Grundbegriffe der Informatik

Einheit 17: Relationen

Thomas Worsch

Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2009/2010

Definition

- Eine *Äquivalenzrelation* ist eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M, die
  - reflexiv,
  - symmetrisch und
  - transitiv

  ist.
- typischerweise
  - Notation $\equiv$, $\sim$, $\approx$, oder ähnlich
  - Infixschreibweise
- also
  - $\forall x \in M : x \equiv x$,
  - $\forall x \in M : \forall y \in M : x \equiv y \implies y \equiv x$
  - $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x \equiv y \land y \equiv z \implies x \equiv z$

Einfachstes Beispiel: Identität

$\mathrm{I} = \{(x, x) \mid x \in M\}$ ist Äquivalenzrelation (für jede Menge M), denn

- $\forall x \in M : x = x$,
- $\forall x \in M : \forall y \in M : x = y \Longrightarrow y = x$
- $\forall x \in M : \forall y \in M : \forall z \in M : x = y \wedge y = z \Longrightarrow x = z$

Wichtiges Beispiel: Kongruenz modulo n

- Es sei $n \in \mathbb{N}_+$.
- $x, y \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo n*, wenn
  - die Differenz $x - y$ durch n teilbar,
  - also ein ganzzahliges Vielfaches von n, ist.
- Schreibweise $x \equiv y \pmod{n}$
- Das sind Äquivalenzrelationen, denn
  - Reflexivität: $x - x = 0$ ist Vielfaches von n
  - Symmetrie: mit $x - y$ ist auch $y - x = -(x - y)$ Vielfaches von n
  - Transitivität:
    - Wenn $x - y = k_1 n$ und $y - z = k_2 n$ (mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$),
    - dann auch $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)n$ ganzzahliges Vielfaches von n

Überblick

Definition

- $L \subseteq A^*$ beliebige formale Sprache
- *Äquivalenzrelation von Nerode* $\equiv_L$ auf der Menge A^* aller Wörter so definiert: für alle $w_1, w_2 \in A^*$ ist

$$w_1 \equiv_L w_2 \iff \left(\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L\right)$$

- das muss man erfahrungsgemäß mehrfach lesen
- w_1 und w_2 genau dann äquivalent, wenn gilt:
  Gleich, welches Wort $w \in A^*$ man die beiden anhängt, immer sind entweder beide, $w_1 w$ und $w_2 w$, in L, oder keines.
  Aber ist eines in L und das andere nicht.
- Anders gesagt: w_1 und w_2 genau dann *nicht* $\equiv_L$-äquivalent, wenn es ein Wort $w \in A^*$ gibt, so dass genau eines der Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ in L liegt, aber das andere nicht.

Diskussion

- betrachte das leere Wort $w = \varepsilon$
- wenn $w_1 \equiv_L w_2$
- dann beide Wörter $w_1 w$ und $w_2 w$ in L oder beide nicht in L
- also beide Wörter w_1 und w_2 in L oder beide nicht in L

Beispiel

- $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
  alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort $\mathtt{ba}$ vorkommt
- Beispiele:
  1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$
     - Hängt man an beide Wörter ein $w \in \langle \mathtt{a*} \rangle$ an, dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L.
     - Hängt man ein $w \in \langle \mathtt{a*bb*} \rangle$ an, dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L.
     - Hängt man ein w an, das $\mathtt{ba}$ enthält, dann sind also beide nicht in L.
     - Andere Möglichkeiten für w gibt es nicht, also sind die beiden Wörter $\equiv_L$-äquivalent.
  2. $w_1 = \mathtt{aaab}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$
  3. $w_1 = \mathtt{aa}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$
  4. $w_1 = \mathtt{aba}$ und $w_2 = \mathtt{babb}$
  5. $w_1 = \mathtt{ab}$ und $w_2 = \mathtt{ba}$

Beispiel

- $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$
- $L = \langle \texttt{a*b*} \rangle \subset A^*$
  alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- Beispiele:
  1. $w_1 = \texttt{aaa}$ und $w_2 = \texttt{a}$: äquivalent
  2. $w_1 = \texttt{aaab}$ und $w_2 = \texttt{abb}$
     - Hängt man ein $w \in \langle \texttt{b*} \rangle$ an,
       dann sind sowohl $w_1 w$ als auch $w_2 w$ in L.
     - Hängt man ein w an, das ein a enthält,
       dann sind also beide nicht in L.
     - Andere Möglichkeiten gibt es nicht,
       also sind die beiden Wörter $\equiv_L$-äquivalent.
  3. $w_1 = \texttt{aa}$ und $w_2 = \texttt{abb}$
  4. $w_1 = \texttt{aba}$ und $w_2 = \texttt{babb}$
  5. $w_1 = \texttt{ab}$ und $w_2 = \texttt{ba}$

Beispiel

- $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
  alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- Beispiele:
  1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$: äquivalent
  2. $w_1 = \mathtt{aaab}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: äquivalent
  3. $w_1 = \mathtt{aa}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$
     - Hängt man $w = \mathtt{a}$ an,
       dann ist zwar $w_1 w = \mathtt{aaa} \in L$, aber $w_2 w = \mathtt{abba} \notin L$.
     - Also sind die beiden Wörter *nicht* $\equiv_L$-äquivalent.
  4. $w_1 = \mathtt{aba}$ und $w_2 = \mathtt{babb}$
  5. $w_1 = \mathtt{ab}$ und $w_2 = \mathtt{ba}$

Beispiel

- $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
  alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- Beispiele:
  1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$: äquivalent
  2. $w_1 = \mathtt{aaab}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: äquivalent
  3. $w_1 = \mathtt{aa}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: nicht äquivalent
  4. $w_1 = \mathtt{aba}$ und $w_2 = \mathtt{babb}$
     - Beide ba. Egal was man anhängt,es bleibt so, d. h. immer sind $w_1 w \notin L$ und $w_2 w \notin L$.
     - Also sind die beiden Wörter $\equiv_L$-äquivalent.
  5. $w_1 = \mathtt{ab}$ und $w_2 = \mathtt{ba}$

Beispiel

- $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
  alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort ba vorkommt
- Beispiele:
  1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$: äquivalent
  2. $w_1 = \mathtt{aaab}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: äquivalent
  3. $w_1 = \mathtt{aa}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: nicht äquivalent
  4. $w_1 = \mathtt{aba}$ und $w_2 = \mathtt{babb}$: äquivalent
  5. $w_1 = \mathtt{ab}$ und $w_2 = \mathtt{ba}$
     - Da $w_1 \in L$, aber $w_2 \notin L$,
       zeigt $w = \varepsilon$, dass die beiden nicht $\equiv_L$-äquivalent sind.

Beispiel

- $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle \subset A^*$
  alle Wörter, in denen nirgends das Teilwort `ba` vorkommt
- Beispiele:
  1. $w_1 = \mathtt{aaa}$ und $w_2 = \mathtt{a}$: äquivalent
  2. $w_1 = \mathtt{aaab}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: äquivalent
  3. $w_1 = \mathtt{aa}$ und $w_2 = \mathtt{abb}$: nicht äquivalent
  4. $w_1 = \mathtt{aba}$ und $w_2 = \mathtt{babb}$: äquivalent
  5. $w_1 = \mathtt{ab}$ und $w_2 = \mathtt{ba}$: nicht äquivalent

Die Nerode-Relation ist immer eine Äquivalenzrelation

Lemma

Für jede formale Sprache L ist $\equiv_L$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis

prüfe alle drei Eigenschaften:

- Reflexivität: Ist $w_1 \in A^*$, dann gilt für jedes $w \in A^*$ offensichtlich: $w_1 w \in L \iff w_1 w \in L$.
- Symmetrie: Für $w_1, w_2 \in A^*$ und alle $w \in A^*$ gelte: $w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$. Dann gilt offensichtlich auch immer $w_2 w \in L \iff w_1 w \in L$.
- Transitivität: Es seien $w_1, w_2, w_3 \in A^*$ und es möge gelten

$$\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L \tag{1}$$

$$\forall w \in A^* : w_2 w \in L \iff w_3 w \in L \tag{2}$$

  Zeige: $\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_3 w \in L$. ...

Überblick

Definitionen

- *Äquivalenzklasse von $x \in M$* ist $\{y \in M \mid x \equiv y\}$
- Schreibweise $[x]_{\equiv}$ oder einfach $[x]$, falls $\equiv$ klar ist

- *Faktormenge* (oder *Faserung*) von M nach $\equiv$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen.
- Schreibweise $M_{/\equiv} = \{[x]_{\equiv} \mid x \in M\}$

Anzahl der Äquivalenzklassen

- manchmal
- Beispiel: $\equiv_L$ für $L = \langle \texttt{a*b*} \rangle$
- genauere Betrachtung der Argumentation von vorhin zeigt:
  - jedes Wort zu genau einem der Wörter ε, $\texttt{b}$ und $\texttt{ba}$ äquivalent
  - Also: $A^*_{/\equiv_L}$ besteht aus drei Äquivalenzklassen:
    - $[\varepsilon] = \langle \texttt{a*} \rangle$
    - $[\texttt{b}] = \langle \texttt{a*bb*} \rangle$
    - $[\texttt{ba}] = \langle \texttt{a*bb*a(a|b)*} \rangle$
- Wahl der Repräsentanten willkürlich;
  hätten auch schreiben können:
  - $[\texttt{aaaaa}] = \langle \texttt{a*} \rangle$
  - $[\texttt{aabbbbb}] = \langle \texttt{a*bb*} \rangle$
  - $[\texttt{aabbaabbba}] = \langle \texttt{a*bb*a(a|b)*} \rangle$

Anzahl Äquivalenzklassen bei Nerode-Äquivalenz

- durch L induzierte Nerode-Äquivalenz kann auch unendlich viele Äquivalenzklassen haben
- Beispiel betrachte man

$$L = \{\mathtt{a}^k \mathtt{b}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} .$$

- Ist $k \neq m$, dann sind $w_1 = \mathtt{a}^k$ und $w_2 = \mathtt{a}^m$ nicht äquivalent
- wie man durch Anhängen von $w = \mathtt{b}^k$ sieht:
  - $w_1 w = \mathtt{a}^k \mathtt{b}^k \in L$, aber
  - $w_2 w = \mathtt{a}^m \mathtt{b}^k \notin L$.
- Also zumindest jedes Wort $\mathtt{a}^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ in einer anderen Äquivalenzklasse.
- Jede dieser Äquivalenzklassen ist aber übrigens unendlich groß, denn

$$[\mathtt{a}^k]_{\equiv_L} = \{\mathtt{a}^x \mathtt{b}^y \mid x, y \in \mathbb{N}_0 \land x - y = k\}$$

Eine Ahnung ...

- Für die reguläre Sprache $L_1 = \langle \texttt{a*b*} \rangle$
  hat $\equiv_L$ endlich viele Äquivalenzklassen.
- Für die nicht reguläre Sprache $L_2 = \{\texttt{a}^k\texttt{b}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$
  hat $\equiv_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen.

- Für L_1 gibt es einen endlichen Akzeptor,
- für L_2 gibt es keinen.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Äquivalenzrelationen
- Beispiel Nerode-Äquivalenzen

Das sollten Sie üben:

- definierenden Eigenschaften überprüfen
- Anzahl Äquivalenzklassen bestimmen

Äquivalenzrelationen auf Mengen mit „Struktur“

- Beispiel: Kongruenz modulo n auf additiver Gruppe $\mathbb{Z}$ (oder Ring $\mathbb{Z}$
- Frage: Wie ändern sich Funktionswerte, wenn man Argumente durch äquivalente ersetzt?

Überblick

Verträglichkeit mit einstelligen Funktionen und binären Operationen

- Sei $\equiv$ Äquivalenzrelation auf M und $f : M \to M$ eine Abbildung.
- $\equiv$ ist mit f *verträglich*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \Longrightarrow f(x_1) \equiv f(x_2) \; .$$

- Sei $\equiv$ Äquivalenzrelation auf M und $\square$ eine binäre Operation Menge M.
- $\equiv$ ist mit $\square$ *verträglich*, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ und alle $y_1, y_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \equiv x_2 \wedge y_1 \equiv y_2 \Longrightarrow x_1 \square y_1 \equiv x_2 \square y_2 \; .$$

Veträglichkeit: Beispiel modulo

- Äquivalenz „modulo n“.
- Diese Relationen sind mit Addition, Subtraktion und Multiplikation verträglich.
- Beispiel: ist

$$\begin{array}{rlll} & x_1 \equiv x_2 \pmod{n} & \text{also} & x_1 - x_2 = kn \\ \text{und} & y_1 \equiv y_2 \pmod{n} & \text{also} & y_1 - y_2 = mn \end{array}$$

dann auch

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (k + m)n \; .$$

mit anderen Worten

$$x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \pmod{n} \; .$$

Veträglichkeit: Beispiel Nerode-Äquivalenzen

- Sei $w' \in A^*$ beliebig.
- Sei $f_{w'} : A^* \to A^*$ die Abbildung, die w' anhängt, also $f_{w'}(v) = vw'$.
- Behauptung: $\equiv_L$ ist mit $f_{w'}$ verträglich ist, d. h.:

$$\forall w_1, w_2 \in A^* : w_1 \equiv_L w_2 \Longrightarrow w_1 w' \equiv_L w_2 w'$$

- Zeige: Wenn $w_1 \equiv_L w_2$ ist, dann ist auch $w_1 w' \equiv_L w_2 w'$.
- Also: für *alle* $w \in A^*$ gielte $w_1 w \in L \Longleftrightarrow w_2 w \in L$.
- Zeige: für alle $v \in A^*$ gilt: $(w_1 w')v \in L \Longleftrightarrow (w_2 w')v \in L$. für beliebiges $v \in A^*$ gilt:

$$\begin{aligned} (w_1 w')v \in L &\Longleftrightarrow w_1(w'v) \in L \\ &\Longleftrightarrow w_2(w'v) \in L \qquad \text{weil } w_1 \equiv_L w_2 \\ &\Longleftrightarrow (w_2 w')v \in L\,. \end{aligned}$$

Kongruenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation, die mit allen gerade interessierenden Funktionen oder/und Operationen verträglich ist, nennt man auch eine *Kongruenzrelation*.

Überblick

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (1)

- L eine beliebige formale Sprache $L \subseteq A^*$.
- für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $f_x : A^* \to A^* : w \mapsto wx$ mit $\equiv_L$ verträglich.
- Wir schreiben nun einmal hin:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

- Ist das in Ordnung?
- Huch? Wo kann ein Problem sein?

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (1)

- L eine beliebige formale Sprache $L \subseteq A^*$.
- für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $f_x : A^* \to A^* : w \mapsto wx$ mit $\equiv_L$ verträglich.
- Wir schreiben nun einmal hin:

$$f'_x : A^*_{/\equiv_L} \to A^*_{/\equiv_L} : [w] \mapsto [wx]$$

- Ist das in Ordnung?
- Huch? Wo kann ein Problem sein?

Eine Abbildung für Nerode-Äquivalenzklassen (2)

- Versuch Abbildung zu definieren, die Äquivalenzklasse auf Äquivalenzklasse abbildet.
- Aber $[w]$ enthält ja im allgemeinen nicht nur w, sondern noch viele andere Wörter.
- Zum Beispiel hatten wir uns weiter vorne überlegt, dass im Fall $L = \langle \mathtt{a*b*} \rangle$ die Wörter ε, $\mathtt{a}$, $\mathtt{a}^2$, $\mathtt{a}^3$, usw. alle in einer Äquivalenzklasse liegen.
- also $[\varepsilon] = [\mathtt{a}] = [\mathtt{a}^2] = \cdots$.
- damit $[w] \mapsto [wx]$ wirklich eine Definition ist,
  die für jedes Argument eindeutig einen Funktionswert festlegt,
- sollte bitte auch $[\varepsilon x] = [\mathtt{a}x] = [\mathtt{a}^2 x] = \cdots$ sein.
- Aha: Das sichert gerade die Verträglichkeitsbedingung zu!

$$
\begin{aligned}
& w_1 \equiv_L w_2 \Longrightarrow w_1 x \equiv_L w_2 x \\
\text{also} \quad & w_1 \equiv_L w_2 \Longrightarrow f_x(w_1) \equiv_L f_x(w_2) \\
\text{also} \quad & [w_1] = [w_2] \Longrightarrow [f_x(w_1)] = [f_x(w_2)]
\end{aligned}
$$

Induzierte Abbildungen für Äquivalenzklassen

Allgemein gilt: Wenn $\equiv$ mit $f : M \to M$ verträglich ist, dann ist

$$f' : M_{/\equiv} \to M_{/\equiv} : f'([x]) = [f(x)]$$

wohldefiniert.

Ein letzter Blick auf die Nerode-Äquivalenzen (1)

- sei L eine formale Sprache, für die $\equiv_L$ nur endlich viele Äquivalenzklassen hat.
- schreibe abkürzend $Z = A^*_{/\equiv_L}$
- definiere

$$f : Z \times A \to Z : f([w], x) = [wx]$$

- Diese Abbildung ist wohldefiniert.
- Die Erinnerung an endliche Akzeptoren ist kein Zufall.
- Legt man nämlich noch fest
  - $z_0 = [\varepsilon]$ und
  - $F = \{[w] \mid w \in L\}$
- dann hat man einen endlichen Akzeptor, der genau L erkennt.
- Überlegen Sie sich das!

Ein letzter Blick auf die Nerode-Äquivalenzen (2)

Ohne Beweis nehme man bitte noch zu Kenntnis:

- Für jede reguläre Sprache hat $\equiv_L$ nur endlich viele Äquivalenzklassen.
- Der gerade konstruierte Akzeptor ist unter allen, die L erkennen, einer mit minimaler Zustandszahl.
- Dieser endliche Akzeptor ist bis auf Isomorphie (also Umbenenung von Zuständen) sogar eindeutig.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Kongruenzrelationen: Verträglichkeit
- induzierte Abbildungen/Operationen für Äquivalenzklassen
- Nerode-Äquivalenzen liefern minimale Akzeptoren

Das sollten Sie üben:

- mit Äquivalenzklassen rechnen

Überblick

Überblick

Definition antisymmetrischer Relationen

- Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:
$$xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y$$
- Beispiel Mengeninklusion:
  - zum Beispiel $M = 2^{M'}$ Potenzmenge einer Menge M'
  - Relation
$$\begin{aligned} R &= \{(A, B) \mid A \subseteq M' \wedge B \subseteq M' \wedge A \subseteq B\} \\ &= \{(A, B) \mid A \in M \wedge B \in M \wedge A \subseteq B\} \\ &\subseteq M \times M \end{aligned}$$
  - R ist antisymmetrisch:
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$$

Definition Halbordnung

- Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv

  ist.
- Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man auch M eine *halbgeordnete Menge*.

- Beispiel Mengeninklusion:
  - $A \subseteq A$
  - $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$
  - $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
- Beachte: es gibt im allgemeinen unvergleichbare Elemente
  - z. B. $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$

Definition Halbordnung

- Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv

  ist.
- Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man auch M eine *halbgeordnete Menge*.

- Beispiel Mengeninklusion:
  - $A \subseteq A$
  - $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$
  - $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
- Beachte: es gibt im allgemeinen unvergleichbare Elemente
  - z. B. $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$

Definition Halbordnung

- Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv

  ist.
- Wenn R Halbordnung auf Menge M ist, nennt man auch M eine *halbgeordnete Menge*.

- Beispiel Mengeninklusion:
  - $A \subseteq A$
  - $A \subseteq B \land B \subseteq A \Longrightarrow A = B$
  - $A \subseteq B \land B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
- Beachte: es gibt im allgemeinen unvergleichbare Elemente
  - z. B. $\{1, 2, 3\} \not\subseteq \{3, 4, 5\}$ und $\{3, 4, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$

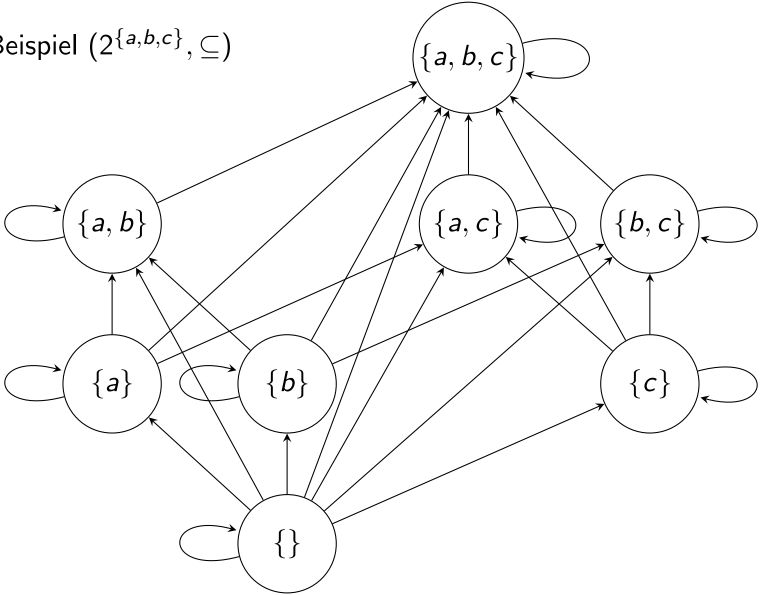
Beispiel: Halbordnung auf Wörtern

- $M = A^*$
- Relation $\sqsubseteq_p$ auf A^*:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

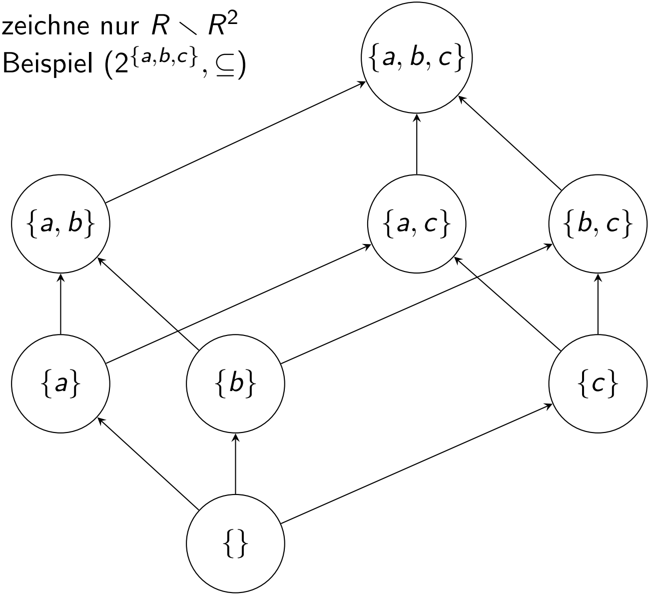
- zum Beispiel im Duden:
  - „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
- aber: $\sqsubseteq_p$ ist echte *Halb*ordnung
  - keine Beziehung zwischen `Klausur` und `Übung`

- Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$



Darstellung von Halbordnungen (2): Hassediagramm

- zeichne nur $R \setminus R^2$
- Beispiel $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$



Überblick

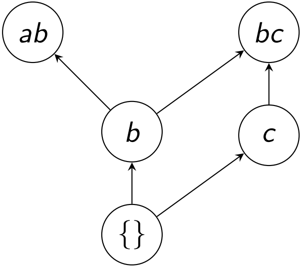
Minimale und maximale Elemente

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in T$ heißt *minimales Element von T*,
  wenn es kein $y \in T$ gibt mit $y \sqsubseteq x$ und $y \neq x$.
- $x \in T$ heißt *maximales Element von T*,
  wenn es kein $y \in T$ gibt mit $x \sqsubseteq y$ und $x \neq y$.

Minimale und maximale Elemente: Beispiele

- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$:



- zwei maximale Elemente: ab und bc
- ein minimales Element: $\{\}$

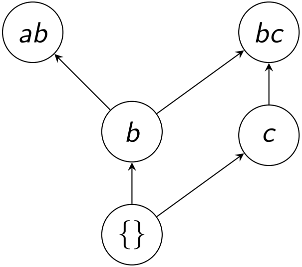
Kleinste und größte Elemente

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in T$ heißt *kleinstes Element von T*,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.
- $x \in T$ heißt *größtes Element von T*,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.

Kleinte und größte Elemente: Beispiele

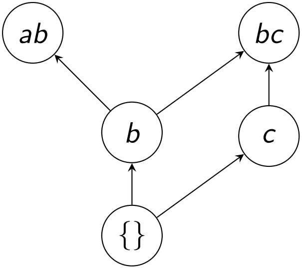
- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$:



- kein größtes Element
- kleinstes Element: $\{\}$

- Achtung: Eine unendliche Teilmenge kann z. B. genau ein minimales Element haben und trotzdem kein kleinstes!

- Teilmenge von $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$:



- kein größtes Element
- kleinstes Element: $\{\}$

- Achtung: Eine unendliche Teilmenge kann z. B. genau ein minimales Element haben und trotzdem kein kleinstes!

Kleinste und größte Elemente

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- T kann nicht zwei verschiedene kleinste (bzw. größte) Elemente haben.
- Beweis für Eindeutigkeit des kleinsten Elements
  - seien x_1 und x_2 kleinste Elemente,
  - dann ist $x_1 \sqsubseteq x_2$, weil x_1 kleinstes Element,
  - und es ist $x_2 \sqsubseteq x_1$, weil x_2 kleinstes Element,
  - also wegen Antisymmetrie: $x_1 = x_2$
- Beweis für Eindeutigkeit des größten Elements analog

Untere und obere Schranken

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in M$ heißt *obere Schranke von T*,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.
- $x \in M$ heißt *untere Schranke von T*,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

- Beachte: untere und obere Schranken von T dürfen außerhalb von T liegen.

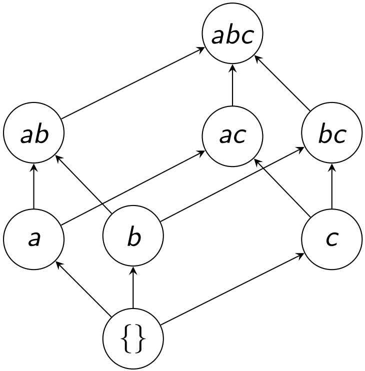
Untere und obere Schranken

sei $(M, \sqsubseteq)$ halbgeordnet und $T \subseteq M$.

- $x \in M$ heißt *obere Schranke von T*,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $y \sqsubseteq x$.
- $x \in M$ heißt *untere Schranke von T*,
  wenn für alle $y \in T$ gilt: $x \sqsubseteq y$.

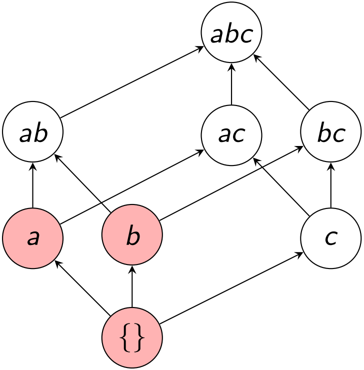
- Beachte: untere und obere Schranken von T dürfen außerhalb von T liegen.

Untere und obere Schranken: Beispiele

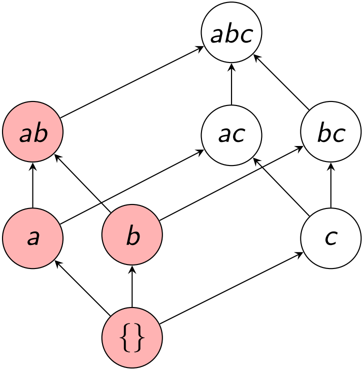


- Standardbeispiel:
- $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}\}$: obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$.
- $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$: die gleichen oberen Schranken.

Untere und obere Schranken: Beispiele

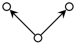


- Standardbeispiel:
- $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}\}$: obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$.
- $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$: die gleichen oberen Schranken.

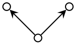


- Standardbeispiel:
- $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}\}$: obere Schranken $\{a, b\}$ und $\{a, b, c\}$.
- $T = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$: die gleichen oberen Schranken.

Untere und obere Schranken müssen nicht existieren

- Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen
- In  besitzt z. B. die Gesamtmenge keine obere Schranke.
- In $(\mathbb{N}_0, \leq)$ besitzt die die Gesamtmenge keine obere Schranke.

Untere und obere Schranken müssen nicht existieren

- Teilmenge muss keine obere Schranke besitzen
- In  besitzt z. B. die Gesamtmenge keine obere Schranke.
- In $(\mathbb{N}_0, \leq)$ besitzt die die Gesamtmenge keine obere Schranke.

Supremum und Infimum

- Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das *Supremum von T*
  - Schreibweisen $\bigsqcup T$ oder $\sup(T)$
- Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das *Infimum von T*.
  - brauchen wir hier nicht
- Supremum (bzw. Infimum) einer Teilmenge müssen nicht existieren
  - weil gar keine oberen Schranken vorhanden oder
  - weil von den oberen Schranken keine die kleinste ist

Supremum und Infimum

- Besitzt die Menge aller oberen Schranken einer Teilmenge T ein kleinstes Element, so heißt dies das *Supremum von T*
  - Schreibweisen $\bigsqcup T$ oder $\sup(T)$
- Besitzt die Menge aller unteren Schranken einer Teilmenge T ein größtes Element, so heißt dies das *Infimum von T*.
  - brauchen wir hier nicht

- Supremum (bzw. Infimum) einer Teilmenge müssen nicht existieren
  - weil gar keine oberen Schranken vorhanden oder
  - weil von den oberen Schranken keine die kleinste ist

Supremum und Infimum: Beispiele

- Bei Halbordnungen $(2^{M'}, \subseteq)$ existieren Suprema immer:
  - Supremum von $T \subseteq 2^{M'}$ ist die Vereinigung aller Teilmengen von M, die in T liegen
- Beispiel für das Beispiel:
  - $M' = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
  - also ist $M = 2^{M'}$ die Menge aller formalen Sprachen $L \subseteq M'$
  - für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $L_i = \{\mathtt{a}^j\mathtt{b}^j \mid j \leq i\}$
    - $L_0 = \{\varepsilon\}$
    - $L_1 = \{\varepsilon, \mathtt{ab}\}$
    - $L_2 = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}\}$
    - ...
  - sei $T = \{L_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
  - dann ist $\bigsqcup T = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = \{\mathtt{a}^j\mathtt{b}^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$

Überblick

- *aufsteigende Kette*
  - abzählbar unendliche Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ von Elementen
  - mit der Eigenschaft: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq x_{i+1}$.
  - kurz

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \cdots$$

- Beispiel: $(2^{\{a,b\}^*}, \subseteq)$

$$\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aaabbb}\} \ldots$$

Aufsteigende Ketten

- *aufsteigende Kette*
  - abzählbar unendliche Folge $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ von Elementen
  - mit der Eigenschaft: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq x_{i+1}$.
  - kurz

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \sqsubseteq \cdots$$

- Beispiel: $(2^{\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*}, \subseteq)$

$$\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}\} \subseteq \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{aabb}, \mathtt{aaabbb}\} \dots$$

- Eine Halbordnung heißt *vollständig*, wenn
  - sie ein kleinstes Element $\bot$ hat und
  - jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ ein Supremum $\bigsqcup_i x_i$ besitzt.
- Beispiele: $(2^{M'}, \subseteq)$
  - kleinstes Element $\{\}$
  - Supremum von $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ ist $\bigcup T_i$.

Vollständige Halbordnungen

- Eine Halbordnung heißt *vollständig*, wenn
  - sie ein kleinstes Element $\bot$ hat und
  - jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ ein Supremum $\bigsqcup_i x_i$ besitzt.
- Beispiele: $(2^{M'}, \subseteq)$
  - kleinstes Element $\{\}$
  - Supremum von $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ ist $\bigcup T_i$.

Vollständige Halbordnungen: weitere (Nicht-)Beispiele

- $(\mathbb{N}_0, \leq)$ ist *keine* vollständige Halbordung
  - unbeschränkt wachsende aufsteigende Ketten wie z. B. $0 \leq 1 \leq 2 \leq \cdots$ besitzen kein Supremum in $\mathbb{N}_0$.
- Ergänze weiteres Element u „über" allen Zahlen:
  - $N = \mathbb{N}_0 \cup \{u\}$ und
  - $x \sqsubseteq y \iff \big(x, y \in \mathbb{N}_0 \land x \leq y\big) \lor (y = u)$
  - also sozusagen

$$0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq u$$

- später noch nützlich
  - $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ und
  - $x \sqsubseteq y \iff \big(x, y \in \mathbb{N}_0 \land x \leq y\big)$

$$\lor \big(x \in \mathbb{N}_0 \cup \{u_1\} \land y = u_1\big) \lor y = u_2$$

  - also sozusagen

$$0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq u_1 \sqsubseteq u_2$$

Überblick

Monotone Abbildungen

- $\sqsubseteq$ eine Halbordnung auf einer Menge M.
- Abbildung $f : M \to M$ *monoton*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \Longrightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

- Beispiel: $(\mathbb{N}_0, \leq)$ mit Abbildung $f(x) = x + 1$
  - $x \leq y \Longrightarrow x + 1 \leq y + 1$
- Nichtbeispiel: $(\mathbb{N}_0, \leq)$ mit Abbildung $f(x) = x \bmod 5$
  - $3 \leq 10$, aber $f(3) = 3 \not\leq 0 = f(10)$.

Monotone Abbildungen

- $\sqsubseteq$ eine Halbordnung auf einer Menge M.
- Abbildung $f : M \to M$ *monoton*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \Longrightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

- Beispiel: $(\mathbb{N}_0, \leq)$ mit Abbildung $f(x) = x + 1$
  - $x \leq y \Longrightarrow x + 1 \leq y + 1$
- Nichtbeispiel: $(\mathbb{N}_0, \leq)$ mit Abbildung $f(x) = x \bmod 5$
  - $3 \leq 10$, aber $f(3) = 3 \not\leq 0 = f(10)$.

- $(D, \sqsubseteq)$ sei vollständige Halbordnung
- Abbildung $f : D \to D$ heißt *stetig*,
  wenn für jede aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ gilt:

$$f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$$

- $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit $\sqsubseteq$ wie eben
- Abbildung $f : N' \to N'$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_1 & \text{falls } x = u_1 \\ u_2 & \text{falls } x = u_2 \end{cases}$$

  ist stetig.
- warum?

Stetige Abbildungen: Beispiele (2)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$:

1. Die Kette wird konstant.
   - also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = n'$.
   - also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
     - Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
     - Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \cdots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
2. Die Kette wird nicht konstant.
   - dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
   - gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
   - Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

Stetige Abbildungen: Beispiele (2)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$:

1. Die Kette wird konstant.
   - also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = n'$.
   - also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
     - Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
     - Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \cdots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
2. Die Kette wird nicht konstant.
   - dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
   - gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
   - Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

Stetige Abbildungen: Beispiele (2)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$:

1. Die Kette wird konstant.
   - also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = n'$.
   - also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
     - Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
     - Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \cdots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
2. Die Kette wird nicht konstant.
   - dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
   - gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
   - Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1,2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$:

1. Die Kette wird konstant.
   - also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = n'$.
   - also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
     - Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
     - Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \cdots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
2. Die Kette wird nicht konstant.
   - dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
   - gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
   - Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

Stetige Abbildungen: Beispiele (2)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1,2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$:

1. Die Kette wird konstant.
   - also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = n'$.
   - also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
     - Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
     - Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \cdots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
2. Die Kette wird nicht konstant.
   - dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
   - gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
   - Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

Stetige Abbildungen: Beispiele (2)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_j & \text{falls } x = u_j \qquad (\text{für } j = 1, 2) \end{cases}$$

Zwei Fälle für aufsteigende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$:

1. Die Kette wird konstant.
   - also $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = n'$.
   - also jedenfalls $\bigsqcup_i x_i = n'$; zwei Unterfälle:
     - Wenn $n' = u_j$ ist, dann ist wegen $f(u_j) = u_j$ ist auch $\bigsqcup_i f(x_i) = u_j$, also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
     - Wenn $n' \in \mathbb{N}_0$ ist, dann ist $f(\bigsqcup_i x_i) = f(n') = n' + 1$. Andererseits ist die Kette der Funktionswerte $f(x_0) \sqsubseteq f(x_1) \sqsubseteq f(x_2) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2}) = \cdots = f(n') = n' + 1$. Also ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.
2. Die Kette wird nicht konstant.
   - dann alle $x_i \in \mathbb{N}_0$ und die Kette wächst unbeschränkt
   - gleiches gilt für Kette der Funktionswerte.
   - Also haben beide Ketten Supremum u_1 und wegen $f(u_1) = u_1$ ist $f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$.

Stetige Abbildungen: Beispiele (3)

- $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit $\sqsubseteq$ wie eben
- Abbildung $g : N' \to N'$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_1 & \text{falls } x = u_2 \\ u_2 & \text{falls } x = u_2 \end{cases}$$

  ist *nicht* stetig
- Unterschied zu f: $g(u_1) = u_2$
- unbeschränkt wachsende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ natürlicher Zahlen hat Supremem u_1
- also $g(\bigsqcup_i x_i) = u_2$,
- aber Kette der Funktionswerte $g(x_0) \sqsubseteq g(x_1) \sqsubseteq g(x_2) \sqsubseteq \cdots$ hat Supremem $\bigsqcup_i g(x_i) = u_1 \neq g(\bigsqcup_i x_i)$.

Stetige Abbildungen: Beispiele (3)

- $N' = \mathbb{N}_0 \cup \{u_1, u_2\}$ mit $\sqsubseteq$ wie eben
- Abbildung $g : N' \to N'$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}_0 \\ u_1 & \text{falls } x = u_2 \\ u_2 & \text{falls } x = u_2 \end{cases}$$

  ist *nicht* stetig
- Unterschied zu f: $g(u_1) = u_2$
- unbeschränkt wachsende Kette $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$ natürlicher Zahlen hat Supremem u_1
- also $g(\bigsqcup_i x_i) = u_2$,
- aber Kette der Funktionswerte $g(x_0) \sqsubseteq g(x_1) \sqsubseteq g(x_2) \sqsubseteq \cdots$ hat Supremem $\bigsqcup_i g(x_i) = u_1 \neq g(\bigsqcup_i x_i)$.

Satz

- Es sei $f : D \to D$ eine monotone und stetige Abbildung auf einer vollständigen Halbordnung $(D, \sqsubseteq)$ mit kleinstem Element $\bot$.
- Elemente $x_i \in D$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x_0 &= \bot \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 : x_{i+1} &= f(x_i) \end{aligned}$$

- Dann gilt:
  1. Die x_i bilden eine Kette: $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots$.
  2. Das Supremum $x_f = \bigsqcup_i x_i$ dieser Kette ist Fixpunkt von f, also $f(x_f) = x_f$.
  3. x_f ist der kleinste Fixpunkt von f: Wenn $f(y_f) = y_f$ ist, dann ist $x_f \sqsubseteq y_f$.

Fixpunktsatz: Beweis

1. Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$
   vollständige Induktion:
   - $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \bot$ das kleinste Element
   - wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.
2. Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$
   - Wegen Stetigkeit von f ist $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$.
   - Folge der x_{i+1} unterscheidet sich von Folge der x_i nur durch fehlendes erstes Element $\bot$.
   - Also haben beide Folgen das gleiche Supremum x_f (klar?) also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
   - also ist $f(x_f) = x_f$
3. Behauptung: x_f ist kleinster Fixpunkt. Sei $f(y_f) = y_f$.
   - Induktion lehrt: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq y_f$.
   - also ist y_f eine obere Schranke der Kette,
   - also ist gilt für die kleinste obere Schranke: $x_f = \bigsqcup_i x_i \sqsubseteq y_f$.

Fixpunktsatz: Beweis

1. Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$
   vollständige Induktion:
   - $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \perp$ das kleinste Element
   - wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.
2. Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$
   - Wegen Stetigkeit von f ist $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$.
   - Folge der x_{i+1} unterscheidet sich von Folge der x_i nur durch fehlendes erstes Element $\perp$.
   - Also haben beide Folgen das gleiche Supremum x_f (klar?) also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
   - also ist $f(x_f) = x_f$
3. Behauptung: x_f ist kleinster Fixpunkt. Sei $f(y_f) = y_f$.
   - Induktion lehrt: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq y_f$.
   - also ist y_f eine obere Schranke der Kette,
   - also ist gilt für die kleinste obere Schranke: $x_f = \bigsqcup_i x_i \sqsubseteq y_f$.

Fixpunktsatz: Beweis

1. Behauptung: $\forall i \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$
   vollständige Induktion:
   - $x_0 \sqsubseteq x_1$, weil $x_0 = \bot$ das kleinste Element
   - wenn $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$, dann wegen Monotonie von f auch $f(x_i) \sqsubseteq f(x_{i+1})$, also $x_{i+1} \sqsubseteq x_{i+2}$.
2. Behauptung: $x_f = \bigsqcup_i x_i$ ist Fixpunkt, also $f(x_f) = x_f$
   - Wegen Stetigkeit von f ist $f(x_f) = f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i) = \bigsqcup_i x_{i+1}$.
   - Folge der x_{i+1} unterscheidet sich von Folge der x_i nur durch fehlendes erstes Element $\bot$.
   - Also haben beide Folgen das gleiche Supremum x_f (klar?) also $\bigsqcup_i x_{i+1} = \bigsqcup_i x_i = x_f$
   - also ist $f(x_f) = x_f$
3. Behauptung: x_f ist kleinster Fixpunkt. Sei $f(y_f) = y_f$.
   - Induktion lehrt: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : x_i \sqsubseteq y_f$.
   - also ist y_f eine obere Schranke der Kette,
   - also ist gilt für die kleinste obere Schranke: $x_f = \bigsqcup_i x_i \sqsubseteq y_f$.

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (1)

- Terminalzeichenalphabet $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- kontextfreie Grammatik $G = (\{X\}, T, X, P)$
- Produktionenmenge $P = \{X \to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \varepsilon\}$.

- Halbordnung $D = 2^{T^*}$ der formalen Sprachen mit $\subseteq$
- Kleinstes Element der Halbordnung ist $\emptyset$.
- Die Halbordnung ist vollständig.

- $f : D \to D$ die Abbildung mit $f(L) = \{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ohne (den leichten) Beweis: f ist stetig.
- Fixpunktsatz: Das Supremum der Kette

$$\{\} \subseteq f(\{\}) \subseteq f(f(\{\})) \subseteq f(f(f(\{\}))) \subseteq \cdots$$

ist der kleinste Fixpunkt von f

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (1)

- Terminalzeichenalphabet $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- kontextfreie Grammatik $G = (\{X\}, T, X, P)$
- Produktionenmenge $P = \{X \to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \varepsilon\}$.

- Halbordnung $D = 2^{T^*}$ der formalen Sprachen mit $\subseteq$
- Kleinstes Element der Halbordnung ist $\emptyset$.
- Die Halbordnung ist vollständig.

- $f : D \to D$ die Abbildung mit $f(L) = \{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ohne (den leichten) Beweis: f ist stetig.
- Fixpunktsatz: Das Supremum der Kette

$$\{\} \subseteq f(\{\}) \subseteq f(f(\{\})) \subseteq f(f(f(\{\}))) \subseteq \cdots$$

ist der kleinste Fixpunkt von f

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (1)

- Terminalzeichenalphabet $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- kontextfreie Grammatik $G = (\{X\}, T, X, P)$
- Produktionenmenge $P = \{X \to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \varepsilon\}$.

- Halbordnung $D = 2^{T^*}$ der formalen Sprachen mit $\subseteq$
- Kleinstes Element der Halbordnung ist $\emptyset$.
- Die Halbordnung ist vollständig.

- $f : D \to D$ die Abbildung mit $f(L) = \{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\}$.
- ohne (den leichten) Beweis: f ist stetig.
- Fixpunktsatz: Das Supremum der Kette

$$\{\} \subseteq f(\{\}) \subseteq f(f(\{\})) \subseteq f(f(f(\{\}))) \subseteq \cdots$$

ist der kleinste Fixpunkt von f

Fixpunktsatz: Andeutung eines Anwendungsbeispiels (2)

- $f : D \to D$ die Abbildung mit $f(L) = \{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\}$.
- $L_0 = \{\}$
  $L_1 = f(L_0) = \{\mathtt{a}\}L_0\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
  $L_2 = f(L_1) = \{\mathtt{a}\}L_1\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\} = \{\mathtt{ab}, \varepsilon\}$
  $L_3 = f(L_2) = \{\mathtt{a}\}L_2\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\} = \{\mathtt{aabb}, \mathtt{ab}, \varepsilon\}$
  $\vdots$
- Supremum ist $\bigcup_i L_i = \{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$
- Das ist auch genau die Sprache, die die Grammatik erzeugt.
- L ist Fixpunkt von f, also

$$L = \{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\}$$

- L ist die kleinste Lösung der Gleichung $X = \{\mathtt{a}\}X\{\mathtt{b}\} \cup \{\varepsilon\}$.
- Zusammenhang mit Produktionen: klar, oder?

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Halbordnungen sind
  - reflexiv,
  - antisymmetrisch und
  - transitiv
- vollständige Halbordnungen: jede aufsteigende Kette hat Supremum
- stetige Abbildungen: $f(\bigsqcup x_i) = \bigsqcup f(x_i)$
- Fixpunktsatz

Das sollten Sie üben:

- Nachweis der Eigenschaften von (vollständigen) Halbordnungen
- Beweise einfacher Aussagen
- an ungewohnte Eigenschaften von Halbordnungen gewöhnen (Unendlichkeit lässt grüßen) (siehe auch gleich)

Überblick

Totale Ordnungen: Definition

- Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine *Ordnung* oder genauer *totale Ordnung*, wenn
  - R Halbordnung ist
  - und gilt:

$$\forall x, y \in M : xRy \lor yRx$$

- Es gibt keine unvergleichbaren Elemente.
- Beispiele:
  - $(\mathbb{N}_0, \leq)$
  - $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ mit
    $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \lor (x_1 = x_2 \land y_1 \leq y_2)$
  - $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $\sqsubseteq_1$ „wie im Wörterbuch“

- Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine *Ordnung* oder genauer *totale Ordnung*, wenn
  - R Halbordnung ist
  - und gilt:
$$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$$
- Es gibt keine unvergleichbaren Elemente.
- Beispiele:
  - $(\mathbb{N}_0, \leq)$
  - $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ mit
    $(x_1, x_2) \sqsubseteq (y_1, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$
  - $(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, \sqsubseteq_1)$ mit $\sqsubseteq_1$ „wie im Wörterbuch“

- Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

  ist *keine* totale Ordnung
  - z. B. sind $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ unvergleichbar
- Wie kann man aus $\sqsubseteq_p$ eine totale Ordnung machen?

- jedenfalls totale Ordnung $\sqsubseteq_A$ auf A nötig, z. B. $\mathtt{a} \sqsubseteq_A \mathtt{b}$
- und dann?
- mehrere Möglichkeiten, z. B. wie im Wörterbuch, oder ...

Totale Ordnungen auf A^*

- Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

  ist *keine* totale Ordnung
  - z. B. sind $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ unvergleichbar
- Wie kann man aus $\sqsubseteq_p$ eine totale Ordnung machen?

- jedenfalls totale Ordnung $\sqsubseteq_A$ auf A nötig, z. B. $\mathtt{a} \sqsubseteq_A \mathtt{b}$
- und dann?
- mehrere Möglichkeiten, z. B. wie im Wörterbuch, oder ...

Totale Ordnungen auf A^*

- Relation $\sqsubseteq_p$ auf $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$:

$$w_1 \sqsubseteq_p w_2 \iff \exists u \in A^* : w_1 u = w_2$$

  ist *keine* totale Ordnung
  - z. B. sind $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ unvergleichbar
- Wie kann man aus $\sqsubseteq_p$ eine totale Ordnung machen?

- jedenfalls totale Ordnung $\sqsubseteq_A$ auf A nötig, z. B. $\mathtt{a} \sqsubseteq_A \mathtt{b}$
- und dann?
- mehrere Möglichkeiten, z. B. wie im Wörterbuch, oder ...

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\, u_1$ und $w_2 = v\, u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\, x\, u_1'$ und $w_2 = v\, y\, u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`" kommt vor „`Klausur`"
  - „`Klausur`" kommt vor „`Übung`"
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`" kommt vor „`Klausur`"
  - „`Klausur`" kommt vor „`Übung`"
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`" kommt vor „`Klausur`"
  - „`Klausur`" kommt vor „`Übung`"
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\, u_1$ und $w_2 = v\, u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\, x\, u_1'$ und $w_2 = v\, y\, u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`" kommt vor „`Klausur`"
  - „`Klausur`" kommt vor „`Übung`"
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`" kommt vor „`Klausur`"
  - „`Klausur`" kommt vor „`Übung`"
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
  - „`Klausur`“ kommt vor „`Übung`“
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\, u_1$ und $w_2 = v\, u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\, x\, u_1'$ und $w_2 = v\, y\, u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
  - „`Klausur`“ kommt vor „`Übung`“
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`" kommt vor „`Klausur`"
  - „`Klausur`" kommt vor „`Übung`"
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`" kommt vor „`Klausur`"
  - „`Klausur`" kommt vor „`Übung`"

  (im Duden, aber nicht im Studium!)

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
  - „`Klausur`“ kommt vor „`Übung`“
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_1$ (Wörterbuch)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
  - „`Klausur`“ kommt vor „Übung“ (im Duden, aber nicht im Studium!)

- Seien $w_1, w_2 \in A^*$
- Sei $v \in A^*$ das maximal lange Präfix, so dass es $u_1, u_2 \in A^*$ gibt mit $w_1 = v\,u_1$ und $w_2 = v\,u_2$.
  - v ist immer eindeutig bestimmt.
- Fallunterscheidung:
  1. Falls $v = w_1$ ist, gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  2. Falls $v = w_2$ ist, gilt $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  3. Falls $w_1 \neq v \neq w_2$, gibt es $x, y \in A$ und $u_1', u_2' \in A^*$ mit
     - $x \neq y$ und
     - $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$

     Dann gilt $w_1 \sqsubseteq_1 w_2 \iff x \sqsubseteq_A y$.
- Beispiele
  - „`Klaus`“ kommt vor „`Klausur`“
  - „`Klausur`“ kommt vor „`Übung`“
    (im Duden, aber nicht im Studium!)

- Wenn man nur endlich viele Wörter ordnen muss (Wörterbuch), dann „harmlos“; Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathtt{a} \sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{ab} \sqsubseteq_1 \mathtt{aba} \sqsubseteq_1 \mathtt{abbb} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{b} \sqsubseteq_1 \mathtt{baaaaaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{baab} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{bbbbb} \end{aligned}$$

- wenn man A^* ordnet, nicht ganz so harmlos; unvollständig
  - $\varepsilon \sqsubseteq_1 \mathtt{a} \sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \sqsubseteq_1 \cdots$ besitzt kein Supremum,
  - denn
    - jedes Wort, das mindestens ein $\mathtt{b}$ enthält, ist obere Schranke,
    - zu jeder oberen Schranke w ist $\mathtt{a}^{|w|}\mathtt{b}$ ist eine echt kleine obere Schranke (weil w ein $\mathtt{b}$ enthält)
  - $\mathtt{b} \sqsupseteq_1 \mathtt{ab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaaab} \sqsupseteq_1 \cdots$ hat kein Infimum

- Wenn man nur endlich viele Wörter ordnen muss (Wörterbuch), dann „harmlos“; Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathtt{a} \sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{ab} \sqsubseteq_1 \mathtt{aba} \sqsubseteq_1 \mathtt{abbb} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{b} \sqsubseteq_1 \mathtt{baaaaaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{baab} \\ \sqsubseteq_1 \mathtt{bbbbb} \end{aligned}$$

- wenn man A^* ordnet, nicht ganz so harmlos; unvollständig
  - $\varepsilon \sqsubseteq_1 \mathtt{a} \sqsubseteq_1 \mathtt{aa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_1 \mathtt{aaaa} \sqsubseteq_1 \cdots$ besitzt kein Supremum,
  - denn
    - jedes Wort, das mindestens ein $\mathtt{b}$ enthält, ist obere Schranke,
    - zu jeder oberen Schranke w ist $\mathtt{a}^{|w|}\mathtt{b}$ ist eine echt kleine obere Schranke (weil w ein $\mathtt{b}$ enthält)
  - $\mathtt{b} \sqsupseteq_1 \mathtt{ab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaab} \sqsupseteq_1 \mathtt{aaaab} \sqsupseteq_1 \cdots$ hat kein Infimum

Lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_2$

- andere lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_2$ auf A^*:
  $w_1 \sqsubseteq_2 w_2$ gilt genau dann, wenn
  - entweder $|w_1| < |w_2|$
  - oder $|w_1| = |w_2|$ und $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ gilt.
- Diese Ordnung beginnt also z. B. im Fall $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ bei naheliegender Ordnung $\sqsubseteq_A$ so:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\sqsubseteq_2 \mathtt{a} \sqsubseteq_2 \mathtt{b} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aa} \sqsubseteq_2 \mathtt{ab} \sqsubseteq_2 \mathtt{ba} \sqsubseteq_2 \mathtt{bb} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aaa} \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 \mathtt{bbb} \\
&\sqsubseteq_2 \mathtt{aaaa} \quad \sqsubseteq_2 \cdots \sqsubseteq_2 \mathtt{bbbb} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

$\sqsubseteq_1$ und $\sqsubseteq_2$ sind totale Ordnungen

- $\sqsubseteq_1$ auf Menge A^n aller Wörter fester Länge n ist totale Ordnung
  - Halbordnung: nachprüfen ...
  - für verschiedene Wörter gleicher Länge niemals $w_1 = v$ oder $w_2 = v$.
  - da $\sqsubseteq_A$ als total vorausgesetzt wird, ist bei $w_1 = v\,x\,u_1'$ und $w_2 = v\,y\,u_2'$ stets $x \sqsubseteq_A y$ oder $y \sqsubseteq_A x$
  - also stets $w_1 \sqsubseteq_1 w_2$ oder $w_2 \sqsubseteq_1 w_1$.
- also $\sqsubseteq_2$ auf A^* totale Ordnung
- $\sqsubseteq_1$ für verschieden lange Wörter: nachprüfen ...

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- totale Ordnungen sind
  - Halbordnungen
  - ohne unvergleichbare Elemente
- Anwendung an diversen Stellen in der Informatik (z. B. Semantik, Testmuster, ...)

Das sollten Sie üben:

- Nachweis der Eigenschaften von totalen Ordnungen
- Beweise einfacher Aussagen
- an ungewohnte Eigenschaften von Ordnungen gewöhnen (Unendlichkeit lässt grüßen)