14) a) $A > 0$

Ejemplo: Sea $f(x,y) = (x \;\; y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x^2 + y^2$

C curva de nivel es $C = \{(x,y) \,/\, f(x,y) = k\}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = k \longleftarrow$ es una circunferencia

Si $A > 0$ y simétrica $\exists\, Q$ tq $Q^T \cdot Q = Id$

y $Q^T \cdot A \cdot Q = D$ con D mat. diagonal con los autovalores de A ($d_1 > 0$ y $d_2 > 0$)

Entonces

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot A x + b^T \cdot x + c$$

$$= \frac{1}{2} x^T \left(Q^T \cdot D\, Q\right) x + b^T \cdot Q^T Q \cdot x + c$$

$$= \frac{1}{2} (Qx)^T \cdot D\, (Qx) + b^T \cdot Q^T (Qx) + c$$

$$= \frac{1}{2} z^T \cdot D \cdot z + b^T \cdot Q^T \cdot z + c \qquad (\text{con } z = Qx)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(d_1^2 \cdot z_1 + d_2^2 \cdot z_2\right) + e_1 z_1 + e_2 z_2 + c}$$

es la curva de una elipse

$\therefore$ las curvas de nivel son elipses

b) $A \geq 0$ y existe x tq $Ax + b = 0$

Igual que antes, $\exists\, Q$ tq $A = Q^T \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$

repitiendo el razonamiento

$$f(x) = \frac{1}{2} d_1 \cdot z_1^2 + e_1 z_1 + c$$

pues $AQz + b = Ax + b = 0$ y $Q^T(AQz + b) = Dz + Q^T b = 0$

entonces la seg. coord. de $Q^T \cdot b$ es 0, luego

$b^T \cdot Qz$ sólo depende de z_1

Y entonces $f(x)$ depende de z_1, la curva de nivel es un par de recta