18.11.2011
Willkommen zur fünften Übung zur Vorlesung

Grundbegriffe der Informatik

Karlsruhe Institute of Technology

Matthias Janke
email: matthias.janke ät kit.edu

Überblick

kontextfreie Grammatiken

Relationen

Kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$

- N ist ein Alphabet sogenannter *Nichtterminalsymbole*
- T ist ein Alphabet sogenannter *Terminalsymbole*.
  - kein Zeichen in beiden Alphabeten: $N \cap T = \{\}$.
- $S \in N$ ist das sogenannte *Startsymbol*.
- $P \subseteq N \times V^*$ ist *endliche* Menge von *Produktionen*.
  - $V = N \cup T$ Menge aller Symbole überhaupt
  - Schreibweise: $X \to w$ (statt $(X, w) \in P$)
  - Bedeutung: man kann X ersetzen durch w

Konventionen (bei uns)

- Nichtterminalsymbole werden mit Großbuchstaben bezeichnet.
- Terminalsymbole werden mit Kleinbuchstaben dargestellt.

Bemerkung zu kontextfreien Grammatiken

- Das Ableiten ist kein *deterministischer*, sondern ein *nichtdeterministischer* Prozess.
- Zu einem Nichtterminalsymbol kann es keine, eine oder mehrere Ableitungen geben.
- Beispiel:
  - Eine Regel ist an zwei verschiedenen Stellen anwendbar.
  - Zwei verschiedene Regeln sind anwendbar.

Ein Wort w, für das gilt $\forall i \in \mathbb{G}_{|w|} : w(i) = w(|w| - 1 - i)$ heißt Palindrom.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \rightarrow aXa \mid bXb \mid Y, Y \rightarrow aZb \mid bZa,$
$Z \rightarrow aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1.
2.
3.
4.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. ($X \to aXa \mid bXb$)
2.
3.
4.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. ($X \to aXa \mid bXb$)
2. Vorne und hinten verschiedenes Zeichen. ($X \to Y, Y \to aZb \mid bZa$)
3.
4.

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. ($X \to aXa \mid bXb$)
2. Vorne und hinten verschiedenes Zeichen.
   ($X \to Y, Y \to aZb \mid bZa$)
3. Entweder Palindrom ... ($Z \to aZa \mid bZb \mid a \mid b \mid \epsilon$)
4.

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$

1. Vorne und hinten gleiche Zeichen. $(X \to aXa \mid bXb)$
2. Vorne und hinten verschiedenes Zeichen. $(X \to Y, Y \to aZb \mid bZa)$
3. Entweder Palindrom ... $(Z \to aZa \mid bZb \mid a \mid b \mid \epsilon)$
4. oder aus $L(G)$. $(Z \to X)$

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Definition: $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid X \Rightarrow^* w\}$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Definition: $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid X \Rightarrow^* w\}$
Beschreibung:
$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists i \in \mathbb{G}_{|w|} : w(i) \neq w(|w| - 1 - i)\}$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Beweis: Klar: $L(G)$ enthält keine Palindrome. (Irgendwann kommt Y, danach verschiedene Zeichen.)

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.
(Induktionsvoraussetzung: Für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Alle Wörter der Länge $m \leq n$, die keine Palindrome sind, liegen in $L(G)$.)

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.

- $ab, ba \in L(G)$.

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \rightarrow aXa \mid bXb \mid Y, Y \rightarrow aZb \mid bZa,$
$Z \rightarrow aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.

- $ab, ba \in L(G)$.
- $w = aw'a \overset{IV}{\Rightarrow} X \Rightarrow aXa \Rightarrow^* aw'a$

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Beweis: Nicht-Palindrome in $L(G)$: Induktion über Länge.

- $ab, ba \in L(G)$.
- $w = aw'a \stackrel{IV}{\Rightarrow} X \Rightarrow aXa \Rightarrow^* aw'a$
- $w = aw'b$: Falls w' Palindrom: $X \Rightarrow Y \Rightarrow aZb \Rightarrow^* aw'b$, sonst $X \Rightarrow Y \Rightarrow aZb \Rightarrow aXb \Rightarrow^* aw'b$ wegen IV.

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{X, Y, Z\}, T = \{a, b\}, S = X,$
$P = \{X \to aXa \mid bXb \mid Y, Y \to aZb \mid bZa,$
$Z \to aZa \mid bZb \mid X \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
Ableitung von $w = aabaabbbbaaaa$:
$X \Rightarrow aXa \Rightarrow aaXaa \Rightarrow aaYaa \Rightarrow aabZaaa \Rightarrow aabXaaa \Rightarrow$
$aabaXaaaa \Rightarrow aabaYaaaa \Rightarrow aabaaZbaaaa \Rightarrow aabaabZbbaaaa \Rightarrow$
$aabaabbbbaaaa$

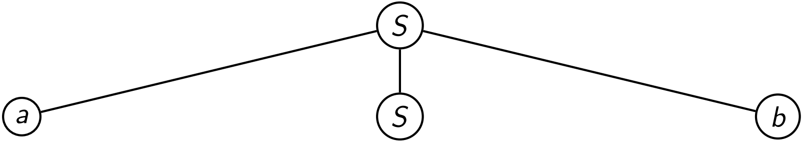
Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:

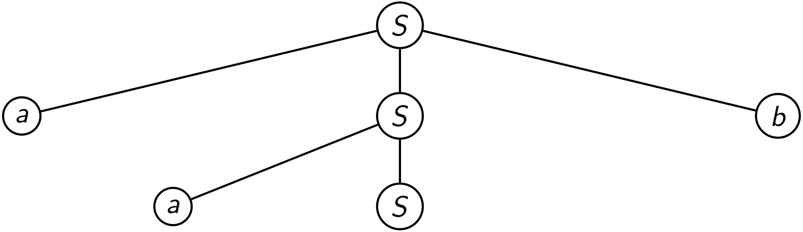
$$S$$

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

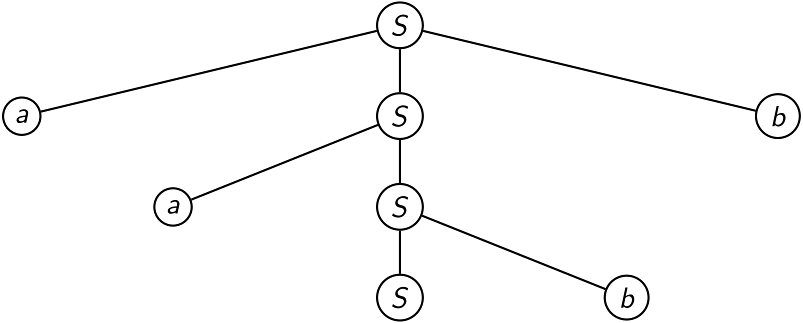
$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



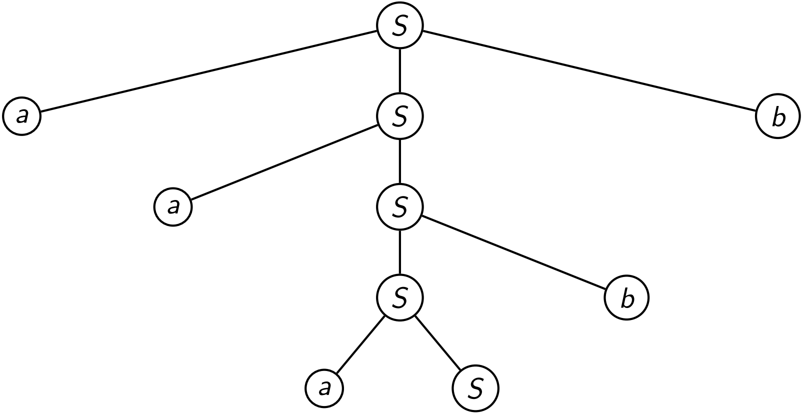
$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



$N = \{S\}$, $T = \{a, b\}$, $P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:

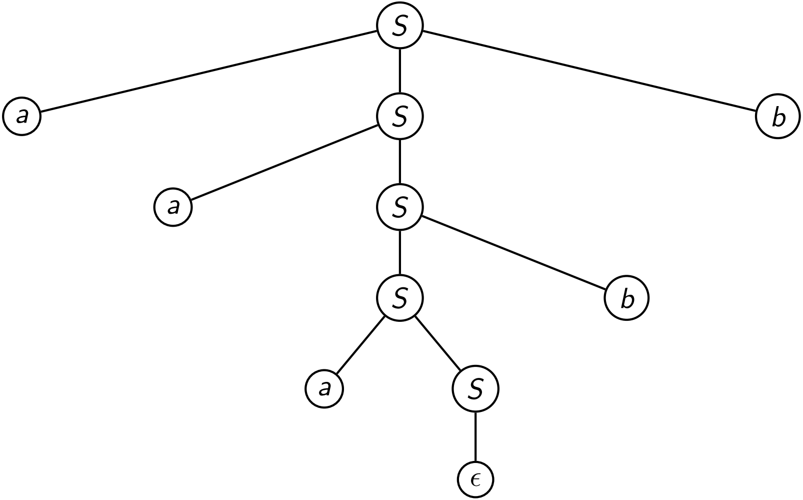


$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

$N = \{S\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid aS \mid Sb \mid \epsilon\}$
Ableitungsbaum von $w = aaabb$:



Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

- $P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
- $P = \{S \to SS \mid a \mid b \mid \epsilon\}$
- $P = \{S \to aS \mid bS \mid \epsilon\}$
- $P = \{S \to aSa \mid aaSa \mid b\}$

Kontextfreie Grammatiken: $G = (N, T, S, P)$

- $P = \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon\} \to$ Palindrome
- $P = \{S \to SS \mid a \mid b \mid \epsilon\} \to \{a, b\}^*$
- $P = \{S \to aS \mid bS \mid \epsilon\} \to \{a, b\}^*$
- $P = \{S \to aSa \mid aaSa \mid b\} \to \{a^n ba^m \mid m \leq n \leq 2m\}$

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P = \{S \to aSa \mid aaSa \mid b\})$
Man beweise: Wenn $S \Rightarrow^* a^n X a^m$ gilt, folgt $m \leq n \leq 2m$.
Vollständige Induktion über Ableitungslänge!

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P = \{S \to aSa \mid aaSa \mid b\})$
Man beweise: Wenn $S \Rightarrow^* a^n S a^m$ gilt, folgt $m \leq n \leq 2m$.

- IA: $S \Rightarrow^0 a^n S a^m \Rightarrow n = m = 0 \Rightarrow m \leq n \leq 2m$.
- IV: Für festes, aber beliebiges $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
  $S \Rightarrow^i a^n S a^m \Rightarrow m \leq n \leq 2m$.
- IS: Zu zeigen: Dann muss auch gelten
  $S \Rightarrow^{i+1} a^{n'} S a^{m'} \Rightarrow m' \leq n' \leq 2m'$.

$(S \Rightarrow^{i+1} a^{n'} S a^{m'}) \Rightarrow (S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a S a a^m) \vee$
$(S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a a S a a^m)$.

- 1. Fall: $S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a S a a^m = a^{n+1} S a^{m+1}$.
  Nach IV gilt $m \leq n \leq 2m$, und es folgt
  $m + 1 \leq n + 1 \leq 2m + 1 \leq 2(m + 1)$, weswegen die Behauptung in diesem Fall korrekt ist.
- 2. Fall: $S \Rightarrow^{i} a^n S a^m \Rightarrow a^n a a S a a^m = a^{n+2} S a^{m+1}$.
  Nach IV gilt $m \leq n \leq 2m$, und es folgt
  $m + 1 \leq n + 2 \leq 2m + 2 = 2(m + 1)$, weswegen die Behauptung auch in diesem Fall korrekt ist.

Achtung!
Bei Induktionsschritt verwendet:
$u \Rightarrow^{i+1} v \iff \exists w : u \Rightarrow^{i} w \Rightarrow v$.
Nach Definition: $u \Rightarrow^{i+1} v \iff \exists w : u \Rightarrow w \Rightarrow^{i} v$.
Beide Definitionen sind äquivalent!

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b\}$,
$P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \rightarrow aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$
Wie kann man Wörter der Form $a^n b^{2m+1} a^{n+1}$ mit $n, m \geq 1$ ableiten?

Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, A\}$, $T = \{a, b\}$,
$P = \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aAb \mid bAa,$
$A \rightarrow aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid \epsilon \mid a \mid b\}$
Wie kann man Wörter der Form $a^n b^{2m+1} a^{n+1}$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ aus S ableiten?

- n mal S durch aSa ersetzen.
- Einmal S durch bAa ersetzen.
- m mal A durch bAb ersetzen.
- A durch ϵ ersetzen.

Überblick

kontextfreie Grammatiken

Relationen

Produkt von Relationen

Definition: $x(S \circ R)z \iff \exists y : xRy \land ySz$.
Beispiel: Funktionen f, g.
$x(f \circ g)z \iff f(g(x)) = z$
Mit $g(x) = y$ gilt: $g(x) = y \land f(y) = z \Rightarrow xgy \land yfz$.

Produkt von Relationen

“Verdrehte” Schreibweise von Funktionen $\Rightarrow$ verdrehte Schreibweise für Relationenprodukt.

Produkt von Relationen

$< \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$< \circ < = ?$

Produkt von Relationen

$< \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$
Welches $<$ hinter dem $\Rightarrow$ entspricht welchem $<$ vor dem $\Rightarrow$?

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$

$x(< \circ <)z \iff z \geq x + 2$

Produkt von Relationen

$< \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$

$x(< \circ <)z \iff z \geq x + 2$

Beweis: $x(< \circ <)z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z \Rightarrow$

$\exists y \in \mathbb{N}_0 : y - x \geq 1 \wedge z - y \geq 1 \Rightarrow z - x \geq 2 \Rightarrow z \geq x + 2$

$<\subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
$x(< \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z$
$x(< \circ <)z \iff z \geq x + 2$
Beweis: $z \geq x + 2 \Rightarrow z - 1 \geq x + 1 \Rightarrow x < z - 1 \wedge z - 1 < z \Rightarrow$
$\exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y < z \Rightarrow x(< \circ <)z$

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ <=$?

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ < = <$

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ <=<$

Beweis: $x(< \circ <)z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

Produkt von Relationen

$<\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$< \circ <=<$

Beweis: $x(< \circ <)z \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$.

$x < z \rightarrow x < \frac{x+z}{2} \wedge \frac{x+z}{2} < z$

$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x(< \circ <)z$

Produkt von Relationen

$<, > \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$> \circ < = ?$

Produkt von Relationen

$<, > \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$> \circ < = ?$

$x(> \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \wedge y > z$

Produkt von Relationen

$<, > \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$> \circ <= \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$x(> \circ <)z \iff \exists y \in \mathbb{N}_0 : x < y \land y > z$

$\forall x, z \in \mathbb{N}_0 : x < x + z + 1 \land x + z + 1 > z$

Das wars für heute...

Themen für das fünfte Übungsblatt:

- kontextfreie Grammatiken
- Beweisen

Schönes Wochenende!