Optimización

FAMAF, UNC — 2024

Guía de Ejercicios N°5: Optimización con restricciones

1. Determinar los máximos o mínimos de las siguientes funciones

   a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^3, \quad$ sujeto a $\quad 2x_1 + 3x_2 = 4.$

   b) $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2, \quad$ sujeto a $\quad x_1^2 + x_2^2 = 25.$

   c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \quad$ sujeto a $\quad 3x_1^2 + x_2^2 = 9.$

   d) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3, \quad$ sujeto a $\quad 2x_1 + x_2 = 1.$

2. Considerar el problema de encontrar la distancia mínima a un punto $r \in \mathbb{R}^n$ desde un conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$.

   a) Escribir una formulación para este problema.

   b) Probar que la solución está dada por

   $$x^* = r + \frac{b - a^T r}{a^T a} a.$$

3. Considerar el problema

   $$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & f(x) = c^T x \\ \text{s. a} & Ax = b. \end{array}$$

   Probar que si el problema tiene un punto factible, entonces el problema es irrestricto, es decir, $f(x)$ no tiene máximo ni mínimo en el conjunto factible, o todo punto factible es óptimo.

4. Considerar el problema

   $$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & f(x) = x_1 \\ \text{s. a} & x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \\ & x_1^2 \geq 1. \end{array}$$

   Graficar el conjunto factible. Usar el gráfico para encontrar todos los minimizadores locales. Determinar si también son minimizadores globales.

5. Considerar el problema

   $$\begin{array}{cl} \text{Maximizar} & f(x_1, x_2) = x_2^3 \\ \text{s. a} & (x_1 - x_2)^3 \geq 0, \\ & (x_1 + x_2 - 2)^3 \leq 0. \end{array}$$

   Resuelva y analice las condiciones de optimalidad.

6. Encontrar todas las soluciones globales del problema de maximizar x_1 sujeta a las restricciones:

   $$\begin{array}{rcl} x_2 - \operatorname{sen}(x_1) & = & 0 \\ x_2^2 - 1 & = & 0 \\ -10 \leq & x_1 & \leq 10. \end{array}$$

7. Considerar el problema

   $$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & x_1 \\ \text{s. a} & x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq x_1^3. \end{array}$$

   ¿Cual es la solución? ¿Se verifican las condiciones KKT? ¿Por qué?

8. Resolver el problema
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{s. a} & \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ & \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1. \end{array}$$

9. Considerar el problema cuadrático
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \\ \text{s. a} & Ax = b, \end{array}$$
Probar que x^* es mínimo local si y sólo si es mínimo global.

10. Considerar el problema cuadrático
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \\ \text{s. a} & Ax \geq b, \end{array}$$
Con Q simétrica. ¿Es verdad que todo mínimo local es mínimo global?

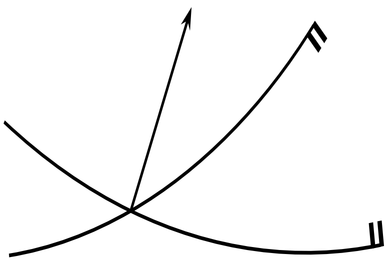
11. Probar el siguiente resultado: Sea x^* solución del problema
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \\ \text{s. a} & \sum_{j=1}^n x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n. \end{array}$$
con f_j diferenciables. Entonces existe un número η tal que
$$\begin{array}{lll} f_j'(x_j) = \eta & \text{si} & x_j^* > 0, \\ f_j'(x_j) \geq \eta & \text{si} & x_j^* = 0. \end{array}$$

12. Considerar el problema
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x) = c^T x \\ \text{s. a} & x^T Q x \leq 1, \end{array}$$
donde Q es una matriz simétrica y definida positiva.
    a) Resolver el problema y determinar cual es el valor objetivo óptimo.
    b) Resolver el problema cambiando maximizar por minimizar.

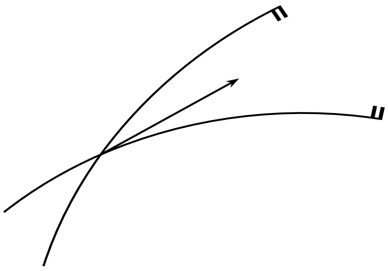
13. Determinar los minimizadores/maximizadores de los siguientes problemas usando las condiciones KKT. Ayuda: graficar los respectivos conjuntos factibles.
    a) $f(x_1, x_2) = x_2$, sujeto a $x_1^2 + x_2^2 \leq 1, -x_1 + x_2^2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq 0$.
    b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$, sujeto a $x_1^3 + x_2^3 \leq 1, x_1^2 + x_2^2 \geq 1$.

14. Resuelva los siguientes problemas usando las condiciones KKT:
    a) Minimizar $\displaystyle\sum_{i=1}^n (1/x_i)$ s. a $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$, $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$;
    b) Maximizar $\Pi_{i=1}^n x_i$ s. a $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

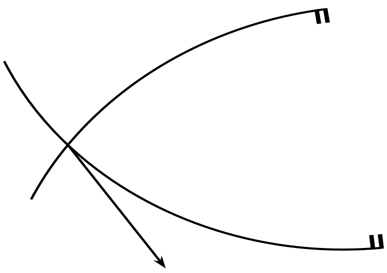
15. En los siguientes gráficos se muestran dos restricciones $g(x) \leq 0$, $h(x) \leq 0$ y el gradiente de una función f en un punto factible $\hat{x}$. En cada caso diga, si el punto $\hat{x}$ es un maximizador, un minimizador o *nada*.



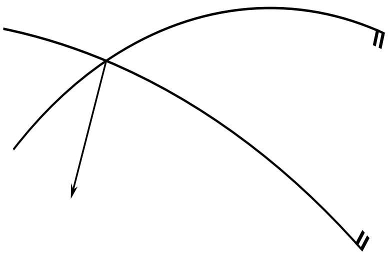
a)



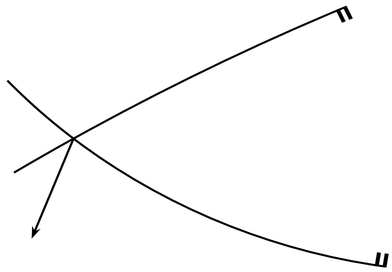
b)



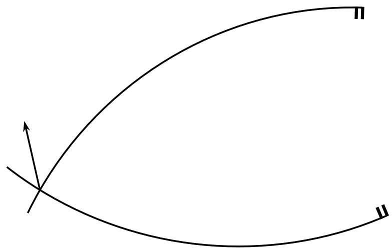
c)



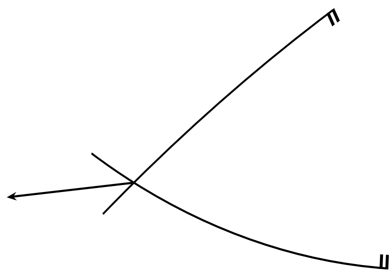
d)



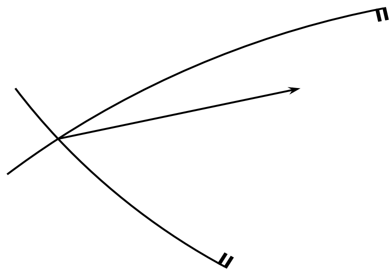
e)



f)



g)



h)