PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas e de Informática

Reentrega da trabalho da matéria de Grafos Trabalho 2 - Caminhos*

Trabalho reentregue na matéria de Grafos para reavaliação, relacionado ao **Trabalho 2 - Caminhos**

Gustavo Torres Bretas Alves[1]
Silvio Jamil Ferzoli Guimarães[2]

*Artigo apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Informática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

[1]Aluno do Programa de Graduação em Ciência da Computação, Brasil – gtbalves@sga.pucminas.br.
[2]Professor do Programa de Graduação em Ciência da Computação, Brasil – .

Sumário

1 JUSTIFICATIVA DE REENTREGA

Estou enviando esse trabalho com o objetivo de apresentar o documento (em PDF e TEX) e um novo código fonte desenvolvido para o trabalho após entender sobre a correta aplicação de um método eficaz para o encontro dos caminhos disjuntos.

Pelos fatos citados acima e por ter enviado erroneamente um trabalho de outra matéria por desatenção na primeira entrega, refiz esse trabalho com o objetivo de apresenta-ló mais bem redigido, alcançando um melhor desempenho, desde formato de apresentação, formatação do documento, organização dos conteúdos e qualidade do código.

Agradeço pela compreensão e abertura para essa entrega da atividade repositiva.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO

Um caminho simples em um grafo direcionado é um caminho sem vértices repetidos. Mais precisamente, um caminho é uma sequência (v0, a1, v1, a2, v2, . . . , ak, vk) com k >= 1 em que v0, v1, v2, . . . , vk são distintos dois a dois. Em grafos simples, pode-se representar um caminho apenas pela sequência de vértices (uma vez que só pode existir uma única aresta entre cada par de vértices). No grafo ilustrado na Fig. 1 as sequências (A, B, E, F) e (A, D, C, F) são exemplos de caminhos simples. Além disso, esses dois caminhos são disjuntos em arestas pois não possuem nenhuma aresta em comum.

O problema de se determinar o número máximo de caminhos disjuntos em arestas existentes em um grafo apresenta várias aplicações. Neste trabalho você deverá implementar um método de resolução deste problema que receba um grafo e um par de vértices (isto é, origem e destino) exiba ao final a quantidade de caminhos disjuntos em arestas entre os dois vértices dados, além de listar cada um dos caminhos encontrados.

Numa lista de tarefas, devemos implementar no algoritmo as seguintes regras:

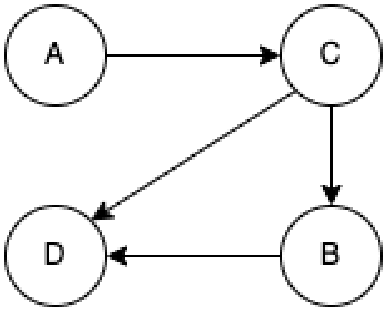
- método de resolução deste problema que receba um grafo e um par de vértices (isto é, origem e destino)
- exiba ao final a quantidade de caminhos disjuntos em arestas entre os dois vértices
- listar cada um dos caminhos encontrados.

2.1 Lógica

Nesse trabalho devemos encontrar o número máximo de caminhos disjuntos em arestas existentes em um grafo. O código deve apresentar a quantidade de caminhos disjuntos em arestas entre os dois vértices dados e listar cada um dos caminhos encontrados.

Temos algumas formas de fazer essa busca, entretanto, algumas delas não são buscas consideradas ótimas, como é o caso do BFS com exclusão de arestas.

Como no caso do exemplo abaixo que chegamos do vértice D saindo do A e encontramos apenas um caminho "ótimo", visto o algoritmo.



2.2 Lógica Ótima

Pensando que devemos ter uma lógica ótima, devemos ter um algoritmo que não delete as arestas e que encontre e mostre o número máximo e atenda todas as expectativas.

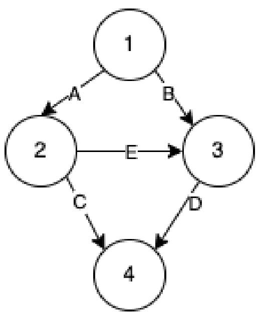
Podemos então utilizar como base o algoritmo de fluxo em rede, como no caso do de Ford Fullkerson para realizar todas as tarefas e encontrar os caminhos disjuntos, mostrando-os e contabilizando-os.

3 DEFINIÇÕES

3.1 Par de caminhos disjuntos

Um par de caminhos (por meio de vértices) em um grafo é considerado disjunto se e somente se não possuírem arestas em comum, ou seja, se nenhuma aresta do grafo é utiliza por ambos os caminhos.

Exemplo: No grafo definido abaixo, os caminhos (1,2,4) e (1,3,4) são disjuntos. Já os caminhos (1,2,3,4) e (1,3,4) não são disjuntos.



3.2 Rede de Fluxo

Uma rede de fluxo é um grafo direcionado G = (N, A), com N como conjunto de nós e A o conjunto de arestas, com as seguintes propriedades:

- Para cada aresta $a \in A$ há um número não negativo C_a, que indica a capacidade da mesma (ou seja, a quantidade máxima de fluxo que cada uma é capaz de carregar).
- Existe um único nó que será identificado como fonte (source), a ser denotado por s;
- Existe um único nó que será identificado como terminal (ou sumidouro) t, tal que $t \in N$;
- Não há nenhuma aresta direcionada para a fonte s, apenas arestas que saem dela e são direcionadas para outros nós.
- Não há nenhuma aresta que saia do terminal t, apenas arestas direcionadas a ele.

4 ESCOLHA DO ALGORITMO

Para encontrar o número máximo de caminhos disjuntos podemos utilizar alguns algoritmos, entretanto como citado acima um deles é considerado ótimo. Ao escolher um BFS ou DFS como algoritmo alguns casos terão sucesso, porém em outros teremos erros que consideram caminhos disjuntos falsos, ou até mesmo a falta deles.

Utilizei como base o algoritmo de Ford-Fulkerson para a solução do problema, utilizando como fluxo máximo em cada aresta começando em zero respeitando as seguintes propriedades:

Restrições de capacidade: Para cada $a \in A$, temos que $0 <= f(a) <= c_a$
Restrições de conservação: Para cada nó $n \in N$ diferente de s e t, temos que o fluxo total que entra em determinado nó é igual ao fluxo total que sai de tal nó.

4.1 O algoritmo de Ford-Fulkerson

Iniciamos supondo que o fluxo inicial em todas as arestas é nulo, e com isso iremos aumentar acrescentando fluxo na fonte com algumas regras.

A ideia principal do algoritmo gira em torno de duas principais operações:

- Quando uma aresta tem menos fluxo do que permite a sua capacidade (incluindo o fluxo nulo), podemos "empurrar"fluxo em sua direção.
- Quando uma aresta tem uma quantidade positiva de fluxo, menor ou igual à sua capacidade, podemos fazer com que esse fluxo retroceda, "empurrando-o para trás"

Para tais operações do algoritmo, devemos utilizar um grafo auxiliar, que segundo as questões já definidas chamaremos de **Grafo Residual** (G_R) seguindo também algumas regras:

- O conjunto de nós G_R é o mesmo de G
- Ao percorrer as arestas em G, vamos criando as arestas de G_R da seguinte maneira:

  - Para cada aresta $a = (n_i, n_j)$ de G - (sai do nó n_i e entra no nó n_j) - que possui fluxo $f(a) < c_a$, adicionamos uma aresta $a_R = (n_i, n_j)$ com capacidade c_{aR} = $c_a - f(a) e f(a_r)$ = 0. Deste modo, estamos definindo a possibilidade de "empurrar para frente"a quantidade de fluxo que a aresta a conseguiria carregar a mais.

  - Para cada aresta $a = (n_i, n_j)$ de G tal que $f(a) > 0$, ou seja, cada aresta que já esteja carregando alguma quantidade positiva de fluxo, existe a possibilidade de empurrar este fluxo para trás, se assim desejarmos. Desta forma, adicionamos uma aresta $a'_R = (n_i, n_j)$ em G_R com direção inversa a a e a capacidade $c_{a'_R} = f(a)$. Assim como no passo anterior, o fluxo de a'_R no grafo residual é nulo.

5 IMPLEMENTAÇÃO

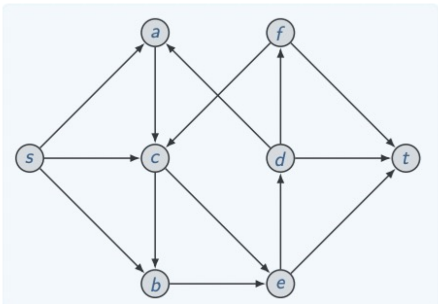
5.1 Detalhes da implementação

Para a implementação do trabalho com objetivo de criar um método para resolver o problema de determinar o número máximo de caminhos disjuntos em arestas existentes em um grafo, utilizamos três principais pontos, dentre eles os três que serão explicados e deslindados abaixo.

5.1.1 Matriz de Adjacência

Para inserir os grafos no algoritmo utilizamos matrizes de adjacências, utilizando sempre o peso 1 para as arestas, tendo como objetivo que cada aresta só pode ter um uso durante o encontro do caminho disjunto.

Exemplo de Matriz de Adjacência para o seguinte Grafo:




```
grafo = [
#     0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
     [0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0], # 0
     [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], # 1
     [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0], # 2
     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], # 3
     [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1], # 4
     [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1], # 5
     [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1], # 6
     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]  # 7
]
```

Matriz de Adjacência para o Grafo acima

5.1.2 Ford-Fulkerson

Com a finalidade de utilizar um algoritmo que tenha, nesse caso, um resultado ótimo, optei por utilizar o algoritmo de Ford-Fulkerson, seguindo pelos princípios e normas já citado acima ele se caracteriza como uma base adequada para a resolução do problema apresentado.

```python
# Aplicacao do algoritimo do ford fulkerson adaptado para o problema
# metodo de resolucao deste problema que receba um grafo e um par de v rtices
def caminhos_disjuntos(self, origem, destino):
    parent = [-1] * (self.ROW)
    max_caminhos_disjuntos = 0

    while self.busca_bfs(origem, destino, parent):
        original_destino = destino;
        caminho = [];
        path = float("Inf")
        s = destino

        while(s != origem):
            path = min(path, self.graph[parent[s]][s])
            s = parent[s]
            caminho.append(s);

        # Adicionar o fluxo ao grafo
        max_caminhos_disjuntos += 1
        # atualizar o grafo residual com o fluxo
        v = destino
        while(v != origem):
            u = parent[v]
            self.graph[u][v] -= path
            self.graph[v][u] += path
            v = parent[v]
        res_caminho = caminho[::-1]           #Formatacao do caminho para printar corretamente
        res_caminho.append(original_destino)
        string_caminho = [str(int) for int in res_caminho]

        print(' -> '.join(string_caminho)) # print do caminho

    print("Maximo de caminhos disjuntos encontrados: %d " % max_caminhos_disjuntos)
```

```

    return max_caminhos_disjuntos
```

Algoritmo baseado no Ford-Fulkerson

5.1.3 Busca em Largura

Pensando de que, diferentemente do Best Finding Search e outros algoritmos que podem deletar arestas e/ou causar uma "confusão"nos caminhos já passados, optei por implementar uma busca em largura, na qual armazena as arestas - já vistadas a partir de um determinado vértice s, tendo por direção um vértice t, - e uma lista incrementada até que o vértice definido por t seja alcançado.

```
# Utilizar uma BFS como um algoritmo de busca
def busca_bfs(self, s, t, parent):
    ja_visitado = [False] * (self.ROW)
    lista = []

    lista.append(s)
    ja_visitado[s] = True

    while lista:
        u = lista.pop(0)
        for ind, val in enumerate(self.graph[u]):
            if ja_visitado[ind] == False and val > 0:
                lista.append(ind)
                ja_visitado[ind] = True
                parent[ind] = u


    return True if ja_visitado[t] else False
```

Algoritmo BFS

5.2 Replit.com

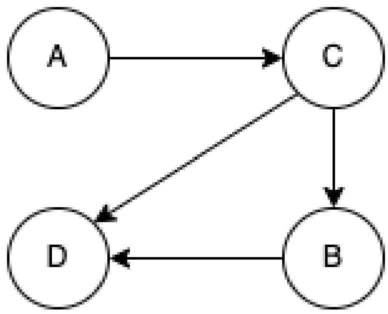
Para executar o código do algoritmo e os testes implementados, você poderá rodar em sua maquina utilizando os arquivos que estão com código fonte, utilizando do seguinte comando: **python index.py** ou rodar pelo Replit, uma plataforma para compartilhar códigos fontes e a execução, para que possamos minimizar o problema de incompatibilidade do programa com alguma arquitetura, ou configurações de compiladores diferentes.
https://replit.com/@GustavoBretas/Trabalho2Grafos

6 EXPERIMENTOS

Apresento aqui os experimentos e testes realizados para os grafos inseridos.

6.1 Experimento 01

Dado o seguinte grafo, devemos encontrar apenas um único caminho disjunto, sendo ele [A $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D] pelo fato do caminho disjunto, quando único, ser o menor caminho possível.



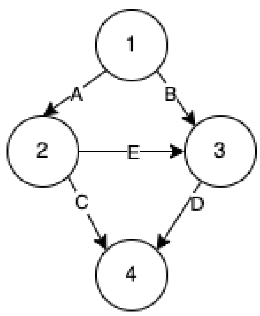
O Algoritmo implementado teve o seguinte resultado:

```
 == Exemplo 01 ==
0 -> 2 -> 3
Caminhos disjuntos encontrados: 1
```

Exemplo 01

6.2 Experimento 02

Dado o seguinte grafo, devemos encontrar dois caminhos disjuntos, sendo eles [1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 4] e [1 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4]



O Algoritmo implementado teve o seguinte resultado:

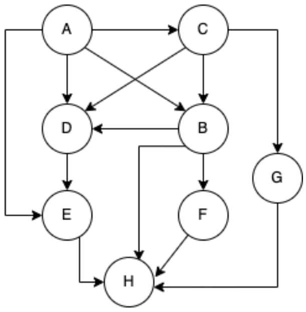
```
 == Exemplo 02 ==
0 -> 1 -> 3
0 -> 2 -> 3
```

```
Caminhos disjuntos encontrados: 2
```

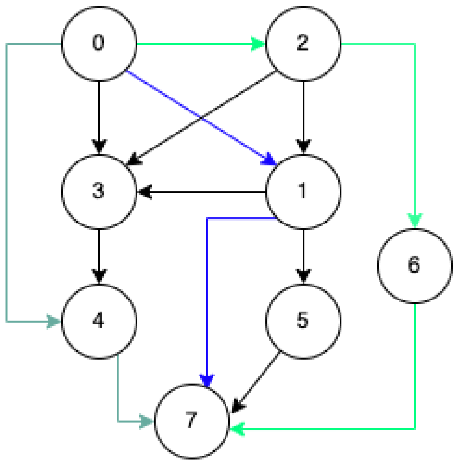
Exemplo 02

6.3 Experimento 03

Dado o seguinte grafo, devemos encontrar três caminhos disjuntos, sendo eles [1 -> 2 -> 8] e [1 -> 5 -> 8] e [1 -> 3 -> 7 -> 8]



e o grafo desenhado com os caminhos que devem ser encontrados:



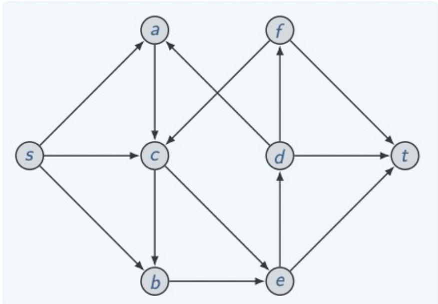
O Algoritmo implementado teve o seguinte resultado:

```
 == Exemplo 03 ==
0 -> 1 -> 7
0 -> 4 -> 7
0 -> 2 -> 6 -> 7
Caminhos disjuntos encontrados: 3
```

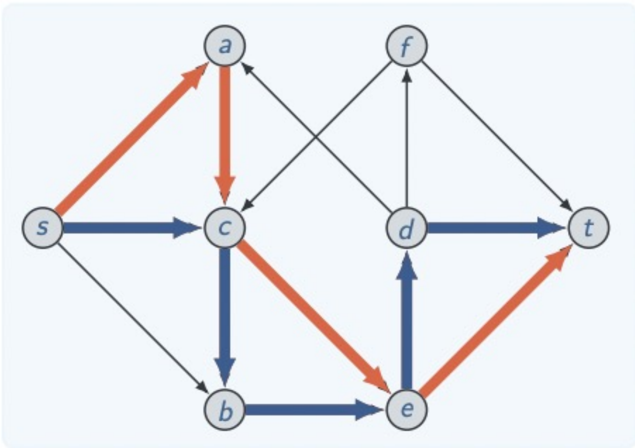
Exemplo 03

6.4 Experimento 04

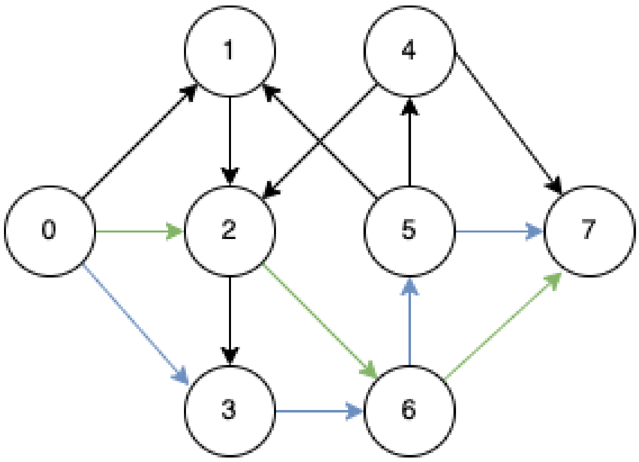
Dado o seguinte grafo, devemos encontrar dois caminhos disjuntos, sendo eles [0 -> 1]



e o grafo desenhado com os caminhos que devem ser encontrados (conforme no slide da aula):



entretanto, o algoritmo encontrou outros possíveis caminhos:



O Algoritmo implementado teve o seguinte resultado:

```
 == Exemplo 04 ==
0 -> 2 -> 6 -> 7
0 -> 3 -> 6 -> 5 -> 7
Caminhos disjuntos encontrados: 2
```

Exemplo 04

7 RESULTADOS OBTIDOS

Implementei um algoritmo usando a base do Fork-Fulkerson com grafo residual e pesos 0 nas arestas para que não haja repetição das mesmas e uma busca em largura como um algoritmo de busca para encontrar os caminhos, seguindo pela lógica arestas ja visitadas e pesoso para um possível futura implementação nesse código.

O algoritmo está funcionando, vários testes foram feitos, inclusive utilizando um problema apresentado em aula chegando também em dois caminhos disjuntos diferentes, mas possíveis dentro do problema em questão.