

# Grundbegriffe der Informatik - Tutorium

– Wintersemester 2011/12 –

Christian Jülg

<http://gbi-tutor.blogspot.com>

30. November 2011



Universität Karlsruhe (TH)  
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Quellennachweis & Dank an:  
Martin Schadow, Susanne Dinkler, Tobias Dencker, Sebastian Heßlinger,  
Joachim Wilke

# Übersicht



- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

# Sprachdefinition von C



## Addition

Mithilfe der BNF bzw. EBNF, einer erweiterten Schreibweise von Kontextfreien Grammatiken lässt sich z.B. die Syntax von Programmiersprachen darstellen.

# Sprachdefinition von C



## Addition

### Syntax

#### Syntax Diagrams



#### BNF

##### additive-expression

```

::= <additive-expression> <additive-operator> <multiplicative-expression>
::= <multiplicative-expression>
  
```

#### EBNF

##### additive-expression

```

::= <multiplicative-expression> ( <additive-operator> <multiplicative-expression> ) *
  
```

### Form

#### **additive-operator**

```
→ addition-operator | subtraction-operator
```

#### **addition-operator**

```
→ +
```

#### **subtraction-operator**

```
→ -
```

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5**
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

# Aufgabenblatt 5



## Blatt 5

- Abgaben: 23 / 26
- Punkte: Durchschnitt 15,7 von 20

## häufige Fehler...

5.3: wenn ein Baum gefordert ist, zeichnet auch einen

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6**
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss



# Aufgabenblatt 6



## Blatt 6

- Abgabe: 02.12.2011 um 12:30 Uhr im Untergeschoss des Infobaus
- Punkte: maximal 19

## Themen

- Relationen
  - Konkatenation
  - Identität
- Homomorphismen
- Huffman-Codes

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen**
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

# Relationen – Überblick



## Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen

# Relationen – Überblick



## Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

# Relationen – Überblick



## Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

## Wozu brauchen wir das?

In der Informatik werden Relationen zur Modellierung von Systemen benötigt:

# Relationen – Überblick



## Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

## Wozu brauchen wir das?

In der Informatik werden Relationen zur Modellierung von Systemen benötigt:

- Relationen sind Grundlage der verschiedenen Diagramme der Unified Modeling Language

# Relationen – Überblick



## Relationen anschaulich

Durch Relationen werden Elemente einer oder mehrerer Mengen in Beziehung zueinander gesetzt:

- praktisch jede alltägliche Aussage enthält Relationen
- Beispiel: 'Das Haus hat vier Außenwände'

## Wozu brauchen wir das?

In der Informatik werden Relationen zur Modellierung von Systemen benötigt:

- Relationen sind Grundlage der verschiedenen Diagramme der Unified Modeling Language
- die graphische Darstellung von Relationen ergibt Graphen

# Relationen mathematisch



## Definitionen - aus dem 1. Tutorium

- Das karthesische Produkt zweier Mengen ist definiert als
$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$
- $R \subseteq A \times B$  heißt Relation



# Relationen mathematisch



## Definitionen - aus dem 1. Tutorium

- Das karthesische Produkt zweier Mengen ist definiert als
$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$
- $R \subseteq A \times B$  heißt Relation

## Definition

- Eine Relation  $R$  bezieht sich auf zwei Grundmengen  $M_1, M_2$  und es gilt  $R \subseteq M_1 \times M_2$ .

# Relationen mathematisch



## Definitionen - aus dem 1. Tutorium

- Das karthesische Produkt zweier Mengen ist definiert als
$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$
- $R \subseteq A \times B$  heißt Relation

## Definition

- Eine Relation  $R$  bezieht sich auf zwei Grundmengen  $M_1, M_2$  und es gilt  $R \subseteq M_1 \times M_2$ .
- Eine Relation  $R$  heißt homogen, wenn  $M_1 = M_2$  gilt.

# Relationen



## Definition: Produkt

Sind  $R \subseteq M_1 \times M_2$  und  $S \subseteq M_2 \times M_3$  zwei Relationen, dann heißt

# Relationen



## Definition: Produkt

Sind  $R \subseteq M_1 \times M_2$  und  $S \subseteq M_2 \times M_3$  zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$   
das *Produkt der Relationen  $S$  und  $R$*

# Relationen



## Definition: Produkt

Sind  $R \subseteq M_1 \times M_2$  und  $S \subseteq M_2 \times M_3$  zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$   
das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$  heißt die *identische Abbildung*

# Relationen



## Definition: Produkt

Sind  $R \subseteq M_1 \times M_2$  und  $S \subseteq M_2 \times M_3$  zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$   
das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$  heißt die *identische Abbildung*

## Definition: Potenz

Sei  $R \subseteq M \times M$  eine *binäre* Relation, dann heißt

- $R^i$  die *i-te Potenz* von R und ist definiert als:

# Relationen



## Definition: Produkt

Sind  $R \subseteq M_1 \times M_2$  und  $S \subseteq M_2 \times M_3$  zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$   
das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$  heißt die *identische Abbildung*

## Definition: Potenz

Sei  $R \subseteq M \times M$  eine *binäre* Relation, dann heißt

- $R^i$  die *i-te Potenz* von R und ist definiert als:
  - $R^0 = Id_M$

# Relationen



## Definition: Produkt

Sind  $R \subseteq M_1 \times M_2$  und  $S \subseteq M_2 \times M_3$  zwei Relationen, dann heißt

- $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$   
das *Produkt der Relationen S und R*
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$  heißt die *identische Abbildung*

## Definition: Potenz

Sei  $R \subseteq M \times M$  eine *binäre* Relation, dann heißt

- $R^i$  die *i-te Potenz* von R und ist definiert als:
  - $R^0 = Id_M$
  - $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$



- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle**
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

# Reflexiv-transitive Hülle



## mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv  $xRx$

transitiv Aus  $xRy$  und  $yRz$  folgt  $xRz$

symmetrisch Aus  $xRy$  folgt  $yRx$

# Reflexiv-transitive Hülle



## mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv  $xRx$

transitiv Aus  $xRy$  und  $yRz$  folgt  $xRz$

symmetrisch Aus  $xRy$  folgt  $yRx$

Gelten alle diese Eigenschaften, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

# Reflexiv-transitive Hülle



## mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv  $xRx$

transitiv Aus  $xRy$  und  $yRz$  folgt  $xRz$

symmetrisch Aus  $xRy$  folgt  $yRx$

Gelten alle diese Eigenschaften, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

## Definition

Die sogenannte reflexiv-transitive Hülle einer Relation  $R$  ist

- $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

# Reflexiv-transitive Hülle



## mögliche Attribute homogener Relationen

reflexiv  $xRx$

transitiv Aus  $xRy$  und  $yRz$  folgt  $xRz$

symmetrisch Aus  $xRy$  folgt  $yRx$

Gelten alle diese Eigenschaften, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

## Definition

Die sogenannte reflexiv-transitive Hülle einer Relation  $R$  ist

- $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

Sie ist die Erweiterung der Relation um die Paare, die notwendig sind um Reflexivität und Transitivität herzustellen.

# Reflexiv-transitive Hülle



## Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$  sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.
- $M = \{\text{Gertrud}, \text{Holger}, \text{Lars}, \text{Katja}, \text{Martin}, \text{Nina}\}$
- $R = \{(\text{Martin}, \text{Holger}), (\text{Lars}, \text{Katja}), (\text{Nina}, \text{Holger}), (\text{Gertrud}, \text{Holger}), (\text{Katja}, \text{Nina})\} \cup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$

# Reflexiv-transitive Hülle



## Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$  sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.
- $M = \{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina\}$
- $R = \{(Martin, Holger), (Lars, Katja), (Nina, Holger), (Gertrud, Holger), (Katja, Nina)\} \cup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- dann ist  $R^0 = \{(Martin, Martin), \dots, (Holger, Holger)\}$
- und  $R^1 = R$  und

# Reflexiv-transitive Hülle



## Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$  sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.
- $M = \{\text{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina}\}$
- $R = \{(\text{Martin, Holger}), (\text{Lars, Katja}), (\text{Nina, Holger}), (\text{Gertrud, Holger}), (\text{Katja, Nina})\} \cup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- dann ist  $R^0 = \{(\text{Martin, Martin}), \dots, (\text{Holger, Holger})\}$
- und  $R^1 = R$  und
- $R^2 = \{(\text{Martin, Nina}), (\text{Martin, Gertrud}), (\text{Martin, Martin}), (\text{Lars, Nina}), (\text{Lars, Lars}), (\text{Nina, Gertrud}), (\text{Nina, Martin}), (\text{Nina, Nina}), (\text{Nina, Lars}), (\text{Katja, Katja}), (\text{Katja, Holger}), (\text{Gertrud, Gertrud}), (\text{Gertrud, Martin}), (\text{Gertrud, Nina}), (\text{Holger, Holger}), (\text{Holger, Katja})\}$
- $R^* = ?$



# Reflexiv-transitive Hülle



## Anschauliches Beispiel: StudiVZ

- $R \subseteq M \times M$  sei die „ist-befreundet-mit“-Relation.
- $M = \{\text{Gertrud, Holger, Lars, Katja, Martin, Nina}\}$
- $R = \{(\text{Martin, Holger}), (\text{Lars, Katja}), (\text{Nina, Holger}), (\text{Gertrud, Holger}), (\text{Katja, Nina})\} \cup \{\text{dazu sym. Tupel}\}$
- dann ist  $R^0 = \{(\text{Martin, Martin}), \dots, (\text{Holger, Holger})\}$
- und  $R^1 = R$  und
- $R^2 = \{(\text{Martin, Nina}), (\text{Martin, Gertrud}), (\text{Martin, Martin}), (\text{Lars, Nina}), (\text{Lars, Lars}), (\text{Nina, Gertrud}), (\text{Nina, Martin}), (\text{Nina, Nina}), (\text{Nina, Lars}), (\text{Katja, Katja}), (\text{Katja, Holger}), (\text{Gertrud, Gertrud}), (\text{Gertrud, Martin}), (\text{Gertrud, Nina}), (\text{Holger, Holger}), (\text{Holger, Katja})\}$
- $R^* = ?$  Ist  $R^*$  eine Äquivalenzrelation?

# Relationen graphisch



## Ihr seid dran...

- 1 Überlegt euch, wie eine Relation graphisch aussehen könnte. Zeigt ein Beispiel mit mindestens 4 verschiedenen Elementen
- 2 Wie sieht nun graphisch die reflexiv-transitive Hülle aus?

# Relationen graphisch



## Ihr seid dran...

- 1 Überlegt euch, wie eine Relation graphisch aussehen könnte. Zeigt ein Beispiel mit mindestens 4 verschiedenen Elementen
- 2 Wie sieht nun graphisch die reflexiv-transitive Hülle aus?

## mögliche Darstellung

- Relation als Pfeile von Element zu Element
- Relation als Matrix, d.h. wenn  $xRy$  ist Feld  $[x,y] == 1$

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme**
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

# Zahlensysteme umrechnen



## Was ist das?

- Wir verwenden normalerweise das Dezimalsystem mit den Ziffern 0 bis 9
- Es gibt aber noch weitere Zahlensysteme, wie das Dualsystem (mit den Ziffern 0 und 1)
- Hexadezimalsystem (mit den Ziffern von 0-9 und den Buchstaben A-F)

## Darstellung

Eine Darstellung einer Zahl im Dualsystem ist wie folgt aufgebaut:

$z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} \dots z_{-n}$  mit  $(m, n \in \mathbb{N}_0; z_i \in \{0, 1\})$

# Zahlensysteme umrechnen



## 0-9

Dez	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bin	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
Oct	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11
Hex	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

## 10-15

Dez	10	11	12	13	14	15
Bin	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Oct	12	13	14	15	16	17
Hex	A	B	C	D	E	F

# Zahlensysteme



## Umrechnung

Wert einer Dualzahl im Dezimalsystem:

$$Z = \sum_{i=-n}^m z_i * 2^i$$



## Umrechnung

Wert einer Dualzahl im Dezimalsystem:

$$Z = \sum_{i=-n}^m z_i * 2^i$$

Wert einer ganzzahligen Dezimalzahl  $z$  im Dualsystem:

- ❶ Finde das größte  $n$  mit  $2^n \leq z$
- ❷ Notiere 1, setze  $z = z - 2^n$  und setze  $i = n - 1$ .
- ❸ Teste, ob  $2^i \leq z$ 
  - Wenn ja, dann notiere 1, setze  $z = z - 2^i$  und setze  $i = i - 1$
  - Wenn nein, dann notiere 0 und setze  $i = i - 1$
- ❹ Wiederhole Schritt 3 solange bis  $i=0$





## Umrechnung

Wert einer Dualzahl im Dezimalsystem:

$$Z = \sum_{i=-n}^m z_i * 2^i$$

Wert einer ganzzahligen Dezimalzahl  $z$  im Dualsystem:

- ❶ Finde das größte  $n$  mit  $2^n \leq z$
- ❷ Notiere 1, setze  $z = z - 2^n$  und setze  $i = n - 1$ .
- ❸ Teste, ob  $2^i \leq z$ 
  - Wenn ja, dann notiere 1, setze  $z = z - 2^i$  und setze  $i = i - 1$
  - Wenn nein, dann notiere 0 und setze  $i = i - 1$
- ❹ Wiederhole Schritt 3 solange bis  $i=0$

## Ihr seid dran

Wandle  $4242_{10}$  ins Dual-, Oktal- und Hexadezimalsystem um.

Ein kleiner Tipp: 4 Stellen im Dualsystem lassen sich zu einer Stelle im Hexadezimalsystem zusammenfassen.  $(00010001)_2 = (11)_{16}$

# Ihr seid dran...



## Was macht der Algorithmus?

```
x ← 0
for i ← 0 to |w| − 1 do
  x ← 2x + num2(w(i))
od
```

## Analyse

- Was macht diese Algorithmus? Was sind wohl die Ein- und Ausgaben?
- Was ist eine mögliche Schleifeninvariante?  
TIPP: Ihr könnt den Code auch erweitern um eine geeignete Invariante zu finden.

# Ihr seid dran...



## Was macht der Algorithmus?

```
//Eingabe:  $w \in Z_2^*$   
 $x \leftarrow 0$   
for  $i \leftarrow 0$  to  $|w| - 1$  do  
   $x \leftarrow 2x + \text{num}_2(w(i))$   
od //am Ende:  $x = \text{Num}_2(w)$ 
```

## Analyse

- Was macht diese Algorithmus? Was sind wohl die Ein- und Ausgaben?
- Was ist eine mögliche Schleifeninvariante?  
TIPP: Ihr könnt den Code auch erweitern um eine geeignete Invariante zu finden.

# Ihr seid dran...



## Was macht der Algorithmus?

//Eingabe:  $w \in Z_2^*$

$x \leftarrow 0$

$v \leftarrow \epsilon$

**for**  $i \leftarrow 0$  to  $|w| - 1$  **do**

$x \leftarrow 2x + \text{num}_2(w(i))$

$v \leftarrow v \cdot w(i)$

**od** //am Ende:  $x = \text{Num}_2(w) \wedge v = w$

## Analyse

- Was ist eine mögliche Schleifeninvariante?

TIPP: Ihr könnt den Code auch erweitern um eine geeignete Invariante zu finden.

Lsg.:  $x = \text{Num}_2(v)$

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete**
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

# Aus der Vorlesung...



Warum macht man Übersetzungen?

# Aus der Vorlesung...



Warum macht man Übersetzungen?

- **Lesbarkeit:**

# Aus der Vorlesung...



Warum macht man Übersetzungen?

- **Lesbarkeit:** Manchmal führen Übersetzungen zu kürzeren und besser lesbaren Texten.  
A3 ist leichter erfassbar als 10100011
- **Kompression:**



# Aus der Vorlesung...



Warum macht man Übersetzungen?

- **Lesbarkeit:** Manchmal führen Übersetzungen zu kürzeren und besser lesbaren Texten.  
A3 ist leichter erfassbar als 10100011
- **Kompression:** Manchmal führen Übersetzungen zu kürzeren Texten, die weniger Platz benötigen. Und zwar *ohne* zu einem größeren Alphabet überzugehen.
- **Verschlüsselung:**

# Aus der Vorlesung...



Warum macht man Übersetzungen?

- **Lesbarkeit:** Manchmal führen Übersetzungen zu kürzeren und besser lesbaren Texten.  
A3 ist leichter erfassbar als 10100011
- **Kompression:** Manchmal führen Übersetzungen zu kürzeren Texten, die weniger Platz benötigen. Und zwar *ohne* zu einem größeren Alphabet überzugehen.
- **Verschlüsselung:** Manchmal will man Texte für andere unleserlich machen
- **Fehlererkennung** und **Fehlerkorrektur:**

# Aus der Vorlesung...



## Warum macht man Übersetzungen?

- **Lesbarkeit:** Manchmal führen Übersetzungen zu kürzeren und besser lesbaren Texten.  
A3 ist leichter erfassbar als 10100011
- **Kompression:** Manchmal führen Übersetzungen zu kürzeren Texten, die weniger Platz benötigen. Und zwar *ohne* zu einem größeren Alphabet überzugehen.
- **Verschlüsselung:** Manchmal will man Texte für andere unleserlich machen
- **Fehlererkennung** und **Fehlerkorrektur:** Man kann Texte durch Übersetzung derart länger machen, dass man Fehler erkennen oder diese sogar beheben kann

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub**
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss

# Homomorphismen



## Definition

Ein *Homomorphismus*  $h : A^* \rightarrow B^*$  ist eine Abbildung, die durch die Funktionswerte  $h(x)$  für alle  $x \in A$  eindeutig festgelegt ist.

# Homomorphismen



## Definition

Ein *Homomorphismus*  $h : A^* \rightarrow B^*$  ist eine Abbildung, die durch die Funktionswerte  $h(x)$  für alle  $x \in A$  eindeutig festgelegt ist. Insbesondere bleibt das neutrale Element das neutrale Element:

$$\begin{aligned}h(\epsilon) &= \epsilon \\h(wx) &= h(w)h(x)\end{aligned}$$

weiterhin wird die zugrundeliegende Struktur erhalten

- auf  $\mathbb{N}_0$  ist Verdoppelung Homomorphismus, Struktur der Addition bleibt erhalten
- auf Strings ist *upper()* ein Homomorphismus



## Bäume - Binärbäume

In der Regel...

- hat jeder Baum eine Wurzel und jeder Knoten maximal zwei Kinder/Nachfolger
- wird die Wurzel oben dargestellt

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes**
- 10 Abschluss



# Aus der Vorlesung:



## Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort  $w \in A^*$  indem

# Aus der Vorlesung:



## Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort  $w \in A^*$  indem
- häufigere Symbole durch kürzere
- und seltener vorkommende Symbole durch längere Wörter kodiert werden

# Aus der Vorlesung:



## Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort  $w \in A^*$  indem
- häufigere Symbole durch kürzere
- und seltener vorkommende Symbole durch längere Wörter kodiert werden
- statt einzelnen Symbolen können auch längere Blöcke als kleinste Einheit gewählt werden

# Huffman-Code



## Vorgehensweise

zwei Schritte:

① Konstruktion eines Baumes:

② Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Huffman-Code



## Vorgehensweise

zwei Schritte:

① Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen  $x \in A$

② Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Huffman-Code



## Vorgehensweise

zwei Schritte:

① Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen  $x \in A$
- Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen

② Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

# Huffman-Code



## Vorgehensweise

zwei Schritte:

### ① Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen  $x \in A$
- Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen
- An jedem Blatt wird das Symbol  $x$  und dessen Häufigkeit notiert

### ② Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.



## Vorgehensweise

zwei Schritte:

### ① Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen  $x \in A$
- Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen
- An jedem Blatt wird das Symbol  $x$  und dessen Häufigkeit notiert
- die zwei Elemente mit der geringsten Häufigkeit werden zu einem Elternknoten zusammengefasst

### ② Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.



# Aufgabe



## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .

1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor  
Erstelle den Huffman-Code-Baum.



## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .

1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor  
Erstelle den Huffman-Code-Baum.

Wie lange wird die Kodierung von  $w = badcfegh$ ?

# Aufgabe



## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .

- ❶ 1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor  
Erstelle den Huffman-Code-Baum.  
Wie lange wird die Kodierung von  $w = badcfefhg$ ?
- ❷ 2. Fall: Zeichen a und b kommen zweimal, c viermal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vor.  
Erstelle den Huffman-Code-Baum. Wie lange wird die Kodierung von  $w = badcafehg$ ?



## Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .

- ❶ 1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor  
Erstelle den Huffman-Code-Baum.  
Wie lange wird die Kodierung von  $w = badcfegh$ ?
- ❷ 2. Fall: Zeichen a und b kommen zweimal, c viermal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vor.  
Erstelle den Huffman-Code-Baum. Wie lange wird die Kodierung von  $w = badcafehg$ ?
- ❸ 3. Wie lange wird ein Wort mit zweiter Zeichenverteilung, wenn man es mit dem ersten Code codiert?
- ❹ 4. Wie lange wird ein Wort mit erster Zeichenverteilung, wenn man es mit dem zweiten Code codiert?

# Aufgabe



## Aufgabe 2

Gegeben sei das Alphabet  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  und die Auftretswahrscheinlichkeiten  $p(a) = \frac{3}{10}$ ,  $p(b) = \frac{1}{10}$ ,  $p(c) = \frac{1}{10}$ ,  $p(d) = \frac{1}{7}$ ,  $p(e) = \frac{1}{7}$ ,  $p(f) = \frac{1}{7}$  und  $p(g) = \frac{1}{14}$ .

- Erzeuge einen Huffman-Code C.

# Aufgabe



## Aufgabe 2

Gegeben sei das Alphabet  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  und die Auftretswahrscheinlichkeiten  $p(a) = \frac{3}{10}$ ,  $p(b) = \frac{1}{10}$ ,  $p(c) = \frac{1}{10}$ ,  $p(d) = \frac{1}{7}$ ,  $p(e) = \frac{1}{7}$ ,  $p(f) = \frac{1}{7}$  und  $p(g) = \frac{1}{14}$ .

- Erzeuge einen Huffman-Code C.

## Lösung 2

Zeichen:	a	b	c	d	e	f	g
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$
Code:	00	101	110	010	011	100	111



## mehrdeutig?

- im Allgemeinen sind Huffman-Codes nicht eindeutig:
  - es können mehrere Zeichen gleichhäufig vorkommen
  - Außerdem ist nicht festgelegt, welcher Knoten linker Nachfolger und welcher rechter Nachfolger eines inneren Knotens wird
- ⇒ Huffman-Codes sind nicht eindeutig
- Das macht aber nichts: alle, die sich für ein Wort  $w$  ergeben können, sind „gleich gut“

- 1 Beispiel: C
- 2 Aufgabenblatt 5
- 3 Aufgabenblatt 6
- 4 Relationen
- 5 Reflexiv-transitive Hülle
- 6 Zahlensysteme
- 7 Alphabete
- 8 Einschub
  - Homomorphismen
  - Graphen
- 9 Huffman-Codes
- 10 Abschluss**



# Zum Schluss...



Was ihr nun wissen solltet!

## Zum Schluss...



Was ihr nun wissen solltet!

- Was bedeutet Konkatenation von Relationen?

# Zum Schluss...



## Was ihr nun wissen solltet!

- Was bedeutet Konkatenation von Relationen?
- Was tut ein Homomorphismus?

# Zum Schluss...



Was ihr nun wissen solltet!

- Was bedeutet Konkatenation von Relationen?
- Was tut ein Homomorphismus?

Ihr wisst was nicht?

Stellt **jetzt** Fragen!

