Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1 (3 Punkte)

Lösung 9.1

Laufzeit von A: $c_1 n \log_{10} n = 100$ Für $n = 10^4 \Rightarrow c_1 = \frac{100}{10^4 \cdot 4} = \frac{1}{400}$
Laufzeit von B: $c_2 n = 500$ $n = 10^4 \Rightarrow c_2 = \frac{500}{10^4} = \frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}n \overset{!}{=} \frac{1}{400} n \log_{10} n \Leftrightarrow$
$20 = \log_{10} n \Leftrightarrow n = 10^{20}$
Ab einer Datengröße von $n = 10^{20}$ lohnt sich der Einsatz von Implementierung B.

Aufgabe 9.2 (3+3+3 Punkte)

Lösung 9.2

a) Die Behauptung stimmt.

Zu zeigen: $3^{\log_2(n)} \in \Theta\left(n^{\log_2(3)}\right)$:
$3 = 2^{\log_2(3)} \Rightarrow 3^{\log_2(n)} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 n} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_2 n} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log_2 3} = n^{\log_2 3}$

D.h. mit der Wahl von $n_0 = c = c' = 1$ gilt $\forall n \geq 1 : 1 \cdot n^{\log_2(3)} \leq 3^{\log_2(n)} \leq 1 \cdot n^{\log_2(3)}$

b) Die Behauptung stimmt.

Zu zeigen: $(n+1) \cdot \log(\sqrt{4n-2}) + \log((n!)^2) \in \mathrm{O}\,(n \log n)$

$(n+1) \cdot \log(\sqrt{4n-2}) + \log((n!)^2)$
$= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2\log(n!)$
$= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2(\log(1) + \log(2) + \ldots + \log(n))$
$\leq (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2(\log(n) + \log(n) + \ldots + \log(n))$
$= (n+1) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2n\log(n)$
$\overset{\text{mit } n>0}{\leq} (n+n) \cdot \frac{1}{2} \log(4n-2) + 2n\log(n)$
$= n\log(4n-2) + 2n\log(n)$
$\leq n\log(4n) + 2n\log(n)$
$\in O(n\log(n) + O(n\log(n))$
$\overset{\text{nach VL}}{=} O(n\log(n))$

c) Gegenbeispiel: $f_1(n) = g_1(n) = g_2(n) = n^2$, $f_2(n) = n$

Dann gilt zwar $f_1(n) \in \mathrm{O}\left(g_1(n)\right) \wedge f_2(n) \in \mathrm{O}\left(g_2(n)\right))$, jedoch $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \frac{n^2}{n} = n \notin \mathrm{O}\left(\frac{g_1(n)}{g_2(n)}\right) = O(1)$,

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Lösung 9.3

Nach jeder Iteration der while-Schleife wird n halbiert
$\Rightarrow T(n) = n + n/2 + n/4 + \ldots + \frac{n}{2^{\log_2 n}})$
$= n \cdot (1 + 1/2 + \ldots + \frac{1}{2^{\log_2 n}}))$
$= n \cdot 2 \cdot (1 - \frac{1}{2}^{\log_2 n+1})$
$= 2n(1 - \frac{1}{2^{\log_2 n} \cdot 2}) = 2n \cdot (1 - \frac{1}{2n}) = 2n - 1$
Der Algorithmus endet also nach $2n - 1$ Schritten.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Lösung 9.4

Sie fragen eine beliebige anwesende Person A, ob sie eine andere beliebige Person B kennt. Aus der Antwort erhält man 2 Möglichkeiten:

- Antwort "nein": Person B kann nicht der Weihnachtsmann sein, da A sie sonst kennen würde. Man kann B also von der Liste der möglichen Weihnachtsmänner streichen und die Frage (diesmal über eine andere Person B) nochmal an A richten.

- Antwort "ja": Person A kann nicht der Weihnachtsmann sein, da sie jemand anderen kennt. Man kann A also von der Liste der möglichen Weihnachtsmänner streichen und die Frage an B richten.

Nach jeder Frage kann man eine Person ausschließen, so dass nach $n - 1$ Fragen klar ist, wer der Weihnachtsmann ist.