Optimización

FAMAF, UNC — 2024

Guía de Ejercicios N°3: Sistemas de ecuaciones no lineales

1. Implementar los siguientes algoritmos para resolver sistemas no lineales: método de Newton, método de Newton estacionario, método de Newton estacionario con recomienzos cada m iteraciones y el método de Broyden. Los datos de entrada de estos algoritmos deberán ser: una aproximación inicial, una tolerancia para el criterio de parada, una cantidad máxima de iteraciones y el parámetro m para el método de Newton estacionario con recomienzos. La función y la matriz jacobiana, cuando corresponda, deberán escribirse en otra subrutina o función independiente. La salida deberá incluir: el valor del minimizador, el valor de mínimo, el número de iteraciones y el error en x, en aquellos casos que se conozca la solución.

2. Aplicar todas las implementaciones anteriores para resolver $F(x) = 0$, para las siguientes funciones y comparar los resultados obtenidos con los diferentes métodos.

   a)
   $$F(x) = \begin{pmatrix} (x_1+3)(x_2^3-7)+18 \\ \operatorname{sen}(x_2 e^{x_1}-1) \end{pmatrix}, \qquad x^* = (0,1), \quad x^{(0)} = (-0{,}5, 1{,}4),$$

   b)
   $$F(x) = \begin{pmatrix} x_1+x_2-3 \\ x_1^2+x_2^2-9 \end{pmatrix}, \qquad x^* = (0,3), (0,3) \quad x^{(0)} = (1,5),$$

   c)
   $$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2-2 \\ e^{x_1-1}+x_2^3-2 \end{pmatrix}, \qquad x^* = (1,1), \quad x^{(0)} = (1{,}5, 2).$$

   d)
   $$F(x) = \begin{pmatrix} 10(x_2-x_1^2) \\ 1-x_1 \end{pmatrix}, \qquad x^* = (1,1), \quad x^{(0)} = (-1{,}2; 1).$$

   e) F dada por:
   $f_1(x) = (3-2x_1)x_1 - 2x_2 + 1$
   $f_i(x) = (3-2x_i)x_i - x_{i-1} - 2x_{i+1} + 1, \qquad i = 2\ldots 9$
   $f_{10}(x) = (3-2x_{10})x_{10} - x_9 + 1$
   $$x^{(0)} = (-1,-1,\ldots,-1)$$

   Nota: para comparar la performance de estos algoritmos, para cada problema, se puede hacer una tabla que tenga en la primera columna el número de iteración, y luego 2 columnas por cada algoritmo: la primera contiene el error $\|x^{(k)}-x^*\|_2$ y la segunda contiene la tasa de convergencia $\|x^{(k+1)}-x^*\|_2/\|x^{(k)}-x^*\|_2$.

3. Utilizar alguna rutina del lenguaje de programación que decida usar para graficar las curvas que definen el sistema lineal y determinar una aproximación inicial de la solución.

   a)
   $$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^2-20x_1+\frac{1}{4}x_2^2+8 \\ \dfrac{1}{2}x_1x_2^2+2x_1-5x_2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$F(x) = \left(\begin{array}{c} \sin(4\pi x_1 x_2) - 2x_2 - x_1 \\ \dfrac{4\pi - 1}{4\pi}(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

4. Aplicar alguna implementación del ejercicio 1 para resolver los problemas del ejercicio anterior con el $x(0)$ encontrado.

5. Utilizar las implementaciones de los algoritmos de Newton y de Broyden para resolver los siguientes sistemas no lineales. Comparar ambos algoritmos analizando el error $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty$

   a)
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - \cos x_2 x_3 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} & = & 0 \quad \text{con} \quad x^{(0)} = (0{,}1, 0{,}1, -0{,}1). \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0{,}1)^2 + \sin x_3 + 1{,}06 & = & 0 \end{array} \right.$$

   b)
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - \cos x_2 x_3 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} & = & 0 \quad \text{con} \quad x^{(0)} = (1, 1, -1). \\ x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} & = & 0 \end{array} \right.$$

6. Un interesante experimento biológico es determinar cuál es la temperatura máxima, X_M, en la cual varias especies de hidras pueden sobrevivir sin acortar su expectativa de vida. Una manera de aproximar la solución de este problema usa un ajuste de cuadrado mínimos pesados de la forma
$$f(x) = y = \frac{a}{(x - b)^c},$$
a un conjunto de datos experimentales. Los valores x de los datos corresponden a la temperatura del agua y la constante b es la asíntota del gráfico de f y como tal una aproximación de X_M.

   a) Probar que elegir a, b y c para minimizar
$$\sum_{i=1}^{n} \left[w_i y_i - \frac{a}{(x_i - b)^c} \right]^2,$$
   se reduce a resolver el siguiente sistema no lineal,
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - b)^{2c}} \right) & = & a \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(x_i - b)^{2c+1}} \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i y_i}{(x_i - b)^{c+1}} \right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(x_i - b)^{2c}} \right) & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i y_i}{(x_i - b)^c} \right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\ln(x_i - b)}{(x_i - b)^{2c}} \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{w_i y_i \ln(x_i - b)}{(x_i - b)^c} \right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(x_i - b)^{2c}} \right) & = & 0 \end{array} \right.$$

   b) Resolver el sistema no lineal para la especie cuyos datos corresponden a la siguiente tabla. Usar los pesos $w_i = \ln(y_i)$.

i	1	2	3	4
y_i	2.4	3.8	4.75	21.6
x_i	31.8	31.5	31.2	30.2