Optimización

FAMAF, UNC — 2024

Guía de Ejercicios N°1: problemas de minimización irrestricta y condiciones de optimalidad

1. Analizar, con ejemplos, que ocurre cuando se eliminan las hipótesis de continuidad o compacidad en el teorema de Bolzano-Weierstrass.

2. Encontrar un ejemplo donde todos los puntos de Ω sean minimizadores locales pero $f(x) \neq f(y)$ para $x \neq y$.

3. Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $f(x) = c^T x$ con $c, x \in \mathbb{R}^n$, probar que f es una una función convexa y cóncava. ¿Y qué sucede si f es afín ($f(x) = c^T x + l$ con $l \in \mathbb{R}$)?

5. Sea f definida en un conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$. Probar que f es convexa si y sólo si

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i),$$

   para todo $x_1, \ldots, x_m \in S$ y $0 \leq \alpha_i \leq 1$ con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

6. Probar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para un conjunto de números positivos:

$$(x_1 + \cdots + x_k)/k \geq (x_1 \cdots x_k)^{1/k}.$$

   Sugerencia: Utilizar el ejercicio anterior en la función $f(x) = -\log(x)$

7. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar f es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

8. Dados los números reales $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n$. Hallar la solución de los siguientes problemas.

   a) Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$;

   b) Minimizar Máximo $\{|x - a_i|, i = 1, \ldots, n\}$;

   c) Minimizar $\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|^2$;

   d) Maximizar $\Pi_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

9. Graficar la función $f(x) = (x + 1)x(x - 2)(x - 5) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x$. Graficar esta función y localizar (aproximadamente) los minimizadores/maximizadores locales y globales.

10. Encontrar los puntos estacionarios de $f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$. ¿Cuáles de tales puntos son minimizadores, maximizadores, locales o globales?

11. Calcular los puntos críticos y sus Hessianas correspondientes de las siguientes funciones $f(x, y) = xe^{-y^2} + x^2$, $g(x, y) = x^2 + y^4$, $h(x, y) = x^4 + y^4$, $w(x, y) = xy$. Son maximizadores, minimizadores, puntos de silla?

12. Sea f 2 veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n$ tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Su matriz Hessiana es necesariamente definida positiva o negativa?

13. Dar ejemplos de funciones que satisfagan las siguientes propiedades:

    a) x_* es un minimizador local de f en Ω pero $\nabla f(x_*) \neq 0$;

    b) x_* es un minimizador local de f en Ω pero $\nabla^2 f(x_*)$ no es semidefinida positiva;

    c) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, $\nabla f(x_*) = 0$ pero x_* no es un minimizador local de f;

    d) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, $\nabla f(x_*) = 0, \nabla^2 f(x_*) \geq 0$ pero x_* no es un minimizador local;

    e) $x_* \in \Omega, \Omega$ abierto, x_* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x_*)$ no es definida positiva.

14. Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que $\hat{x} = (0,0)$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$ pero $\hat{x}$ no es un minimizador local de f.

15. Considere el sistema no lineal

$$f_i(x) = 0, \quad f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m.$$

    ¿Cómo resolvería el sistema con técnicas de minimización irrestricta?

16. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con derivadas continuas. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|F(x)\|_2^2$. Sea x_* un minimizador local de f tal que $J_F(x_*)$ es no singular. Probar que x_* es solución del sistema $F(x) = 0$.

17. Considerar la función $f(x) = (x_1 - 1)^2 x_2$ y puntos de la forma $\hat{x} = (1, x_2)$.

    a) Analizar las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden para esos puntos;

    b) ¿qué se puede afirmar sobre $\hat{x}$ utilizando tales condiciones?;

    c) usar la expresión de la función para obtener afirmaciones más concluyentes sobre los puntos $\hat{x}$.

18. Considerar el problema

$$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & f(x) = x_1 \\ \text{s. a} & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1^2 \geq 1. \end{array}$$

19. En $\mathbb{R}^2$ considere las siguientes restricciones: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0$. Probar que $(1,0)$ es un punto factible pero no es un punto regular.

20. Considere el problema

$$\begin{array}{cl} \text{Maximizar} & x_2^3 \\ \text{s. a} & (x_1 - x_2)^3 \geq 0 \\ & (x_1 + x_2 - 2)^3 \leq 0. \end{array}$$

    Resuelva y analice las condiciones de optimalidad.

21. Encuentre todas las soluciones globales del problema de maximizar x_1 sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rcl} x_2 - \text{sen} x_1 & = & 0 \\ x_2^2 - 1 & = & 0 \\ -10 \leq x_1 & \leq & 10. \end{array}$$

22. Considere el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & x_1 \\ \text{s. a} & x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq x_1^3. \end{array}$$

¿Cual es la solución? ¿Se verifican las condiciones KKT? ¿Por qué?

23. Resolver el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{s. a} & \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ & \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1. \end{array}$$

24. Considerar el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x) = c^T x \\ \text{s. a} & x^T Q x \leq 1, \end{array}$$

donde Q es una matriz simétrica y definida positiva.

a) Resolver el problema y determinar cual es el valor objetivo óptimo.

b) Resolver el problema cambiando maximizar por minimizar.

25. Determinar los minimizadores/maximizadores de los siguientes problemas usando las condiciones KKT. Ayuda: graficar los respectivos conjuntos factibles.

a) $f(x_1, x_2) = x_2$, sujeto a $x_1^2 + x_2^2 \leq 1, -x_1 + x_2^2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq 0$.

b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$, sujeto a $x_1^3 + x_2^3 \leq 1, x_1^2 + x_2^2 \geq 1$.

26. Resuelva los siguientes problemas usando las condiciones KKT:

a) Minimizar $\displaystyle\sum_{i=1}^n (1/x_i)$ s. a $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$, $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$;

b) Maximizar $\Pi_{i=1}^n x_i$ s. a $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = n$.

27. En los siguientes gráficos se muestran dos restricciones $g(x) \leq 0$, $h(x) \leq 0$ y el gradiente de una función f en un punto factible $\hat{x}$. En cada caso diga, si el punto $\hat{x}$ es un maximizador, un minimizador o *nada*.

a) `curva_a.pdf`

b) `curva_b.pdf`

c) `curva_c.pdf`

d) `curva_d.pdf`

e) `curva_e.pdf`

f) `curva_f.pdf`

g) `curva_g.pdf`

h) `curva_h.pdf`