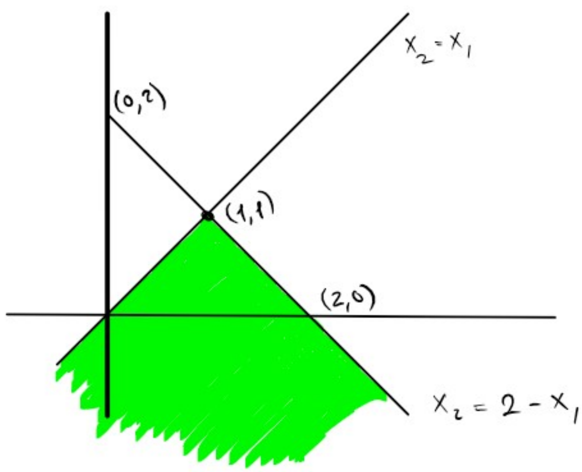
Práctico 5 - Ejercicio 5

Monday, November 4, 2024 11:42 PM

Considerar el problema
$$\begin{cases} \text{maximizar} & f(x_1, x_2) = x_2^3 \\ \text{s.a.} & (x_1 - x_2)^3 \geq 0 \\ & (x_1 + x_2 - 2)^3 \leq 0 \end{cases}$$

Como $(x_1 - x_2)^3 \geq 0 \iff x_1 - x_2 \geq 0 \iff x_1 \geq x_2$

$(x_1 + x_2 - 2)^3 \geq 0 \iff x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \iff x_1 \geq 2 - x_2$



De la región factible el máximo de $f(x_1, x_2)$ es en $(x_1, x_2) = (1, 1)$

Luego la función Lagrangiano es (minimizando $-f(x_1, x_2)$)

$$L(x, \mu) = -x_2^3 + \mu_1 (x_2 - x_1)^3 - \mu_2 (x_1 + x_2 - 2)^3$$

Las condiciones de optimalidad son

$$\nabla_x L(x, \mu) = \begin{bmatrix} -3\mu_1 (x_2 - x_1) - 3\mu_2 (x_1 + x_2 - 2) \\ \\ -3x_2^2 + 3\mu_1 (x_2 - x_1) - 3\mu_2 (x_1 + x_2 - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3x_2^2 + 3\mu_1(x_2-x_1) - 3\mu_2(x_1+x_2-2) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Las cond. de complementaridad y factibilidad son

$$\mu_1(x_2-x_1)^3 = 0, \quad \mu_1 \geq 0$$
$$\mu_2(x_1+x_2-2)^3 = 0, \quad \mu_2 \geq 0$$
$$(x_2-x_1)^3 \geq 0$$
$$(x_1+x_2-2)^3 \geq 0$$

Veamos que el maximizado no puede ser un punto regular.

- Si ambas restricciones están activas

$$x_1 = x_2 \quad y \quad x_1 + x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

Pero entonces no existen $\mu_1^* > 0$, $\mu_2^* > 0$ tq

$\nabla_x L((1,1),(\mu_1^*,\mu_2^*)) = 0$ tenga solución

$$\nabla_x L((1,1),(\mu_1^*,\mu_2^*)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto no es regular

- Si está sólo activa $x_2 - x_1 = 0$ $(\mu_1 > 0)$

entonces $\mu_2 = 0$ y $x_2 = x_1$, luego entonces $\mu_2 = 0$ y $x_2 = x_1$, luego

$$\nabla_x L\left((x_1, x_1), (\mu_1, 0)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Análogo si está activa la otra restricción)

- Si ninguna restricción está activa entonces

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $x_2 - x_1 > 0$ y $x_1 + x_2 - 2 > 0$

$$\nabla_x L\left((x_1, x_2), (0,0)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_2 = 0$$

Pero luego $-f(x_1, 0) = 0 > -1 = -f(1,1)$

$\therefore$ $(x_1, x_2) = (1,1)$ es solución del problema pero no es regular