28.10.2011

Willkommen zur zweiten Übung zur Vorlesung

Grundbegriffe der Informatik

Karlsruhe Institute of Technology

Matthias Janke
email: matthias.janke ät kit.edu

Ansage

- Dienstag, 1. November ist **Feiertag**!
- Tutorien finden an diesem Tag **nicht** statt!
- Besuchen Sie **andere** Tutorien!
- Erwarten Sie **keine** Rückgabe der korrigierten Übungsblätter!

Überblick

Prädikatenlogik

Wörter

Vollständige Induktion

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

- $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy \Rightarrow \forall y \in N : \exists x \in M : xRy$
- $\forall x \in M : \exists y \in N : xRy \Rightarrow \exists y \in N : \forall x \in M : xRy$

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

- $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy \Rightarrow \forall y \in N : \exists x \in M : xRy$
- $\forall x \in M : \exists y \in N : xRy \Rightarrow \exists y \in N : \forall x \in M : xRy$

Erste Formel: Irgendwie offensichtlich wahr.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

- $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy \Rightarrow \forall y \in N : \exists x \in M : xRy$
- $\forall x \in M : \exists y \in N : xRy \Rightarrow \exists y \in N : \forall x \in M : xRy$

Erste Formel: Irgendwie offensichtlich wahr.

Zweite Formel: Falsch! (siehe $M = N = \mathbb{N}_0, R =<$)

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
- Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : xRy$ wahr ist.

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
- Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0 Ry$ wahr ist.
- Sei $y_0 \in N$ beliebig, aber fest gewählt.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
- Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0 R y$ wahr ist.
- Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
- Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0 Ry$ wahr ist.
- Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
- Dann gilt $x_0 R y_0$.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
- Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0 R y$ wahr ist.
- Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
- Dann gilt $x_0 R y_0 \Rightarrow \exists x \in M : xRy_0$

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
- Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0 Ry$ wahr ist.
- Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
- Dann gilt $x_0 R y_0 \Rightarrow \exists x \in M : xRy_0$
- Da y_0 beliebig gewählt war, gilt $\forall y \in N : \exists x \in N : xRy$.

$R \subseteq M \times N$ Relation
$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

- Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
- Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0 Ry$ wahr ist.
- Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
- Dann gilt $x_0 R y_0 \Rightarrow \exists x \in M : xRy_0$
- Da y_0 beliebig gewählt war, gilt $\forall y \in N : \exists x \in N : xRy$ $\square$

Ein bisschen mehr zu Quantoren

- Formel (I): $0 \notin A \vee \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n \in A \wedge n + 1 \notin A)$

Behauptung: (I) gilt genau dann, wenn $\mathbb{N}_0 \not\subseteq A$ gilt.

Was bedeutet $\mathbb{N}_0 \not\subseteq A$?

- Formel (I): $0 \notin A \vee \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n \in A \wedge n+1 \notin A)$

Behauptung: (I) gilt genau dann, wenn $\mathbb{N}_0 \not\subseteq A$ gilt.

Was bedeutet $\mathbb{N}_0 \not\subseteq A$?

$(\mathbb{N}_0 \not\subseteq A \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : n \notin A)$.

Ein bisschen mehr zu Quantoren

- Formel (I): $0 \notin A \vee \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n \in A \wedge n+1 \notin A)$

Idee: Statt "(I) gilt genau dann, wenn $\mathbb{N}_0 \not\subseteq A$ gilt", benutzen wir:

Negation von (I) $\iff \mathbb{N}_0 \subseteq A$.

$$0 \in A \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\neg(n \in A) \vee n+1 \in A)$$
$$\iff 0 \in A \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$$

Überblick

Prädikatenlogik

Wörter

Vollständige Induktion

Zwei Abbildungen:
$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

Zwei Abbildungen:
$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

- $f = g$???

Zwei Abbildungen:
$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

- $f = g$???
- Was **bedeutet** $f = g$ eigentlich?

Zwei Abbildungen:
$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

- $f : A \to B, g : C \to D$;
- $f = g \iff A = C \wedge B = D \wedge \forall x \in A : f(x) = g(x)$

Zwei Abbildungen:
$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

- $f : \mathbb{G}_7 \to A_1, g : \mathbb{G}_7 \to A_2$,
  A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten
- $\to f \neq g$

Wörter, Wörter, Wörter

A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten

- $A_1^* \cap A_2^* = ?$

A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten

- $A_1^* \cap A_2^* = ?$
- Wörter wie "man" oder "die" sollten in $A_1^* \cap A_2^*$ liegen.

A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten

- $A_1^* \cap A_2^* = ?$
- Wörter wie “man” oder “die” sollten in $A_1^* \cap A_2^*$ liegen.
- Darum: Wörter **surjektive** Abbildungen auf Teilmengen des Alphabets, damit Wort eindeutig.

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?
“**Die** Biene summt herum.”

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?
"**Die** Biene summt herum."
"**Die** Wikinger entdeckten Amerika."

Wörter, Wörter, Wörter

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?
"**Die** Biene summt herum."
"**Die** Wikinger entdeckten Amerika."
"**Die** Bart **Die**"

Wörter, Wörter, Wörter

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?
"**Die** Biene summt herum."
"**Die** Wikinger entdeckten Amerika."
"**Die** Bart **Die**"
Alle drei das gleiche Wort (für uns Informatiker).

Weitere Begriffe, die im Laufe des Studiums auftauchen werden

Wir betrachten dabei Wörter p, s und w über dem Alphabet A.

- Präfix p: Ein Teilwort, das am Anfang des Wortes w auftritt.
- Suffix s: Ein Teilwort, das am Ende des Wortes w auftritt.

Klingt recht schwammig?!?

Weiteres zu Wörtern: Teilwörter

Weitere Begriffe, die im Laufe des Studiums auftauchen werden

Wir betrachten dabei Wörter p, s und w über dem Alphabet A.

- Präfix p von w: $\exists w^{'} \in A^{*} : p \cdot w^{'} = w$
- Suffix s von w: $\exists w^{'} \in A^{*} : w^{'} \cdot s = w$

- rekursive Definitionen sind für manche etwas gewöhnungsbedürftig
- aber speziell in der Informatik äußerst wichtig
- Beispiele
  - Akronym GNU : **G**NU is **N**ot **U**nix
  - Fakultät berechnen: $n! = n \cdot (n-1) \ldots \cdot 1$
    $n! = 1, \quad$ für $n = 0$
    $n! = n \cdot (n-1)!, \quad$ für $n > 0$
  - rekursive Definition von Worten mit Abbildung $R : A^* \to A^*$:

$$\begin{aligned} R(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \forall w \in A^* \; \forall x \in A : \; R(xw) &= R(w)x \end{aligned}$$

$$R(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in A^* \; \forall x \in A : \; R(xw) = R(w)x$$

Was macht das?

Beispielwort *abbab*
$R(abbab) = R(a \cdot bbab) = R(bbab)a = R(bab)ba = R(ab)bba =$
$R(b)abba = R(b\epsilon)abba = R(\epsilon)babba = \epsilon babba = babba.$

Überblick

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).
- Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)
- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k + 1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3 - 1/2 des Jobs.)

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).
- Induktionsvoraussetzung (IV): Für **ein beliebiges aber festes** $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)
- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k + 1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3 - 1/2 des Jobs.)

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).
- Induktionsvoraussetzung (IV): Für **ein beliebiges aber festes** $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)
- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k + 1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3 - 1/2 des Jobs.)

- Induktionsanfang (IA): Zeige, Aussage gilt für $k = 0$ (Einsetzen der Definition ist oft 3/4 des Jobs).
- Induktionsvoraussetzung (IV): Für **EIN BELIEBIGES ABER FESTES** $k \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage. (Einfach nur hinschreiben.)
- Induktionsschluss (IS): Ausgehend von der IV zeigt man, dass für $k + 1$ die Aussage gilt. (Einsetzen der Definition und Einsetzen der IV ist oft 1/3 - 1/2 des Jobs.)

Merke: Wenn eine Induktion **über k** durchgeführt wird, darf in der IV **auf gar keinen Fall** ein Allquantor vor dem **k** stehen.

Tip: Stellen Sie sich einen weiteren Quantor für “für ein beliebiges, aber festes ...” vor: $\mathbb{B}k \in \mathbb{N}_0 \ldots$, der bei der IV steht.

Alphabet A.
Aussage: $\forall w \in A^* : \forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : w^n w^m = w^{n+m}$.
Wähle **beliebiges, aber festes** $w \in A^*$, wähle **beliebiges, aber festes** $n \in \mathbb{N}_0$.
Induktion über m.

Zwei Schritte:

- Aussage gilt für $m = 0$.
- $\forall m \in \mathbb{N}_0$: Aussage gilt für $m \Rightarrow$ Aussage gilt für $m + 1$.

Vollständige Induktion

Induktionsanfang: $m = 0$: $w^n w^0 = w^n \cdot \epsilon = w^n = w^{n+0}$ ✓

$\forall m \in \mathbb{N}_0$: Aussage gilt für $m \Rightarrow$ Aussage gilt für $m+1$.
Wähle **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$.
Fall 1: Aussage gilt nicht für $m \Rightarrow$ Folgerung ist wahr.
Fall 2: Aussage gilt für $m \Rightarrow$ Dann muss Aussage auch für $m+1$ gelten, oder Folgerung ist nicht für alle $m \in \mathbb{N}_0$ wahr.

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.
Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.
Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.
$w^n w^{m+1}$

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.
Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.
$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n(w^m \cdot w)$

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.
Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.
$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n(w^m \cdot w) \overset{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.
Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.
$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n(w^m \cdot w) \overset{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$
$\overset{IV}{=} w^{n+m} \cdot w$

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n(w^m \cdot w) \overset{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$
$\overset{IV}{=} w^{n+m} \cdot w \overset{Def}{=} w^{(n+m)+1}$

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.
Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n(w^m \cdot w) \overset{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$$
$$\overset{IV}{=} w^{n+m} \cdot w \overset{Def}{=} w^{(n+m)+1} = w^{n+(m+1)}$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$$w^n w^{m+1} \stackrel{Def}{=} w^n (w^m \cdot w) \stackrel{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$$

$$\stackrel{IV}{=} w^{n+m} \cdot w \stackrel{Def}{=} w^{(n+m)+1} = w^{n+(m+1)} \quad \square$$

Das wars für heute...

Themen für das zweite Übungsblatt:

- Prädikatenlogik
- Vollständige Induktion

Schönes Wochenende!