Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Centro de Informática (CIn)
Graduação em Ciência da Computação

Informática Teórica

(IF689)
1º Semestre de 2023
1ª Prova
9 de Fevereiro de 2023

Linguagens Regulares
Escolha 2 questões de 1 bloco
e 3 questões de outro bloco

1. (2,0)

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e considere a linguagem L consistindo de cadeias $w \in \Sigma^*$ que satisfazem as seguintes propriedades:
1. w não tem 0's à esquerda.
2. Quando lida como um número na base 2, w é par.
3. Quando lida como um número na base 2, w não é divisível por 4.

Por exemplo, $10010 \in L$ pois não tem 0's à esquerda e é a representação binária do número 18, que é par e não é divisível por 4. Por outro lado, 00010,101, e 100000 não pertencem a L porque elas violam a primeira, a segunda e a terceira propriedade, respectivamente.
Construa um AFD que reconheça L, dando uma explicação abreviada da razão pela qual esse AFD aceita as palavras de L e somente aquelas palavras. Isso pode ser feito com um AFD com 5 estados, mas seu AFD não pode ter mais que 10 estados.

2. (2,0)

Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Para cada $k \geq 1$, suponha que C_k seja a linguagem consistindo de todas as cadeias que contêm um símbolo a exatamente k posições contando a partir do final da cadeia. Portanto, $C_k = \Sigma^* a \Sigma^{k-1}$. Descreva um AFN com $k + 1$ estados que reconheça C_k, tanto em termos de um diagrama de estados quanto de uma descrição formal especificando sua função de transição.

3. (2,0)

Seja L uma linguagem sobre o alfabeto Σ. Defina a operação *split* da seguinte forma:

$$L^{split} = \{w \in \Sigma^* \mid w = w_1 w_2, w_1 \in L, w_2 \in L, \text{ e } w_1 w_2 \in L\}$$

Mostre que a classe de linguagens regulares é fechada sob a operação $split$.

4. (2,0)
Considere a linguagem $F = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0$ e se $i = 1$ então $j = k\}$.
(a) Mostre que F não é regular.
(b) Mostre que F se comporta como uma linguagem regular no lema do bombeamento. Ou seja, tome um comprimento de bombeamento p e mostre que F satisfaz as três condições do lema do bombeamento para esse valor de p.
(c) Explique por que as partes (a) e (b) não contradizem o lema do bombeamento.

5. (2,0)
Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Considere a seguinte linguagem:

$C = \{a_1b_1a_2b_2 \ldots a_kb_k | a_i, b_i \in \Sigma$ e, quando lido como números em binário, $|a_1a_2 \ldots a_k - b_1b_2 \ldots b_k| = 1\}$

Por exemplo, $10010101 \in C$ pois $|1000 - 0111| = 1$, mas $11000100 \notin C$ pois $|1000 - 1010| = 2$. Mostre que C é regular.

Linguagens Livres-do-Contexto
Escolha 3(três) questões

6. (2,0)
Seja $L = \{w\#x \mid$ a reversa de w é uma subcadeia de x, onde $w, x \in \{a, b\}^*\}$. Mostre que L é livre-do-contexto.

7. (2,0)
Seja $G = (V, \Sigma, R, S)$ a seguinte gramática. $V = \{S, T, U\}$; $\Sigma = \{0, \#\}$; e R é o seguinte conjunto de regras:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & TT \mid U \\ T & \to & 0T \mid T0 \mid \# \\ U & \to & 0U00 \mid \# \end{array}$$

a. Descreva $L(G)$ verbalmente (i.e., em português).
b. Dê um autômato com pilha que reconheça $L(G)$. Explique brevemente o papel de cada estado.
c. Prove que $L(G)$ não é regular.

8. (2,0)
Se A e B são linguagens, defina $A \diamond B = \{xy \mid x \in A$ e $y \in B$ e $|x| = |y|\}$.

Mostre que se A e B forem linguagens regulares, então $A \diamond B$ é uma linguagem livre-do-contexto.

9. (2,0)

Defina *gramática regular*, e mostre que uma linguagem L é regular se e somente se existe uma gramática regular G tal que $L(G) = L$.

10. (2,0)

Seja o seguinte autômato com pilha

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}_\varepsilon, \{a, b, \$\}_\varepsilon, q_0, \delta, \{q_4\}),$$

com a função de transição δ definida abaixo:
$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_1, \$)\}$
$\delta(q_1, a, \varepsilon) = \{(q_2, b)\}$
$\delta(q_2, a, \varepsilon) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, b, b) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, \varepsilon, \$) = \{(q_4, \varepsilon)\}$.

(i) Mostre o passo-a-passo da computação de M sobre aab, indicando, em cada passo: (1) o apontador na entrada; (2) o estado; (3) o conteúdo da pilha.
(ii) Descreva $L(M)$ em português ou notação matemática informal.
(iii) Mostre como M pode ser modificado para um novo autômato com pilha M' tal que $L(M') = (L(M))^{\mathcal{R}}$, i.e., M' aceita as reversas das cadeias aceitas por M. Sua modificação deve afetar apenas os rótulos das transições dos estados q_1 para q_2, de q_2 para q_1, e de q_3 para q_3; o restante da máquina deve permanecer o mesmo que em M.