Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 (2+2+1+1 Punkte)

Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation über A.
Zeigen Sie:

a) R ist transitiv $\Rightarrow R \circ R \subseteq R$.

Sei R transitiv und $(x,z) \in R \circ R$.
Dann gilt: $\exists y \in A : xRy \wedge yRz$.
Da R transitiv ist, folgt xRz.
Es gilt also: $\forall x, z \in A : (x,z) \in R \circ R \Rightarrow (x,z) \in R$.
Damit folgt $R \circ R \subseteq R$.

b) $R \circ R \subseteq R \Rightarrow R$ ist transitiv.

Es gelte $R \circ R \subseteq R$.
Seien $x, y, z \in A$ mit der Eigenschaft $xRy \wedge yRz$.
Dann gilt: $\exists y \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow (x,z) \in R \circ R$.
Daraus folgt, dass R transitiv ist.

c) R ist transitiv und reflexiv $\Rightarrow R \circ R = R$.

Wenn R transitiv ist, folgt nach Teilaufgabe a) $R \circ R \subseteq R$.
Es ist also noch zu zeigen: Wenn R transitiv und reflexiv ist, folgt $R \subseteq R \circ R$.
Sei $(x,z) \in R$ beliebig. Dann gilt $xRx \wedge xRz$, da R reflexiv ist.
Damit folgt $\exists y \in A : xRy \wedge yRz$, und es gilt $(x,z) \in R \circ R$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

d) R ist transitiv und reflexiv $\Rightarrow R^* = R$.

Wir zeigen zuerst: $\forall i \in \mathbb{N}_+ : R^i = R$.
Induktionsanfang: $i = 1$: $R^1 = Id_A \circ R = R$. $\checkmark$
Induktionsvoraussetzung: Für ein festes, aber beliebiges $i \in \mathbb{N}_+$ gilt: $R^i = R$.
Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch $R^{i+1} = R$ gilt:
$R^{i+1} = R \circ R^i \overset{IV}{=} R \circ R \overset{c)}{=} R$.
Es gilt $R^* = Id_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = Id_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R = Id_A \cup R = R$, da $Id_A \subseteq R$ wegen Reflexivität von R gilt.
Alternativ: R^* ist die reflexiv-transitive Hülle von R, also die kleinste Relation, die R enthält und sowohl reflexiv als auch transitiv ist. R ist die kelinste Menge, die R als Teilmenge enthält, R ist reflexiv und transitiv $\Rightarrow R^* = R$.

Aufgabe 5.2 (3 Punkte)

Es seien A, B, C Mengen.

Geben Sie eine bijektive Abbildung $F : C^{A\times B} \to C^{B\times A}$ an.
Beweisen Sie, dass Ihre angegebene Funktion F injektiv ist.

$F : C^{A\times B} \to C^{B\times A}$ wird definiert durch
$\forall f \in C^{A\times B} : \forall a \in A : \forall b \in B : (F(f))(b, a) = f(a, b)$.
F ist injektiv:
Sei $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists (a, b) \in A \times B : f_1(a, b) \neq f_2(a, b)$
$\Rightarrow \exists a \in A : \exists b \in B : F(f_1)(b, a) \neq F(f_2)(b, a)$
$\Rightarrow F(f_1) \neq F(f_2) \Rightarrow F$ ist injektiv.

Aufgabe 5.3 (1+2+2 Punkte)

Gegeben seien die Homomorphismen $h : \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \Rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $h(\mathtt{a}) = 10, h(\mathtt{b}) = 01$ und $h(\mathtt{c}) = 101$ und $g : \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \Rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $g(\mathtt{a}) = 10, g(\mathtt{b}) = 01$ und $g(\mathtt{c}) = 10001$.

a) Finden Sie ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$, so dass $h(w) = 100101101$ gilt.

$w = \mathtt{abbc}$

b) Finden Sie zwei Wörter $w_1, w_2 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$, für die gilt: $w_1 \neq w_2 \wedge h(w_1) = h(w_2)$.

$w_1 = \mathtt{ac}, w_2 = \mathtt{cb}, h(w_1) = h(w_2) = 10101$

c) Geben Sie eine rekursive Definition für eine Abbildung $u : \{0, 1\}^* \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \perp\}^*$ an, für welche die folgenden Aussagen gelten:
$\forall w \in \{0, 1\}^* : (\exists w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* : g(w') = w) \Rightarrow g(u(w)) = w$
$\forall w \in \{0, 1\}^* : (\forall w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* : g(w') \neq w) \Rightarrow (u(w))(|u(w)| - 1) = \perp$

$$u(w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w = \epsilon \\ \mathtt{a} & \text{falls } w = 10 \\ \mathtt{b}u(w') & \text{falls } w = 01w' \\ \mathtt{a}u(1w') & \text{falls } w = 101w' \\ \mathtt{ab}u(w') & \text{falls } w = 1001w' \\ \mathtt{c}(w') & \text{falls } w = 10001w' \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 5.4 (3+3 Punkte)

a) Gibt es einen Homomorphismus $h : Z_8^* \to Z_2^*$, so dass gilt:
$\forall w \in Z_8^* : Num_2(h(w)) = Num_8(w)$

Falls Ihre Antwort “ja” ist: Geben Sie für alle $w \in Z_8^1$ das Wort $h(w)$ an.
Falls Ihre Antwort “nein” ist: Erklären Sie, warum es so einen Homomorphismus nicht geben kann.

So einen Homomorphismus gibt es:
Der durch
$h(0) = 000, h(1) = 001, h(2) = 010, h(3) = 011,$
$h(4) = 100, h(5) = 101, h(6) = 110, h(7) = 111.$
definierte Homomorphismus erfüllt $\forall w \in Z_8^* : Num_2(h(w)) = Num_8(w)$.
(Beweis, der in der Aufgabenstellung nicht gefragt war:
Es gilt für $z \in Z_8 : Num_8(w) = Num_2(h(w))$.
Wir zeigen durch vollständige Induktion über die Wortlänge:
$\forall \in Z_8^* : Num_8(w) = Num_2(h(w))$:
Induktionsanfang: $n = 0$: $w = \epsilon \Rightarrow h(w) = \epsilon \Rightarrow Num_8(w) = Num_2(h(w)) = \epsilon$. $\surd$
Induktionsvoraussetzung: Für ein festes, aber beliebeiges $n \in \mathbb{N}_0$: $\forall w \in Z_8^n : Num_8(w) = Num_2(h(w))$.
Induktionsschritt: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $\forall w \in Z_8^n : Num_8(w) = Num_2(h(w))$.
Wir betrachten $w' \in Z_8^{n+1}$, das heißt, es gibt ein $w \in Z_8^n$ und ein Zeichen $z \in Z_8$, so dass $w' = wz$ gilt.
Seien $a, b, c \in \{0, 1\}$ die Zeichen, für die $h(z) = abc$ gilt.
Dann gilt:
$Num_2(h(wz)) = Num_2(h(w)h(z)) = Num_2(h(w)abc)$
$= Num_2(h(w)ab) \cdot 2 + num_2(c)$
$= (Num_2(h(w)a) \cdot 2 + num_2(b)) \cdot 2 + num_2(c)$
$= ((Num_2(h(w)) \cdot 2 + num_2(a)) \cdot 2 + num_2(b)) \cdot 2 + num_2(c)$
$= Num_2(h(w)) \cdot 8 + 4 \cdot num_2(a) + 2 \cdot num_2(b) + num_2(c)$
$= Num_2(h(w)) \cdot 8 + (Num_2(a) \cdot 2 + num_2(b)) \cdot 2 + num_2(c)$
$= Num_2(h(w)) \cdot 8 + Num_2(ab) \cdot 2 + num_2(c)$
$= Num_2(h(w)) \cdot 8 + Num_2(abc)$
$\overset{IV}{=} Num_8(w) \cdot 8 + Num_2(abc)$
$\overset{Def}{=} Num_8(w) \cdot 8 + Num_8(z) = Num_8(wz)$)

b) Gibt es einen Homomorphismus $h : Z_3^* \to Z_2^*$, so dass gilt:
$\forall w \in Z_3^* : Num_2(h(w)) = Num_3(w)$
Falls Ihre Antwort “ja” ist: Geben Sie für alle $w \in Z_3^1$ das Wort $h(w)$ an.
Falls Ihre Antwort “nein” ist: Erklären Sie, warum es so einen Homomorphismus nicht geben kann.

Nein: Angenommen, h wäre so ein Homomorphismus.
Damit $Num_3(0) = Num_2(h(0))$ gilt, muss gelten:
$\exists k \in \mathbb{N}_0 : h(0) = 0^k$.
Damit $Num_3(1) = Num_2(h(1))$ gilt, muss gelten:
$\exists l \in \mathbb{N}_0 : h(0) = 0^l 1$.
Wir betrachten nun $h(10)$. Es gilt $Num_3(10) = 3$ und, da h ein Homomorphismus ist, $\exists k, l \in \mathbb{N}_0 : h(10) = 0^l 1 0^k$.
Es folgt $Num_2(h(10)) = 2^k$. Da 3 keine Zweierpotenz ist, kann $Num_2(0^l 1 0^k)$

niemals 3 sein, und es folgt $Num_2(h(10)) \neq Num_3(10)$.
Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, und somit kann es keinen solchen Homomorphismus geben.