Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1 (3 Punkte)

Gegeben sind folgende Aussagen:

- Jeder Frosch ist glücklich, wenn alle seiner Kinder quaken können.
- Alle grünen Frösche können quaken
- Ein Frosch ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Frosches ist.

Formalisieren Sie diese Aussagen mit Hilfe geeigneter Prädikate in Prädikatenlogik (4 Prädikate sollten ausreichen).

Lösung 2.1

Wir führen folgende vier Prädikate ein:

- $happy(x)$: x ist glücklich
- $K(x, y)$: x ist Kind von y
- $green(x)$: x ist grün
- $quak(x)$: x kann quaken

a) Die Aussage "Jeder Frosch ist glücklich, wenn alle seiner Kinder quaken können." lässt sich prädikatenlogisch folgendermaßen schreiben:
$\forall y \in F : \forall x \in F : (K(x, y) \Rightarrow quak(x)) \Rightarrow happy(y)$

b) Die Aussage "Alle grünen Frösche können quaken." lässt sich prädikatenlogisch folgendermaßen schreiben:
$\forall x \in F : green(x) \Rightarrow quak(x)$

c) Die Aussage "Ein Frosch ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Frosches ist." lässt sich prädikatenlogisch folgendermaßen schreiben:
$\forall x \exists y \in F : (K(x, y) \wedge green(y)) \Rightarrow green(x)$

Hinweis: Jede korrekte Aussage gibt jeweils einen Punkt. "Kleinigkeiten", z.B. $\wedge statt \Rightarrow$, geben 0.5 Punkte Abzug.

Aufgabe 2.2 (2 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die Äquivalenz der beiden prädikatenlogischen Aussagen A und B.

Aussage A: $\quad \forall x : (P(x) \vee Q(x))$

Aussage B : $\quad \forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$

Lösung 2.2
Gegenbeispiel: Wir wählen als Prädikate $P(x)$: x ist gerade und $Q(x)$: x ist ungerade, mit $x \in \mathbb{N}_+$
Dann ist Aussage A wahr, da alle natürlichen Zahlen gerade oder ungerade sind. Aussage B ist jedoch falsch. Sowohl $\forall x : P(x)$ ist falsch (da nicht alle natürlichen Zahlen gerade sind), als auch $\forall x : Q(x)$ ist falsch (da nicht alle natürlichen Zahlen ungerade sind). Infolge dessen ist auch B falsch, womit keine Äquivalenz der beiden Aussagen möglich ist.
Hinweis: 0.5 Punkte für das Erkennen der Nichtäquivalenz. 1.5 Punkte für ein passendes Gegenbeispiel bzw korrektes Begründen.

Aufgabe 2.3 (3+2 Punkte)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}_+ : n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

b) $\forall n \in \mathbb{N}_+ : 2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}$ ist durch 42 teilbar.

Lösung 2.3

a) **Induktionsanfang:** $n = 1$**:** $1^3 + 5 = 6$.ist durch 6 teilbar $\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_+$ gelte $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $(n+1)^3 + 5(n+1)$ ist durch 6 teilbar.
$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 3n^2 + 8n + 6 = n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 = n^3 + 5n + 6 + (3n \cdot (n+1))$
Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar ist. Daher auch $n^3 + 5n + 6$. Fehlt noch zu zeigen, dass $(3n \cdot (n+1))$ durch 6 teilbar ist. Hier kann wiederum vollständige Induktion anwenden, oder aber argumentieren:
Da $n \in \mathbb{N}_+$ unterscheiden wir 2 Fälle

(a) n ist gerade: $\Rightarrow 3n$ ist Vielfaches von 6 und daher $(3n \cdot (n+1))$ durch 6 teilbar.
(b) n ist ungerade: $\Rightarrow (n+1)$ ist gerade und daher $3(n+1)$ Vielfaches von 6 $\Rightarrow (3n \cdot (n+1))$ durch 6 teilbar.

$\square$

Hinweis: IA und IV geben jeweils 0.5 Punkte, der IS gibt 2 Punkte

b) **Induktionsanfang:** $n = 1$**:** $2^{2+3} + 2 \cdot 5^{2-1} = 32 + 10 = 42$ ist durch 42 teilbar. $\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_+$ gelte $2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1} = k \cdot 42$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} & 2^{2(n+1)+3} + 2 \cdot 5^{2(n+1)-1} \\ = \quad & 2^{2n+5} + 2 \cdot 5^{2n+1} \\ = \quad & 2^2(2^{2n+3} + 2 \cdot 5^{2n-1}) - 4 \cdot 2 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 5^{2n+1} \\ \overset{\text{Ind.vor.}}{=} \quad & 4 \cdot (k \cdot 42) + 5^{2n-1} \cdot (-8 + 2 \cdot 5^2) \\ = \quad & 4 \cdot (k \cdot 42) + 5^{2n-1} \cdot 42 \end{aligned}$$

Da beide Summanden ganzzahlige Vielfache von 42 sind, ist auch die Summe durch 42 teilbar. $\square$

Hinweis: IA und IV geben jeweils 0.5 Punkte, der IS gibt 1 Punkt

Aufgabe 2.4 (2+3 Punkte)
Gegeben sei folgende induktiv definierte Folge von Zahlen:

$$x_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + (n+1)^3$$

a) Berechnen Sie x_2, x_3, x_4, x_5.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $x_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Lösung 2.4

a)
- $x_2 : 9$
- $x_3 : 36$
- $x_4 : 100$
- $x_5 : 225$

b) **Induktionsanfang:** $n = 0$**:** Nach Definition gilt $x_0 = 0 = \frac{0 \cdot 1^2}{4}$.$\surd$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $x_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass dann auch $x_{n+1} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+1+1)^2}{4}$ gelten muss.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &\overset{\text{Def.}}{=} x_n + (n+1)^3 \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{=} \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+1+1)^2}{4} \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.5 (2+2+1 Punkte)

In einem alten Kloster werden drei Stapel aus insgesamt 100 Holzscheiben mit jeweils unterschiedlichem Durchmesser aufbewahrt. Einst befanden sich alle Scheiben so auf einem Stapel, dass jeweils die nächstkleinere auf der vorhergehenden lag. Seither legen die Mönche am Ende jeder Stunde eine der obersten Scheiben um. Diese Scheibe legen sie immer auf eine größere, obenliegende Scheibe oder auf einen freien Platz. Es gibt allerdings nie mehr als drei Stapel. Die Sage geht, dass die Welt untergeht, sobald an einem anderen Ort der ursprüngliche Stapel wiederersteht.

a) Wie viele elementare Scheibenbewegungen benötigt man, um einen ursprünglichen Stapel mit n Scheiben an einem anderen Ort wiedererstehen zu lassen? Geben Sie eine rekursive und eine geschlossene Formel für den allgemeinen Fall n Scheiben an ($n \in \mathbb{N}_+$). Unter einer geschlossenen Formel wollen wir einen arithmetischen Ausdruck verstehen, in dem nur Zahlen, n und mathematische Rechenoperationen vorkommen.

b) Beweisen Sie Ihre geschlossene Formel per vollständiger Induktion. Sie können dabei die rekursive Formel benutzen.

c) Nach wievielen Stunden und (näherungsweise) Jahrmillionen könnte demnach die Welt frühestens untergehen? Nehmen Sie an, dass jedes Jahr 365 Tage hat.

Lösung 2.5

a) rekursive Formel: $m(n+1) = 2 \cdot m(n) + 1$
geschlossene Formel: $m(n) = 2^n - 1$

Erläuterung: Wie kommt man auf die rekursive Formel?
Wir stellen uns vor wir haben den anfänglichen Stapel mit n Schreiben. Dazu müssen wir insbesondere die unterste, größte Scheibe bewegen. Dazu müssen wiederum die auf dieser größten Scheibe liegenden $n-1$ Scheiben bewegt werden. Zweitens muss auch noch einer der 3 Plätze frei sein, da die größte Scheibe nur auf einen freien Platz bewegt werden darf. Wir müssen also alle $n-1$ Scheiben auf einen Stapel bewegen (macht $m(n-1)$ Bewegungen), danach die unterste Scheibe bewegen, und die $n-1$ Scheiben darauf wieder neu errichten. Das ganze macht zusammen also $m(n-1) + 1 + m(n-1)$ Bewegungen.

Hinweis: Für volle Punktzahl reicht die Angabe der rekursiven und geschlossenen Formel.

b) **Induktionsanfang:** $n = 1$**:** $2^1 - 1 = 1$ ✓

Induktionsvoraussetzung:

Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_+$ sei $m(n) = 2^n - 1$ die Anzahl der elementaren Scheibenbewegungen.

Induktionsschluss: $m(n+1) \overset{\text{Def.}}{=} 2m(n)+1 \overset{\text{IV}}{=} 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$ $\square$

Hinweis: Jeweils einen halben Punkte für IA und IV, 1 Punkt für korrekten IS.

c) Demnach könnte die Welt in $2^{100} - 1$ Stunden untergehen. Das sind ca $1,45 \cdot 10^{20}$ Jahrmillionen.