Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação de Álgebra Linear na Teoria Moderna do Portfolio

Ana Beatriz da S. Machado[1]
ITA, São José dos Campos, SP
Gabriel B. Martinz[2]
ITA, São José dos Campos, SP

Resumo. Em mercados financeiros, a criação de bons portfolios de investimentos é uma tarefa difícil que muitas vezes se resume a uma subjetividade do gestor do portfolio. A Teoria Moderna do Portfolio, introduzida por H. Markowitz em 1952 [1], é um modelo matemático simplificado de como selecionar portfolios para uma classe de investidores que são aversos a risco. Este artigo é uma aplicação dessa teoria para uma classe grande de ativos, na qual se faz necessário utilizar métodos da Álgebra Linear para modelar e encontrar o melhor portfolio. O modelo será posto à prática com dados de ações que compõem o índice americano S&P 500. Foram encontrados portfolios ótimos com variância excepcionalmente baixa.

Palavras-chave. Álgebra linear, Mercados financeiros, Portfolios, Ações, Estatística

1 Introdução

Uma parte considerável da riqueza mundial investida está alocada em mercados financeiros de ações, nos quais investidores comumente buscam ter um retorno com a valorização da ação investida. Modelagens matemáticas de como ações funcionam no tempo são especialmente úteis para ter um norte de como funciona o investimento e quais as expectativas no momento do investimento.

Combinando várias ações, pode-se criar um portfolio de ações, que funciona de maneira diferente de uma ação sozinha. Desde o advento de mercados financeiros de ações, existe uma dificuldade em modelar o portfolio de ações e encontrar as estatísticas relevantes dele. A Teoria Moderna do Portfolio (TMP foi criada para diminuir a dificuldade de modelar portfolios e, eventualmente, otimizá-los em relação a uma estatística de interesse.

Para contextualizar, precisa-se definir alguns conceitos que serão utilizados. O **retorno** de uma ação é o quanto que o seu valor aumentou comparado com um período anterior, neste artigo utilizaremos o período de um dia. O retorno R pode ser modelado como uma variável aleatória que segue a distribuição normal (ou gaussiana), possuindo:

$$E[R] = \mu,\ Cov(R, R) = Var(R) = E[(R - \mu)(R - \mu)] = \sigma^2 \tag{1}$$

Em 1, E é a operação estatística de valor esperado, μ é chamado de **retorno médio** ou **retorno esperado** e σ é chamado de **desvio padrão**. Cov e Var são as funções de covariância e variância da variável aleatória. Para duas ou mais ações, pode-se criar um vetor com as variáveis aleatórias de cada um dos seus retornos, como mostrado na equação 2.

[1] ana.machado@ga.ita.br
[2] gabriel.martinz@ga.ita.br

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ ... \\ R_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

As suas estatísticas serão, então:

$$E[\boldsymbol{R}] = \begin{pmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ ... \\ E[R_n] \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu},\ Cov(\boldsymbol{R}) = \begin{pmatrix} Cov(R_1, R_1) & Cov(R_1, R_2) & ... & Cov(R_1, R_n) \\ Cov(R_2, R_1) & Cov(R_2, R_2) & ... & Cov(R_2, R_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ Cov(R_n, R_1) & Cov(R_n, R_2) & ... & Cov(R_n, R_n) \end{pmatrix} = \Sigma \tag{3}$$

Em 3, $\boldsymbol{\mu}$ é o **vetor de retornos médios** e Σ é a **matriz de covariância**. A matriz de covariância mede o quanto que as variáveis aleatórias variam juntas, a covariância sendo um valor real que pode ser negativo. Ela também possui as propriedades de ser simétrica, pois $Cov(R_i, R_j) = Cov(R_j, R_i) = \sigma_{ij}$, e de ser positiva semidefinida [2]. Pode-se simplificar a notação das entradas da matriz de covariância, assim:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Com todos esses valores, pode-se calcular as estatísticas de um portfolio que contém as ações cujos retornos são descritos pelo vetor aleatório $\boldsymbol{R}$. Para modelar um portfolio segundo a TMP, determina-se um vetor de pesos de cada ação no portfolio $\boldsymbol{m}$, e calcula-se o retorno esperado e o desvio padrão do portfolio segundo as seguintes equações matriciais:

$$\mu_p = \boldsymbol{m'\mu},\ \sigma_p^2 = \boldsymbol{m'}\Sigma\boldsymbol{m} \tag{5}$$

Para a TMP, assume-se que o investidor do portfólio é avesso a risco, ou seja, ele quer minimizar σ_p^2, condicionando a um valor de μ_p (i.e., minimizar σ_p^2 para um valor de μ_p) ou não (simplesmente encontrar o menor valor de σ_p^2 possível).

A figura 1 mostra um exemplo com um portfolio formado por 3 ações e vetor de pesos balanceado (i.e. todos os pesos são 1/3).

2 Discussão, análise e resultados

Aqui, será discutida a modelagem do sistema para buscar o portfolio de risco mínimo e o portfolio ótimo condicionado a um retorno pedido. Ao final, os modelos serão testados com dados reais de ações do índice S&P 500.

2.1 Portfolio de risco mínimo

Para encontrar o portfolio com σ_p^2 mínimo, deve-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\min_{m} \sigma_{p,m}^2 \ = \ \boldsymbol{m'\Sigma m}\ s.t.\ \boldsymbol{m'1} \ = \ 1. \tag{6}$$

Para encontrar a resolução desse problema, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange [3]. A lagrangiana do problema é:

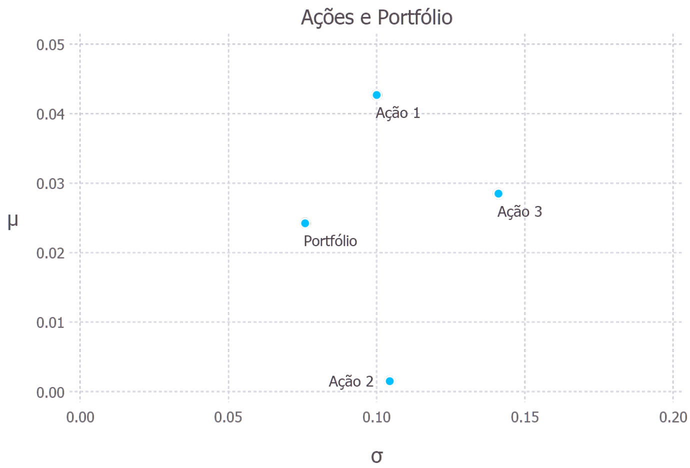

Figura 1: Gráfico de retorno esperado por desvio padrão de 3 ações e de um portfolio dessas 3 ações.

$$L(\boldsymbol{m}, \lambda) = \boldsymbol{m'\Sigma m} + \lambda(\boldsymbol{m'1} - 1) \tag{7}$$

As condições de primeira ordem para o mínimo são:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{m}} = \frac{\partial \boldsymbol{m'\Sigma m}}{\partial \boldsymbol{m}} + \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{m'1} - 1)}{\partial \boldsymbol{m}} = 2\Sigma \boldsymbol{m} + \lambda \boldsymbol{1} \tag{8}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{m'\Sigma m}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{m'1} - 1)}{\partial \lambda} = \boldsymbol{m'1} - 1 \tag{9}$$

As equações (8) e (9) formam um sistema linear com $N + 1$ equações. Para descobrir o vetor de pesos $\boldsymbol{m}$, deve-se resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma & 1 \\ \boldsymbol{1'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Escrevendo o sistema da forma $\boldsymbol{A_m z_m} = \boldsymbol{b}$ e utilizando o método da decomposição em valores singulares (SVD), encontra-se $\boldsymbol{z_m}$. Os N primeiros termos são os elementos do vetor de pesos $\boldsymbol{m}$ do portfólio com a menor variância. Dessa forma, o valor esperado e a variância são dados pela equação 5.

2.2 Portfolio ótimo condicionado a um retorno

Outro tipo de portfolio importante é o que tem um risco mínimo condicionado a um valor esperado de retorno. O problema de otimização vira, então:

$$\min_{m} \sigma^2_{p,m} = \boldsymbol{m'\Sigma m} \; s.t. \; \boldsymbol{m'1} = 1, \; \boldsymbol{m'\mu} = \mu_{exp} \tag{11}$$

Que possui a seguinte lagrangiana:

$$L(\boldsymbol{m}, \lambda_1, \lambda_2) = \boldsymbol{m'\Sigma m} + \lambda_1(\boldsymbol{m'\mu} - \mu_{exp}) + \lambda_2(\boldsymbol{m'1} - 1) \tag{12}$$

Minimizando:

$$\boldsymbol{0} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{m}} = 2\Sigma\boldsymbol{m} + \lambda_1\boldsymbol{\mu} + \lambda_2\boldsymbol{1} \tag{13}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \boldsymbol{m'\mu} - \mu_{exp} = \boldsymbol{\mu' m} - \mu_{exp} \tag{14}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \boldsymbol{m'1} - 1 = \boldsymbol{1'm} - 1 \tag{15}$$

Criou-se um sistema linear de $N+2$ equações em $N+2$ incógnitas $(\boldsymbol{m}, \lambda_1, \lambda_2)$ que, após arrumar, é dado por:

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma & \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\mu'} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{1'} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \mu_{exp} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Resolve-se o sistema utilizando a decomposição SVD da matriz que foi formada e selecionam-se somente os N primeiros valores do vetor resultante, como no item anterior.

2.3 Aplicação

Aplica-se essa modelagem com uma listagem de ações que compõem o índice S&P 500, com dados retirados da *API* do Yahoo! Finance©, todas sendo selecionadas entre as datas em que houve a última atualização do índice (em 2021-09-20) até o momento.

Para listar as ações que fazem parte do índice, foi feito um código em Julia (vide Apêndice na seção 4) que faz as seguintes operações:

1. *scraping* de uma listagem na Wikipedia contendo os códigos das ações;
2. chamada da *API* do Yahoo! Finance©
3. transformação dos dados financeiros retornados pela *API* em uma série temporal de retornos;
4. concatenação dos retornos em um *DataFrame* do Julia;
5. cálculo das estatísticas de interesse (vetor de retornos esperados e matriz de covariância).

Por problemas com a *API*, conseguiu-se somente 418 das 505 ações que compõem o índice.

A figura 2 contém um gráfico de dispersão do retorno esperado em relação ao desvio padrão de vários portfolios condicionados a retornos entre $[0.1, 0.6]$ e com espaçamento de 0.01.

O portfolio de risco mínimo para essas ações possui $(\mu_p, \sigma_p) \approx (0.0008, 3.2 \cdot 10^{-10})$. Pode-se notar que os desvios padrões de cada portfolio ficaram na ordem de 10^{-9} para retornos da ordem de 10^{-2}. Pode-se testar o modelo para retornos maiores para observar quais serão os desvios padrões, como mostrado na figura 3.

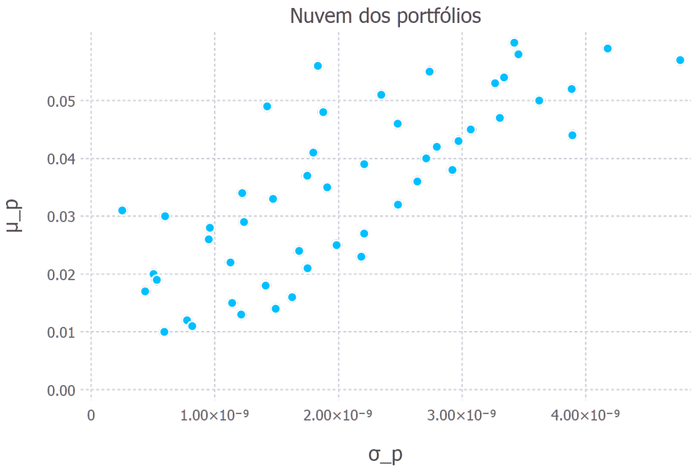

Figura 2: Gráfico de dispersão de retorno por desvio padrão de portfolios formados por parte das ações que formam o índice S&P 500

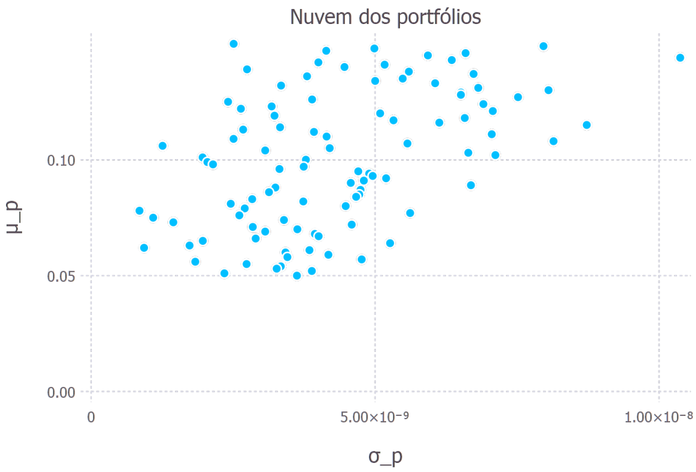

Figura 3: Gráfico de dispersão para retornos maiores que 0.05

3 Conclusão

Pode-se observar dos resultados com dados reais mostrados na figura 2 que foram encontrados portfolios com risco excepcionalmente baixo e um retorno esperado dentro da média para o período testado. Por referência, o retorno do S&P 500 para o período foi de 0.057. Pelo gráfico da figura 3, conseguimos montar portfolios com esse retorno com desvios padrões da ordem de 10^{-9}. O desvio padrão anualizado do S&P 500 é de 12.95% (0.1295), que, mesmo não sendo diretamente comparável ao desvio padrão do modelo criado devido aos períodos de tempo diferentes, ainda pode-se notar uma diferença excepcional.

4 Apêndice

O código utilizado no trabalho está mostrado neste repositório do GitHub.

Referências

[1] Markowitz, H. (1952), *PORTFOLIO SELECTION*. The Journal of Finance*, 7: 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

[2] Taboga, Marco (2010). Lectures on probability theory and mathematical statistics.

[3] Zivot, Eric (2021). Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics with R