Grundbegriffe der Informatik
Musterlösungen zu Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1 (1 Punkte)

Wieviele Jahre alt war Alan Mathison Turing, als er starb?

41 Jahre.

Aufgabe 12.2 (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

a) Erklären Sie, wie eine Turingmaschine vorgehen könnte, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ genau dann im Zustand e hält, falls $w \in L$ gilt.

Ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ liegt genau dann in L, wenn w entweder das leere Wort ist oder es von der Form $\mathtt{a}w'\mathtt{b}$ ist, wobei wiederum $w' \in L$ gelten muss.
Die Turingmaschine könnte also wie folgt vorgehen:
Sie überprüft, ob das erste Zeichen ein $\mathtt{a}$ und das letzte Zeichen des Wortes ein $\mathtt{b}$ ist, löscht diese Zeichen und wiederholt dieses Überprüfen und Löschen, bis die Überprüfung ein negatives Ergebnis liefert oder das leere Wort erreicht wird. (Die Löschung des ersten und letzten Zeichens kann geschickterweise während des Überprüfens vorgenommen werden.)

b) Geben Sie eine Turingmaschine $T = (Z, z_0, X, f, g, m)$ **mit höchstens 12 Zuständen** an, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ genau dann im Zustand e hält, falls $w \in L(A)$ gilt.
(Hinweis: Es gibt eine solche Turingmaschine mit 4 Zuständen; bei Turingmaschinen mit mehr als 12 Zuständen wird es keine Punkte mehr geben.)

Der Anfangszustand sei z_a.

	z_a	z'_b	z_b	z'_a	e
$\mathtt{a}$	$(z'_b, \square, 1)$	$(z'_b, \mathtt{a}, 1)$	$-$	$(z'_a, \mathtt{a}, -1)$	$-$
$\mathtt{b}$	$-$	$(z'_b, \mathtt{b}, 1)$	$(z'_a, \square, -1$	$(z'_a, \mathtt{b}, -1)$	$-$
$\square$	$(e, \square, 0)$	$(z_b, \square, -1)$	$-$	$(z_a, \square, 1)$	$-$

Hinweis zum Hinweis: Auf vier Zustände kommt man, wenn man den Endzustand e nicht mitzählt.

c) Erklären Sie für jeden Zustand Ihrer Turingmaschine, was die Turingmaschine, wenn sie sich in diesem Zustand befindet, tun wird, bis sich der Zustand ändert.

z_a: Die Turingmaschine überprüft, ob das erste Zeichen des Wortes (das Zeichen, über dem sich der Kopf befindet) ein $\mathtt{a}$ ist; falls ja, geht sie in den Zustand z'_b über, ansonsten hält sie an.
z'_b: Der Kopf der Turingmaschine läuft an das Ende des Wortes, wechselt dann in Zustand z_b und geht auf das letzte Zeichen des Wortes.
z_b: Die Turingmaschine überprüft, ob das letzte Zeichen des Wortes (das Zeichen, über dem sich der Kopf befindet) ein $\mathtt{b}$ ist; falls ja, geht sie in den Zustand z'_a über, ansonsten hält sie an.
z'_a: Der Kopf der Turingmaschine läuft an den Anfang des Wortes, wechselt dann

in Zustand z_a und geht auf das erste Zeichen des Wortes.
e: Die Turingmaschine macht gar nichts mehr.

Aufgabe 12.3 (3+1+2+2 Punkte)

Die Turingmaschine T mit Anfangszustand z_0 sei gegeben durch folgende Tabelle:

	z_0	m_0^0	m_0^1	m_1^0	m_1^1
0	$(z_0, 0, 1)$	$(m_0^0, 0, -1)$	$(m_0^0, 1, -1)$	$(m_0^0, 1, -1)$	$(m_0^1, 0, -1)$
1	$(z_0, 1, 1)$	$(m_1^0, 1, -1)$	$(m_1^1, 0, -1)$	$(m_1^1, 0, -1)$	$(m_1^1, 1, -1)$
$\square$	$(m_0^0, \square, -1)$	$(e, 0, 0)$	$(e, 1, 0)$	$(e, 1, 0)$	$(m_0^1, 0, -1)$

Im Zustand e macht die Turingmaschine gar nichts mehr.

a) Geben Sie alle Konfigurationen an, die bei der Berechnung der Turingmaschine bei Eingabe des Wortes 1101 durchlaufen werden.

			z_0				
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	$\square$
				z_0			
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	$\square$
					z_0		
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	$\square$
						z_0	
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	$\square$
							z_0
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	$\square$
						m_0^0	
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	$\square$
					m_1^0		
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	0	1	$\square$
				m_0^0			
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	$\square$
			m_1^0				
$\square$	$\square$	$\square$	1	1	1	1	$\square$
		m_1^1					
$\square$	$\square$	$\square$	0	1	1	1	$\square$
	m_0^1						
$\square$	$\square$	0	0	1	1	1	$\square$
	e						
$\square$	1	0	0	1	1	1	$\square$

b) T stehe auf Symbol $x \in \{0, 1\}$ und sei im Zustand m_j^i. Geben Sie einen einfachen algorithmischen Ausdruck an für die Zahl an, die T als nächstes auf das Band schreiben wird.

Die Zahl, die auf das Band geschrieben wird, heiße k. Dann gilt:
$k = i + j + x \mod 2$.

c) Welche Information ist in i beziehungsweise j gespeichert, wenn sich T im Zustand m_j^i befindet?

Falls sich die Turingmaschine im Schritt zuvor im Zustand m_k^l über dem Zeichen x befand, gilt:
Wenn sich die Turingmaschine im Zustand m_j^i befindet, ist j das Zeichen, das ursprünglich rechts der aktuellen Position der Turingmaschine stand (also x), und i ist der "Übertrag" bei der Additon $k + l + x$ im Binärsystem. (Mathematisch präzise: $i = k + l + x \texttt{ div } 2$.)

d) Sei $t(w)$ das Wort, das bei Eingabe von w auf dem Band steht, wenn sich T im Zustand e befindet. Geben Sie eine Formel für $Num_2(t(w))$ an.

$Num_2(t(w)) = 3 \cdot Num_2(w)$

Aufgabe 12.4 (3+2 Punkte)

Die Turingmaschine T mit Anfangszustand S sei gegeben durch folgende Tabellen:

	S'	S	$S_\mathtt{a}$	$S_\mathtt{b}$	$S'_\mathtt{a}$	$S'_\mathtt{b}$
a	$(S', \mathtt{a}, -1)$	$(S_\mathtt{a}, \square, 1)$	$(S_\mathtt{a}, \mathtt{a}, 1)$	$(S_\mathtt{b}, \mathtt{a}, 1)$	$(S', \square, -1)$	$(X', \square, -1)$
b	$(S', \mathtt{b}, -1)$	$(S_\mathtt{b}, \square, 1)$	$(S_\mathtt{a}, \mathtt{b}, 1)$	$(S_\mathtt{b}, \mathtt{b}, 1)$	$(X', \square, -1)$	$(S', \square, -1)$
$\square$	$(S, \square, 1)$	–	$(S'_\mathtt{a}, \square, -1)$	$(S'_\mathtt{b}, \square, -1)$	–	–

	X'	X	$X_\mathtt{a}$	$X_\mathtt{b}$	$X'_\mathtt{a}$	$X'_\mathtt{b}$
a	$(X', \mathtt{a}, -1)$	$(X_\mathtt{a}, \square, 1)$	$(X_\mathtt{a}, \mathtt{a}, 1)$	$(X_\mathtt{b}, \mathtt{a}, 1)$	$(X', \square, -1)$	–
b	$(X', \mathtt{b}, -1)$	$(X_\mathtt{b}, \square, 1)$	$(X_\mathtt{a}, \mathtt{b}, 1)$	$(X_\mathtt{b}, \mathtt{b}, 1)$	–	$(X', \square, -1)$
$\square$	$(X, \square, 1)$	$(e, 0, 0)$	$(X'_\mathtt{a}, \square, -1)$	$(X'_\mathtt{b}, \square, -1)$	–	–

Im Zustand e macht die Turingmaschine gar nichts mehr.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatig $G = (N, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$ an, so dass gilt: $\forall w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* : w \in L(G) \iff T$ endet bei Eingabe von w im Zustand e.

$G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, X\}, T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $P = \{S \rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{b}X\mathtt{a}, X \rightarrow \mathtt{a}X\mathtt{a} \mid \mathtt{b}X\mathtt{b} \mid \epsilon\}$

b) Beschreiben Sie in Worten, welche Wörter von $L(G)$ erzeugt werden.

Ein Wort w über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ liegt genau dann in $L(G)$, wenn w gerade Länge hat und sich von dem Wort w', das man durch Spiegeln von w erhält, an genau zwei Stellen unterscheidet.