Karlsruhe Institute of Technology

Grundbegriffe der Informatik - Tutorium 21

Christian Jülg

Wintersemester 2012/13

30. Oktober 2012

http://gbi-tutor.blogspot.com

Übersicht

Übersicht

Guten Morgen...

Aufgabenblatt 1

Aufgabenblatt 2
- Prädikatenlogik
- Definitionen
- Mengenlehre

Vollständige Induktion

Abschluss

Zum Warmwerden...

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_+$...

1. ... enthält die Null.
2. ... enthält nur nichtnegative ganze Zahlen.
3. ... ist eine Teilmenge der reelen Zahlen.

Für zwei Funktionen f und g gilt...

1. ... ihre Konkatenation ist kommutativ.
2. ... der Werte- und Zielbereich sind stets gleich.
3. ... $f : x \mapsto x + 1$ und $g : x \mapsto x + 1$ können verschiedene Funktionen sein.

Zum Warmwerden...

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_+$...

1. ... enthält die Null.
2. ... enthält nur nichtnegative ganze Zahlen.
3. ... ist eine Teilmenge der reelen Zahlen.

Für zwei Funktionen f und g gilt...

1. ... ihre Konkatenation ist kommutativ.
2. ... der Werte- und Zielbereich sind stets gleich.
3. ... $f : x \mapsto x + 1$ und $g : x \mapsto x + 1$ können verschiedene Funktionen sein.

Zum Warmwerden...

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_+$...

1. ... enthält die Null.
2. ... enthält nur nichtnegative ganze Zahlen.
3. ... ist eine Teilmenge der reelen Zahlen.

Für zwei Funktionen f und g gilt...

1. ... ihre Konkatenation ist kommutativ.
2. ... der Werte- und Zielbereich sind stets gleich.
3. ... $f : x \mapsto x + 1$ und $g : x \mapsto x + 1$ können verschiedene Funktionen sein.

Übersicht

Guten Morgen...

Aufgabenblatt 1

Aufgabenblatt 2

- Prädikatenlogik
- Definitionen
- Mengenlehre

Vollständige Induktion

Abschluss

Ein Blick zurück

etwas Statistik

- 19 Abgaben, weiter so!
- durchschnittliche Punktzahl: $13,3/19$ Punkten

häufige Fehler...

1.2: Beispiele sind keine Beweise (anders als Gegenbeispiele)

Ein Blick zurück

etwas Statistik

- 19 Abgaben, weiter so!
- durchschnittliche Punktzahl: $13,3/19$ Punkten

häufige Fehler...

1.2: Beispiele sind keine Beweise (anders als Gegenbeispiele)
äquivalente Ausdrücke sind nicht $=$, besser $\equiv$

Ein Blick zurück

etwas Statistik

- 19 Abgaben, weiter so!
- durchschnittliche Punktzahl: $13,3/19$ Punkten

häufige Fehler...

1.2: Beispiele sind keine Beweise (anders als Gegenbeispiele)
äquivalente Ausdrücke sind nicht $=$, besser $\equiv$
Behauptung markieren mit "`z.z.:`" oder "$\overset{!}{=}$"

Ein Blick zurück

etwas Statistik

- 19 Abgaben, weiter so!
- durchschnittliche Punktzahl: $13,3/19$ Punkten

häufige Fehler...

1.2: Beispiele sind keine Beweise (anders als Gegenbeispiele)
äquivalente Ausdrücke sind nicht $=$, besser $\equiv$
Behauptung markieren mit "`z.z.:`" oder "$\stackrel{!}{=}$"
Elemente, Paare und Mengen richtig notieren

Ein Blick zurück

etwas Statistik

- 19 Abgaben, weiter so!
- durchschnittliche Punktzahl: $13,3/19$ Punkten

häufige Fehler...

1.2: Beispiele sind keine Beweise (anders als Gegenbeispiele)
äquivalente Ausdrücke sind nicht $=$, besser $\equiv$
Behauptung markieren mit "`z.z.:`" oder "$\stackrel{!}{=}$"
Elemente, Paare und Mengen richtig notieren
richtige Notation von Mengen / Aussagen / Funktionen vermeidet Fehler

Ein Blick zurück

etwas Statistik

- 19 Abgaben, weiter so!
- durchschnittliche Punktzahl: $13,3/19$ Punkten

häufige Fehler...

1.2: Beispiele sind keine Beweise (anders als Gegenbeispiele)

äquivalente Ausdrücke sind nicht $=$, besser $\equiv$

Behauptung markieren mit "`z.z.:`" oder "$\stackrel{!}{=}$"

Elemente, Paare und Mengen richtig notieren

richtige Notation von Mengen / Aussagen / Funktionen vermeidet Fehler

Aussagenlogische Definition von injektiv/surjektiv klausurrelevant

Übersicht

Guten Morgen...

Aufgabenblatt 1

Aufgabenblatt 2

- Prädikatenlogik
- Definitionen
- Mengenlehre

Vollständige Induktion

Abschluss

Aufgabenblatt 2

Blatt 2

- Abgabe: 02.11.2012 um 12:30 Uhr im Untergeschoss des Infobaus
- Punkte: maximal 20

Themen

- Prädikatenlogik
- Vollständige Induktion

Quantoren

$\exists$ und $\forall$

Eine nützliche Notation, um zu unterscheiden, ob wir Aussagen für alle Elemente oder nur für eines machen sind Quantoren. Die gebräuchlichsten sind:

- $\exists$ Existenzquantor (lies: „Es existiert“)
- $\forall$ Allquantor (lies: „Für alle“)

Bei den Quantoren kommt es auf die Reihenfolge an! Sie dürfen niemals hinter eine Formel stehen!

Quantoren

Karlsruhe Institute of Technology

$\exists$ und $\forall$

Eine nützliche Notation, um zu unterscheiden, ob wir Aussagen für alle Elemente oder nur für eines machen sind Quantoren. Die gebräuchlichsten sind:

- $\exists$ Existenzquantor (lies: „Es existiert“)
- $\forall$ Allquantor (lies: „Für alle“)

Bei den Quantoren kommt es auf die Reihenfolge an! Sie dürfen niemals hinter eine Formel stehen!

Einige Fragen...

- Welche der beiden Formeln ist gemeint?
  $\forall y \exists x : y > x$ oder $\exists y \forall x : y > x$
- Gilt $(\exists x A(x)) \land (\exists x B(x)) \equiv \exists x : A(x) \land B(x)$?

Quantoren

Karlsruhe Institute of Technology

$\exists$ und $\forall$

Eine nützliche Notation, um zu unterscheiden, ob wir Aussagen für alle Elemente oder nur für eines machen sind Quantoren. Die gebräuchlichsten sind:

- $\exists$ Existenzquantor (lies: „Es existiert“)
- $\forall$ Allquantor (lies: „Für alle“)

Bei den Quantoren kommt es auf die Reihenfolge an! Sie dürfen niemals hinter eine Formel stehen!

Einige Fragen...

- Welche der beiden Formeln ist gemeint?
  $\forall y \exists x : y > x$
- Gilt $(\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x)) \equiv \exists x : A(x) \wedge B(x)$? Nein!

Aus der Vorlesung...

Alphabet

Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.

Aus der Vorlesung...

Alphabet

Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.

Wort

- Ein **Wort** w über einem Alphabet A ist eine **Folge von Zeichen** aus A.

Aus der Vorlesung...

Alphabet

Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.

Wort

- Ein **Wort** w über einem Alphabet A ist eine **Folge von Zeichen** aus A.
- formal: surjektive Abbildung $w : \mathbb{G}_n \to A$ wobei
  $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$

Aus der Vorlesung...

Menge aller Wörter

Die Menge der Wörter der Länge **n** wird bezeichnet mit A^n. Die Menge aller Wörter A^* ist definiert als $A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$.

Aus der Vorlesung...

Menge aller Wörter

Die Menge der Wörter der Länge **n** wird bezeichnet mit A^n. Die Menge aller Wörter A^* ist definiert als $A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$.

Ihr seid dran...

- Gegeben: Alphabet $A = \{a, b\}$ Gesucht: A^*

Aus der Vorlesung...

Menge aller Wörter

Die Menge der Wörter der Länge **n** wird bezeichnet mit A^n. Die Menge aller Wörter A^* ist definiert als $A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$.

Ihr seid dran...

- Gegeben: Alphabet $A = \{a, b\}$ Gesucht: A^*
- $A^* = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, ...\}$
- Beachtet: $\forall$ Alphabete A ist das **leere Wort** $\epsilon \in A^*$.

Konkatenation

Karlsruhe Institute of Technology

A^*

- Gegeben: Alphabet $A = \{a, b\}$, Gesucht: A^*
- $A^* = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, ...\}$

w^n

- Gegeben: Wort $w = ab$, Gesucht: w^n

Konkatenation

Karlsruhe Institute of Technology

A^*

- Gegeben: Alphabet $A = \{a, b\}$, Gesucht: A^*
- $A^* = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, ...\}$

w^n

- Gegeben: Wort $w = ab$, Gesucht: w^n
- $w^n = ab \cdot (w^{n-1})$

Mengenlehre

Karlsruhe Institute of Technology

Indexmengen

- Es sei gegeben $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$

Mengenlehre

Indexmengen

- Es sei gegeben $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$
- Was ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$?

Mengenlehre

Indexmengen

- Es sei gegeben $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$
- Was ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$? Es ist $\mathbb{N}_0$.

Mengenlehre

Indexmengen

- Es sei gegeben $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$
- Was ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$? Es ist $\mathbb{N}_0$.
- Wie beweist man das?

Mengenlehre

Indexmengen

- Es sei gegeben $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$
- Was ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$? Es ist $\mathbb{N}_0$.
- Wie beweist man das?

Mengengleichheit

- Wie beweist man allgemein, das zwei Mengen M_1 und M_2 gleich sind?

Mengenlehre

Karlsruhe Institute of Technology

Indexmengen

- Es sei gegeben $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$
- Was ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$? Es ist $\mathbb{N}_0$.
- Wie beweist man das?

Mengengleichheit

- Wie beweist man allgemein, das zwei Mengen M_1 und M_2 gleich sind?
- Man zeigt, dass
  1. $M_1 \subseteq M_2$

Mengenlehre

Indexmengen

- Es sei gegeben $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$
- Was ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$? Es ist $\mathbb{N}_0$.
- Wie beweist man das?

Mengengleichheit

- Wie beweist man allgemein, das zwei Mengen M_1 und M_2 gleich sind?
- Man zeigt, dass
  1. $M_1 \subseteq M_2$
  2. $M_2 \subseteq M_1$

Mengenlehre

Mengeninklusion

- Wie beweist man $M_1 \subseteq M_2$?

Mengenlehre

Karlsruhe Institute of Technology

Mengeninklusion

- Wie beweist man $M_1 \subseteq M_2$?
- Man zeigt, dass $\forall x \in M_1 : x \in M_2$

Mengenlehre

Mengeninklusion

- Wie beweist man $M_1 \subseteq M_2$?
- Man zeigt, dass $\forall x \in M_1 : x \in M_2$

Ihr seid dran...

- Es sei $\mathbb{G}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \leq i < n\}$.
  Zeigt nun:

$$\mathbb{N}_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$$

Mengenlehre

$\subseteq$

Mengenlehre

$\subseteq$

Wähle ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt nach Definition von $\mathbb{G}_{n+1}$: $n \in \mathbb{G}_{n+1}$ und somit auch $n \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$.

Mengenlehre

$\subseteq$

Wähle ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt nach Definition von $\mathbb{G}_{n+1}$: $n \in \mathbb{G}_{n+1}$ und somit auch $n \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$.

$\supseteq$

Mengenlehre

$\subseteq$

Wähle ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt nach Definition von $\mathbb{G}_{n+1}$: $n \in \mathbb{G}_{n+1}$ und somit auch $n \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{G}_i$.

$\supseteq$

Laut Definition enhält $\mathbb{G}_i$ nur Elemente aus $\mathbb{N}_0$. Somit $\mathbb{G}_i \subseteq \mathbb{N}_0$.

Übersicht

Vollständige Induktion tut nicht weh...

Ihr seid dran...

- Wer kennt das Beweisverfahren der vollständige Induktion ?
- Wer kennt das Verfahren nicht?

Vollständige Induktion tut nicht weh...

Ihr seid dran...

- Ihr kennt das Beweisverfahren der vollständige Induktion ...
  Erklärt den „Unwissenden“ das Verfahren...
- Ihr kennt das Verfahren nicht...
  Hört gespannt zu...

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Die Theorie

Der Beweis erfolgt in folgenden Schritten:

1. Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = n_0$ gezeigt

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Die Theorie

Der Beweis erfolgt in folgenden Schritten:

1. Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = n_0$ gezeigt
2. Induktionsvorraussetzung/-annahme: Die Aussage sei für **ein** beliebiges n wahr.

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Die Theorie

Der Beweis erfolgt in folgenden Schritten:

1. Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = n_0$ gezeigt
2. Induktionsvorraussetzung/-annahme: Die Aussage sei für **ein** beliebiges n wahr.
3. Induktionsschluss/-schritt: Aus dem Schluss von n auf $n+1$ (in der Regel mit Hilfe der IV) folgt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n > n_0$ gilt.

Ein Beispiel:

Beweise durch vollständige Induktion: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Ein Beispiel:

Beweise durch vollständige Induktion $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

IA $n=1$: $1=1^2=1$ ist erfüllt

IV $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

IS

$$\begin{aligned}
&1+3+5+...+(2(n+1)-1)\\
&\quad = 1+3+5+...+(2n+1)\\
&\quad = 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)\\
&\quad \overset{IV}{=} n^2+2n+1\\
&\quad = (n+1)^2
\end{aligned}$$

Ein etwas komplizierteres Beispiel...

Ihr seid dran...

Es sei $q \in \mathbb{N}_0$ und $q \geq 2$: $s_0 = 1$

$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \; s_{k+1} = s_k + q^{k+1}$

Beweise durch vollständige Induktion: $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \; s_k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$

Ein etwas komplizierteres Beispiel...

Lösung

IA: $k = 0$: $\frac{q^{0+1}-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1 = s_0$

IV: $s_k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$ gelte für ein n

IS:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + q^{k+1} && \text{nach Definiton} \\ &= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= \frac{q^{k+1}-1+(q-1)q^{k+1}}{q-1} \\ &= \frac{q^{k+1}-1+q*q^{k+1}-q^{k+1}}{q-1} \\ &= \frac{q^{k+2}-1}{q-1} \end{aligned}$$

Übersicht

Guten Morgen...

Aufgabenblatt 1

Aufgabenblatt 2

- Prädikatenlogik
- Definitionen
- Mengenlehre

Vollständige Induktion

Abschluss

Zum Schluss...

Karlsruhe Institute of Technology

Was ihr nun wissen solltet!

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie beweise ich Mengengleichheit?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie beweise ich Mengengleichheit?
- Was ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie beweise ich Mengengleichheit?
- Was ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion?
- Was kann ich alles tolles damit anstellen?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie beweise ich Mengengleichheit?
- Was ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion?
- Was kann ich alles tolles damit anstellen?
- Wie kann ich meinen Tutor bei der Korrektur meines Übungsblattes positiv beeinflussen?

Zum Schluss...

Was ihr nun wissen solltet!

- Wie beweise ich Mengengleichheit?
- Was ist das Beweisverfahren der vollständigen Induktion?
- Was kann ich alles tolles damit anstellen?
- Wie kann ich meinen Tutor bei der Korrektur meines Übungsblattes positiv beeinflussen?

Ihr wisst was nicht?
Stellt **jetzt** Fragen!

Ende


KREATIVE LEMMINGE.
MUUHH! MUUHH!
SCHLACHT HOF
WWW.NICHTLUSTIG.DE