Autovalores e autovetores

Para alguns vetores especiais, ao aplicar um operador A, o vetor resultante corresponde ao próprio vetor inicial multiplicado por um fator λ. A estes vetores dá-se o nome *autovetores*. Os fatores multiplicadores, por sua vez, são denominados *autovalores*.

$$Ax = \lambda x$$

Para resolver o problema acima, deve-se reescrever a equação.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Desconsiderando a solução trivial (vetor nulo), conclui-se que a matriz $(A - \lambda I)$ deve ser singular, ou seja,

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Diagonalização de matrizes

Suponha que A tenha n autovetores independentes, então

$$AS = S\Lambda,$$

sendo Λ a matriz diagonal com os autovalores e S a matriz dos autovetores. Conclui-se que

$$\Lambda = S^{-1}AS \quad ou \quad A = S\Lambda S^{-1}$$

OBS.: as equações acima pressupõem autovetores independentes (S não singular, inversível).

Potências

Um problema que pode aparecer em alguns casos é a multiplicação de um mesmo operador diversas vezes (em processo iterativo, por exemplo). Nesses casos os autovalores podem ser um indicativo dos crescimento dos valores.

Multiplicando os dois lados da equação $Ax = \lambda x$, temos:

$$A^2 x = \lambda^2 x$$

Para múltiplos autovalores e autovetores:

$$A^2 = S\Lambda(S^{-1}S)\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$$

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

Nota-se que A tende a zero com $k \to \infty$ se todos $|\lambda_i| < 1$

Exemplo 1 - Fibonacci

Quão rápido a sequência 0,1,1,2,3,5,8,13,... cresce?

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

Vamos reescrever a equação acima em um sistema de primeira ordem:

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k$$

sendo

$$u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}$$

e a matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
using LinearAlgebra
```

```
A = 2×2 Matrix{Int64}:
 1  1
 1  0
```

```
A = [1 1; 1 0]
```

```
Float64[
    1:  -0.618034
    2:  1.61803
]
```

```
eigvals(A)
```

O crescimento é dominado pelo autovalor maior do que 1. O outro tende a zero com as multiplicações sucessivas.

Equações diferenciais

Vamos considerar o sistema de primeira ordem abaixo.

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -u_1 + 2u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_1 - 2u_2 \end{cases}$$

Sendo que as condições de contorno são $u_1(0) = 1$ e $u_2(0) = 0$.

Interpretação da equação diferencial?

Podemos escrever o sistema da seguinte forma:

$$\frac{du}{dt} = Mu$$

sendo

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

com $u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

```
M = 2×2 Matrix{Int64}:
 -1   2
  1  -2
```

```
M = [-1 2; 1 -2]
```

```
[-3.0, 0.0]
```

```
eigvals(M)
```

```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.707107  0.894427
  0.707107  0.447214
```

```
eigvecs(M)
```

Neste caso a solução é do tipo:

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

Veja que os autovalores calculanos são normalizados. Podemos reescrevê-los como:

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$u(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Das condições de contorno, temos que, para $t = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{3} \quad e \quad c_2 = \frac{1}{3}$$

Solução final:

$$u(t) = -\frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pergunta: Qual o equilíbrio do sistema (no regime permanente)?

No regime permanente o sistema atinge o equilíbrio

$$u = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Pense em como a estabilidade está relacionada à parte real dos autovalores λ_i

A estabilidade está relacionada à parte real dos autovalores λ_i. Para que haja estabilidade as partes reais de todos os autovalores devem ser menores ou iguais a zero.