Optimización

FAMAF, UNC — 2024

Guía de Ejercicios N°0: Preliminares Matemáticos

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m \geq n$ y rango$(A) = n$. Probar que $A^T A$ es simétrica y definida positiva.

2. Encontrar los autovectores y autovalores de las matrices $A = uv^T$ y $B = uu^T$, donde $u, v \in \mathbb{R}^n$.

3. Probar que los autovectores de una matriz, asociados a autovalores distintos, son linealmente independientes y que si la matriz es simétrica resultan ortogonales.

4. Probar que los autovalores de una matriz simétrica son positivos si y sólo si la matriz es definida positiva.

5. Probar que si λ es una autovalor de una matriz A no singular, entonces $1/\lambda$ es un autovalor de A^{-1}.

6. Probar que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es singular si y sólo si 0 es un autovalor de A.

7. Para cada una de las siguientes sucesiones, probar que converge, determinar su límite, determinar la tasa de convergencia y la respectiva constante.

   a) $x^k = 2^{-k}$;
   b) $x^k = 1 + 5 \times 10^{-2k}$;
   c) $x^k = 2^{-2^k}$;
   d) $x^k = 3^{-k^2}$;

8. Escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 alrededor del punto $x = 0$, para las siguientes funciones:

   a) $\cos(x)$; *b*) $\ln(x + 1)$; *c*) $\exp(x)$.

9. Calcular el desarrollo de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado.

   a) $f(x, y) = (x + y)^2$, en $(a, b) = (0, 0)$; *b*) $f(x, y) = e^{(x+y)}$, en $(a, b) = (0, 0)$.

10. Sea $f(x, y) = xe^y$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$. Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0.98, 0.02)$. Estimar el error cometido.

11. Dados $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $\nabla f(x)$ (*gradiente de* f) al vector columna con coordenadas $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ y por $\nabla^2 f(x)$ (*Hessiana de* f) a la matriz $n\times n$ con coordenadas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. Además, dada $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, denotamos por $J_F(x)$ (*Jacobiana de* f) a la matriz $m \times n$ con coordenadas dadas por $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$. Demostrar que:

    a) si $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$, entonces

    $$\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x - b \qquad \text{y} \qquad \nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T).$$

    b) si $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$, entonces

    $$\nabla f(x) = A^T(Ax - b) \qquad \text{y} \qquad \nabla^2 f(x) = A^T A.$$

c) si $f(x) = \dfrac{1}{2}\|F(x)\|^2$ con $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, entonces

$$\nabla f(x) = J_F(x)^T F(x) \qquad \text{y} \qquad \nabla^2 f(x) = J_F(x)^T J_F(x) + \sum_{j=1}^{m} F_j(x)\nabla^2 F_j(x).$$

d) si $f(x) = g(F(x))$ con $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables, entonces

$$\nabla f(x) = J_F(x)^T \nabla g(F(x)) \text{ y } \nabla^2 f(x) = J_F(x)^T \nabla^2 g(F(x)) J_F(x) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(F(x))\nabla^2 F_j(x).$$

12. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, se define $q(x) = f(Ax+b)$ con $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Calcular el gradiente y la Hessiana de la función q.

13. Dibujar las curvas de nivel de las siguientes cuadráticas:

    a) $f(x,y) = x^2 - y^2 - x + y - 1$;

    b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$;

    c) $f(x,y) = xy$;

    d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$.

14. Analizar la geometría de las curvas de nivel de una función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica, $b \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}$, en los siguientes casos:

    a) $A > 0$;

    b) $A \geq 0$ y existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $Ax + b = 0$;

    c) $A \geq 0$ y no existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $Ax + b = 0$;

    d) A es indefinida y no singular.

15. Para los siguientes casos, escribir un algoritmo e implementarlo, realizando diferentes experimentos numéricos. Además, calcular el costo computacional en términos de la dimensión n de las matrices.

    a) Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, calcular $C = AB$, de 6 formas distintas.

    b) Resolver el sistema triangular $Ax = b$, donde A $\mathbb{R}^{n\times n}$ es una matrix triangular inferior (o superior).

    c) Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica y definida positiva, calcular la factorización de Cholesky.

    d) Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, y $b \in \mathbb{R}^n$, resolver $Ax = b$, usando los items anteriores.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Escribir un algoritmo que implemente los métodos de bisección y Newton para resolver la ecuación $f(x) = 0$. Implementar este algoritmo para la función $f(x) = arctan(x)$.

    a) Analizar numéricamente la convergencia de ambos métodos (ver cantidad de iteraciones y región de convergencia para distintas condiciones iniciales)

    b) Considerar una manera de combinarlos para obtener una convergencia global *eficiente*.