Optimización

FAMAF, UNC — 2024

Guía de Ejercicios N°1: problemas de minimización irrestricta y condiciones de optimalidad

1. Analizar, con ejemplos, que ocurre cuando se eliminan las hipótesis de continuidad o compacidad en el teorema de Bolzano-Weierstrass.

2. Encontrar un ejemplo donde todos los puntos de Ω sean minimizadores locales pero $f(x) \neq f(y)$ para $x \neq y$.

3. Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $f(x) = c^T x$ con $c, x \in \mathbb{R}^n$, probar que f es una una función convexa y cóncava. ¿Y qué sucede si f es afín ($f(x) = c^T x + l$ con $l \in \mathbb{R}$)?

5. Sea f definida en un conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$. Probar que f es convexa si y sólo si

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i),$$

para todo $x_1, \ldots, x_k \in S$ y $0 \leq \alpha_i \leq 1$ con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

6. Probar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para un conjunto de números positivos:

$$(x_1 + \cdots + x_k)/k \geq (x_1 \cdots x_k)^{1/k}.$$

Sugerencia: Utilizar el ejercicio anterior en la función $f(x) = -\log(x)$

7. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar f es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

8. Dados los números reales $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n$. Hallar la solución de los siguientes problemas.

   a) Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$;

   b) Minimizar Máximo $\{|x - a_i|, i = 1, \ldots, n\}$;

   c) Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|^2$;

   d) Maximizar $\Pi_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

9. Graficar la función $f(x) = (x + 1)x(x - 2)(x - 5) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x$. Graficar esta función y localizar (aproximadamente) los minimizadores/maximizadores locales y globales.

10. Encontrar los puntos estacionarios de $f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$. ¿Cuáles de tales puntos son minimizadores, maximizadores, locales o globales?

11. Calcular los puntos críticos y sus Hessianas correspondientes de las siguientes funciones $f(x, y) = xe^{-y^2} + x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^4$, $h(x, y) = x^4 + y^4$, $w(x, y) = xy$. Son maximizadores, minimizadores, puntos de silla?

12. Sea f 2 veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Su matriz Hessiana es necesariamente definida positiva o negativa?

13. Dar ejemplos de funciones que satisfagan las siguientes propiedades:

    a) x_* es un minimizador local de f en Ω pero $\nabla f(x_*) \neq 0$;

    b) x_* es un minimizador local de f en Ω pero $\nabla^2 f(x_*)$ no es semidefinida positiva;

    c) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, $\nabla f(x_*) = 0$ pero x_* no es un minimizador local de f;

    d) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, $\nabla f(x_*) = 0, \nabla^2 f(x_*) \geq 0$ pero x_* no es un minimizador local;

    e) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, x_* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x_*)$ no es definida positiva.

14. Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que $\hat{x} = (0,0)$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$ pero $\hat{x}$ no es un minimizador local de f.

15. Considere el sistema no lineal

    $$f_i(x) = 0, \quad f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m.$$

    ¿Cómo resolvería el sistema con técnicas de minimización irrestricta?

16. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con derivadas continuas. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|F(x)\|_2^2$. Sea x_* un minimizador local de f tal que $J_F(x_*)$ es no singular. Probar que x_* es solución del sistema $F(x) = 0$.

17. Considerar la función $f(x) = (x_1 - 1)^2 x_2$ y puntos de la forma $\hat{x} = (1, x_2)$.

    a) Analizar las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden para esos puntos;

    b) ¿qué se puede afirmar sobre $\hat{x}$ utilizando tales condiciones?;

    c) usar la expresión de la función para obtener afirmaciones más concluyentes sobre los puntos $\hat{x}$.