
- stets $A + B = B + A$
- neutrales Element: die *Nullmatrix*, die überall Nullen enthält
- geschrieben 0
- algorithmisch:

  for $i \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
      for $j \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
          $C_{ij} \leftarrow A_{ij} + B_{ij}$
      od
  od

Die naheliegende Idee

- Benutze
$$E^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^i$$
um die Wegematrix zu berechnen.
- Probleme:
  - Was kann man gegen das unendlich tun?
  - Woher kommen die Matrizen für die Relationen E^i?
  - Welcher Matrizen-Operation entspricht die Vereinigung?

Die naheliegende Idee

- Benutze
$$E^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^i$$
um die Wegematrix zu berechnen.
- Probleme:
  - Was kann man gegen das unendlich tun?
  - Woher kommen die Matrizen für die Relationen E^i?
  - Welcher Matrizen-Operation entspricht die Vereinigung?

Die naheliegende Idee

- Benutze
$$E^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^i$$
um die Wegematrix zu berechnen.
- Probleme:
  - Was kann man gegen das unendlich tun?
  - Woher kommen die Matrizen für die Relationen E^i?
  - Welcher Matrizen-Operation entspricht die Vereinigung?

Die naheliegende Idee

- Benutze
$$E^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^i$$
um die Wegematrix zu berechnen.
- Probleme:
  - Was kann man gegen das unendlich tun?
  - Woher kommen die Matrizen für die Relationen E^i?
  - Welcher Matrizen-Operation entspricht die Vereinigung?

Beseitigung der *unendlichen* Vereinigung

- Graphen spezieller als Relationen: nur *endlich* viele Knoten
- Frage: Existiert ein Pfad in G von Knoten i nach Knoten j ?
- Sei
  - $G = (V, E)$ mit $|V| = n$
  - $p = (i_0, i_1, \ldots, i_k)$ ein Pfad mit $i_0 = i$ und $i_k = j$.
- wenn $k \geq n$, dann
  - enthält p Zyklus von x nach x
  - Weglassen ergibt kürzeren Pfad von i nach j
- wiederhole, solange Pfad mindestens $n + 1$ Knoten enthält
- Ergebnis: Pfad mit höchstens n Knoten, also höchstens $n - 1$ Kanten, von i nach j

Beseitigung der *unendlichen* Vereinigung

- Graphen spezieller als Relationen: nur *endlich* viele Knoten
- Frage: Existiert ein Pfad in G von Knoten i nach Knoten j ?
- Sei
  - $G = (V, E)$ mit $|V| = n$
  - $p = (i_0, i_1, \ldots, i_k)$ ein Pfad mit $i_0 = i$ und $i_k = j$.
- wenn $k \geq n$, dann
  - enthält p Zyklus von x nach x
  - Weglassen ergibt kürzeren Pfad von i nach j
- wiederhole, solange Pfad mindestens $n + 1$ Knoten enthält
- Ergebnis: Pfad mit höchstens n Knoten, also höchstens $n - 1$ Kanten, von i nach j

Beseitigung der *unendlichen* Vereinigung

- Graphen spezieller als Relationen: nur *endlich* viele Knoten
- Frage: Existiert ein Pfad in G von Knoten i nach Knoten j ?
- Sei
  - $G = (V, E)$ mit $|V| = n$
  - $p = (i_0, i_1, \ldots, i_k)$ ein Pfad mit $i_0 = i$ und $i_k = j$.
- wenn $k \geq n$, dann
  - enthält p Zyklus von x nach x
  - Weglassen ergibt kürzeren Pfad von i nach j
- wiederhole, solange Pfad mindestens $n + 1$ Knoten enthält
- Ergebnis: Pfad mit höchstens n Knoten, also höchstens $n - 1$ Kanten, von i nach j

Beseitigung der *unendlichen* Vereinigung (2)

Für Erreichbarkeit in einem endlichen Graphen mit n Knoten gilt:

$$E^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} E^i$$

Betrachtung höherer Potenzen (längerer Pfade) schadet nicht:

Lemma

Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten gilt:

$$\forall k \geq n-1 : E^* = \bigcup_{i=0}^{k} E^i$$

Beseitigung der *unendlichen* Vereinigung (2)

Für Erreichbarkeit in einem endlichen Graphen mit n Knoten gilt:

$$E^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} E^i$$

Betrachtung höherer Potenzen (längerer Pfade) schadet nicht:

Lemma

Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten gilt:

$$\forall k \geq n-1 : E^* = \bigcup_{i=0}^{k} E^i$$

Überblick

Lemma

Es sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A.
Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$(A^k)_{ij}$ *ist die Anzahl der Pfade der Länge k in G von i nach j.*

- Beweis durch vollständige Induktion.
- Induktionsschritt fast wie im Fall $k = 2$.

Die Signum-Funktion

- *Signum-Funktion*

$$\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

- Erweiterung auf Matrizen durch komponentenweise Anwendung

$$\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n} : (\mathrm{sgn}(M))_{ij} = \mathrm{sgn}(M_{ij})$$

Korollar

Es sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A.
Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1.
$$\operatorname{sgn}((A^k)_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{falls in } G \text{ ein Pfad der Länge } k \\ & \quad \text{von } i \text{ nach } j \text{ existiert} \\ 0 & \text{falls in } G \text{ kein Pfad der Länge } k \\ & \quad \text{von } i \text{ nach } j \text{ existiert} \end{cases}$$

2. Matrix $\operatorname{sgn}(A^k)$ repräsentiert die Relation E^k.

Überblick

Vereinigung von Relationen

- Seien Relationen $R \subseteq M \times M$ und $R' \subseteq M \times M$ repräsentiert durch Matrizen A und A'.
- dann:

$$\begin{aligned}(i,j) \in R \cup R' &\iff (i,j) \in R \vee (i,j) \in R' \\ &\iff A_{ij} = 1 \vee A'_{ij} = 1 \\ &\iff A_{ij} + A'_{ij} \geq 1 \\ &\iff (A + A')_{ij} \geq 1 \\ &\iff \operatorname{sgn}(A + A')_{ij} = 1\end{aligned}$$

- also: $R \cup R'$ wird durch $\operatorname{sgn}(A + A')$ repräsentiert.

Formel für die Wegematrix

Lemma

Es sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A.
Dann gilt für alle $k \geq n - 1$:

- *Die Matrix $\operatorname{sgn}(\sum_{i=0}^{k} A^i)$ repräsentiert die Relation E^*.*
- *Mit anderen Worten:*

$$W = \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=0}^{k} A^i\right)$$

ist die Wegematrix des Graphen G.

Beweis

Man muss sich noch überlegen:

- $\bigcup_{i=0}^{n-1} E^i$ wird durch Matrix $\operatorname{sgn}(\sum_{i=0}^{k} \operatorname{sgn}(A^i))$ repräsentiert.
  - leichte Verallgemeinerung des Falles $R \cup R'$

- In dieser Formel darf man die „inneren“ Anwendungen von sgn weglassen.
  - Wenn alle Matrixeinträge ≥ 0 sind, gilt:

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(M) + \operatorname{sgn}(M'))_{ij} = \operatorname{sgn}(M + M')_{ij}$$

Einfachster Algorithmus für die Wegematrix

```
// Matrix A sei die Adjazenzmatrix
// Matrix W wird am Ende die Wegematrix enthalten
// Matrix M wird benutzt um A^i zu berechnen
W ← 0                          // Nullmatrix
for i ← 0 to n − 1 do
   M ← I                       // Einheitsmatrix
   for j ← 1 to i do
      M ← M · A                // Matrixmultiplikation
   od
   W ← W + M                   // Matrixaddition
od
W ← sgn(W)
```

Einfachster Algorithmus für die Wegematrix

```
//  Matrix A sei die Adjazenzmatrix
//  Matrix W wird am Ende die Wegematrix enthalten
//  Matrix M wird benutzt um A^i zu berechnen
W ← 0                        //  Nullmatrix
for  i ← 0  to  n − 1  do
   M ← I                     //  Einheitsmatrix
   for  j ← 1  to  i  do
      M ← M · A              //  Matrixmultiplikation
   od
   W ← W + M                 //  Matrixaddition
od
W ← sgn(W)
```

Berechnung von A^i

Überblick

Was ist der „Aufwand"' eines Algorithmus?

- Anzahl Codezeilen?
- Entwicklungszeit?
- Anzahl Schritte?
  - nicht immer gleich
- benötigter Speicherplatz?
  - nicht immer gleich
- vorläufig(!): Anzahl arithmetischer Operationen

Wieviele elementare Operationen für Matrixaddition?

- Matrixaddition:

  for $i \leftarrow 0$ **to** $m-1$ **do**
      for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
          $C_{ij} \leftarrow A_{ij} + B_{ij}$
      od
  od

- $m \cdot n$ Additionen
- für $n \times n$-Matrizen: n^2

Wieviele elementare Operationen für Matrixmultiplikation?

- Matrixmultiplikation

  for $i \leftarrow 0$ **to** $\ell - 1$ **do**
      for $j \leftarrow 0$ **to** $m - 1$ **do**
          $C_{ij} \leftarrow 0$
          for $k \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ **do**
              $C_{ij} \leftarrow C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$
          od
      od
  od

- $\ell \cdot m \cdot n$ Additionen und $\ell \cdot m \cdot n$ Multiplikationen
- kleine Variante: $\ell \cdot m \cdot (n-1)$ Additionen
- insgesamt für $n \times n$-Matrizen: $2n^3$ bzw. $2n^3 - n^2$
- Achtung: Niemand sagt, dass das die einzige oder gar beste Methode ist. Sie ist es nicht!

Wieviele elementare Operationen für Wegematrix?

- Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
W \leftarrow 0 \\
\textbf{for} \quad i \leftarrow 0 \quad \textbf{to} \quad n-1 \quad \textbf{do} \\
\quad M \leftarrow \mathrm{I} \\
\quad \textbf{for} \quad j \leftarrow 1 \quad \textbf{to} \quad i \quad \textbf{do} \\
\quad\quad M \leftarrow M \cdot A \\
\quad \textbf{od} \\
\quad W \leftarrow W + M \\
\textbf{od} \\
W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)
\end{array}
$$

- Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2 = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Wieviele elementare Operationen für Wegematrix?

- Algorithmus:

$W \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $M \leftarrow \mathrm{I}$
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $W \leftarrow W + M$
od
$W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)$

- Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2 = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Wieviele elementare Operationen für Wegematrix?

- Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
W \leftarrow 0 \\
\textbf{for} \quad i \leftarrow 0 \quad \textbf{to} \quad n-1 \quad \textbf{do} \\
\quad M \leftarrow \mathrm{I} \\
\quad \textbf{for} \quad j \leftarrow 1 \quad \textbf{to} \quad i \quad \textbf{do} \\
\quad\quad M \leftarrow M \cdot A \\
\quad \textbf{od} \\
\quad W \leftarrow W + M \\
\textbf{od} \\
W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)
\end{array}
$$

- Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2 = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Wieviele elementare Operationen für Wegematrix?

- Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
W \leftarrow 0 \\
\textbf{for}\ \ i \leftarrow 0\ \ \textbf{to}\ \ n-1\ \ \textbf{do} \\
\quad M \leftarrow \mathrm{I} \\
\quad \textbf{for}\ \ j \leftarrow 1\ \ \textbf{to}\ \ i\ \ \textbf{do} \\
\quad\quad M \leftarrow M \cdot A \\
\quad \textbf{od} \\
\quad W \leftarrow W + M \\
\textbf{od} \\
W \leftarrow \operatorname{sgn}(W)
\end{array}
$$

- Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2 = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Wieviele elementare Operationen für Wegematrix?

- Algorithmus:

$W \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $M \leftarrow \mathrm{I}$
  for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**
    $M \leftarrow M \cdot A$
  od
  $W \leftarrow W + M$
od
$W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)$

- Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2 = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Wieviele elementare Operationen für Wegematrix?

- Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
W \leftarrow 0 \\
\textbf{for} \quad i \leftarrow 0 \quad \textbf{to} \quad n-1 \quad \textbf{do} \\
\quad M \leftarrow \mathrm{I} \\
\quad \textbf{for} \quad j \leftarrow 1 \quad \textbf{to} \quad i \quad \textbf{do} \\
\quad\quad M \leftarrow M \cdot A \\
\quad \textbf{od} \\
\quad W \leftarrow W + M \\
\textbf{od} \\
W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)
\end{array}
$$

- Aufwand:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right) \cdot (2n^3 - n^2) + n \cdot n^2 + n^2 = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Überblick

Da kann man etwas besser machen!

- haben so getan, als wären für A^i immer $i-1$ Matrixmultiplikationen nötig
- es werden aber ohnehin *alle* Potenzen A^i benötigt
- also besser immer das alte A^{i-1} merken und wiederverwenden
- Algorithmus:

$W \leftarrow 0$
$M \leftarrow \mathrm{I}$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $W \leftarrow W + M$
  $M \leftarrow M \cdot A$
od
$W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)$

- Aufwand:

$$n \cdot (n^2 + (2n^3 - n^2)) + n^2 = 2n^4 + n^2$$

Es geht noch besser!

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n-1 : E^* = \bigcup_{i=0}^{k} E^i$$

Alle $k \geq n-1$ sind in Ordnung.

- Aber warum kann das helfen?
  - wählen statt $n-1$ kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$, also $m = \lceil \log_2 n \rceil$
  - finden eine Matrix F mit $W = F^{2^m} = (\cdots((F^2)^2)\cdots)^2$
  - Das sind nur noch $m = \lceil \log_2 n \rceil$ Matrixmultiplikationen!
- Preisfrage: Wie sieht F aus?
- Antwort: Wähle $F = E^0 \cup E^1 = \mathrm{I}_V \cup E$.

Es geht noch besser!

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n-1 : E^* = \bigcup_{i=0}^{k} E^i$$

Alle $k \geq n-1$ sind in Ordnung.

- Aber warum kann das helfen?
  - wählen statt $n-1$ kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$, also $m = \lceil \log_2 n \rceil$
  - finden eine Matrix F mit $W = F^{2^m} = (\cdots((F^2)^2)\cdots)^2$
  - Das sind nur noch $m = \lceil \log_2 n \rceil$ Matrixmultiplikationen!
- Preisfrage: Wie sieht F aus?
- Antwort: Wähle $F = E^0 \cup E^1 = \mathrm{I}_V \cup E$.

Es geht noch besser!

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n-1 : E^* = \bigcup_{i=0}^{k} E^i$$

Alle $k \geq n-1$ sind in Ordnung.

- Aber warum kann das helfen?
  - wählen statt $n-1$ kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$, also $m = \lceil \log_2 n \rceil$
  - finden eine Matrix F mit $W = F^{2^m} = (\cdots((F^2)^2)\cdots)^2$
  - Das sind nur noch $m = \lceil \log_2 n \rceil$ Matrixmultiplikationen!
- Preisfrage: Wie sieht F aus?
- Antwort: Wähle $F = E^0 \cup E^1 = \mathrm{I}_V \cup E$.

Es geht noch besser!

- Schon vergessen?

$$\forall k \geq n-1 : E^* = \bigcup_{i=0}^{k} E^i$$

Alle $k \geq n-1$ sind in Ordnung.

- Aber warum kann das helfen?
  - wählen statt $n-1$ kleinste Zweierpotenz $k = 2^m \geq n$, also $m = \lceil \log_2 n \rceil$
  - finden eine Matrix F mit $W = F^{2^m} = (\cdots((F^2)^2)\cdots)^2$
  - Das sind nur noch $m = \lceil \log_2 n \rceil$ Matrixmultiplikationen!
- Preisfrage: Wie sieht F aus?
- Antwort: Wähle $F = E^0 \cup E^1 = \mathrm{I}_V \cup E$.

Es geht noch besser! (2)

- Sei $F = E^0 \cup E^1$
- dann

$$F^2 = (E^0 \cup E^1) \circ (E^0 \cup E^1) = E^0 \cup E^1 \cup E^1 \cup E^2 = E^0 \cup E^1 \cup E^2$$

- und

$$\begin{aligned} F^4 = (F^2)^2 &= (E^0 \cup E^1 \cup E^2) \circ (E^0 \cup E^1 \cup E^2) \\ &= \ldots \\ &= E^0 \cup E^1 \cup E^2 \cup E^3 \cup E^4 \end{aligned}$$

- per Induktion: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$F^{2^m} = \bigcup_{i=0}^{2^m} E^i$$

Es geht noch besser! (3)

- Algorithmus:

$$
\begin{aligned}
&W \leftarrow A + \mathrm{I}\\
&m \leftarrow \lceil \log_2 n \rceil\\
&\textbf{for}\ \ i \leftarrow 1\ \ \textbf{to}\ \ m\ \ \textbf{do}\\
&\quad W \leftarrow W \cdot W\\
&\textbf{od}\\
&W \leftarrow \mathrm{sgn}(W)
\end{aligned}
$$

- Aufwand:

$$n^2 + \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 n \rceil \cdot (2n^3 - n^2) + n^2$$

- Beachte: Für die Berechnung des Wertes $\lceil \log_2 n \rceil$ aus n sind höchstens $\lceil \log_2 n \rceil$ Operationen nötig.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Manchmal ist der naheliegende Algorithmus nicht der einzige oder gar der schnellste.
- Denken/Mathematik/Kreativität/Einfach-mal-drüber-schlafen helfen

Das sollten Sie üben:

- Aufwandsabschätzungen bei (ineinander geschachtelten) Schleifen
- auch mal verrückte Ideen ausprobieren

Überblick

Repräsentation von Graphen im Rechner

Berechnung der 2-Erreichbarkeitsrelation und Rechnen mit Matrizen

- 2-Erreichbarkeit an einem Beispiel
- Matrixmultiplikation
- Matrixaddition

Einfache Berechnung der Erreichbarkeitsrelation

- Potenzen der Adjazenzmatrix
- Erste Möglichkeit für die Berechnung der Wegematrix
- Zählen durchzuführender arithmetischer Operationen
- Weitere Möglichkeiten für die Berechnung der Wegematrix

Algorithmus von Warshall

```
for i ← 0 to n − 1 do
   for j ← 0 to n − 1 do
      W[i,j] ← { 1        falls i = j
               { A[i,j]   falls i ≠ j
   od
od

for k ← 0 to n − 1 do
   for i ← 0 to n − 1 do
      for j ← 0 to n − 1 do
         W[i,j] ← max( W[i,j], min(W[i,k], W[k,j]) )
      od
   od
od
```

Zur Funktionsweise des Algorithmus von Warshall

- algorithmische Idee geht auf eine fundamentale Arbeit von Stephen Kleene zurück
- Pfad $p = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m)$ der Länge $m \geq 2$:
  - Knoten $v_1, \ldots, v_{m-1}$ heißen Zwischenknoten des Pfades
  - Pfade der Längen 0 und 1 besitzen keine Zwischenknoten
- Invariante für die äußere Schleife

  for $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**

  $\quad\ldots$

  od

  lautet:
- Für alle $i, j \in \mathbb{G}_n$:
  Nach k Durchläufen der äußeren Schleife ist $W[i,j] = 1$, gdw. es wiederholungsfreien Pfad von i nach j gibt, bei dem alle Zwischenknoten Nummern in $\mathbb{G}_k$ (also $< k$) haben.

Zum Aufwand des Algorithmus von Warshall

- drei ineinander geschachtelte Schleifen
- deren jeweiliger Rumpf n-mal durchlaufen wird
- „irgendwie ungefähr“ n^3 Operationen

- Repräsentationen von Graphen im Rechner
- Berechnung der Wegematrix
  - mit vielen oder weniger Operationen
  - Algorithmus Warshall kommt mit weniger Operationen aus als alle unsere vorherigen Versuche