17 RELATIONEN

17.1 ÄQUIVALENZRELATIONEN

17.1.1 Definition

- die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv an Beispielrelationen klar machen
- evtl. auch Relationen vorführen, die nur zwei oder eine oder gar keine dieser Eigenschaften haben
- Darstellung von Relationen als gerichtete Graphen: Woran sieht man
  - Reflexivität?
  - Symmetrie?
  - Transitivität?
- Wie sieht der Graph einer Äquivalenzrelation aus: „Klumpen“, in denen jeder mit jedem verbunden ist, zwischen den Klumpen nichts (die Klumpen heißen später Äquivalenzklassen)

17.1.2 Äquivalenzrelationen von Nerode

- die Definition der Nerode-Äquivalenz verstand jedenfalls ich nicht auf Anhieb
- Manche brauchen vielleicht immer noch Anleitung, die Def überhaupt richtig zu lesen.
- vielleicht hilft es, auch das zu diskutieren:
  - man nehme ein L, das von einem endlichen Akzeptor erkannt wird
  - man nehme zwei Wörter w_1, w_2 die *nicht* $\equiv_L$-äquivalent sind
  - Was kann man über $f^*(z_0, w_1)$ und $f^*(z_0, w_2)$ sagen? Sie müssen verschieden sein, denn sonst $f^*(z_0, w_1) = f^*(z_0, w_2)$ und dann auch für jedes Suffix w: $f^*(z_0, w_1 w) = f^*(z_0, w_2 w)$, also werden für jedes Suffix entweder beide Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ oder keines akzeptiert, und dann wären w_1 und w_2 ja äquivalent.

17.1.3 Äquivalenzklassen und Faktormengen

noch mal das Beispiel Kongruenz modulo n; nehmen wir $n = 5$; also $x \equiv y \pmod 5$; das gilt, wenn $x - y$ ganzzahliges Vielfaches von 5 ist:

- $\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots$ sind alle äquivalent zueinander, also
  $[0] = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$ oder kurz $[0] = 5\mathbb{Z}$ (mit der Komplexschreibweise aus Abschnitt 13.2.4 im Skript)
  statt $[0]$ hätte man auch $[5]$ oder $[-10]$ oder $[2783012931025]$ schreiben können.
- da $1 \not\equiv 0 \pmod 5$, ist $[1]$ eine *andere* Äquivalenzklasse.
  $[1] = 1 + 5\mathbb{Z}$; genauso gut könnte man schreiben $[1] = -24 + 5\mathbb{Z}$

- Bitte klar machen: für $x \neq y$ kann $[x] = [y]$ sein
- Beweisen: wenn $x \equiv y$, dann $[x] = [y]$

- wenn $z \in [x]$, dann $x \equiv z$, also wegen Symm. auch $z \equiv x$
  - mit $x \equiv y$ und Transitivität folgt $z \equiv y$,
  - also $y \equiv z$, also $z \in [y]$
  - also $[x] \subseteq [y]$.
  - umgekehrt geht es genauso.
- Beweisen: Wenn ein z sowohl in $[x]$ als auch in $[y]$ ist, dann ist $[x] = [y]$.
  - Wenn $z \in [x]$ und $z \in [y]$, dann $x \equiv z$ und $y \equiv z$,
  - also wegen Symmetrie $x \equiv z$ und $z \equiv y$,
  - also wegen Transitivität $x \equiv y$
  - also (eben gesehen) $[x] = [y]$
  - Äquivalenzklassen sind also entweder disjunkt oder gleich. „halbe Überlappungen“ gibt es nicht

Faktormenge von $\mathbb{Z}$ für Kongruenz modulo 5

- hinreichend langes Überlegen zeigt: die Äquivalenzklassen $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$ und $[4]$ sind alle paarweise verschieden: für je zwei der Zahlen ist die Differenz offensichtlich positiv, aber echt kleiner als 5.
- Aber für jedes andere $x \in \mathbb{Z}$ gibt es eine äquivalente Zahl zwischen 0 und 4, nämlich den Rest bei Division durch 5.
- Also gibt es nur fünf Äquivalenzklassen:

$$\mathbb{Z}_{/\equiv_5} = \mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

Faktormenge für Nerode-Äquivalenz

- Machen Sie sich bitte die Äquivalenzklassen von $\equiv_L$ aus den Skriptbeispielen klar, so dass Sie sie erklären können.

17.2 KONGRUENZRELATIONEN

17.2.1 Verträglichkeit von Relationen mit Operationen

17.2.2 Wohldefiniertheit von Operationen mit Äquivalenzklassen

- Wichtig: Verständnis dafür, dass so etwas wie

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

  nicht vollkommen automatisch eine vernünftige Definition ist, sondern nur, weil eben $\equiv_L$ mit Konkatenation von rechts verträglich ist.

Arithmetik modulo n

- im Skript nachgerechnet: wenn

$$\begin{array}{rlcl} & x_1 \equiv x_2 \pmod{n} & \text{also} & x_1 - x_2 = kn \\ \text{und} & y_1 \equiv y_2 \pmod{n} & \text{also} & y_1 - y_2 = mn \end{array}$$

  dann auch

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} .$$

- analog zeigt man, dass dann auch

$$x_1 \cdot y_1 \equiv x_2 \cdot y_2 \pmod{n}$$

  denn

$$x_1 \cdot y_1 = (x_2 + kn) \cdot (y_2 + mn) = x_2 \cdot y_2 + (x_2 m + k y_2 + km) n$$

  also ist $x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$ offensichtlich ganzzahliges Vielfaches von n.
- also kann man mit den Äquivalenzklassen rechnen, indem man immer irgendein Element jeder Ä.klasse hernimmt und mit ihnen rechnet („repräsentantenweise“); Beispiel $n = 5$:

$$\begin{aligned} [3] + [4] &= [3+4] = [7] = [2] \\ [2] + [3] &= [2+3] = [5] = [0] \\ \text{aber auch } [2] + [3] &= [7] + [-12] = [7-12] = [-5] = [0] \\ [2] \cdot [3] &= [2 \cdot 3] = [6] = [1] \end{aligned}$$

- wann ist $[x] \cdot [y] = [0]$? Dafür muss xy äquivalent zu 0 sein, also Vielfaches von 5. Da 5 eine Primzahl ist, muss dann schon x oder y Vielfaches von 5 gewesen sein, also $[x] = [0]$ oder $[y] = [0]$.
- Es ergeben sich die folgenden Tabellen:

$+$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

und

$\cdot$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

17.3 Halbordnungen

17.3.1 Grundlegende Definitionen

- Man erarbeite, dass die Relation $\sqsubseteq_p$ auf A^* mit $v \sqsubseteq_p w \iff \exists u : vu = w$ eine Halbordnung ist:
  - Reflexivität: gilt wegen $w_1\varepsilon = w_1$
  - Antisymmetrie: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_p w_1$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1u_1 = w_2$ und $w_2u_2 = w_1$. Also ist $w_1u_1u_2 = w_2u_2 = w_1$. Also muss $|u_1u_2| = 0$ sein, also $u_1 = u_2 = \varepsilon$, also $w_1 = w_2$.
  - Transitivität: wenn $w_1 \sqsubseteq_p w_2$ und $w_2 \sqsubseteq_p w_3$, dann gibt es $u_1, u_2 \in A^*$ mit $w_1u_1 = w_2$ und $w_2u_2 = w_3$. Also ist $w_1(u_1u_2) = (w_1u_1)u_2 = w_2u_2 = w_3$, also $w_1 \sqsubseteq_p w_3$.
- Das folgende ist *keine* Halbordnung auf A^*: $w_1 \sqsubseteq w_2 \iff |w_1| \leq |w_2|$. Studenten überlegen lassen: Antisymmetrie ist verletzt. (Reflexivität und Transitivität sind erfüllt.)

- Vielleicht noch mal Rekapitulation des Begriffs „Potenzmenge"?
- die drei Eigenschaften von Halbordnungen für $\subseteq$ auf 2^M durchgehen ...

Hasse-Diagramm

- man lässt überall die trivial ergänzbaren Kringel weg
- und lässt von den übrigen Pfeilen diejenigen weg, die man aus anderen mittels Transitivität „konstruieren" kann

17.3.2 „Extreme" Elemente

- Man male Hassediagramme von Halbordnungen, bei denen irgendwelche Teilmengen kleinste/größte/.... Elemente besitzen oder nicht besitzen.

17.3.3 Vollständige Halbordnungen

17.3.4 Stetige Abbildungen auf vollständigen Halbordnungen

- Aus dem Skript: Gegeben sei Terminalzeichenalphabet $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und als halbgeordnete Menge D die Potenzmenge $D = 2^{T^*}$ der Menge aller Wörter mit Inklusion als Halbordnungsrelation. Die Elemente der Halbordnung sind also Mengen von Wörtern, d. h. formale Sprachen. Kleinstes Element der Halbordnung ist die leere Menge $\emptyset$. Wie weiter vorne erwähnt, ist diese Halbordnung vollständig.
- Es sei $v \in T^*$ ein Wort und $f_v : D \to D$ die Abbildung $f_v(L) = \{v\}L$, die vor jedes Wort von L vorne v konkateniert.
- Behauptung: f_v ist stetig.
- Beweis: Es sei $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots$ eine Kette und $L = \bigcup L_i$ ihr Supremum.
  $f_v(L_i) = \{vw \mid w \in L_i\}$, also $\bigcup_i f_v(L_i) = \{vw \mid \exists i \in \mathbb{N}_0 : w \in L_i\} = \{v\}\{w \mid \exists i \in \mathbb{N}_0 : w \in L_i\} = \{v\} \bigcup_i L_i = f(\bigcup_i L_i)$.

- analog für Konkatenation von rechts
- Das ist der wesentliche Teil von dem, was im Skript aus Bequemlichkeit weggelassen wurde bei der letzten Andeutung zu „Grammatiken als Gleichungssysteme“.

17.4 ORDNUNGEN

lexikographische Ordnung erster und zweiter Art

- Man betrachte Beispiele für $\sqsubseteq_1$ („Wörterbuchordnung“):
  - Warum ist `aa` $\sqsubseteq_1$ `aabba`?
  - Warum ist `aa` $\sqsubseteq_1$ `bba`?
  - Warum ist `aaaaa` $\sqsubseteq_1$ `bba`?
  - Warum ist `aaaab` $\sqsubseteq_1$ `aab`?
- Man betrachte Beispiele für $\sqsubseteq_2$ (primär nach Länge, erst danach alphabetisch ordnen):
  - Warum ist `aa` $\sqsubseteq_2$ `aabba`?
  - Warum ist `aa` $\sqsubseteq_2$ `bba`?
  - Warum ist `bba` $\sqsubseteq_2$ `aaaaa`? (vergleiche $\sqsubseteq_1$!)
  - Warum ist `aab` $\sqsubseteq_2$ `aaaab`? (vergleiche $\sqsubseteq_1$!)