Optimización

FAMAF, UNC — 2024

Guía de Ejercicios N°2: Problemas de minimización de cuadráticas

1. Considere la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Sea x^* un minimizador local de f. Probar que x^* es un minimizador global.

2. Supongamos que se utiliza un método de direcciones de descenso con búsqueda lineal exacta para minimizar una función cuadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Mostrar que el paso óptimo está dado por

$$\lambda = -\frac{d^T \nabla q(x)}{d^T \nabla^2 q(x) d},$$

donde d es la dirección de descenso usada a partir del punto x.

3. Probar que en el método del gradiente con búsqueda lineal exacta se cumple que

$$\nabla^T f(x^k) \nabla f(x^{k+1}) = 0.$$

4. Dibujar las curvas de nivel de la función $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$. Encontrar el punto x^* que minimiza f. Probar que el método del gradiente, aplicado a partir de $x^0 = (0, 0)$ no puede converger a x^* en un número finito de pasos, si usamos búsqueda lineal exacta. ¿Existe algún punto x^0 para el cual el método converge en un número finito de pasos?

5. Aplicar el método del máximo descenso con búsqueda lineal exacta para minimizar la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$ con

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donde γ es un parámetro (usar, por ejemplo, $\gamma = 1, 10, 100, 1000$). Analizar la convergencia de la sucesión generada por el método iterativo, realizando por lo menos 4 iteraciones, o varias más en una computadora.

6. Considerar el problema de minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$.

   a) si se utiliza el método del máximo descenso con búsqueda lineal exacta, comenzando con $x^0 = (2, 1)$, la sucesión generada por el algoritmo se puede escribir como

   $$x^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}.$$

   b) Mostrar que $f(x^{k+1}) = f(x^k)/9$.

   c) Analizar la convergencia en este caso.

7. Probar que el método de gradientes conjugados converge en una iteración si $A = kI$, donde k es una constante positiva.

8. Implementar el método del máximo descenso y el método de gradientes conjugados para minimizar una cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, donde A es simétrica y definida positiva. Usar el

vector nulo como vector inicial para ambas implementaciones. Comparar ambas implementaciones usando

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{y } b = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 16 \\ 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

9. El problema de selección de un portafolio de acciones según el modelo de Markowitz es un modelo de optimización para equilibrar el retorno con el riesgo de un portafolio. Considerar la siguiente variante del problema donde se quiere minimizar el riesgo de las inversiones y se tiene la restricción de no invertir más capital del que se dispone. Esto es, resolver

$$\begin{array}{cl} \text{Minimizar} & f(x) = \frac{1}{2}x^T S x \\ \text{s. a} & \|x\| \leq b, \end{array}$$

donde S es la matríz de covarianza de los retornos posibles y b es la cota del presupuesto disponible. Considerar los datos del Merval semanal de empresas argentinas del archivo `merval_semanaARS.csv`, donde las columnas corresponden a las empresas y las filas al número de semana, si se define el retorno de una empresa para la semana i, como el cociente entre el valor de la semana i dividido por el valor inicial, resolver:

a) El problema de minimización sin restricciones.

b) El problema de minimización con la restricción con b= 1000.