

Impact de la fréquence de capitalisation sur le taux d'intérêt effectif et la valorisation des investissements

Gaëtan Bouget

27 avril 2025

1 Problème

Dans un contexte financier caractérisé par une diversification accrue des produits d'investissement, la variation des fréquences de capitalisation complique l'évaluation objective des rendements réels. Ainsi, deux actifs affichant un même taux nominal annuel peuvent générer des rendements distincts en raison des différentes fréquences de capitalisation, amplifiant ainsi l'effet des intérêts composés.

2 Objectif

L'objectif consiste à fournir une compréhension approfondie des mécanismes influençant le rendement réel des investissements et à établir une base solide pour la comparaison de diverses stratégies financières.

3 Méthode

L'approche adoptée pour atteindre l'objectif se décline en quatre étapes :

1. calcul du capital final pour les actifs à intérêts simples ;
2. prise en compte des intérêts composés dans l'analyse comparative ;
3. démonstration de la supériorité des intérêts composés par développement binomial ;
4. établissement de la formule du taux effectif annuel (TEA).

Afin de faciliter les applications numériques avant de généraliser, l'analyse se concentre sur l'investissement d'un capital initial de $C_0 = 100\,000$ €, réparti sur quatre actifs décrits dans le tableau 1.

Actif	Type d'intérêt	Fréquence de capitalisation	Taux périodique
A_q^s	Intérêts simples	Quotidienne	$r_{\text{quotidien}} = \frac{5}{365}\%$
A_a^s	Intérêts simples	Annuelle	$r_{\text{annuel}} = 5\%$
A_q^c	Intérêts composés	Quotidienne	$r_{\text{quotidien}} = \frac{5}{365}\%$
A_a^c	Intérêts composés	Annuelle	$r_{\text{annuel}} = 5\%$

TABLE 1 – Scénarios d'investissement avec un capital initial $C_0 = 100\,000$ €.

Chaque étape est constituée d'une série de questions pour progresser pas à pas.

3.1 Hypothèses de travail

Les conditions suivantes sont posées :

- Les intérêts sont calculés selon la fréquence de capitalisation définie pour chaque actif. Aucune capitalisation intermédiaire ni prorata temporis ne s'applique en cas de retrait avant la fin de la période de capitalisation.
- Une année est considérée comme comprenant 365 jours.
- Aucun frais ni taxe n'est appliqué.

- Aucun versement ou retrait supplémentaire n'est effectué durant la période d'investissement (seul le capital initial C_0 est investi).
- Le taux de rendement est constant dans le temps.

3.2 Questions

Étape 1 : calcul du capital final pour les actifs à intérêts simples

💡 Les intérêts simples sont calculés uniquement sur le capital initial, et le montant des intérêts gagnés chaque période est constant. La formule suivante reflète bien cette caractéristique, car le produit $r \times t$ est simplement ajouté au capital initial :

$$C^{\text{simple}}(t) = C_0 (1 + r \times t)$$

où :

- $C^{\text{simple}}(t)$ est le capital accumulé après une période t .
- C_0 est le capital initial investi.
- r est le taux d'intérêt nominal (exprimé sous forme décimale, par exemple, 5% devient $\frac{5}{100}$ soit 0,05).
- t est le temps écoulé, qui peut être exprimé en années ou en jours, selon la fréquence de capitalisation.

Q1.1 Soit un capital initial $C_0 = 100\,000$ € investi, calculer le capital final de l'actif A_q^s après une durée t égale à :

- $t = 1$ jour
- $t = 30$ jours
- $t = 1$ an
- $t = 30$ ans

Q1.2 Soit un capital initial $C_0 = 100\,000$ € investi, calculer le capital final de l'actif A_a^s après une durée t égale à :

- $t = 1$ jour
- $t = 30$ jours
- $t = 1$ an
- $t = 30$ ans

Q1.3 Remplir le tableau suivant en calculant les capitaux finaux pour les deux types d'actifs à différents horizons de temps :

Actif	1 jour	30 jours	1 an	30 ans
A_q^s				
A_a^s				

TABLE 2 – Capital final pour différentes durées d'investissement avec intérêts simples et un capital initial de $C_0 = 100\,000$ €.

Q1.4 Soit un capital initial C_0 et un taux nominal annuel r_a ou un taux nominal quotidien r_q , exprimer les fonctions permettant de calculer le capital final en fonction de la durée d'investissement t (exprimée en jours) pour chacun des deux actifs à intérêts simples :

- $C_q^s(t)$ pour un actif à capitalisation quotidienne avec un taux périodique r_q ;
- $C_a^s(t)$ pour un actif à capitalisation annuelle avec un taux r_a .

Q1.5 Tracer les courbes $C_q^s(t)$ et $C_a^s(t)$ pour $C_0 \in \{50\,000, 100\,000, 200\,000\}$ €. La durée t (en abscisse) varie de 0 à 40 ans. Commenter l'évolution du capital dans le temps en fonction des différents montants de capital initial.

- Q1.6** Pour les trois valeurs de capital initial $C_0 \in \{50\,000, 100\,000, 200\,000\}$ €, déterminer graphiquement le capital final obtenu pour des durées d'investissement t égales à 10 ans, 20 ans et 30 ans. Quel est le coefficient multiplicateur du capital initial en fonction de ces durées ?
- Q1.7** Exprimer le coefficient multiplicateur $k(t)$ du capital initial en fonction de la durée d'investissement t et du taux périodique r . Vérifier la cohérence des résultats avec ceux obtenus graphiquement en appliquant la formule pour un taux de 5 % et des durées de 10, 20 et 30 ans.
- Q1.8** Représenter graphiquement le coefficient multiplicateur du capital initial en fonction de la durée d'investissement pour le taux périodique $r_q = 5\%$. Relever graphiquement le coefficient multiplicateur pour les durées d'investissement à 10 ans, 20 ans, 30 ans, 50 ans et 100 ans.
- Q1.9** Utiliser les valeurs du coefficient multiplicateur obtenues graphiquement pour déterminer le capital final après 10 ans, 20 ans, 30 ans, 50 ans et 100 ans, en partant d'un capital initial de 72 924,56 € et avec un taux périodique de 5%.
- Q1.10** Calculer le coefficient directeur des droites C_q^s avec $C_0 \in \{50\,000, 100\,000, 200\,000\}$ € en utilisant les points d'abscisse suivants :
- $x_a = 0$ et $x_b = 1$;
 - $x_a = 32$ et $x_b = 1\,946$;
 - $x_a = 364\,999$ et $x_b = 365\,000$.

💡 La pente d'une droite, également appelée coefficient directeur, mesure la variation verticale (changement en y) par rapport à la variation horizontale (changement en x). Elle indique la direction et l'inclinaison de la droite.

Formule générale :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C(x_b) - C(x_a)}{x_b - x_a},$$

où m est le coefficient directeur, $C(x_a)$ et $C(x_b)$ sont les valeurs de la fonction C aux points x_a et x_b , respectivement.

- Q1.11** Interpréter financièrement le coefficient directeur.
- Q1.12** À partir de la formule générale du coefficient directeur, expliquer comment la pente m de la fonction $C_q^s(t) = C_0 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times t\right)$ peut être simplifiée pour obtenir l'expression $m = C_0 \times r$, où r est le rendement périodique quotidien, soit $r = \frac{0,05}{365}$.
- Q1.13** Quelle est la signification du caractère constant du coefficient directeur dans le cas des intérêts simples ?
- Q1.14** Donner quelques exemples de situations de la vie courante où les intérêts sont simples.
- Q1.15** Quel est l'effet de l'inflation et de la déflation sur le rendement ? Prendre en compte l'objectif de la Banque Centrale Européenne (BCE).
- Q1.16** Que se passe-t-il si les intérêts perçus sont réinvestis dans un actif financier ?

Étape 2 : ajout des actifs à intérêts composés au comparatif

💡 Les intérêts composés sont calculés sur le capital initial, auquel s'ajoutent progressivement les intérêts accumulés :

$$C^{\text{composé}}(t) = C_0 \times (1 + r)^t$$

où :

- $C^{\text{composé}}(t)$ est le capital accumulé après une période t .
- C_0 est le capital initial investi.
- r est le taux d'intérêt nominal (exprimé sous forme décimale, par exemple, 5% devient $\frac{5}{100}$ soit 0,05).
- t est le temps écoulé, exprimé en années ou en jours, selon la fréquence de capitalisation.

💡 Le calcul des intérêts composés est modélisé par une fonction exponentielle, notée sous la forme $f(x) = a^x$, où a est une constante positive et x correspond au temps ou au nombre de périodes de capitalisation.

À l'inverse, une fonction puissance, exprimée par $f(x) = x^a$, caractérise une croissance polynomiale. La fonction exponentielle surpasse en vitesse la fonction puissance, ce qui met en évidence le phénomène d'effet boule de neige des intérêts composés : les intérêts générés à chaque période s'ajoutent au capital, accélérant ainsi son expansion au cours du temps.

Moyen mnémotechnique :

- Fonction exponentielle = l'exposant varie, la croissance s'emballe.
- Fonction puissance = la puissance est constante.

Q2.1 Soit un capital initial $C_0 = 100\,000$ € investi, calculer le capital final de l'actif A_q^c après une durée t égale à :

- (a) $t = 1$ jour
- (b) $t = 30$ jours
- (c) $t = 1$ an
- (d) $t = 30$ ans

Q2.2 Soit un capital initial $C_0 = 100\,000$ € investi, calculer le capital final de l'actif A_a^q après une durée t égale à :

- (a) $t = 1$ jour
- (b) $t = 30$ jours
- (c) $t = 1$ an
- (d) $t = 30$ ans

Q2.3 Remplir le tableau suivant en calculant les capitaux finaux pour les deux types d'actifs à différents horizons de temps :

Actif	1 jour	30 jours	1 an	30 ans
A_q^s				
A_a^s				
A_q^c				
A_a^c				

TABLE 3 – Capital final pour différentes durées d'investissement avec intérêts composés et un capital initial de $C_0 = 100\,000$ €.

Q2.4 Soit un capital initial C_0 et un taux nominal annuel r_a ou un taux nominal quotidien r_q , exprimer les fonctions permettant de calculer le capital final en fonction de la durée d'investissement t (exprimée en jours) pour chacun des deux actifs à intérêts composés :

- (a) $C_q^c(t)$ pour un actif à capitalisation quotidienne avec un taux périodique r_q ;
- (b) $C_a^c(t)$ pour un actif à capitalisation annuelle avec un taux r_a .

Q2.5 Sur le graphique des courbes C_q^s et C_a^s , ajouter le tracé de $C_q^c(t)$ et $C_a^c(t)$ pour $C_0 \in \{50\,000, 100\,000, 200\,000\}$ €. La durée t (en abscisse) varie de 0 à 40 ans. Commenter l'évolution du capital dans le temps en fonction des différents montants de capital initial et du type d'actif.

Q2.6 Pour les trois valeurs de capital initial $C_0 \in \{50\,000, 100\,000, 200\,000\}$ €, déterminer graphiquement le capital final obtenu pour des durées d'investissement t égales à 10 ans, 20 ans et 30 ans. Quel est le coefficient multiplicateur du capital initial en fonction de ces durées ?

Q2.7 Exprimer le coefficient multiplicateur $k(t)$ en fonction de la durée t et du taux périodique r dans le cas des intérêts composés. Vérifier la cohérence de ce résultat en appliquant la formule pour un taux de 5 % (c'est-à-dire $r = 0,05$) et pour des durées d'investissement de $t = 10, 20$ et 30 ans.

- Q2.8** Représenter graphiquement le coefficient multiplicateur du capital initial en fonction de la durée d'investissement pour le taux périodique $r_q = 5\%$. Relever graphiquement le coefficient multiplicateur pour les durées d'investissement à 10 ans, 20 ans, 30 ans, 50 ans et 100 ans.
- Q2.9** Utiliser les valeurs du coefficient multiplicateur obtenues graphiquement pour déterminer le capital final après 10 ans, 20 ans, 30 ans, 50 ans et 100 ans, en partant d'un capital initial de 72 924,56 € et avec un taux périodique de 5%.

4 Solution

Étape 1 : calcul du capital final pour les actifs à intérêts simples

Formule générale pour les intérêts simples :

$$C(t) = C_0 \times (1 + r \times t)$$

où $r_a = 5\% = 0,05$ et $r_q = \frac{5}{365}\% = \frac{0,05}{365}$, et t la durée exprimée en jours.

R1.1 Actif A_q^s (capitalisation quotidienne avec intérêts simples)

$$C_q^s(t) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times t\right)$$

(a) $t = 1$ jour :

$$C_q^s(1) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 1\right) = \boxed{100\,013,70 \text{ €}}$$

(b) $t = 30$ jours :

$$C_q^s(30) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 30\right) = \boxed{100\,410,96 \text{ €}}$$

(c) $t = 1$ an = 365 jours :

$$\begin{aligned} C_q^s(365) &= 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 365\right) \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05) \\ &= 100\,000 \times 1,05 \\ &= \boxed{105\,000,00 \text{ €}} \end{aligned}$$

(d) $t = 30$ ans = 10 950 jours :

$$\begin{aligned} C_q^s(10\,950) &= 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 10\,950\right) \\ &= 100\,000 \times (1 + 1,5) \\ &= 100\,000 \times 2,5 \\ &= \boxed{250\,000,00 \text{ €}} \end{aligned}$$

R1.2 Actif A_a^s (capitalisation annuelle avec intérêts simples)

Puisque les intérêts ne sont ajoutés que si le capital reste investi pendant une année complète (365 jours), la fonction *partie entière*, notée $\lfloor \cdot \rfloor$, est utilisée pour modéliser cette condition.

$$C_a^s(t) = 100\,000 \times \left(1 + 0,05 \times \left\lfloor \frac{t}{365} \right\rfloor\right)$$

(a) $t = 1$ jour :

$$\begin{aligned} C_a^s(1) &= 100\,000 \times \left(1 + 0,05 \times \left\lfloor \frac{1}{365} \right\rfloor\right) \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05 \times 0) \\ &= 100\,000 \times (1 + 0) \\ &= 100\,000 \times 1 \\ &= \boxed{100\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

(b) $t = 30$ jours :

$$\begin{aligned} C_a^s(30) &= 100\,000 \times \left(1 + 0,05 \times \left\lfloor \frac{30}{365} \right\rfloor\right) \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05 \times 0) \\ &= \boxed{100\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

(c) $t = 1$ an = 365 jours :

$$\begin{aligned} C_a^s(365) &= 100\,000 \times \left(1 + 0,05 \times \left\lfloor \frac{365}{365} \right\rfloor\right) \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05 \times 1) \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05) \\ &= 100\,000 \times 1,05 \\ &= \boxed{105\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

(d) $t = 30$ ans = 10 950 jours :

$$\begin{aligned} C_a^s(10\,950) &= 100\,000 \times \left(1 + 0,05 \times \left\lfloor \frac{10\,950}{365} \right\rfloor\right) \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05 \times 30) \\ &= 100\,000 \times (1 + 1,5) \\ &= 100\,000 \times 2,5 \\ &= \boxed{205\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

R1.3 Voir table 4.

Actif	1 jour	30 jours	1 an	30 ans
A_q^s	100 013,70 €	100 410,96 €	105 000,00 €	250 000,00 €
A_a^s	100 000,00 €	100 000,00 €	105 000,00 €	250 000,00 €

TABLE 4 – Résultats pour les intérêts simples ($C_0 = 100\,000$ €).

R1.4 Fonctions de capitalisation :

(a) $C_q^s(t) = C_0 \times (1 + r_q \times t)$

(b) $C_a^s(t) = C_0 \times \left(1 + r_a \times \left\lfloor \frac{t}{365} \right\rfloor\right)$

R1.5 Le graphique en figure 1 représente six courbes correspondant aux fonctions :

$$C_q^s(t) = C_0 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times t\right)$$

et

$$\begin{aligned} C_a^s(t) &= C_0 \times \left(1 + 0,05 \times \left\lfloor \frac{t}{365} \right\rfloor\right) \\ &= C_0 \times \left(1 + 0,05 \times \frac{t - (t \bmod 365)}{365}\right), \end{aligned}$$

avec $C_0 \in \{50\,000, 100\,000, 200\,000\}$ €.

Axes :

- L'axe des abscisses (horizontal) représente la durée en jours.
- L'axe des ordonnées (vertical) représente le capital en euros.

Comparaison :

- Les courbes de capitalisation quotidienne $C_q^s(t)$ montrent une croissance linéaire continue.

- Les courbes de capitalisation annuelle $C_a^s(t)$ présentent une fonction en escalier avec des sauts discrets à chaque année, où chaque saut suit une croissance linéaire, reflétant une augmentation constante et régulière du capital.
- Lorsqu'une année est révolue, les deux types de capitalisation convergent, car les intérêts annuels sont ajoutés.

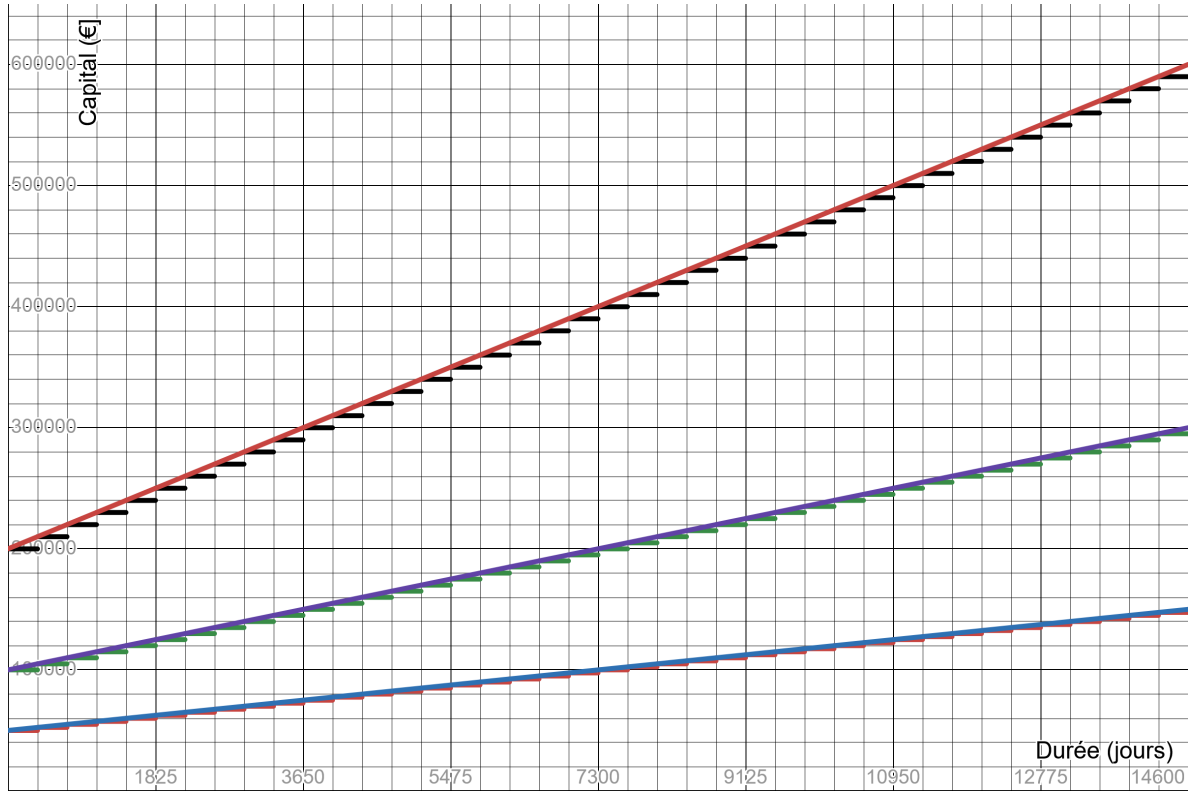


FIGURE 1 – Comparaison de la capitalisation quotidienne et annuelle des intérêts simples.

R1.6 Le capital final est lu graphiquement sur la figure 2 :

50 000 €	$\xrightarrow{10 \text{ ans}}$	75 000 €	10 ans :	$\frac{75\,000}{50\,000} = \frac{150\,000}{100\,000} = \frac{300\,000}{200\,000} = 1,5$
100 000 €	$\xrightarrow{10 \text{ ans}}$	150 000 €		
200 000 €	$\xrightarrow{10 \text{ ans}}$	300 000 €		
50 000 €	$\xrightarrow{20 \text{ ans}}$	100 000 €	20 ans :	$\frac{100\,000}{50\,000} = \frac{200\,000}{100\,000} = \frac{400\,000}{200\,000} = 2$
100 000 €	$\xrightarrow{20 \text{ ans}}$	200 000 €		
200 000 €	$\xrightarrow{20 \text{ ans}}$	400 000 €		
50 000 €	$\xrightarrow{30 \text{ ans}}$	125 000 €	30 ans :	$\frac{125\,000}{50\,000} = \frac{250\,000}{100\,000} = \frac{500\,000}{200\,000} = 2,5$
100 000 €	$\xrightarrow{30 \text{ ans}}$	250 000 €		
200 000 €	$\xrightarrow{30 \text{ ans}}$	500 000 €		

- Le capital initial est multiplié par 1,5 après 10 ans.
- Le capital initial est multiplié par 2 après 20 ans.
- Le capital initial est multiplié par 2,5 après 30 ans.

R1.7 Le coefficient multiplicateur du capital initial, noté $k(t)$, représente le facteur par lequel le capital initial est multiplié pour obtenir le capital final après une certaine durée d'investissement t , avec un taux périodique r_q (taux d'intérêt par période). Ainsi, le coefficient multiplicateur $k(t)$ est le

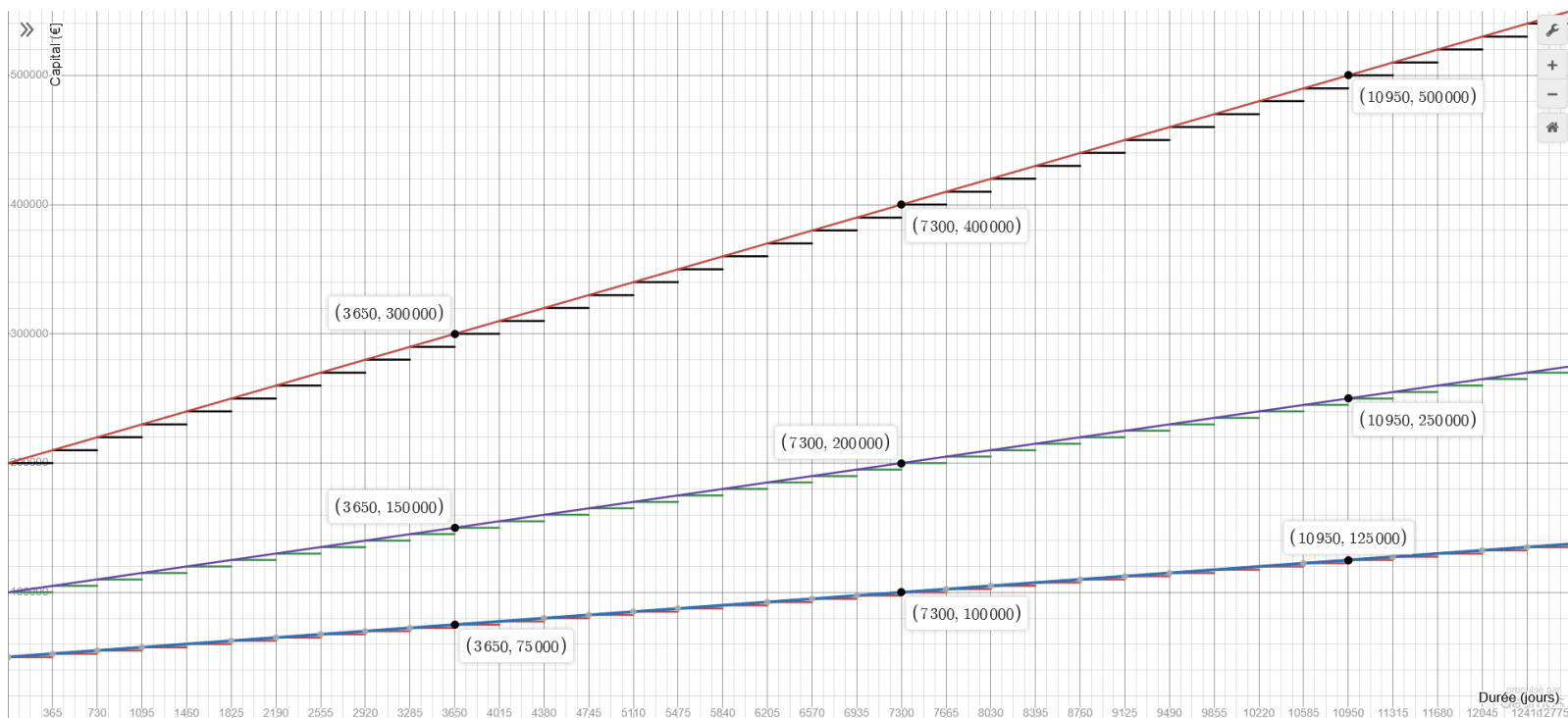


FIGURE 2 – Lecture graphique du capital obtenu après 10, 20 et 30 ans d'investissement.

rapport entre le capital final $C(t)$ et le capital initial C_0 :

$$k(t) = \frac{C(t)}{C_0} = \frac{C_0(1 + r_q \cdot t)}{C_0} = 1 + r_q \cdot t = \boxed{1 + r_q \cdot t}$$

Vérification :

- Pour 10 ans : $k(10) = 1 + 0,05 \times 10 = 1 + 0,5 = \boxed{1,5}$
- Pour 20 ans : $k(20) = 1 + 0,05 \times 20 = 1 + 1 = \boxed{2}$
- Pour 30 ans : $k(30) = 1 + 0,05 \times 30 = 1 + 1,5 = \boxed{2,5}$

R1.8 Voir figure 3.

- $k(10) = 1,5$
- $k(20) = 2$
- $k(30) = 2,5$
- $k(50) = 3,5$
- $k(100) = 6$

R1.9 Pour un capital initial de 72 924,56 € à 5 % annuel en intérêts simples :

$$C^s(10) = 72\,924,56 \times 1,5 = 109\,386,84 \text{ €}$$

$$C^s(20) = 72\,924,56 \times 2,0 = 145\,849,12 \text{ €}$$

$$C^s(30) = 72\,924,56 \times 2,5 = 182\,311,40 \text{ €}$$

$$C^s(50) = 72\,924,56 \times 3,5 = 255\,235,96 \text{ €}$$

$$C^s(100) = 72\,924,56 \times 6,0 = 437\,547,36 \text{ €}$$

R1.10 Étant donné la formule pour $C_q^s(t)$:

$$C_q^s(t) = C_0 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times t\right),$$

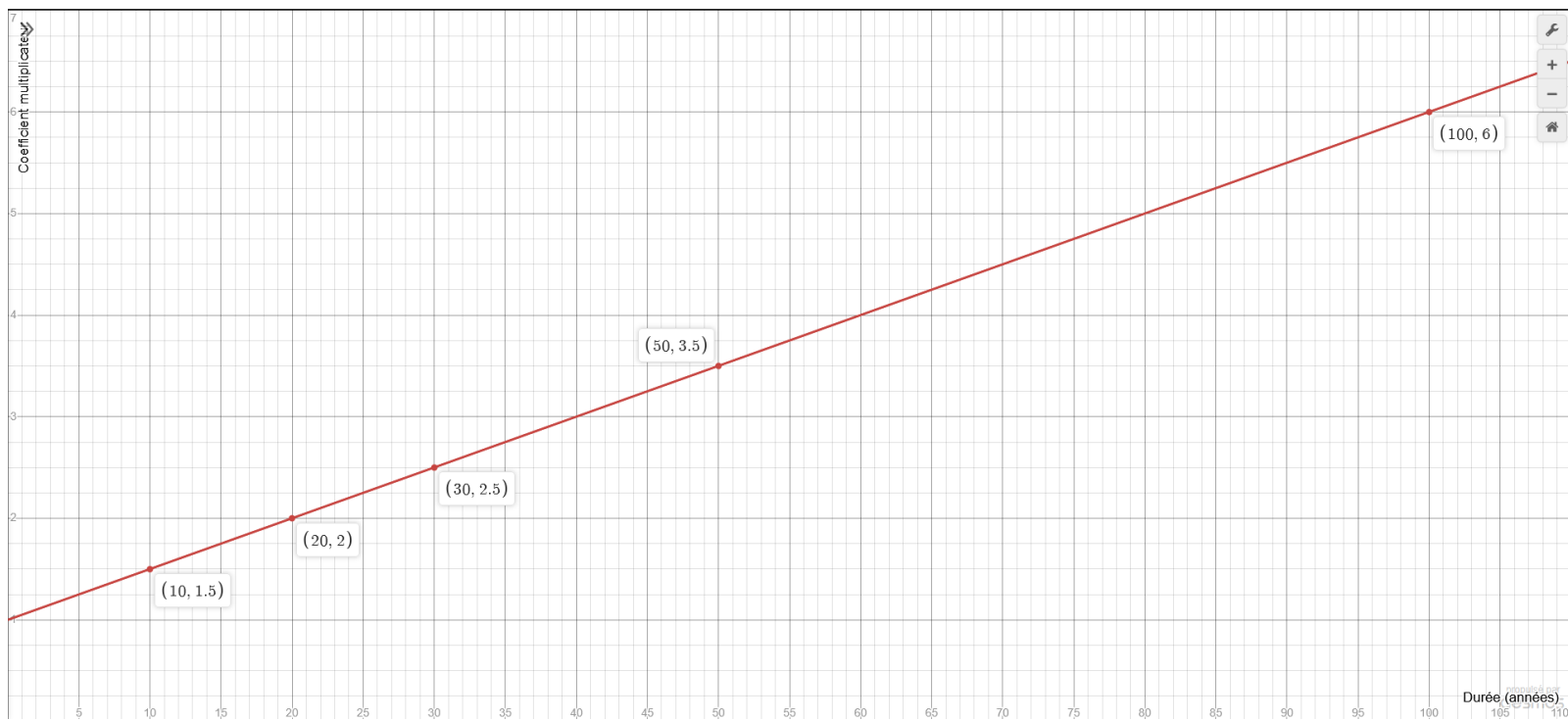


FIGURE 3 – Coefficient multiplicateur du capital initial en fonction de la durée t (en années) pour un taux périodique de 5% : $k(t) = 1 + 0,05 \times t$

— Pour $C_0 = 50\,000$ € :

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{C_q^s(1) - C_q^s(0)}{1 - 0} \\
 &= \frac{50\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 1\right) - 50\,000}{1} \\
 &\approx 50\,006,849 - 50\,000 \\
 &\approx 6,85 \text{ €}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{C_q^s(1\,948) - C_q^s(32)}{1\,948 - 32} \\
 &= \frac{50\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 1\,948\right) - 50\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 32\right)}{1\,916} \\
 &\approx \frac{63\,342,46575 - 50\,219,17808}{1\,916} \\
 &\approx \frac{13\,123,28767}{1\,916} \\
 &\approx 6,85 \text{ €}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{C_q^s(365\,000) - C_q^s(364\,999)}{365\,000 - 364\,999} \\
 &= \frac{50\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 365\,000\right) - 50\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 364\,999\right)}{1} \\
 &\approx 2\,550\,000 - 2\,549\,993,15068 \\
 &\approx 6,85 \text{ €}
 \end{aligned}$$

— Pour $C_0 = 100\,000$ € :

$$\begin{aligned}
m &= \frac{C_q^s(1) - C_q^s(0)}{1 - 0} \\
&= \frac{100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 1\right) - 100\,000}{1} \\
&\approx 100\,013,698 - 100\,000 \\
&\approx 13,70 \text{ €} \\
\\
m &= \frac{C_q^s(1\,948) - C_q^s(32)}{1\,948 - 32} \\
&= \frac{100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 1\,948\right) - 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 32\right)}{1\,916} \\
&\approx \frac{126\,684,9315 - 100\,438,35616}{1\,916} \\
&\approx \frac{26\,246,57534}{1\,916} \\
&\approx 13,70 \text{ €} \\
\\
m &= \frac{C_q^s(365\,000) - C_q^s(364\,999)}{365\,000 - 364\,999} \\
&= \frac{100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 365\,000\right) - 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 364\,999\right)}{1} \\
&\approx 5\,100\,000 - 5\,099\,986,30136 \\
&\approx 13,70 \text{ €}
\end{aligned}$$

— Pour $C_0 = 200\,000$ € :

$$\begin{aligned}
m &= \frac{C_q^s(1) - C_q^s(0)}{1 - 0} \\
&= \frac{200\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 1\right) - 200\,000}{1} \\
&\approx 200\,027,397 - 200\,000 \\
&\approx 27,40 \text{ €} \\
\\
m &= \frac{C_q^s(1\,948) - C_q^s(32)}{1\,948 - 32} \\
&= \frac{200\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 1\,948\right) - 200\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 32\right)}{1\,916} \\
&\approx \frac{253\,369,863 - 200\,876,71232}{1\,916} \\
&\approx \frac{52\,493,15068}{1\,916} \\
&\approx 27,40 \text{ €} \\
\\
m &= \frac{C_q^s(365\,000) - C_q^s(364\,999)}{365\,000 - 364\,999} \\
&= \frac{200\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 365\,000\right) - 200\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times 364\,999\right)}{1} \\
&\approx 10\,200\,000 - 10\,199\,972,60272 \\
&\approx 27,40 \text{ €}
\end{aligned}$$

R1.11 Le coefficient directeur représente le montant des intérêts gagnés chaque jour.

R1.12 Le coefficient directeur m d'une droite entre deux points $(x_a, C_q^s(x_a))$ et $(x_b, C_q^s(x_b))$ est donné par :

$$m = \frac{C_q^s(x_b) - C_q^s(x_a)}{x_b - x_a}$$

La fonction $C_q^s(t)$ est définie comme :

$$C_q^s(t) = C_0 \times (1 + r \times t)$$

Substitution de $C_q^s(x_b)$ et $C_q^s(x_a)$ dans la formule du coefficient directeur :

$$m = \frac{C_0 \times (1 + r \times x_b) - C_0 \times (1 + r \times x_a)}{x_b - x_a}$$

Développement des termes du numérateur selon l'identité $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$:

$$m = \frac{\overbrace{C_0}^a \times (\overbrace{1}^b + \overbrace{r \times x_b}^c) - C_0 \times (1 + r \times x_a)}{x_b - x_a}$$

$$m = \frac{C_0 + C_0 \times r \times x_b - \overbrace{C_0}^a \times (\overbrace{1}^b + \overbrace{r \times x_a}^c)}{x_b - x_a}$$

$$m = \frac{C_0 + C_0 \times r \times x_b - C_0 - C_0 \times r \times x_a}{x_b - x_a}$$

Les termes C_0 sont constants et s'annulent :

$$m = \frac{\cancel{C_0} + C_0 \times r \times x_b - \cancel{C_0} - C_0 \times r \times x_a}{x_b - x_a}$$

$$m = \frac{C_0 \times r \times x_b - C_0 \times r \times x_a}{x_b - x_a}$$

Factorisation de $(C_0 \times r)$ selon l'identité $a \times b - a \times c = a \times (b - c)$:

$$m = \frac{\overbrace{C_0 \times r}^a \times \overbrace{x_b}^b - \overbrace{C_0 \times r}^a \times \overbrace{x_a}^c}{x_b - x_a}$$

$$m = \frac{\overbrace{C_0 \times r}^a \times (\overbrace{x_b}^b - \overbrace{x_a}^c)}{x_b - x_a}$$

$$m = C_0 \times r \times \frac{x_b - x_a}{x_b - x_a}$$

Puisque $\frac{x_b - x_a}{x_b - x_a} = 1$ pour $x_b - x_a \neq 0$:

$$\boxed{m = C_0 \times r}$$

Le coefficient directeur m est donc constant et égal à $C_0 \times r$, où r est le rendement périodique quotidien. Cela montre que le coefficient directeur est proportionnel au capital initial et au rendement périodique, indépendamment des points x_a et x_b choisis.

R1.13 Le coefficient directeur constant traduit une croissance linéaire du capital dû au versement des intérêts d'un montant fixe. Graphiquement, la fonction forme une droite, avec une pente représentant le gain périodique. Cette linéarité garantit une prévisibilité totale, mais limite la rentabilité sur le long terme (pas d'effet de capitalisation).

R1.14 Exemples de dispositifs avec des intérêts simples :

- Crédit immobilier ou à la consommation (les intérêts sont calculés sur le capital restant dû).
- Obligation à taux fixe sans réinvestissement des coupons.

R1.15 En période d'inflation, les intérêts perdent de la valeur réelle car le montant est grignoté par la hausse globale des prix. À l'inverse, en déflation, ces mêmes intérêts gagnent en pouvoir d'achat grâce à la baisse générale des prix.

La BCE vise une inflation cible de 2%, un équilibre permettant d'éviter les excès déflationnistes tout en limitant l'érosion des rendements. Cependant, même une inflation modérée agit avec un effet boule de neige : l'augmentation lente mais cumulée des prix, année après année, ronge progressivement la valeur réelle des intérêts simples, dont le montant reste constant.

R1.16 Lorsque les intérêts générés sont réinvestis dans un actif financier, ils produisent à leur tour des intérêts. Ce mécanisme, appelé capitalisation des intérêts ou intérêts composés, consiste à incorporer les gains au capital initial, ce qui augmente progressivement la base de calcul des futurs intérêts et engendre une croissance exponentielle du rendement.

Étape 2 : calcul du capital final pour les actifs à intérêts composés

Formule générale pour les intérêts composés :

$$C^{\text{composé}}(t) = C_0 \times (1 + r)^t$$

où $r_a = 5\% = 0,05$ et $r_q = \frac{5}{365}\% = \frac{0,05}{365}$, et t la durée exprimée en jours.

R2.1 Actif A_q^c (capitalisation quotidienne avec intérêts composés)

$$C_q^c(t) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365}\right)^t$$

(a) $t = 1$ jour :

$$C_q^c(1) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365}\right)^1 = \boxed{100\,013,70 \text{ €}}$$

(b) $t = 30$ jours :

$$C_q^c(30) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365}\right)^{30} = \boxed{100\,411,78 \text{ €}}$$

(c) $t = 1$ an = 365 jours :

$$C_q^c(365) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365}\right)^{365} = \boxed{105\,126,75 \text{ €}}$$

(d) $t = 30$ ans = 10 950 jours :

$$C_q^c(30) = 100\,000 \times \left(1 + \frac{0,05}{365}\right)^{10\,950} = \boxed{448\,122,87 \text{ €}}$$

R2.2 Actif A_a^c (capitalisation annuelle avec intérêts composés)

Puisque les intérêts ne sont ajoutés que si le capital reste investi pendant une année complète (365 jours), la fonction *partie entière*, notée $\lfloor \cdot \rfloor$, est utilisée pour modéliser cette condition.

$$C_a^c(t) = 100\,000 \times (1 + 0,05)^{\lfloor \frac{t}{365} \rfloor}$$

(a) $t = 1$ jour :

$$\begin{aligned} C_a^c(1) &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^{\lfloor \frac{1}{365} \rfloor} \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^0 \\ &= 100\,000 \times (1,05)^0 \\ &= 100\,000 \times 1 \\ &= \boxed{100\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

(b) $t = 30$ jours :

$$\begin{aligned} C_a^c(30) &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^{\lfloor \frac{30}{365} \rfloor} \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^0 \\ &= \boxed{100\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

(c) $t = 1$ an = 365 jours :

$$\begin{aligned} C_a^c(365) &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^{\lfloor \frac{365}{365} \rfloor} \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^1 \\ &= 100\,000 \times 1,05 \\ &= \boxed{105\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

(d) $t = 30$ ans = 10 950 jours :

$$\begin{aligned} C_a^c(10\,950) &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^{\lfloor \frac{10\,950}{365} \rfloor} \\ &= 100\,000 \times (1 + 0,05)^{30} \\ &= 100\,000 \times (1,05)^{30} \\ &= \boxed{432\,194,34 \text{ €}} \end{aligned}$$

R2.3 Voir table 5.

Actif	1 jour	30 jours	1 an	30 ans
A_q^s	100 013,70 €	100 410,96 €	105 000,00 €	250 000,00 €
A_a^s	100 000,00 €	100 000,00 €	105 000,00 €	250 000,00 €
A_q^c	100 013,70 €	100 411,78 €	105 126,75 €	448 122,87 €
A_a^c	100 000,00 €	100 000,00 €	105 000,00 €	432 194,34 €

TABLE 5 – Résultats pour les intérêts simples et composés ($C_0 = 100\,000$ €).

R2.4 Fonctions de capitalisation :

(a) $C_q^c(t) = C_0 \times (1 + r_q)^t$

(b) $C_a^c(t) = C_0 \times (1 + r_a)^{\lfloor \frac{t}{365} \rfloor}$

R2.5 Les graphiques en figure 4, 5 et 6 représentent quatres courbes correspondant aux fonctions :

$$C_q^s(t) = C_0 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \times t \right) \quad (\text{courbe bleue})$$

$$C_a^s(t) = C_0 \times \left(1 + 0,05 \times \left\lfloor \frac{t}{365} \right\rfloor \right) \quad (\text{courbe rouge})$$

$$C_q^c(t) = C_0 \times \left(1 + \frac{0,05}{365} \right)^t \quad (\text{courbe verte})$$

$$C_a^c(t) = C_0 \times (1 + 0,05)^{\lfloor \frac{t}{365} \rfloor} \quad (\text{courbe violette})$$

avec $C_0 \in \{50\,000, 100\,000, 200\,000\}$ €.

Axes :

- L'axe des abscisses (horizontal) représente la durée en jours.
- L'axe des ordonnées (vertical) représente le capital en euros.

L'analyse du graphique permet de tirer les constats suivants :

- La courbe bleue représentant la capitalisation quotidienne des intérêts simples illustre une croissance linéaire du capital au fil du temps.
- La courbe verte associée à la capitalisation quotidienne des intérêts composés témoigne d'une croissance exponentielle du capital.
- La courbe rouge correspondant à la capitalisation annuelle des intérêts simples se traduit par une fonction en escalier, caractérisée par des augmentations discrètes, suivant une progression linéaire.
- De même, la courbe violette représentant la capitalisation annuelle des intérêts composés se manifeste sous la forme d'une fonction en escalier, avec des augmentations discrètes, mais selon une dynamique exponentielle.
- Les actifs bénéficiant d'intérêts composés (courbes verte et violette) s'avèrent plus rentables que ceux rémunérés par des intérêts simples (courbes bleue et rouge).
- Avec le temps, la croissance des actifs à intérêts composés (verte et violette) devient de plus en plus marquée, accentuant l'écart avec les actifs à intérêts simples (bleue et rouge), dont la croissance demeure constante.
- Tandis que le montant des intérêts simples (bleue et rouge) ajoutés chaque année demeure constant, la capitalisation quotidienne des intérêts composés (verte) génère une progression plus rapide du capital que la capitalisation annuelle (violette), et ce, dès la première année.

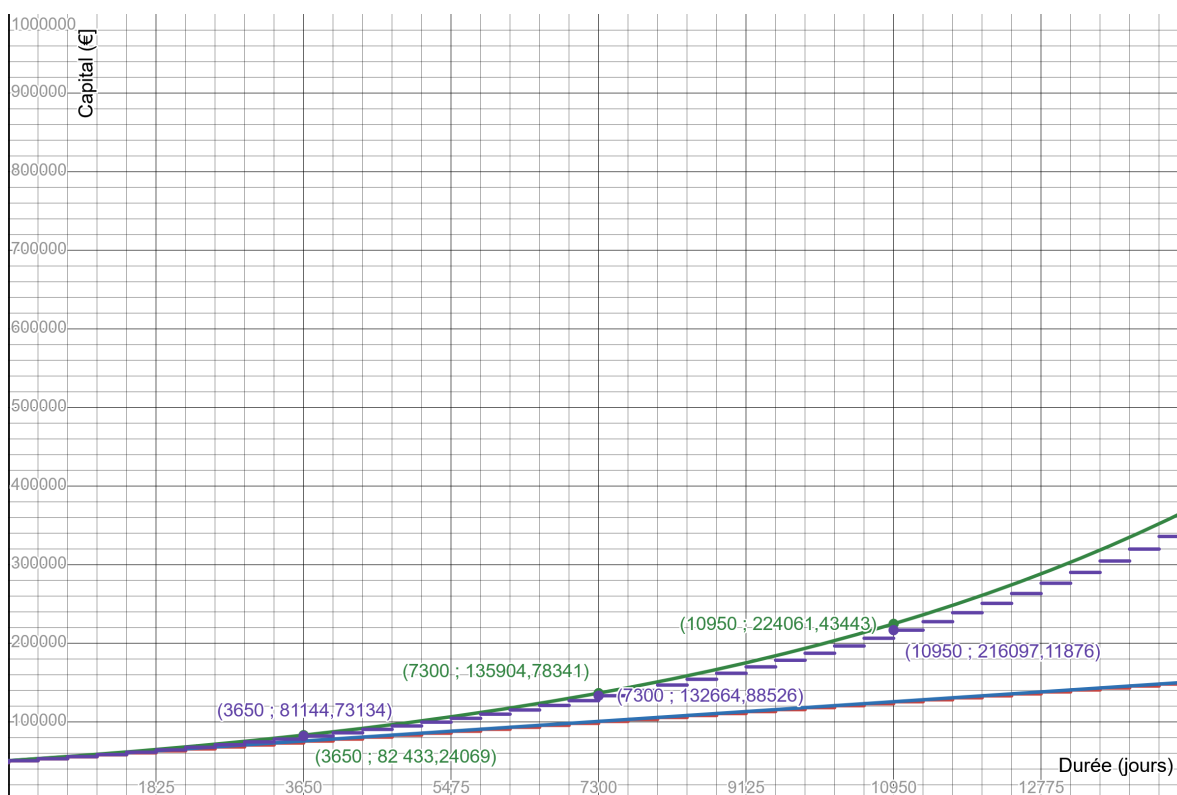


FIGURE 4 – Comparaison de la capitalisation quotidienne et annuelle des intérêts simples et composés pour un capital initial de 50 000 €.

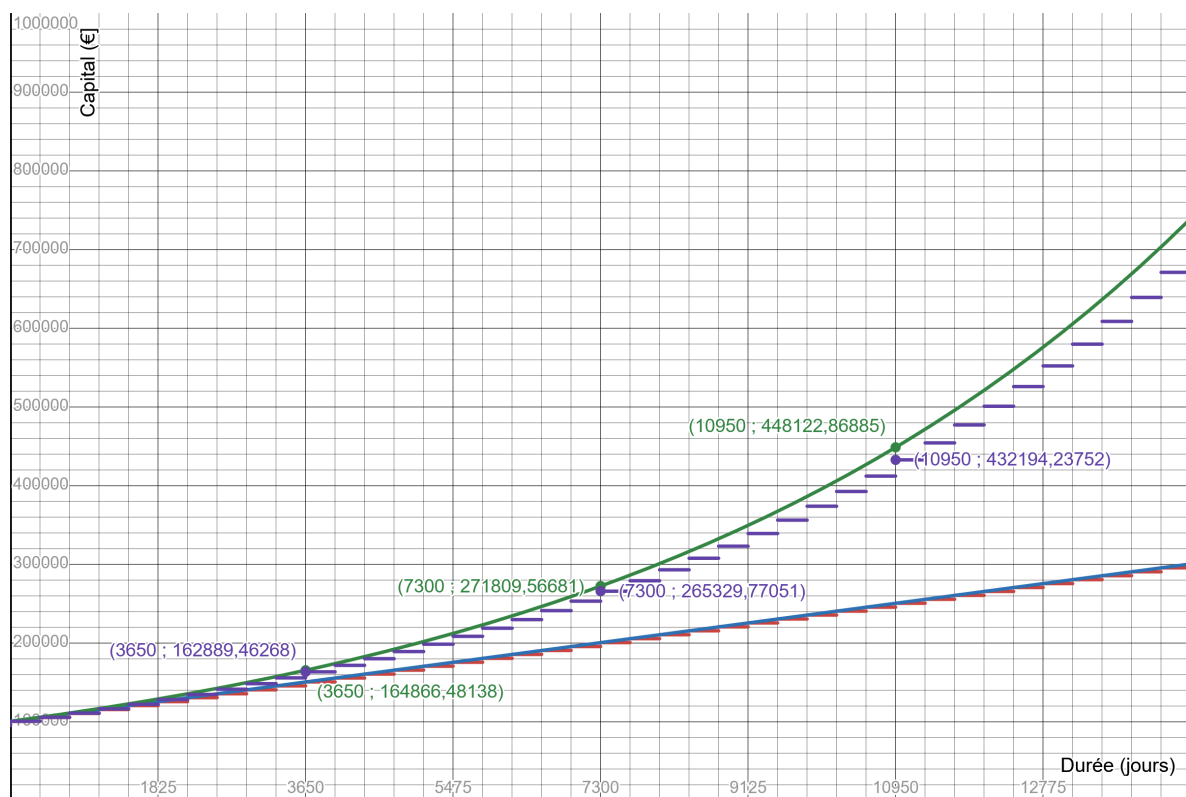


FIGURE 5 – Comparaison de la capitalisation quotidienne et annuelle des intérêts simples et composés pour un capital initial de 100 000 €.

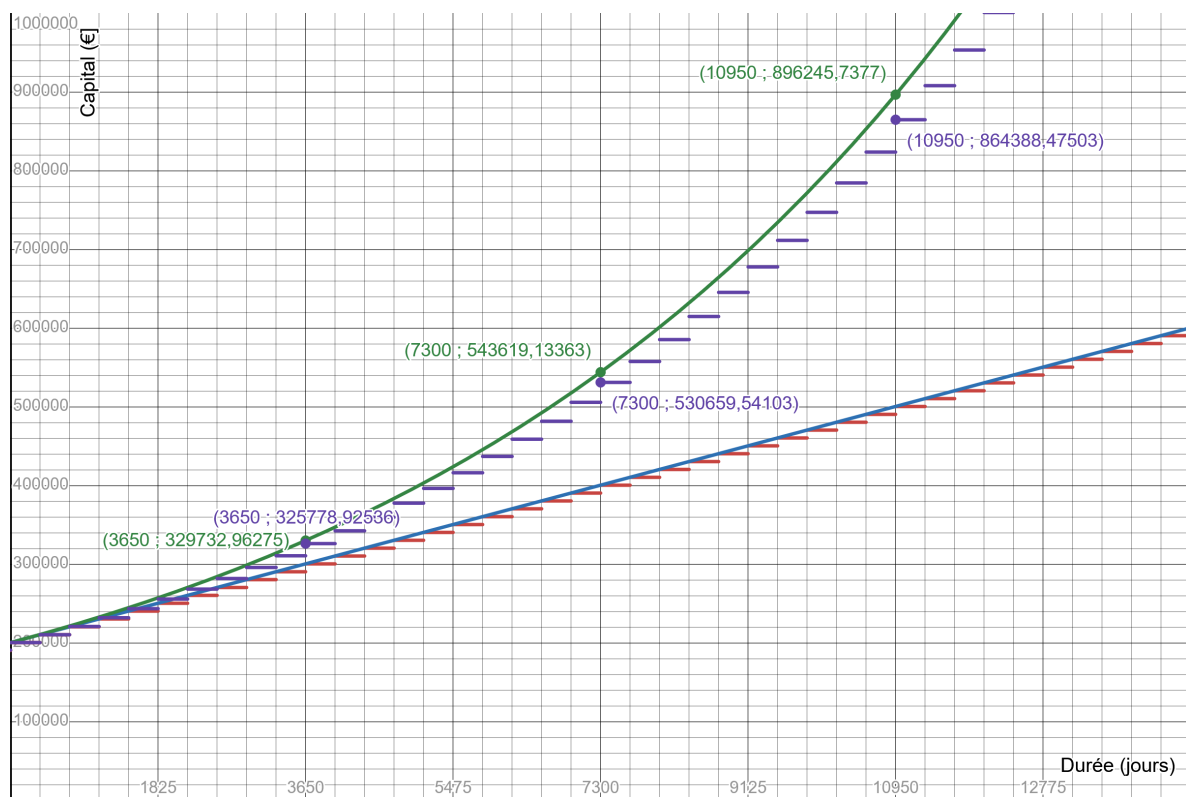


FIGURE 6 – Comparaison de la capitalisation quotidienne et annuelle des intérêts simples et composés pour un capital initial de 200 000 €.