5 Kontextfreie Grammatiken

5.1 Beispielgrammatiken

- Bitte auf den Unterschied zwischen dem einfachen Pfeil $\rightarrow$ bei Produktionen und dem Doppelpfeil $\Rightarrow$ bei Ableitungsschritten achten)

  Beachte: Wenn $w_1 \rightarrow w_2$ gilt, dann auch $w_1 \Rightarrow w_2$, aber nicht unbedingt umgekehrt, wie man an der Grammatik $(\{X, Y\}, \{\mathtt{a}\}, X\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow \mathtt{a}\})$ sieht:

  - Es gilt z.B. $XY \Rightarrow X\mathtt{a}$, aber es gibt keine Produktion $XY \rightarrow X\mathtt{a}$

- ein bisschen mit sowas arbeiten: $G = (\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X\})$

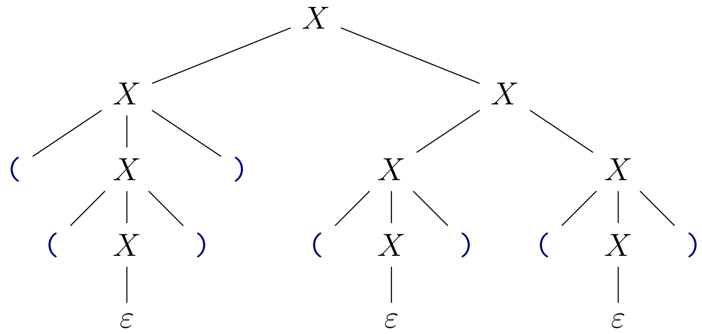
  - Was kann man alles ableiten? ε, $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, $\mathtt{aa}$, ...
  - aha: alle Wörter überhaupt: $L(G) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$

- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?

  - suchen lassen ...
  - z. B. $(\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \rightarrow X\})$.
  - wir haben sogar leere Produktionenmenge zugelassen: $(\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{\})$ tuts auch.
  - allerdings: leere Alphabete haben wir verboten, also $(\{X\}, \{\}, X, P)$ geht *nicht*.

- Man arbeite mit $G = (\{X\}, \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}, X, \{X \rightarrow XX \mid \mathtt{(}X\mathtt{)} \mid \varepsilon\}$

  - ein paar Beispielableitungen
    - erste einfache wie $X \Rightarrow \mathtt{(}X\mathtt{)} \Rightarrow \mathtt{((}X\mathtt{))} \Rightarrow \mathtt{(((}X\mathtt{)))} \Rightarrow \mathtt{((((}X\mathtt{))))} \Rightarrow \mathtt{(((())))}$ oder
    - $X \Rightarrow XX \Rightarrow XXX \Rightarrow XXXX \Rightarrow XXXXX$ und dann irgendwie weiter
  - Statt Ableitungen gerne auch mal einen Ableitungsbaum zu dieser (oder einer anderen) Grammatik erstellen lassen. Und da das letztes Jahr wohl nicht bei allen ganz klar war, so sieht sowas dann aus:



- Welche Wörter w sind ableitbar?
  * anschaulich: ableitbar sind genau die „*wohlgeformten Klammerausdrücke*“
  * jedenfalls gleich viele `(` und `)`: $N_{\texttt{(}}(w) = N_{\texttt{)}}(w)$
  * Das ist aber nur notwendig aber nicht hinreichend für Ableitbarkeit, denn `)(` ist z. B. nicht ableitbar.
  * Man diskutiere die Adjektive „*notwendig*“ und „*hinreichend*“.
  * zusätzliche Eigenschaften? erst mal raten/ nachdenken/ rumprobieren lassen
  * aha: für jedes Präfix (es heißt *das* Präfix) v eines $w \in L(G)$ gilt: $N_{\texttt{(}}(v) \geq N_{\texttt{)}}(v)$
    Das kann man sich gerade noch klar machen; aber der Beweis, dass man damit eine notwendige und hinreichende Bedingung für Ableitbarkeit hat, also eine Charakterisierung der Klammerausdrücke, ist wohl zu schwierig; ich sehe jedenfalls auf Anhieb keine vernünftige Erklärung.

- Man arbeite mit $G = (\{X\}, \{\texttt{(}, \texttt{)}\}, X, \{X \to \texttt{(}X\texttt{)}X \mid \varepsilon\})$.
  - siehe da: auch damit sind genau die wohlgeformten Klammerausdrücke ableitbar

- Und dann auch Grammatiken konstruieren *lassen*, z. B. für die folgenden formalen Sprachen über dem Alphabet $T = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$.
  - die Menge aller Wörter über T, in denen irgendwo das Teilwort `baa` vorkommt,
    z. B. so: $(\{X, Y\}, T, X, P)$ mit $P = \{X \to Y\texttt{baa}Y, Y \to \texttt{a}Y|\texttt{b}Y|\varepsilon\}$
  - die Menge aller Wörter $w \in T^*$ mit der Eigenschaft, dass für alle Präfixe v von w gilt: $|N_{\texttt{a}}(v) - N_{\texttt{b}}(v)| \leq 1$.

  * Man überlege sich erst mal, welche Struktur Wörter der Länge 2, 4, ... haben: wenn ich das richtig sehe: $\{\texttt{ab}, \texttt{ba}\}^*$
  * Also leistet die Grammatik $(\{X, Y\}, T, X, P)$ mit $P = \{X \rightarrow \texttt{ab}X | \texttt{ba}X | \texttt{a} | \texttt{b} | \varepsilon\}$ das Gewünschte.

- **Achtung**: bitte nicht aus Versehen mit Grammatiken bzw. formalen Sprachen vom Aufgabenblatt 5 rumspielen

5.2 Unterschied $\Rightarrow$ versus $\Rightarrow^*$

- bitte sicherstellen, dass der Unterschied zwischen $\Rightarrow$, also „*genau ein Schritt*", und $\Rightarrow^*$, also „*eine beliebige Anzahl Schritte*" klar ist.

6 Relationen (Teil 2)

6.1 nochmal Relationen

- Standard-Definitionen aus der Vorlesung
  - für $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$:
    $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
  - $\mathrm{I}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$
  - $R^0 = \mathrm{I}_M$ und $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$
  - $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$
- reflexive und transitive Relationen:
  - Definitionen klar machen:
    * Beispiel: Gleichheit von Zahlen
    * Beispiel: $\leq$
    * Beispiel: Reihenfolge der Wörter im Duden (o.ä.)
      · **Achtung:** Wir haben Asiaten in der Vorlesung; *langsam* anfangen (oder weiss jeder, wie in Japan Wörter sortiert werden?)
  - Wenn man eine Relation hin malt: Elemente $x, y \in M$ als Punkte und einen Pfeil von x nach y, falls xRy:
    * Wie sieht das Bild aus, wenn die Relation reflexiv ist? Schlingen.
    * Wie, wenn sie transitiv ist? (schwieriger zu beschreiben; nur Beispiele ansehen; Wenn man man einen Zyklus dabei hat: jeder mit jedem verbunden)

- z. B. in der Vorlesung offen gelassen:
  - Es sei R eine beliebige Relation und S eine Relation, die reflexiv und transitiv ist. Wenn $R \subseteq S$, dann ist sogar $R^* \subseteq S$.
  - Man kann das beweisen, indem man durch vollständige Induktion zeigt: Für alle $i \in \mathbb{N}_0$: Wenn $R \subseteq S$, dann $R^i \subseteq S$.

6.2 Infixschreibweise

von Relationen

- das kennt jeder von $x \leq y$ etc.
- sicherstellen, dass das klar ist: xRy ist nichts anderes als $(x, y) \in R$