Resolução do exercício proposto na 5ª aula

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} u_1' = -1,2u_1 + 2,0u_2 \\ u_2' = 1,0u_1 - 2,2u_2 \end{cases}$$

sendo que as condições iniciais são $u_1(0) = 1,0$ e $u_2(0) = 0$. Responda:

a) O que acontece no regime permanente? ($t \to \infty$)

b) Admitindo que o sistema descreve os níveis u_1 e u_2 de duas caixas d'água, forneça uma interpretação possível para a resposta anterior.

OBS.: tanto u_1 quanto u_2 são funções do tempo. A grafia $u(t)$ apenas foi omitida das equações.

Resolução

O sistema pode ser escrito no formato matricial, conforme indicado abaixo:

$$u' = Au$$

sendo $A = \begin{bmatrix} -1,2 & 2,0 \\ 1,0 & -2,2 \end{bmatrix}$.

Vamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz A.

```
A = 2×2 Matrix{Float64}:
     -1.2   1.0
      2.0  -2.2
```

```julia
# Definindo A
A = [[-1.2,2.0] [1.0,-2.2]]
```

```julia
using LinearAlgebra
```

```
λ =   Float64[
          1:  -3.2
          2:  -0.2
    ]
```

```julia
# Autovalores de A
λ = eigvals(A)
```

```
ϕ = 2×2 Matrix{Float64}:
     -0.447214  0.707107
      0.894427  0.707107
```

```julia
# Autovetores de A
ϕ = eigvecs(A)
```

A solução do sistema é do tipo

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \phi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \phi_2$$

,

sendo c_1 e c_2 constantes encontradas a partir das condições iniciais $u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja

$$u(0) = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$$

ou

$$\Phi c = u(0)$$

sendo Φ a matriz dos autovetores e c o vetor com as constantes.

Vamos encontrar os valores das constantes.

```
u₀ =  Int64[
        1:  1
        2:  0
     ]
```

```
# Condições iniciais
u₀ = [1,0]
```

```
c =  Float64[
        1:  -0.745356
        2:  0.942809
     ]
```

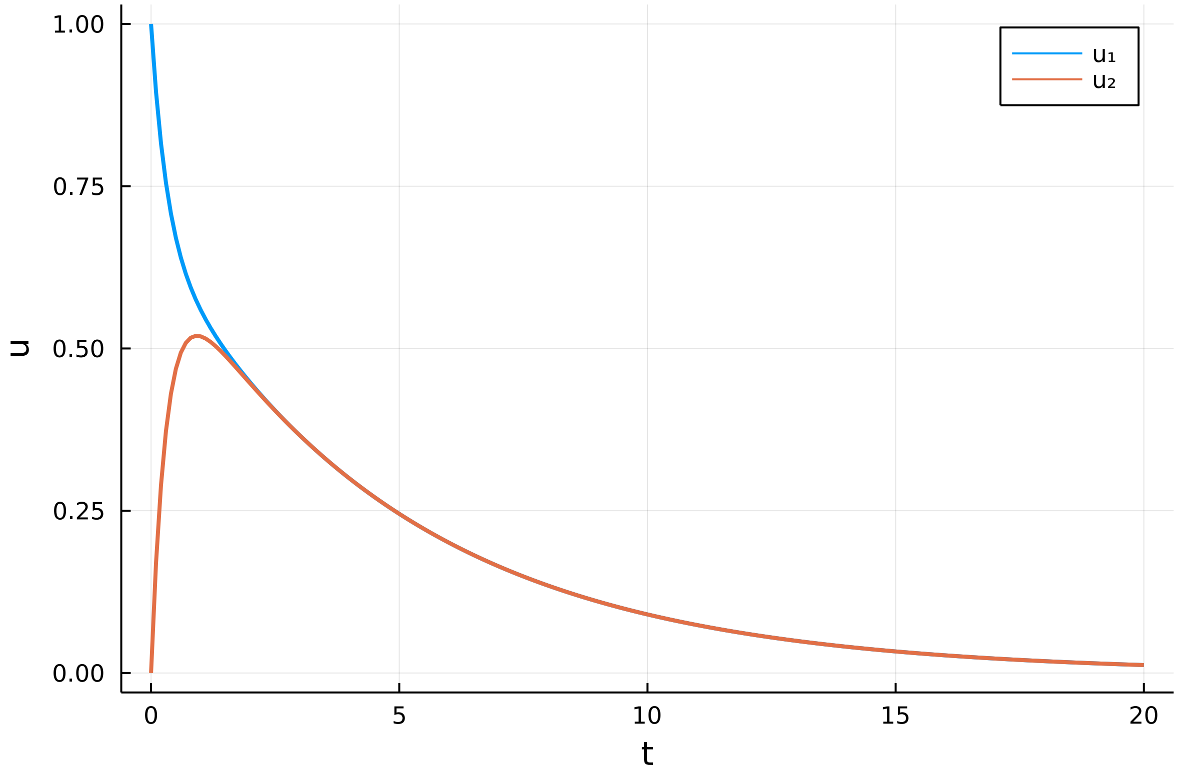
```
# Resolvendo para as constantes
c = ϕ \ u₀
```

Finalmente, podemos escrever a função final para a determinação do nível dos reservatórios. E plotar os resultados.

```
u (generic function with 1 method)
```

```
# Função do nível dos reservatórios
u(t) = c[1] * exp(λ[1]*t) * ϕ[:,1] + c[2] * exp(λ[2]*t) * ϕ[:,2]
```

```
using Plots
```




```
begin
    tt = 0:0.1:20
    u₁ = [u(i)[1] for i in tt]
    u₂ = [u(i)[2] for i in tt]
    plot(tt, u₁, label="u₁", xlabel="t", ylabel="u", linewidth=2)
    plot!(tt, u₂, label="u₂", linewidth=2)
end
```

Note que, conforme esperado pela equação diferencial (semelhante à vista em sala de aula), no início há uma redução no nível da caixa 2 e um aumento no nível da caixa 1. Contudo, diferentemente do problema visto em sala, após certo tempo o nível das duas caixas começa a cair. Diferentementemente do problema visto em sala, em que um dos valores de λ era zero, **neste caso temos os dois autovalores negativos!**

Sendo assim, quando t tende ao infinito, o nível das duas caixas tende a zero.

Uma possível explicação para isso é a existência de vazamentos no sistema hidráulico. Isso pode ser visto inclusive analisando os coeficientes do sistema apresentado no enunciado.