Práctico 1

1. Considerar el "plano" $P := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ y las "rectas" como los subconjuntos de P de dos elementos. Verificar que este es un ejemplo donde se satisfacen los axiomas de incidencia pero donde las rectas no tienen una cantidad infinita de puntos.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3$ el espacio vectorial tridimensional sobre los números reales $\mathbb{R}$. Consideremos el plano π de subespacios unidimensionales de V. Éstos serán los puntos. Si $W \subset V$ es un subespacio de V de dimensión 2, entonces el conjunto de puntos contenidos en W será llamado una recta. Mostrar que este modelo cumple con los axiomas de incidencia.

3. Dada una geometría que verifica los siguientes axiomas:

- AXIOMA I': El plano es un conjunto finito de puntos.
- AXIOMA II': Las rectas son subconjuntos propios del plano de exactamente dos puntos.
- AXIOMA III': Dados dos puntos del plano existe una única recta a la cual pertenecen.
- AXIOMA IV': Dada una recta existen exactamente cuatro rectas paralelas a la dada. (Dos rectas se dicen paralelas si son coincidentes o si no tienen ningún punto en común.)

(a) ¿Se puede determinar la cantidad de puntos que tiene esta geometría? ¿Y la cantidad de rectas?
(b) Haga un modelo gráfico para esta geometría
(c) ¿Es el paralelismo una relación de equivalencia?

4. Probar las siguientes afirmaciones.
(a) Sean a, b, c tres puntos sobre una recta con c entre a y b. Entonces $\overline{ac} \cup \overline{cb} = \overline{ab}$ y $\overline{ac} \cap \overline{cb} = \{c\}$.
(b) Sean a y b dos puntos sobre la recta A. Entonces $\overrightarrow{ab} \cup \overrightarrow{ba} = A$ y $\overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{ba} = \overline{ab}$.
(c) Si b pertenece al interior de $\overline{ac}$ entonces c no pertenece al interior de $\overline{ab}$.

5. Dados cuatro puntos a, b, c y d alineados, demostrar que si d está entre a y b entonces también estará entre a y c, o entre b y c.

6. (a) Demostrar, usando los axiomas de orden, que las rectas tienen una cantidad infinita de puntos.
(b) Demostrar que las semirrectas tienen infinitos puntos.
(c) Demostrar que los segmentos tienen infinitos puntos.

7. Demostrar que en un plano π, existen siempre infinitas rectas:
(a) Primero, usando los axiomas de orden.
(b) Luego, sin usar los axiomas de orden.

8. Dado $p \in \pi$, denotamos con H_p el *haz de rectas* que pasan por p.
(a) Demostrar que todo punto del plano pertenece a alguna recta de H_p.
(b) No toda recta del plano, es una recta de H_p.
(c) Demostrar que los axiomas de orden implican que H_p tiene infinitas rectas.
(d) Mostrar con un ejemplo que sin los axiomas de orden se puede construir un plano (que satisfaga los axiomas de incidencia) que no satisfaga (c).

9. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar sus respuestas.

(a) Si C y D semirrectas tales que $C \cap D$ es un punto, entonces C y D son semirrectas opuestas.

(b) Dadas A y B semirrectas contenidas en la recta R, si $A \cup B = R$ entonces $A \cap B$ es un punto.