Optimización

FAMAF, UNC — 2024

Guía de Ejercicios N°4: Búsqueda lineal y región de confianza

1. Probar que para un problema de minimización irrestricta, la condición de que:

   "Si x^* es un mínimo local de una función f,
   entonces $\nabla f(x^*)^T p \geq 0$ para toda dirección factible p."

   Sólo puede ser satisfecha si el gradiente en x^* es 0.

2. Sea M una matriz definida positiva y sea $p = -M^{-1}\nabla f(x^k)$. Probar que p es una dirección de descenso para f en x^k.

3. Un vector p es una *dirección de curvatura negativa* para la función f en el punto x si $p^T\nabla^2 f(x)p < 0$. Probar que dicha dirección existe si y sólo si al menos un autovalor de $\nabla^2 f(x)$ es negativo. Además probar que, si una dirección de curvatura negativa existe, entonces también existe una dirección de curvatura negativa que es también una dirección de descenso.

4. Mostrar un ejemplo donde si p es una dirección tal que $\nabla f(x)p = 0$ entonces p puede ser de descenso, ascenso o ninguna de las dos.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, sea $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$, donde $\lambda_k \geq \bar{\lambda} > 0$ para todo $k \geq 0$. Suponga que $x^k \to x^*$. Probar que $\nabla f(x^*) = 0$.

6. Considerar el problema de minimización irrestricta

   $$\text{minimizar} f(x_1, x_2) = (x_1^4 + 2x_1^3 + 24x_1^2) + (x_2^4 + 12x_2^2)$$

   con punto inicial $x^0 = (2, 1)$ y cota inicial de región de confianza $\delta_0 = 1$. Realizar 2 iteraciones del algoritmo del método de región de confianza.

7. Suponer que en un método de región de confianza $p_k = \alpha v$ donde v es algún vector no nulo. Mostrar como determinar α tal que p_k resuelve el subproblema de región de confianza

   $$\begin{array}{ll} \underset{p}{\text{minimizar}} & q(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \dfrac{1}{2}p^T\nabla^2 f(x_k)p \\ \text{sujeto a} & \|p\| \leq \delta_k. \end{array}$$