

Grundbegriffe der Informatik - Tutorium 21

Christian Jülg
Wintersemester 2012/13
04. Dezember 2012

<http://gbi-tutor.blogspot.com>

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

Es gilt:

1. ... Ein Homomorphismus ist immer präfixfrei.
2. ... $100101011101_2 = 0x95C = 4535_8$
3. ... $3 + 2 = 11$

Zu einer Relation R ...

1. ... gilt $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1}$
2. ... lässt sich immer die reflexive transitive Hülle bilden
3. ... gibt es viele Darstellungsmöglichkeiten

Es gilt:

1. ... Ein Homomorphismus ist immer präfixfrei.
2. ... $100101011101_2 = 0x95C = 4535_8$
3. ... $3_4 + 2_4 = 11_4$

Zu einer Relation R ...

1. ... gilt $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1}$
2. ... lässt sich immer die reflexive transitive Hülle bilden
3. ... gibt es viele Darstellungsmöglichkeiten

Es gilt:

1. ... Ein Homomorphismus ist immer präfixfrei.
2. ... $100101011101_2 = 0x95C = 4535_8$
3. ... $3_4 + 2_4 = 11_4$

Zu einer Relation R ...

1. ... gilt $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{i+1}$
2. ... lässt sich immer die reflexive transitive Hülle bilden
3. ... gibt es viele Darstellungsmöglichkeiten

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

Blatt 6

- Abgaben: x / 19
- Punkte: Durchschnitt der abgegeben Blätter x,8 von 20

häufige Fehler

- Notationen beachten:
$$(x, z) \in P \circ R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$$

Blatt 6

- Abgaben: x / 19
- Punkte: Durchschnitt der abgegeben Blätter x,8 von 20

häufige Fehler

- Notationen beachten:
 $(x, z) \in P \circ R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$
- keine falschen Lösungen abschreiben

Blatt 6

- Abgaben: x / 19
- Punkte: Durchschnitt der abgegeben Blätter x,8 von 20

häufige Fehler

- Notationen beachten:
 $(x, z) \in P \circ R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$
- keine falschen Lösungen abschreiben
- keine Lösungen falsch abschreiben

Blatt 6

- Abgaben: x / 19
- Punkte: Durchschnitt der abgegeben Blätter x,8 von 20

häufige Fehler

- Notationen beachten:
 $(x, z) \in P \circ R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$
- keine falschen Lösungen abschreiben
- keine Lösungen falsch abschreiben
- Konkatenation von Relationen beachten!

Blatt 6

- Abgaben: $x / 19$
- Punkte: Durchschnitt der abgegeben Blätter $x,8$ von 20

häufige Fehler

- Notationen beachten:
 $(x, z) \in P \circ R \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P$
- keine falschen Lösungen abschreiben
- keine Lösungen falsch abschreiben
- Konkatenation von Relationen beachten!
- Höhe von Bäumen

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

Blatt 7

- Abgabe: 07.12.2011 um 12:30 Uhr im Untergeschoss des Infobaus
- Punkte: maximal 20

Themen

- Graphen

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort $w \in A^*$ indem

Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort $w \in A^*$ indem
- häufigere Symbole durch kürzere Wörter

Wozu Huffman Codes?

- Huffman-Codes komprimieren ein Wort $w \in A^*$ indem
- häufigere Symbole durch kürzere Wörter
- und seltener vorkommende Symbole durch längere Wörter kodiert werden

Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:

2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen $x \in A$

2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen $x \in A$
- Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen

2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen $x \in A$
- Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen
- An jedem Blatt wird das Symbol x und dessen Häufigkeit notiert

2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

Vorgehensweise

zwei Schritte:

1. Konstruktion eines Baumes:

- Blätter entsprechen $x \in A$
- Innere Knoten entsprechen Mengen von Symbolen
- An jedem Blatt wird das Symbol x und dessen Häufigkeit notiert
- die zwei Elemente mit der geringsten Häufigkeit werden zu einem Elternknoten zusammengefasst

2. Beschriftung der Kanten: links mit 0, rechts mit 1

Der kürzeste Weg von der Wurzel zum Blatt gibt die Kodierung des jeweiligen Zeichens (im Blatt) an.

Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
Erstelle den Huffman-Code-Baum.

Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
Erstelle den Huffman-Code-Baum.
Wie lange wird die Kodierung von $w = badcfegh$?

Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
Erstelle den Huffman-Code-Baum.
Wie lange wird die Kodierung von $w = badcfegh$?
2. Fall: Zeichen a und b kommen zweimal, c viermal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vor.
Erstelle den Huffman-Code-Baum. Wie lange wird die Kodierung von $w = badcafeh$?

Aufgabe 1

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

1. Fall: Jedes Zeichen kommt genau einmal vor
Erstelle den Huffman-Code-Baum.
Wie lange wird die Kodierung von $w = badcfefhg$?
2. Fall: Zeichen a und b kommen zweimal, c viermal, d 8-mal, e 16-mal, f 32-mal, g 64-mal und h 128-mal vor.
Erstelle den Huffman-Code-Baum. Wie lange wird die Kodierung von $w = badcafeh$ g?
3. Wie lange wird ein Wort mit zweiter Zeichenverteilung, wenn man es mit dem ersten Code codiert?
4. Wie lange wird ein Wort mit erster Zeichenverteilung, wenn man es mit dem zweiten Code codiert?

Aufgabe 2

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und die Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(a) = \frac{3}{10}$, $p(b) = \frac{1}{10}$, $p(c) = \frac{1}{10}$, $p(d) = \frac{1}{7}$, $p(e) = \frac{1}{7}$, $p(f) = \frac{1}{7}$ und $p(g) = \frac{1}{14}$.

- Erzeuge einen Huffman-Code C.

Aufgabe 2

Gegeben sei das Alphabet $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und die Auftretswahrscheinlichkeiten $p(a) = \frac{3}{10}$, $p(b) = \frac{1}{10}$, $p(c) = \frac{1}{10}$, $p(d) = \frac{1}{7}$, $p(e) = \frac{1}{7}$, $p(f) = \frac{1}{7}$ und $p(g) = \frac{1}{14}$.

- Erzeuge einen Huffman-Code C.

Lösung 2

Zeichen:	a	b	c	d	e	f	g
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$
Code:	00	101	110	010	011	100	111

mehrdeutig?

- im Allgemeinen sind Huffman-Codes nicht eindeutig:
- es können mehrere Zeichen gleichhäufig vorkommen
- Außerdem ist nicht festgelegt, welcher Knoten linker Nachfolger und welcher rechter Nachfolger eines inneren Knotens wird

⇒ Huffman-Codes sind nicht eindeutig

- Das macht aber nichts: alle, die sich für ein Wort w ergeben können, sind „gleich gut“

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen

Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen

Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen

Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen
- Irrgarten

Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen
- Irrgarten
- Stromnetz

Gerichtete Graphen

- Einbahnstraßen
- Bahn- Flugverbindungen
- Stammbäume

Ungerichtete Graphen

- Zweibahnstraßen
- Irrgarten
- Stromnetz

Nicht modellierbar

- mehrspurige Verbindungen in gleicher Richtung

Definition

Ein gerichteter Graph G ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit

- der Grundmenge $V = \{v_i\}$ (die Menge der Ecken)
- der Relation $E \subseteq V \times V$ (die Menge der Kanten)

Notationen für Kanten:

- $(v, v') \in E$
- $v \rightarrow_G v'$
- $v \rightarrow v'$

Zeichnerische Darstellung von gerichteten Graphen

Ihr seid dran...

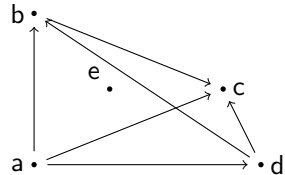
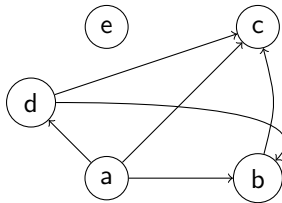
Ein kluger Ersti möchte gerne über die Weihnachtstage mit dem Zug nach Hause fahren. Um zu sehen über welche Strecken er alles fahren kann, malt er sich einen Graphen auf.

Zeichnerische Darstellung von gerichteten Graphen

Ihr seid dran...

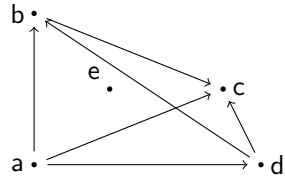
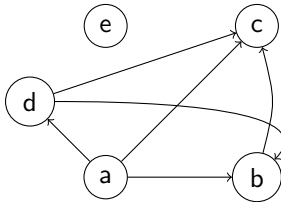
Ein kluger Ersti möchte gerne über die Weihnachtstage mit dem Zug nach Hause fahren. Um zu sehen über welche Strecken er alles fahren kann, malt er sich einen Graphen auf.

Aus Aachen fahren Züge nach Berlin, Chemnitz und Dortmund. Während er von Berlin nur Chemnitz erreichen kann, gibt es Züge von Dortmund nach Chemnitz und Berlin. Essen ist leider von keiner dieser Städte erreichbar. Hinweis: Man malt die Ecken als Kreise und die Kanten als Pfeile.



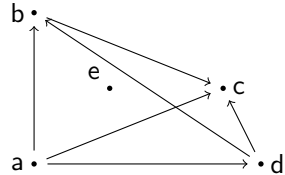
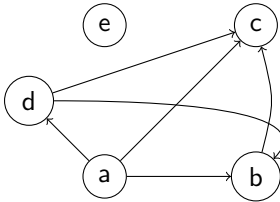
Sind die beiden Graphen isomorph?

Gebt die Graphen in Tupelschreibweise an!



Ja, die beiden Graphen sind isomorph.

Gebt den Graph in Tupelschreibweise an!



Ja, die beiden Graphen sind isomorph.

$$G = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, b), (d, c)\})$$

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.
- Ein Graph heißt **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt.

Begriffe

- Ein Graph heißt **endlich**, wenn V endlich ist ($|V| < \infty$).
- 2 Knoten x und y heißen **adjazent**, wenn es eine Kante $(x, y) \in E$ gibt.
- Eine **Schlinge** ist eine Kante der Form $(x, x) \in E$.
- Ein Graph heißt **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt.
- $G' = (V', E')$ ist ein **Teilgraph** von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap V' \times V'$

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

Lösung: n Kanten

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Aufgabe

Gegeben sei ein gerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

Lösung: n Kanten

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Lösung: $n(n - 1)$ Kanten

Definition

In einem gerichteten Baum ...

Definition

In einem gerichteten Baum ...

- ... gibt es genau einen Knoten $r \in V$ so dass:
für alle $x \in V$ ex. genau ein Pfad von r nach x

Definition

In einem gerichteten Baum ...

- ... gibt es genau einen Knoten $r \in V$ so dass:
für alle $x \in V$ ex. genau ein Pfad von r nach x
- ... ist die Wurzel eindeutig

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten v_0, \dots, v_{n-1} und v_1, \dots, v_n je paarweise verschieden sind, also maximal v_0 und v_n gleich sind.

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten v_0, \dots, v_{n-1} und v_1, \dots, v_n je paarweise verschieden sind, also maximal v_0 und v_n gleich sind.
- Falls $v_0 = v_n$ heißt der Pfad *geschlossen*. Dann ist der Pfad auch ein Zyklus.

Definition

Ein Pfad ist eine nichtleere Liste $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$, wenn für alle $i \in \mathbb{G}_n$ gilt $(v_i, v_{i+1}) \in E$

- Die Anzahl $n = |p| - 1$ (der Kanten!) heißt die *Länge* des Pfades
- Ein Pfad heißt *wiederholungsfrei*, wenn alle Knoten v_0, \dots, v_{n-1} und v_1, \dots, v_n je paarweise verschieden sind, also maximal v_0 und v_n gleich sind.
- Falls $v_0 = v_n$ heißt der Pfad *geschlossen*. Dann ist der Pfad auch ein Zyklus.
- ein geschlossener und wiederholungsfreier Pfad ist ein *einfacher Zyklus*.

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

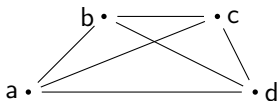
Ungerichtete Graphen

Abschluss

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

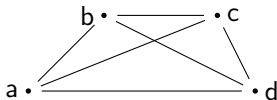
- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V\}$ die Menge der Kanten.



Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$ die Menge der Kanten.

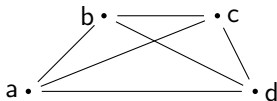


Wie sähe dieser ungerichtete Graph als Menge aus?

Definition

Ein ungerichteter Graph ist definiert als $U = (V, E)$, wobei

- $V = \{v_i\}$ die Menge der Ecken ist und
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$ die Menge der Kanten.



Wie sähe dieser ungerichtete Graph als Menge aus?

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\})$$

Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfremd ist?

Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Lösung: $n(n - 1)/2$ Kanten

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

Aufgabe

Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit n Knoten.

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn er schlingenfrei ist?

Lösung: $n(n-1)/2$ Kanten

- Wieviele Kanten kann er maximal haben, wenn Schlingen erlaubt sind?

Lösung: $n(n+1)/2$ Kanten

Definition

Wir nennen . . .

- einen gerichteten Graphen *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ gilt: Es gibt in G einen Pfad von x nach y .

Definition

Wir nennen . . .

- einen gerichteten Graphen *streng zusammenhängend*, wenn für jedes Knotenpaar $(x, y) \in V^2$ gilt: Es gibt in G einen Pfad von x nach y .
- einen ungerichteten Graphen *zusammenhängend*, wenn der entsprechende gerichtete Graph *streng zusammenhängend* ist.

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum
- Im ungerichteten Baum kann theoretisch jeder Knoten Wurzel sein.

Definition

- Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit $|E| = |V| - 1$ ist ein ungerichteter Baum
- Im ungerichteten Baum kann theoretisch jeder Knoten Wurzel sein.
- Daher wird i.d.R. ein Knoten als Wurzel hervorgehoben.

Aufwachen

Aufgabenblatt 6

Aufgabenblatt 7

Huffman-Codes

Gerichtete Graphen

Ungerichtete Graphen

Abschluss

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?
- Was bedeutet gerichtet, bzw. ungerichtet?

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?
- Was bedeutet gerichtet, bzw. ungerichtet?
- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie baue ich mir einen Huffman-Baum?
- Was ist ein Graph, was ein Teilgraph?
- Was bedeutet gerichtet, bzw. ungerichtet?
- Begriffe: Adjazent, Schlinge, Pfad, Zyklus, ...?

Ihr wisst was nicht?

Stellt **jetzt** Fragen!

