Práctico 0

1. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X. Demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) $A \subseteq B \iff A \subseteq A \cap B$.

(b) $A \subseteq B \iff A \cup B \subseteq B$.

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow B = A \cup (B \smallsetminus A)$ y $A \cap (B \smallsetminus A) = \emptyset$.

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(f) $A \subseteq B \cap C \Longrightarrow A \subseteq B \quad \wedge \quad A \subseteq C$.

(g) $A \cup B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C \quad \wedge \quad B \subseteq C$.

(h) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

(i) $A \smallsetminus B = A \cap B^c$.

(j) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(k) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.

(a) $A \subseteq B \cup C \Longrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq C$.

(b) $A \subseteq B \cup C \Longrightarrow A \subseteq B \ \vee \ A \subseteq C$.

(c) $A \subseteq B \cap C \Longrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq C$.

(d) $A \cap B \subseteq C \Longrightarrow C^c \subseteq A^c \ \vee \ C^c \subseteq B^c$.

3. Sea $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, f inyectiva $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

4. Bajo las mismas hipótesis del ejercicio anterior, demostrar también:

(a) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si f es inyectiva).

(b) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si f es suryectiva).

(c) $f^{-1}(D^C) = [f^{-1}(D)]^C$.

(d) Si f es inyectiva entonces $f(A^C) \subseteq [f(A)]^C$.

(e) Si f es suryectiva entonces $[f(A)]^C \subseteq f(A^C)$.