AULA 2 - TRIGONOMETRIA

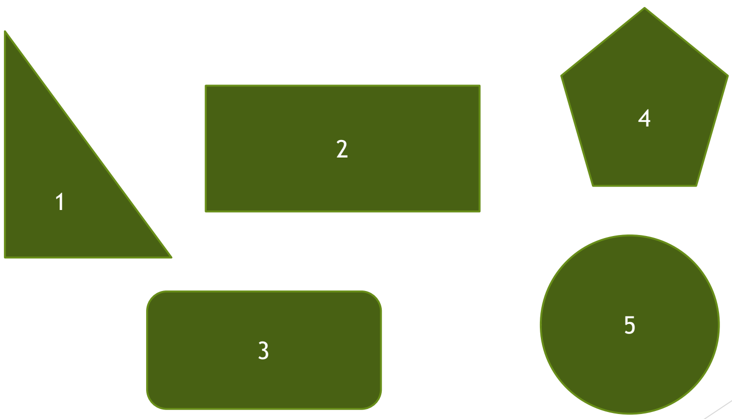
Círculo Trigonométrico

Prof. Me. Gabriel de Souza Leitão

1

Circunferência

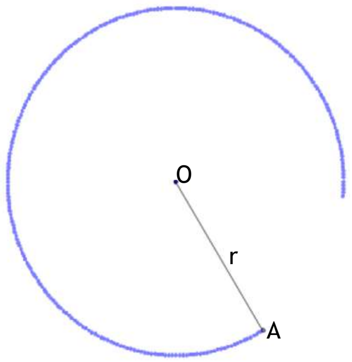
- Qual dessas formas geométricas é uma circunferência?



2

Circunferência

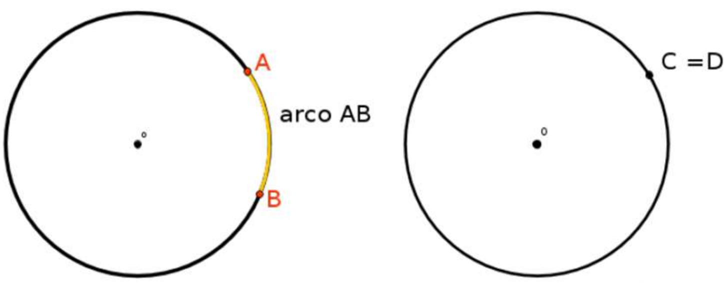
- Dados um ponto **O** de um plano e uma distância **r**
- Circunferência de centro **O** e raio **r** é o conjunto dos pontos do plano que distam **r** e **O.**



3

Arcos e Ângulos

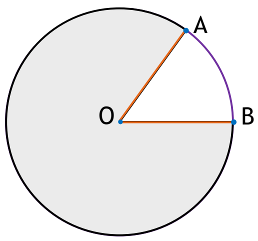
- **Arco Geométrico:** é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, inclusive.
- Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.



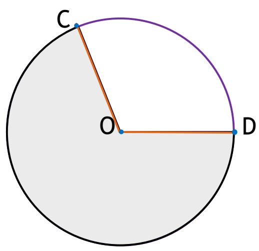
4

Arcos e Ângulos

- **Arco e ângulo central:** todo arco de circunferência tem um ângulo central que subtende.



Arco: AB
Ângulo Central: AÔB



Arco: CD
Ângulo Central: CÔD

Comprimento do círculo

Os antigos identificaram que o comprimento de uma circunferência dividido pelo diâmetro dela era igual a uma constante.

C = Comprimento

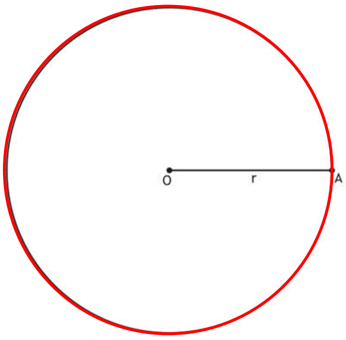
D = Diâmetro

$$\frac{C}{D} = constante$$

Vamos testar isso?

$$\frac{C}{D} = \pi$$

Comprimento do círculo



Considerando que a distância AO é r,

D = r + r = 2r

A razão do comprimento C do círculo pelo diâmetro D vai ser dado por:

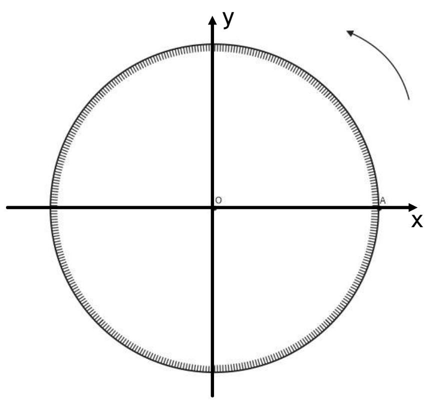
$$\frac{C}{D} = \pi \rightarrow \frac{C}{2r} = \pi$$

Mudando 2r para o outro lado da equação, temos:

$$C = 2r\pi$$
$$\therefore$$
$$C = 2\pi r$$

Círculo Trigonométrico

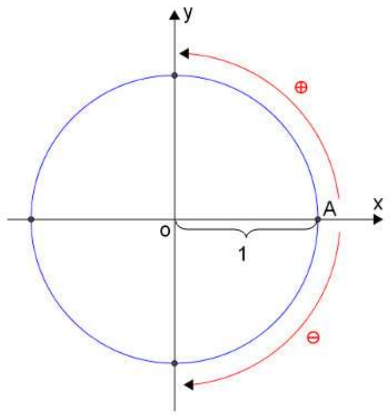
- Se fixarmos um sentido positivo em uma circunferência pode-se dizer que se trata de uma circunferência orientada.
- Uma circunferência orientada de centro na origem do sistema cartesiano, de raio = 1 e cujo sentido positivo é o anti-horário é denominado círculo trigonométrico.



Vamos considerar a origem do círculo trigonométrico no ponto A

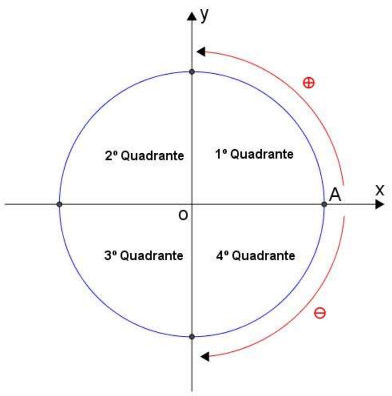
Círculo Trigonométrico

- Todo círculo trigonométrico tem início no ponto A e gira sempre no sentido anti-horário, ou seja, sentido positivo.



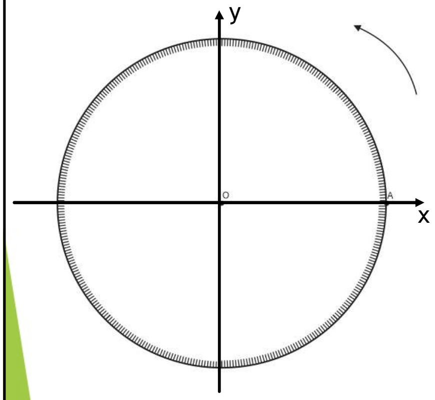
Círculo Trigonométrico

- Os eixos x e y dividem a circunferência em 4 partes iguais, chamadas de quadrantes.



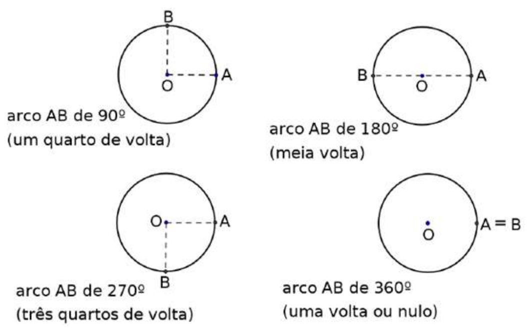
No círculo trigonométrico registramos as medidas dos ângulos que podem estar em **graus** ou em **radianos**.

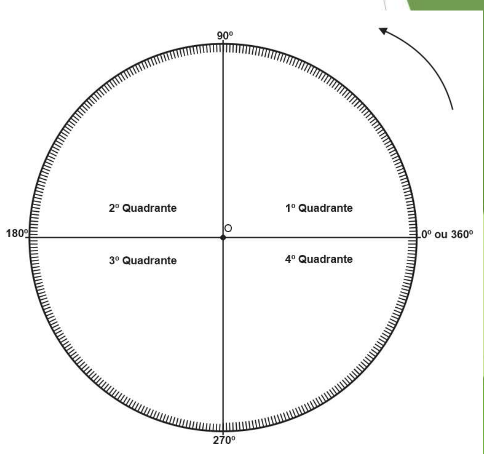
Graus



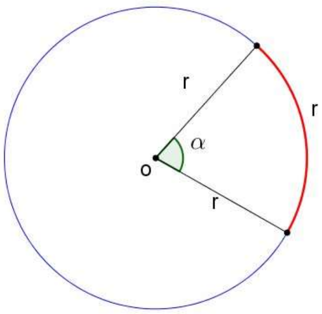
- A unidade principal de medida de um ângulo é o grau (°).
- Quando dividimos uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma dessas partes é um arco de um grau (1°)
- Em outras palavras:
  - 1°(um grau) equivale a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência, ou seja,
  - 1° corresponde a uma das 360 partes em que uma circunferência foi dividida.
  - Assim, uma circunferência inteira possui 360°.

Graus - Quadrantes



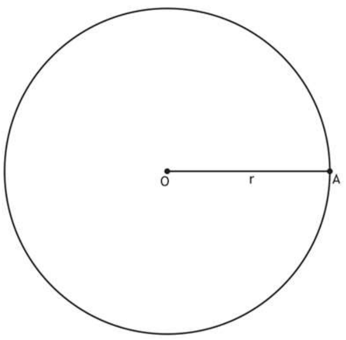


Radianos



- **Arco de 1 radiano (1 rad) é o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.**
- As medidas de arcos de circunferências em graus e em radianos são diretamente proporcionais

Relação entre graus e radianos



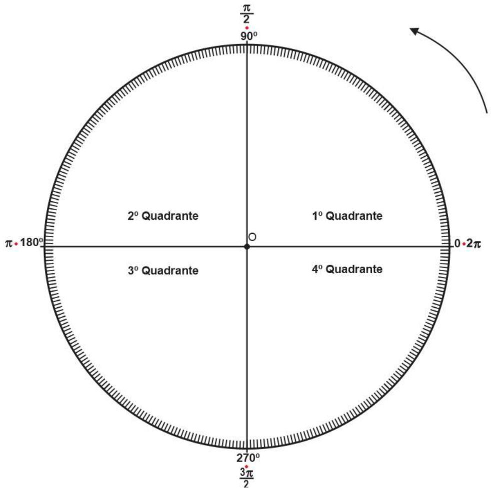
Relação entre graus e radianos

- Sabemos que o comprimento **C** da circunferência de raio **r** e igual a $C = 2\pi r$
- Como cada raio **r** corresponde a 1 rad, podemos afirmar que o arco que corresponde a circunferência completa mede:

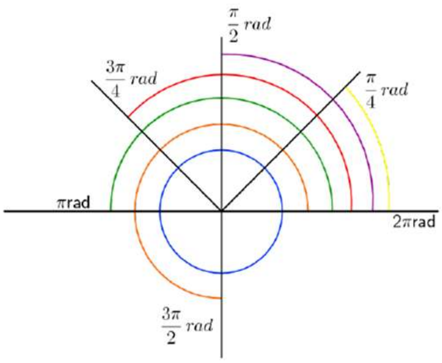
$$2\pi r = 2\pi \times 1\,rad = 2\pi\,rad$$

Assim, podemos dizer que $360° = 2\pi\,rad$ ou $180° = \pi\,rad$

Relação entre graus e radianos



Relação entre graus e radianos



Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Relação entre graus e radianos

Para verificar quanto mede, em grau, um arco de $\frac{\pi}{6}\ rad$, fazemos os seguintes cálculos:

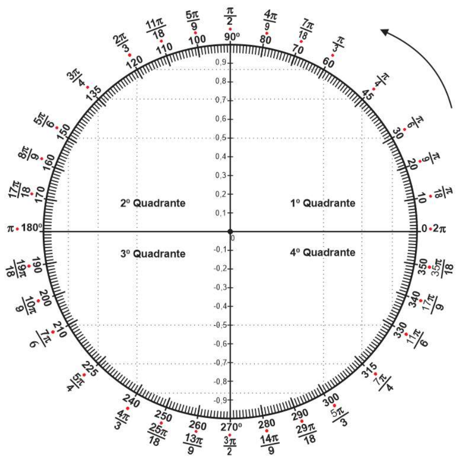
grau	radiano
180	π
x	$\frac{\pi}{6}$

$$\pi \cdot x = 180 \cdot \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} \rightarrow x = 30$$

Assim, um arco de $\frac{\pi}{6}\ rad$ mede 30°

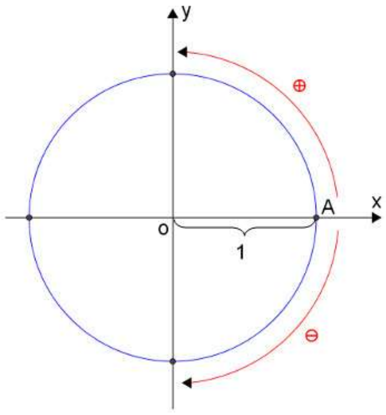
17

Relação entre graus e radianos



18

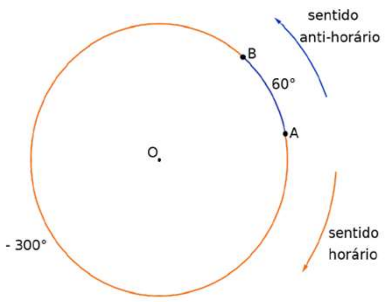
Circunferência orientada no plano cartesiano



- Podemos percorrer uma circunferência em dois sentidos:
  - Sentido horário
  - Sentido anti-horário

- Adotando o sentido anti-horário para as medidas positivas, fica determinado que o sentido oposto (horário) fornece medidas negativas.

Circunferência orientada no plano cartesiano



- Sentido anti-horário:

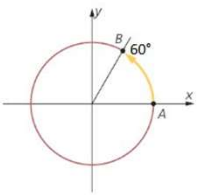
  med(AB) = 60°

- Sentido horário:

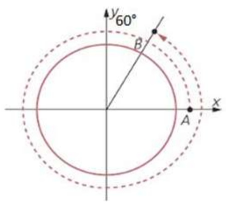
  med(AB) = -300°

Ângulos Côngruos

- Toda vez que o ponto da circunferência é o mesmo para dois arcos diferentes (por exemplo, 0 e 2π), chamamos esses arcos de côngruos ou congruentes.
- Note que todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 2π ou de $360°$, que é o comprimento de cada volta.

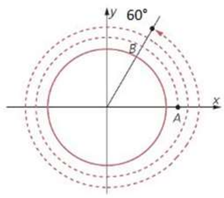


60°



Uma volta inteira (2π ou 360°) e mais 60°

420°



Duas voltas inteiras (2π ou 360°) e mais 60°

780°

$60^o + k \cdot 360^o, k \in \mathbb{Z}$ Onde k é a quantidade de voltas

Ângulos Côngruos

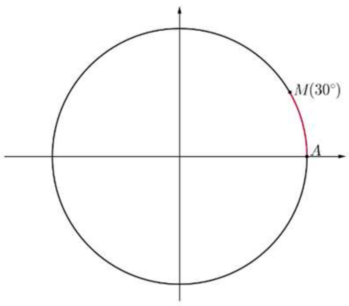
1. Supondo que temos um arco AB de 1520º, esse arco corresponde a qual ângulo do 1º quadrante?

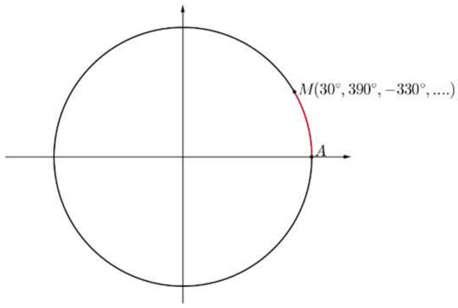
- Primeiro é necessário saber quantas voltas foram dadas:
  - $\frac{1520°}{360°} = 4{,}22$, portanto, 4 voltas + 0,22

- 0,22 corresponde ao ângulo que vamos descobrir:
  - $1520° - (360° \times 4) = 1520° - 1440° = 80°$

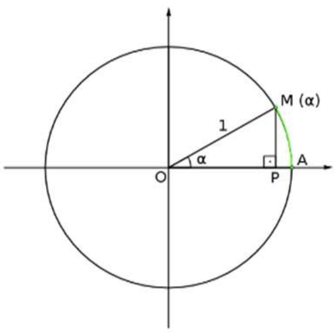
2. Ao dar 6 voltas completas no círculo trigonométrico, qual ângulo obtenho?
   - 360°×6=2160°

Ângulos Côngruos





Seno e Cosseno de um ângulo

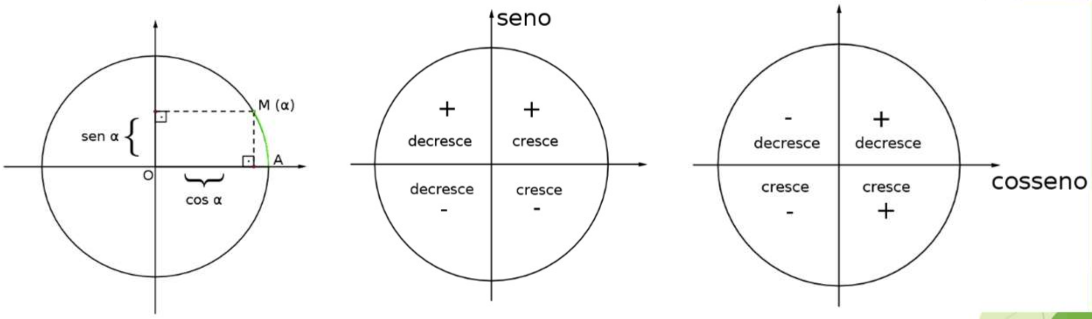


- Considere um arco trigonométrico AM de medida α , com $0° < \alpha < 90°$
- Como o raio da circunferência trigonométrica mede 1 e a medida do ângulo central MÔA é igual à medida do arco AM, em grau, temos no triângulo retângulo OMP

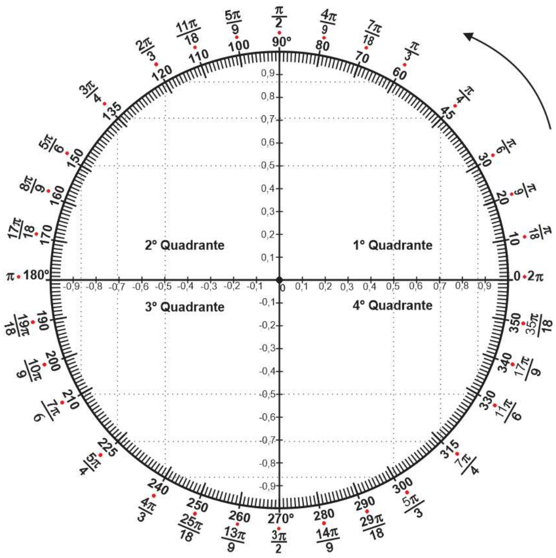
$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

$$sen\, \alpha = \frac{PM}{1} = PM$$

Seno e Cosseno de um ângulo



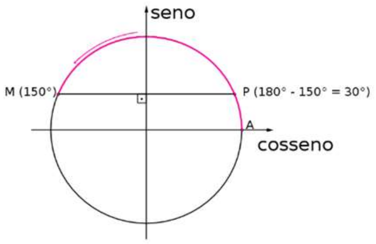
Seno e Cosseno de um ângulo



Seno e Cosseno de um ângulo

- Redução ao primeiro quadrante

Grau ou radianos	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

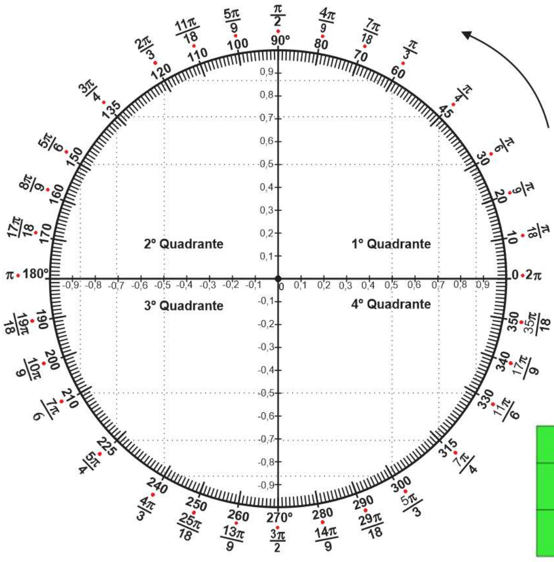


Sen 150° = Sen 30°

cos 150° = - cos 30° = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

27

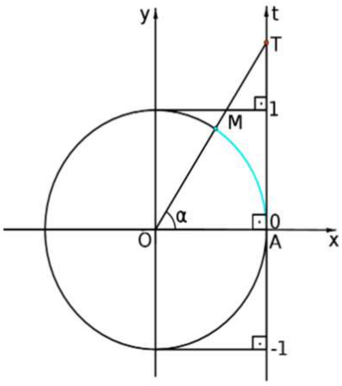
Seno e Cosseno de um ângulo

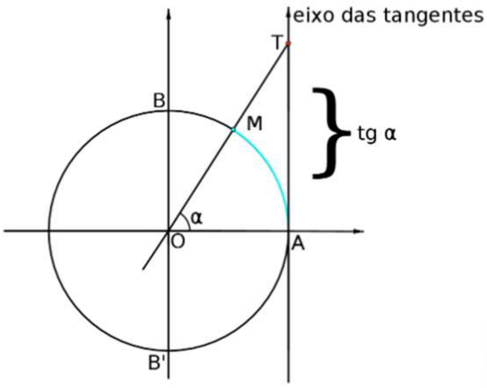


Grau ou radianos	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

28

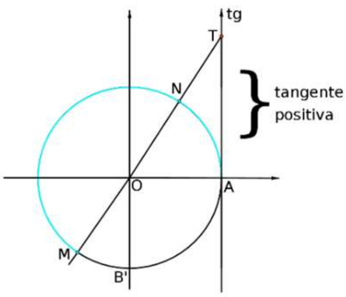
Tangente de um ângulo

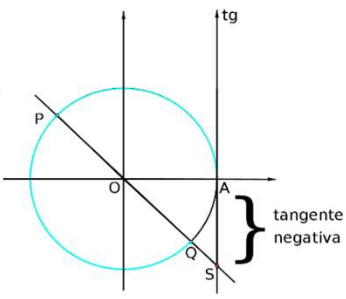


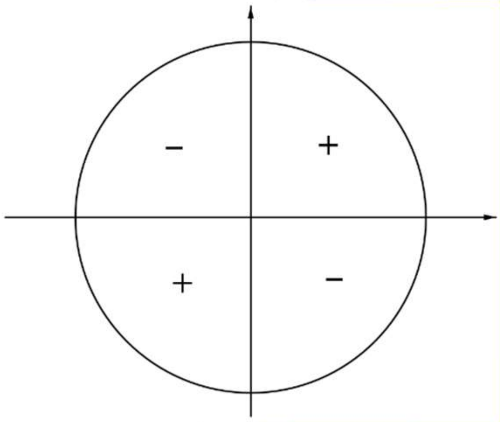


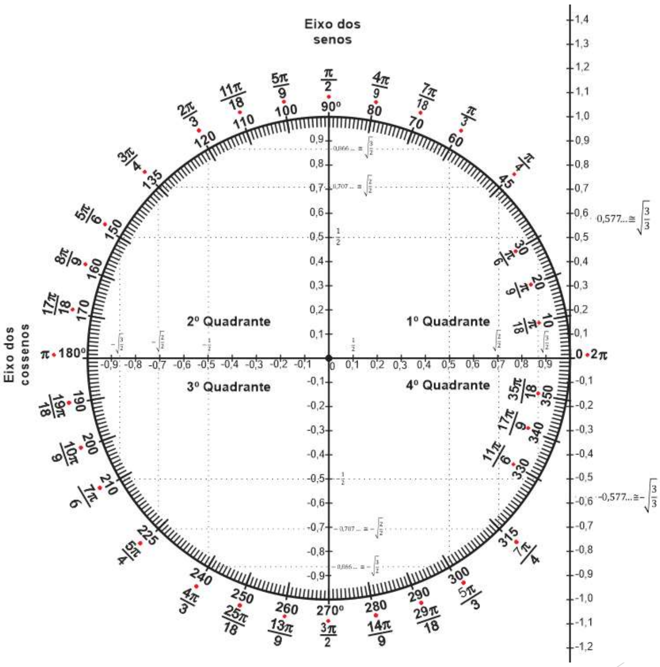
$$No\ triângulo\ retângulo\ AOT,\ temos:\ tg\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Tangente de um ângulo

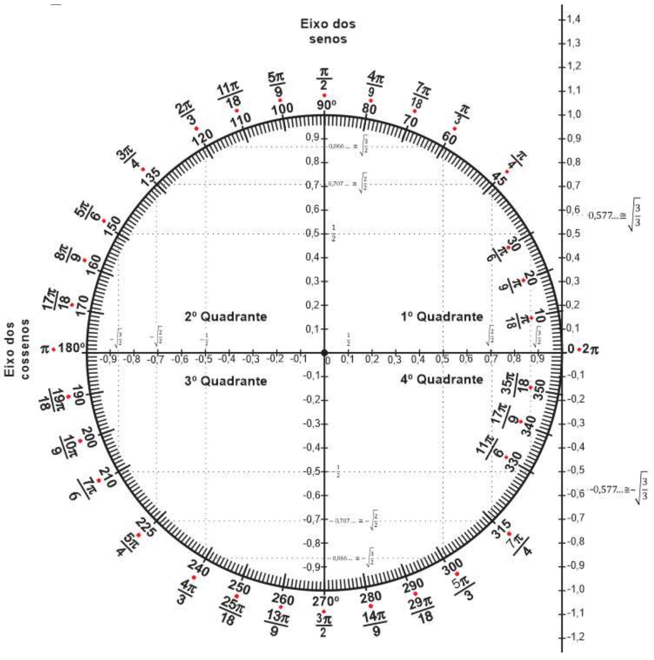








31



Grau ou radianos	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

32

Referências

- https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/circulo-trigonometrico.htm
- https://www.infoescola.com/matematica/circulo-trigonometrico/
- Lummertz, Natália. "Plano de Aula de Matemática, 2º ano do Ensino Médio". Sombrio/SC. Disponível em: http://matinterdisciplinar.pbworks.com/w/file/fetch/88827455/Plano%20de%20aula%20da%20macro%20aula%20Natalia.pdf