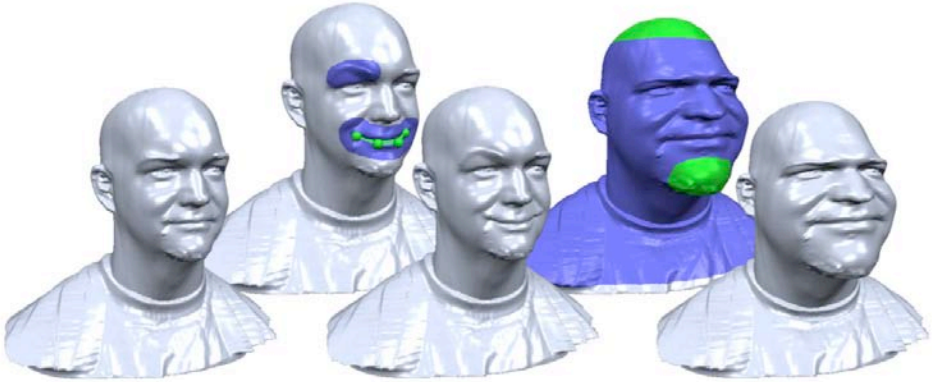
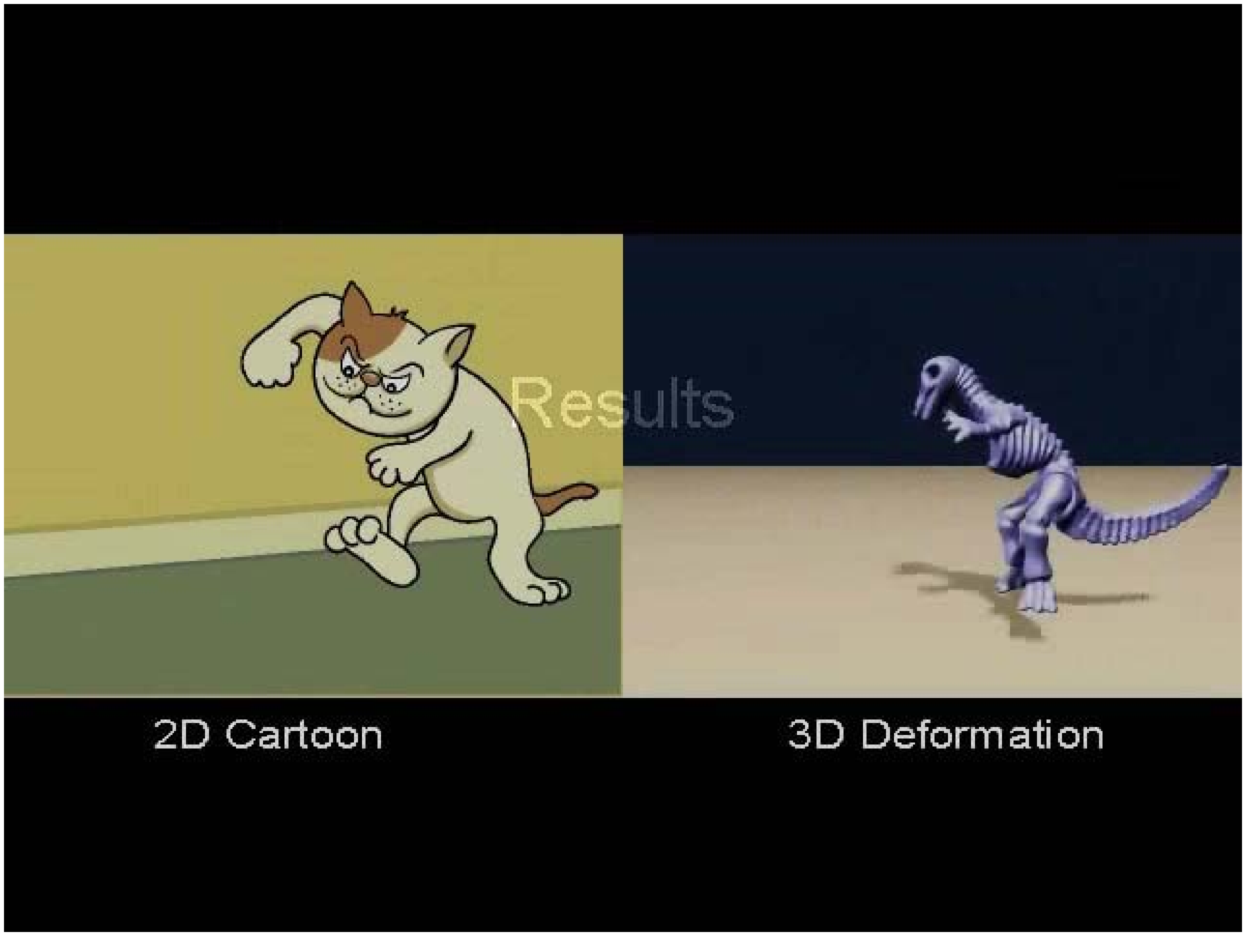
变形动画技术



变形演示



变形

- 变形(**Deformation**)是指将几何对象的形状作某种扭曲、形变，使它形成到动画师所需的形状。在这种变化中，几何对象的拓扑关系保持不变。
- 与**Morphing**不同，空间变形更具某种随意性，所以空间变形也常称为自由变形(**Free Form Deformation**)。
- 空间变形既可以看成是造型的范畴，也可看承是动画的范畴。确切地说，空间变形属于针对动画的造型问题，它把造型和动画有机地相结合。

变形和物体表示

- 与物体表示有关的变形。是指针对物体的某种具体表示形式，如多边形网格、细分曲面、参数曲面等的变形方式。
  - 多边形网格: 如针对**Polygon Mesh**的**editing**和**deformation**。
  - 参数曲面：移动控制顶点仅仅改变了基函数的系数，曲面仍然是光滑的。但是，参数曲面表示的物体也会带来三维走样问题，由于控制顶点的分布一般比较稀疏，物体的变形不一定是我们所期望的；对于由多个面拼接而成的物体，变形的另一个约束条件是需保持相邻曲面间的连续性。
- 与物体表示无关的变形。既可作用于多边形表示的物体，又可作用于参数曲面表示的物体。许多商用动画软件如**Maya**、**3DSMAX** 、 **Softimage**等都包含空间变形工具。

核心思想：*如何用少量的点去有效控制更多的点？*

整体和局部变形方法

- **Barr提出的整体和局部变形是空间变形中最早的方法。参考：**
  Barr A H. Global and local deformation of solid primitives. Computer Graphics, 1984, 18(3):21~30

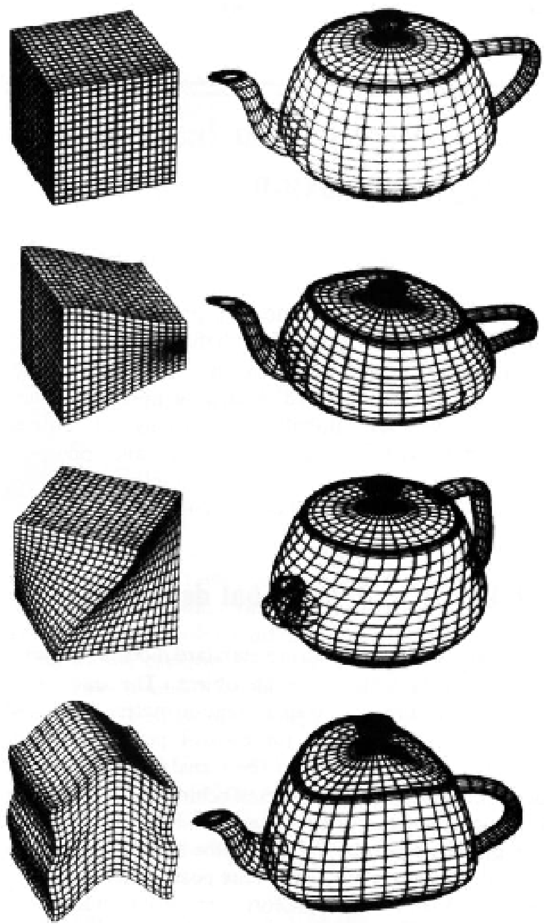
- **在传统的造型方法中，物体通常用CSG树来表示。通过基本物体的旋转、平移、比例缩放、求和、求交、求减等几何变换和布尔运算，CSG造型方法可以生成非常复杂的物体。**

整体和局部变形方法

- **Barr推广了传统的运算操作，他提出把整体和局部变形作为新的算子。**
- 他提出的算子有：
  - **Twisting(使成螺旋形)**
  - **Bending(弯曲)**
  - **Tapering(渐细)**
- 这些算子的优点在于：① 推广了传统的造型运算，可以生成许多传统造型方法难以生成的形体。② 变形后物体的法向量可用原物体的法向量和变换矩阵解析求得。

示意图

- original
- tapering
- twisting
- bending



变形模型及变形后物体法向量的计算

- 在标准的三维坐标变换中，变换矩阵对被作用物体上的每个点均是不变的。

- **Barr**提出的非线性整体变形在于当变换作用于物体时，变换矩阵随不同的顶点变化，因而变换是物体顶点位置的函数。

- 设**X**表示待变形物体上的点，其分量用(x_1, x_2, x_3) 或(x, y, z)来表示； **X**′表示变形后物体上的点，其分量用(x', y', z')来表示。则整体变形可用变换**X**′=**F**(**X**)来表示，其中**F**为一显式地把**X**变换成**X**′的数学函数。

变形模型及变形后物体法向量的计算

- 而局部变形改变的是物体的切向量空间(较不直观，隐式改变物体的顶点位置)，该操作对物体的切向量进行旋转和扭曲，然后积分得到物体变形后的整体位置。
- 在几何造型中，切向量和法向量是两个非常重要的向量，因为切向量决定了物体的局部几何信息，法向量决定了物体的方向和光照信息。
- 变形后物体上点的切向、法向可通过原物体的切向、法向和变换的Jacobian矩阵来求得。

变形模型及变形后物体法向量的计算

- 变换X‘ =F(X)的Jacobian 矩阵为：

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = [\mathbf{J}_1(\mathbf{X}), \mathbf{J}_2(\mathbf{X}), \mathbf{J}_3(\mathbf{X})] = \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\partial x_3}\right]$$

- 设物体为X=X(*u*,*v*)，物体上的某条曲线C为X=X(*u*(*t*), *v*(*t*)), 则物体的切向量为X对*u*, *v*偏导的线性组合：

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

- 物体上某一点的单位法向量为：

$$\mathbf{N} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\|}$$

变形模型及变形后物体法向量的计算

- 变形后物体的切向量变换链为：

$$\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial u}=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1}\times\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2}\times\frac{\partial x_2}{\partial u}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_3}\times\frac{\partial x_3}{\partial u}$$

$$=\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1},\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2},\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_3}\right]\left[\frac{\partial x_1}{\partial u},\frac{\partial x_2}{\partial u},\frac{\partial x_3}{\partial u}\right]^T=\mathbf{J}(\mathbf{X})\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$$

可把上式改写为：$X'_{i,u}=\sum_{j=1}^{3}J_{i,j}x_{j,u}$

- 换句话说，新的切向量 $\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial u}$ 是**Jacobian**矩阵**J(X)**乘以原切向量 $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$。

变形模型及变形后物体法向量的计算

- 变形后物体的法向量变换链为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}' &= \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial v} = \left(\mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right) \times \left(\mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} \mathbf{J}_i x_{i,s} \right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} \mathbf{J}_j x_{j,t} \right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\mathbf{J}_i \times \mathbf{J}_j \right) x_{i,s} x_{j,t} \\
&= \left(\mathbf{J}_2 \times \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_3 \times \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2 \right) \begin{pmatrix} x_{2,s} x_{3,t} - x_{3,s} x_{2,t} \\ x_{3,s} x_{1,t} - x_{1,s} x_{3,t} \\ x_{1,s} x_{2,t} - x_{2,s} x_{1,t} \end{pmatrix} \\
&= \left[\mathbf{J}_2 \times \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_3 \times \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2 \right] \mathbf{N}
\end{aligned}
$$

变形模型及变形后物体法向量的计算

- 因为对任一矩阵**M**有：

$$\det(\mathbf{M}) = \mathbf{M}_1 \bullet (\mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_3)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3]^{-1} = \frac{[\mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_3 \times \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2]^T}{\mathbf{M}_1 \bullet (\mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_3)}$$

$$= \frac{[\mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_3 \times \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2]^T}{\det(\mathbf{M})}$$

- 我们得到：$\mathbf{N}' = \det(\mathbf{J})\mathbf{J}^{-1T}\mathbf{N}$
- 由于法向量的大小一般并不重要，因此**det(J)**通常不必计算。从微积分知识可以知道，**Jacobian矩阵的值为变换点的局部体积之比**。

变形例子——Scaling

- 最简单的变形例子为比例缩放Scaling：

$$\mathbf{F}: \begin{cases} x' = a_1 x \\ y' = a_2 y \\ z' = a_3 z \end{cases}$$

- 其Jacobian矩阵为：

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

- 体积比为：$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 a_3$

变形例子——Scaling

- 法向量变换矩阵为：

$$\det(\mathbf{J})\mathbf{J}^{-1T} = \begin{pmatrix} a_2a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1a_2 \end{pmatrix}$$

- 由于法向量的大小并不重要，法向量变换矩阵可取为：

$$\mathbf{J}^{-1T} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_3 \end{pmatrix}$$

- 若变形前的曲面为中心在原点的球面，则变形后该球面变成椭球面。该变换把中心(x, y, z)变换为(a_1x, a_2y, a_3z)，把法向(n_1, n_2, n_3)变换为$(n_1/a_1, n_2/a_2, n_3/a_3)$。

变形例子——Tapering

- 沿z轴的渐细变形Tapering为：

$$\mathbf{F}:\ \begin{cases} x' = rx \\ y' = ry \ , \quad r = f(z) \\ z' = z \end{cases}$$

- 当$f\,'(z)>0$时，变形物体的大小沿z轴逐渐增大；
- 当$f\,'(z)<0$时，变形物体的大小沿z轴逐渐变小。

变形例子——Tapering

- 该变换的切向变换矩阵为：

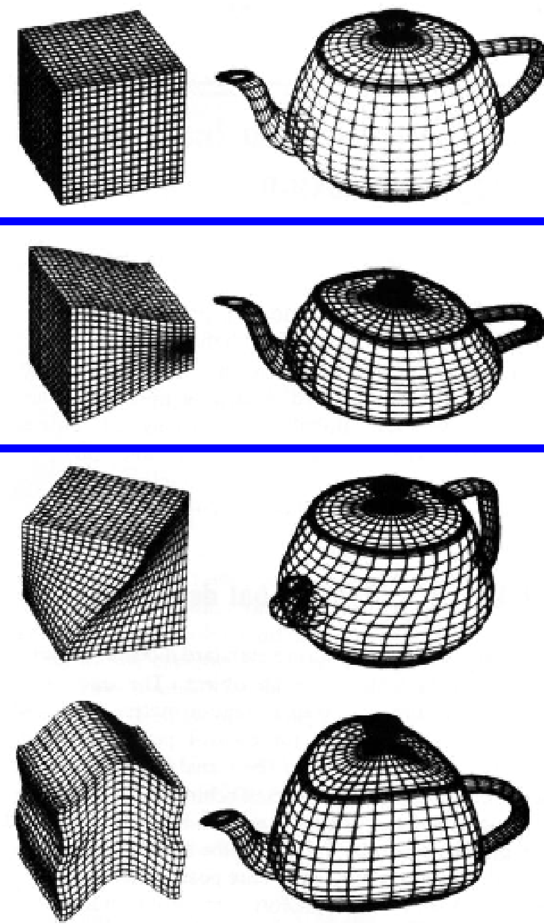
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} r & 0 & f'(z)x \\ 0 & r & f'(z)y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 因为 $\det(\mathbf{J}) = r^2$，变换的局部体积之比为r^2。该变换的法向变换矩阵为：

$$\det(\mathbf{J})\mathbf{J}^{-1\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ -rf'(z)x & -rf'(z)y & z \end{pmatrix}$$

示意图

- original
- tapering
- twisting
- bending



变形例子——Twisting(沿轴螺旋形变形)

- 该变换旋转其中两个坐标分量而不改变第三个坐标分量（像扭麻花）：

$$\mathbf{F}: \quad \begin{cases} x' = xc_\theta - ys_\theta \\ y' = xs_\theta + yc_\theta \\ \quad z = z \end{cases}$$

其中$\theta = f(z), c_\theta = \cos\theta, s_\theta = \sin\theta$。切向量变换矩阵为：

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & -xs_\theta f'(z) - yc_\theta f'(z) \\ s_\theta & c_\theta & xc_\theta f'(z) - ys_\theta f'(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

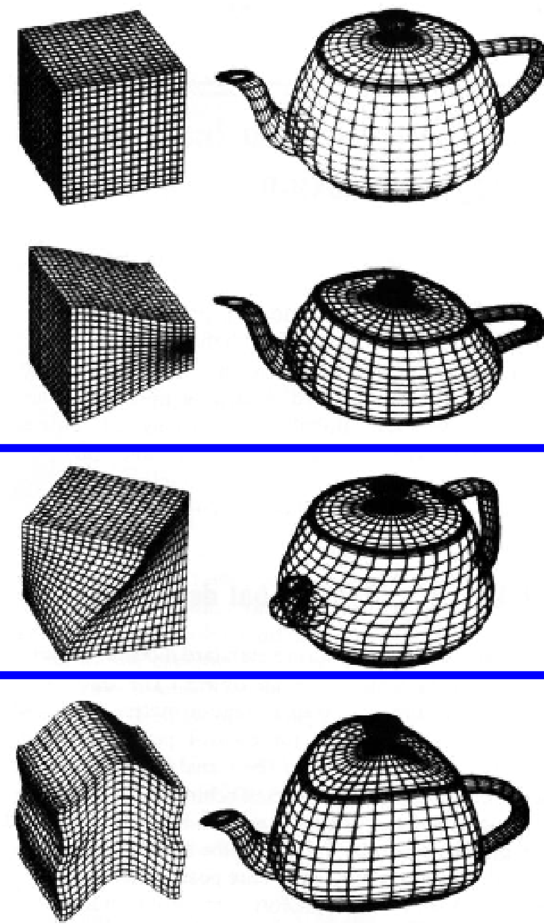
变形例子——Twisting(沿轴螺旋形变形)

- 因为**det(J)=1**,所以螺旋形变形保持体积不变。法向变换矩阵为:

$$\det(\mathbf{J})\mathbf{J}^{-1\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ yf'(z) & -xf'(z) & 1 \end{pmatrix}$$

示意图

- original
- tapering
- twisting
- bending



变形例子——Bending(弯曲变形)

- 沿*y*轴的弯曲变形(**Bending**)。
- 设变形的区域为 $y_{\min} \le y \le y_{\max}$， 中心为$y_0$,弯曲的曲率半径为**1/*k*,**

$$\theta = k(\hat{y} - y_0)\ ,$$

$$\text{其中：}\ \hat{y} = \begin{cases} y_{\min}, & y \le y_{\min} \\ y, & y_{\min} < y < y_{\max} \\ y_{\max}, & y \ge y_{\max} \end{cases}$$

- 即弯曲角在变形区域外为常数，在中间区域为线性变化，变形中中心线长度保持不变。

变形例子——Bending(弯曲变形)

- 设 $c_\theta = \cos\theta, s_\theta = \sin\theta$ ，则变形函数为：

$$x' = x$$

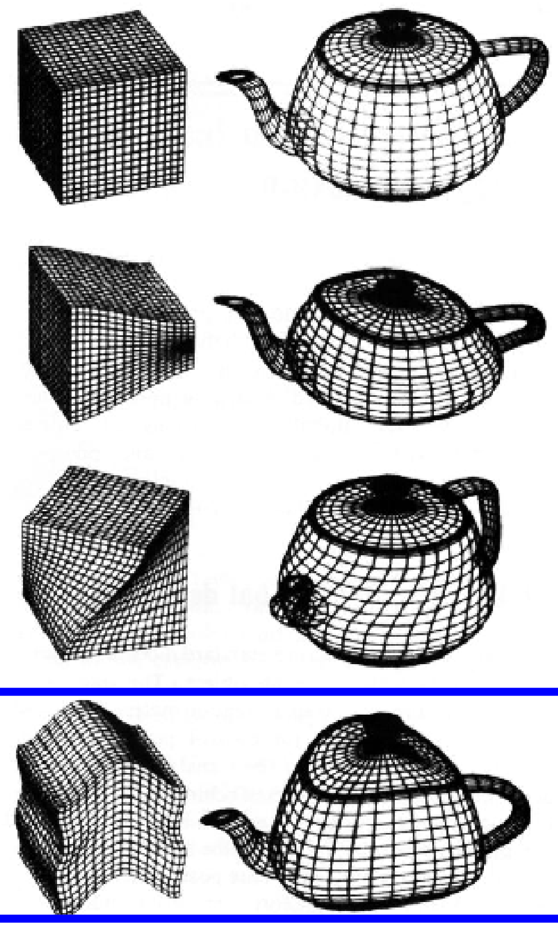
$$y' = \begin{cases} -s_\theta(z - \frac{1}{k}) + y_0, & y_{\min} \le y \le y_{\max} \\ -s_\theta(z - \frac{1}{k}) + y_0 + c_\theta(y - y_{\min}), & y < y_{\min} \\ -s_\theta(z - \frac{1}{k}) + y_0 + c_\theta(y - y_{\max}), & y > y_{\max} \end{cases}$$

$$z' = \begin{cases} c_\theta(z - \frac{1}{k}) + \frac{1}{k}, & y_{\min} \le y \le y_{\max} \\ c_\theta(z - \frac{1}{k}) + \frac{1}{k} + s_\theta(y - y_{\min}), & y < y_{\min} \\ c_\theta(z - \frac{1}{k}) + \frac{1}{k} + s_\theta(y - y_{\min}), & y > y_{\max} \end{cases}$$

在$y=y_0$时，$x' = x, y' = y, z' = z$

示意图

- original
- tapering
- twisting
- bending



变形例子——Bending(弯曲变形)

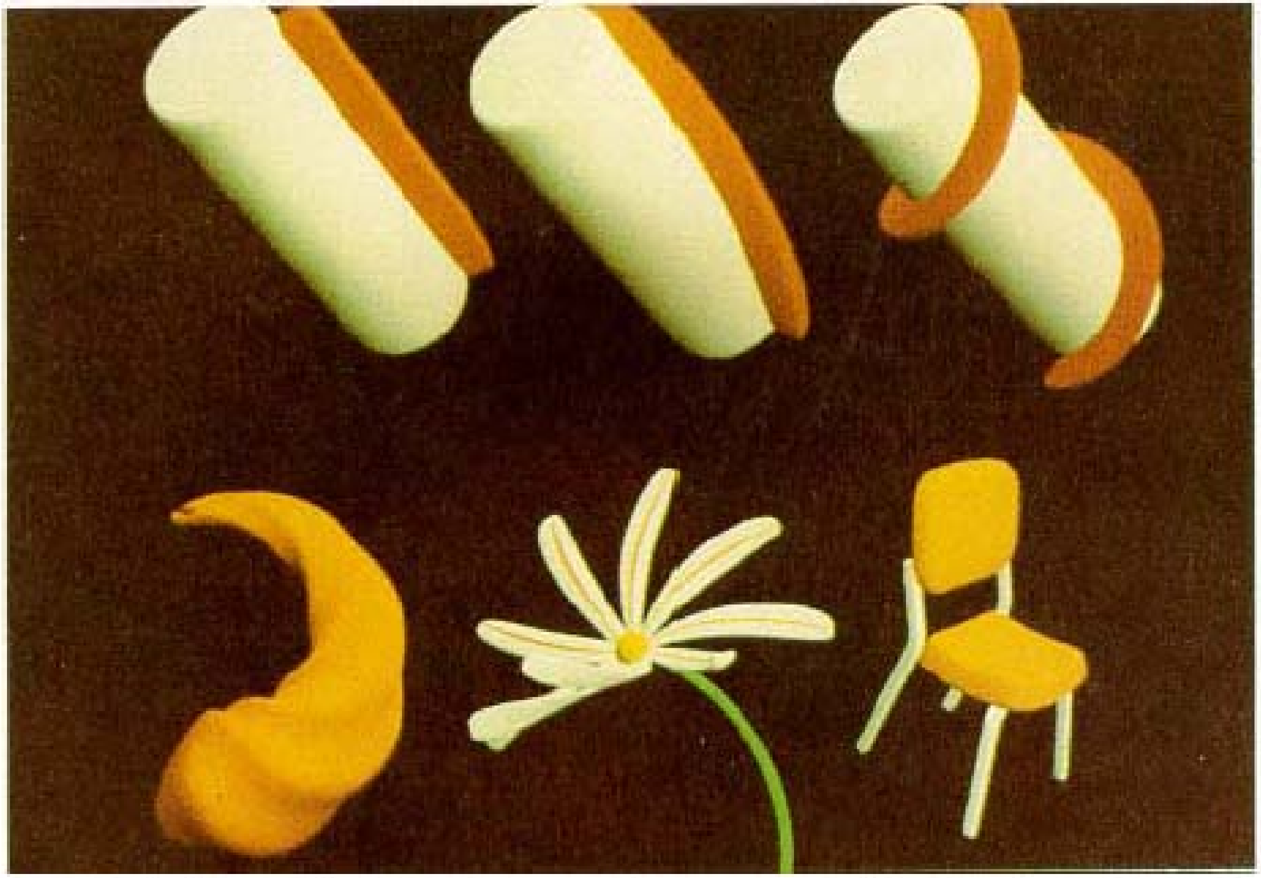
- 切向变换矩阵为：

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_\theta(1-\hat{k}z) & -s_\theta\\ 0 & s_\theta(1-\hat{k}z) & c_\theta\end{pmatrix},\qquad \text{其中} k=\begin{cases}k, & \hat{y}=y\\ 0, & \hat{y}\neq y\end{cases}$$

- 因为 $\det(\mathrm{J})=1-\hat{k}z$，所以局部体积变化率为 $1-\hat{k}z$。
- 法向变化矩阵为：

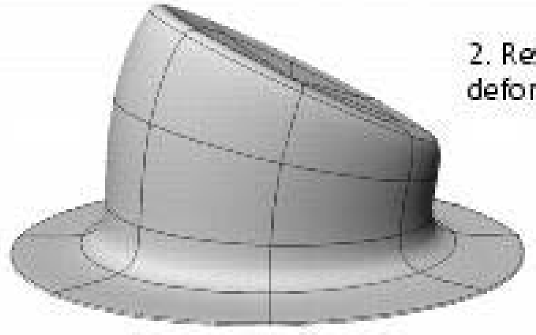
$$\det(\mathbf{J})\mathbf{J}^{-1\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ -rf'(z)x & -rf'(z)y & z\end{pmatrix}$$

Examples

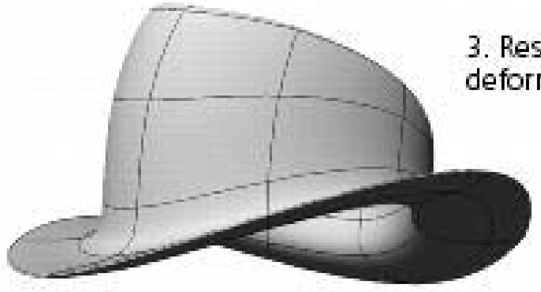


Examples

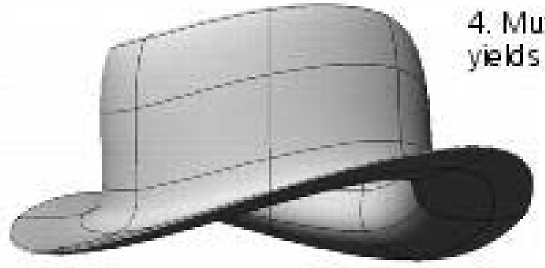
1. The original hat



2. Result of a deformation (bend)



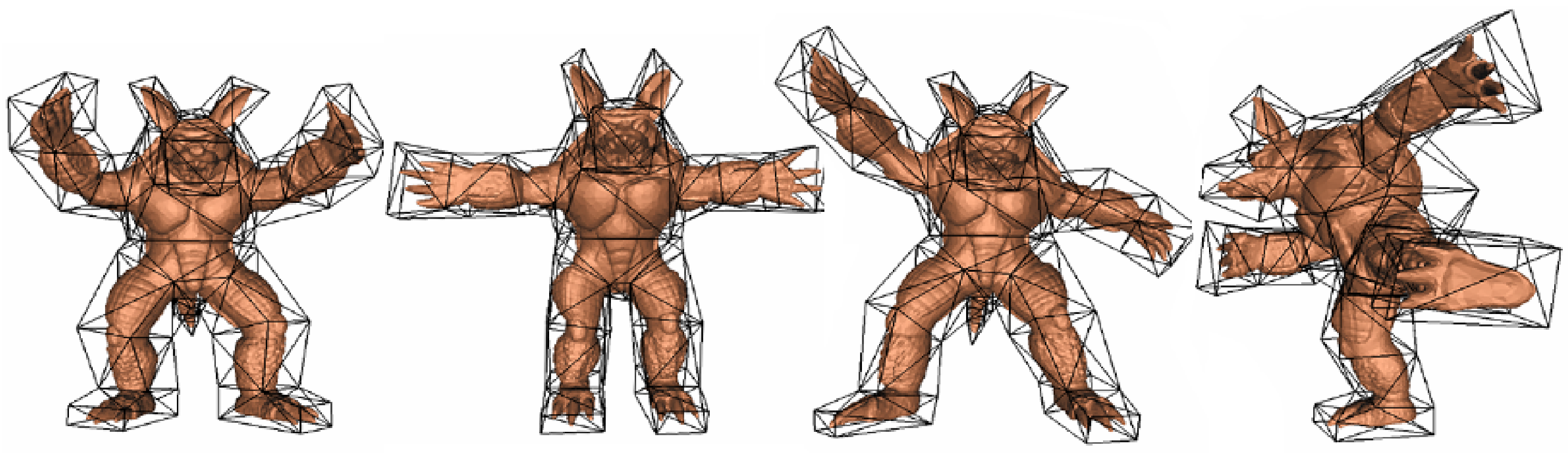
3. Result of a second deformation (twist)



4. Muting the Bend yields a twist.

自由变形方法FFD及其变种

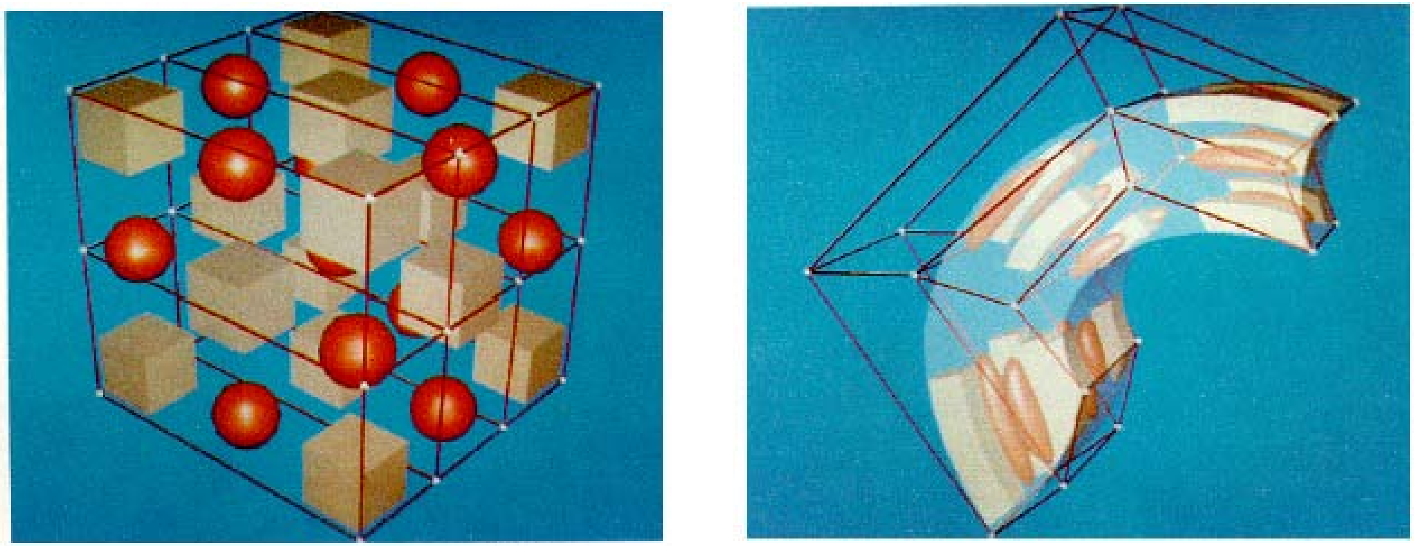
- Barr的变形方法仅仅局限于Tapering、Twisting等特定的变形，这促使人们寻找更一般的变形方法。
- 这方面的工作包括自由变形方法FFD、扩展的FFD方法EFFD、基于任意拓扑lattice的FFD方法、直接操纵的FFD等。



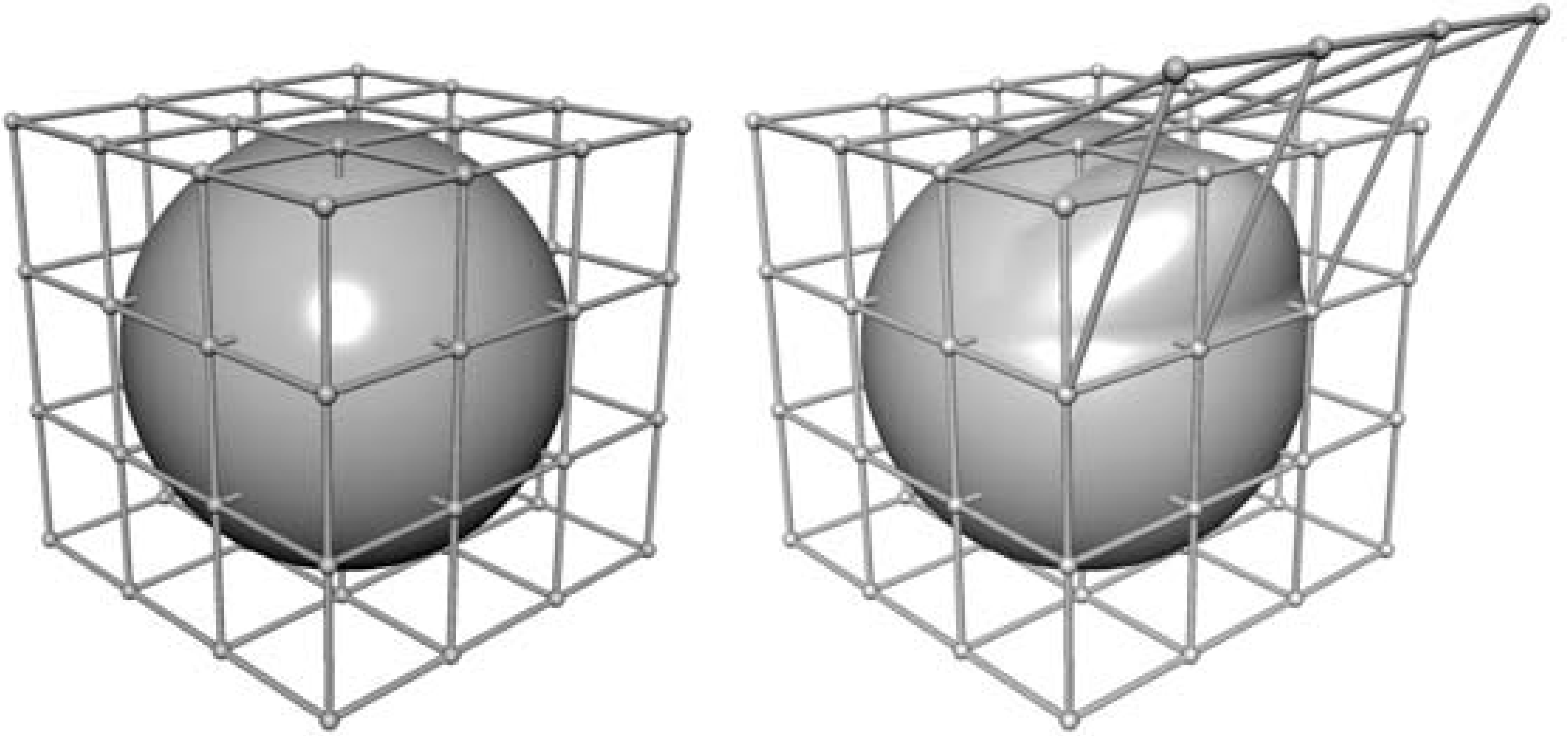
自由变形方法FFD

- **1986年，Sederderg等提出了一种非常适合于柔性物体动画的更为一般的方法，该方法不直接操作物体，而是将物体嵌入一空间，当所嵌的空间变形时，物体也随之变形。**

- **Sederberg T W, Parry S R. Free-form deformation of solid geometric models. Computer Graphics, 1986, 20(4):151~160**



FFD图示



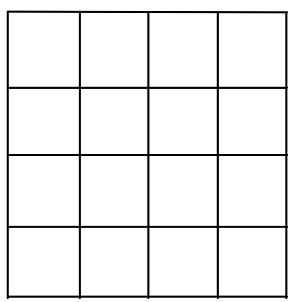
FFD图示

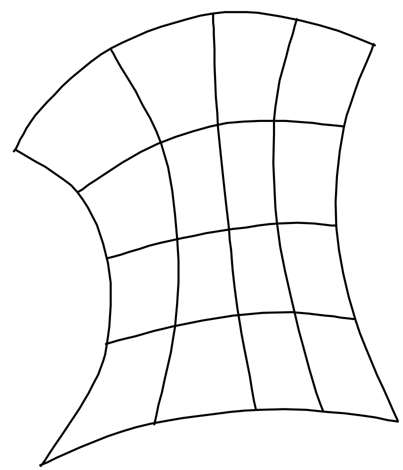
二维FFD

- 对于二维情形，用双三次Bezier曲面

$$\mathbf{Q}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\mathbf{P}_{ij}B_{i,3}(u)B_{j,3}(v)$$

可对二维空间进行变形，它将一正方形区域变换为一弯曲的曲面：





三维FFD

- 同样，一张三三次Bezier超曲面

$$\mathbf{Q}(u,v,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}_{ijk}B_i(u)B_j(v)B_k(w),\quad (u,v,w)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

将一正方体映射为一弯曲的物体。

其中 $B_i(u),B_j(v),B_k(w)$ 为Bernstein基函数，这个Bezier体由64个控制顶点$\mathbf{P}_{ijk}$来指定。

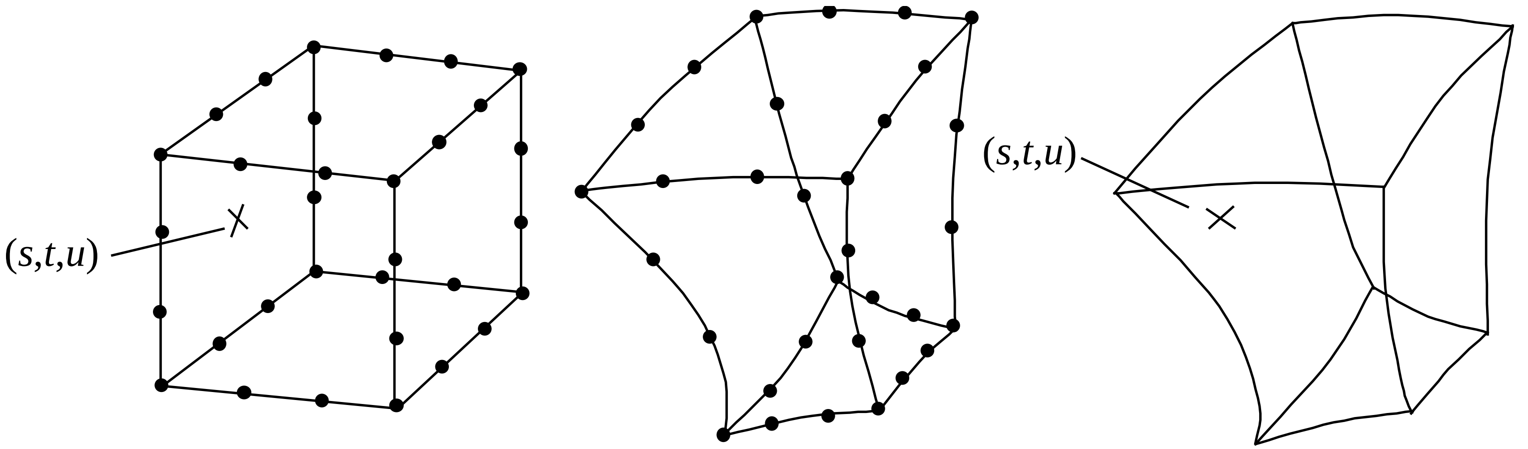
- 当物体嵌入该正方体时，物体随着**Q(*u*,*v*,*w*)**的变形而变形。

三维FFD

- **Bezier超曲面具有与Bezier曲面类似的性质。**
- **多个Bezier超曲面可拼接生成一分段光滑的Bezier体，我们称这种复合的Bezier体为一FFD块。**
- **我们把由三根互相垂直的坐标轴排列的长方体结构的控制顶点称为Lattice（晶格）。**

三维FFD

- 设FFD块的三个坐标方向为（S, T, U), 我们采用$(3l+1)(3m+1)(3n+1)$个控制顶点定义一个FFD块，或等价地由$l \times m \times n$张三三次Bezier超曲面构成。
- 用FFD块对物体变形的步骤如下:



FFD变形过程 (a) 确定物体顶点在超曲面的坐标(b) 通过移动控制顶点变形FFD块 (c) 根据坐标确定顶点变形后的位置

三维FFD

1. 确定物体的顶点（或控制顶点）在lattice空间的位置。建立FFD块的局部坐标系：

$$\mathbf{X}(s,t,u) = \mathbf{X}_0 + s\mathbf{S} + t\mathbf{T} + u\mathbf{U}$$

其中$\mathbf{X}_0$为局部坐标系的原点（FFD块的一个角点），(S, T, U)为Lattice三条互相垂直的边。

- 由于这些矢量大小已反映了Lattice的体积，因而lattice体内的任意一点都有唯一的lattice空间坐标：

$$(s,t,u) \in [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

- 不妨设lattice为一个正方体，则其控制顶点为：

$$\mathbf{P}_{ijk} = \mathbf{X}_0 + \left(\frac{i}{3l}\right)\mathbf{S} + \left(\frac{j}{3m}\right)\mathbf{T} + \left(\frac{k}{3n}\right)\mathbf{U}$$

其中 $0 \le i \le 3l, 0 \le j \le 3m, 0 \le k \le 3n$ 。

- 一般情况下，我们所选的lattice坐标轴与物体空间坐标轴平行，这样，对于FFD块内物体的任意顶点或控制顶点，很容易找到lattice空间坐标**(*s*, *t*, *u*)**（线性对应关系！）, 这只需解一线性方程组：

$$\mathbf{X} = X_0 + s\mathbf{S} + t\mathbf{T} + u\mathbf{U}$$

- 得到:

$$s=\frac{(\mathbf{T}\times\mathbf{U})\bullet(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}{(\mathbf{T}\times\mathbf{U})\bullet\mathbf{S}},t=\frac{(\mathbf{S}\times\mathbf{U})\bullet(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}{(\mathbf{S}\times\mathbf{U})\bullet\mathbf{T}},u=\frac{(\mathbf{S}\times\mathbf{T})\bullet(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)}{(\mathbf{S}\times\mathbf{T})\bullet\mathbf{U}}$$

- 到此为止，Lattice空间和物体空间仅仅是比例缩放的关系。

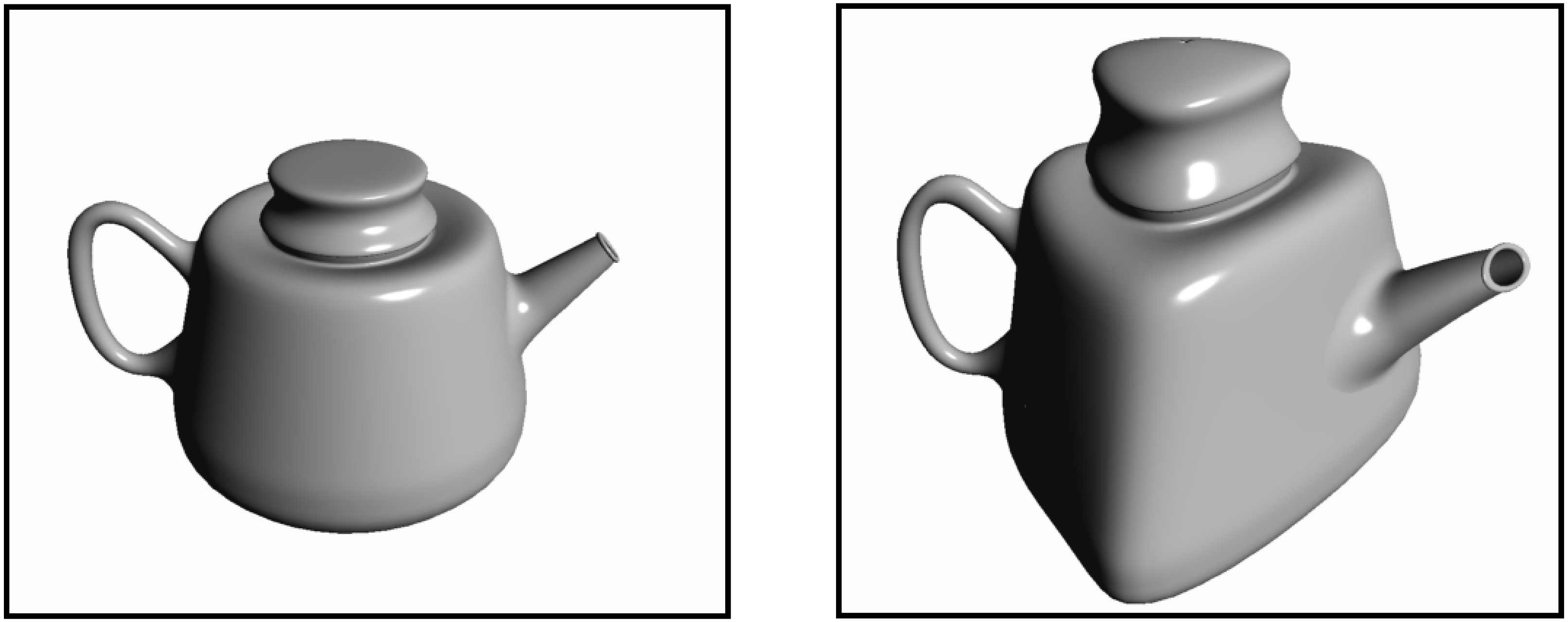
2. 变形FFD块。根据动画设计的需要，移动控制顶点$\mathbf{P}_{ijk}$。

3. 确定顶点变形后的位置。

- 经变形后物体空间与lattice空间完全不同，lattice空间到物体空间的转换包含了物体的变形。
- 给定lattice坐标(*s*, *t*, *u*), 我们先找到它所在的Bezier超曲面，并将它转换成该超曲面的局部坐标(*u*, *v*, *w*), 该超曲面对应的索引为(*ls*, *mt*, *nu*)的整数部分, 可写成(*is*, *it*, *iu*), 得到超曲面的局部坐标为:

$$(u, v, w) = (ls - is, mt - it, nu - iu)$$

- 代入超曲面方程，便得到变形后的顶点Q(*u*,*v*,*w*)。



茶壶的FFD变形 (a) 变形前 (b) 变形后

FFD的性质

- **FFD一个重要性质是参数曲面变形后仍然是参数曲面。设参数曲面为：**

$$x = f(\alpha,\beta), y = g(\alpha,\beta), z = h(\alpha,\beta)$$

- **FFD变换为** $\mathbf{X}_{ffd} = \mathbf{X}(x, y, z)$ **，则变形后的曲面为**

$$\mathbf{X}_{ffd}(\alpha,\beta) = \mathbf{X}(f(\alpha,\beta), g(\alpha,\beta), h(\alpha,\beta))$$

- **显然，它仍然为参数曲面。**

FFD的性质

- FFD的另一个性质使能对变换前后的体积变化进行控制。设FFD为

$$\mathbf{X}_{ffd}(x,y,z)=(F(x,y,z),G(x,y,z),H(x,y,z))$$

- 它的Jacobian行列式为:

$$\mathbf{J}(X_{ffd})=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z}\end{vmatrix}$$

FFD的性质

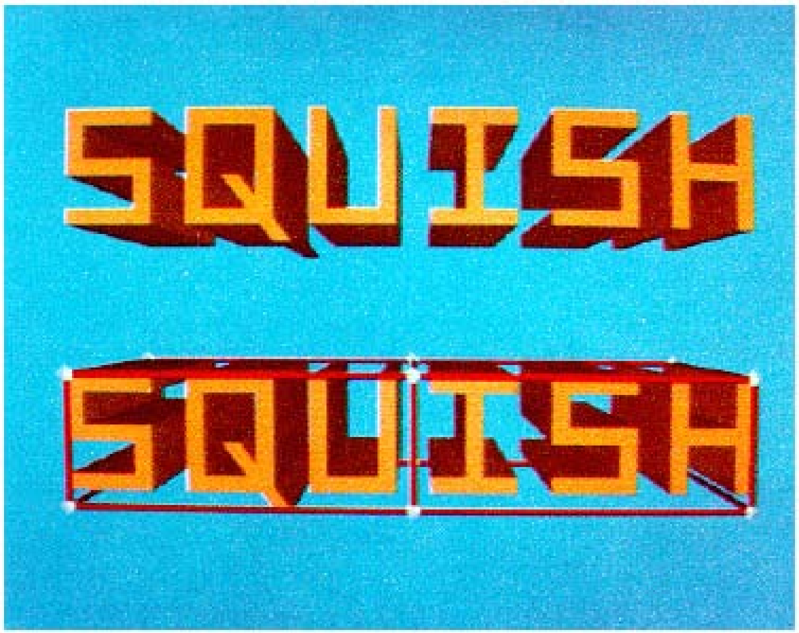
- 如果变形前物体的体积元为***dxdydz***，则变形后的体积元为 $\mathbf{J}(X_{ffd})dxdydz$，变形后物体的体积为：

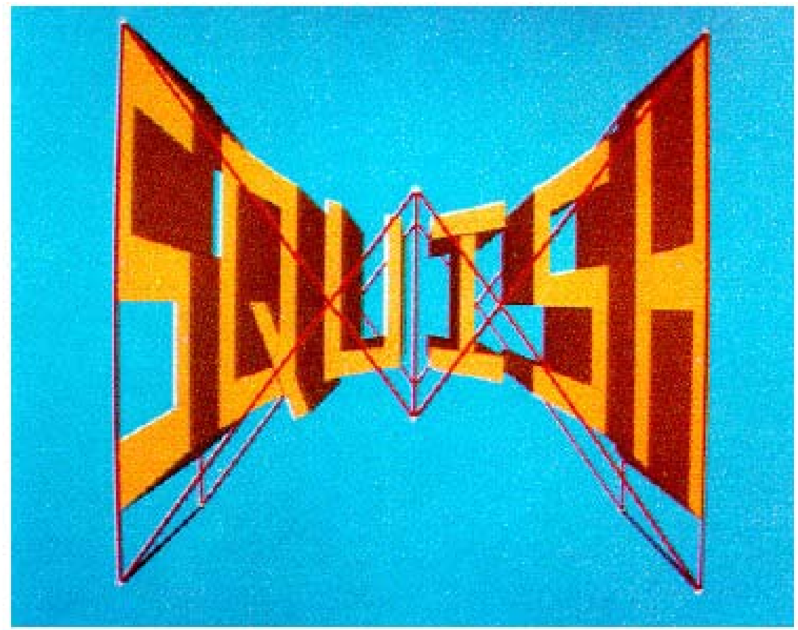
$$V = \iiint_{\Omega} \mathbf{J}(X_{ffd})dxdydz$$

- 若要估计体积的变化，只需估计 $\mathbf{J}(X_{ffd})$ 的上下限。如果 $\mathbf{J}(X_{ffd})$ 可表达成三变量**Bernstein**多项式时，变形后物体的体积可采用其系数进行估计。

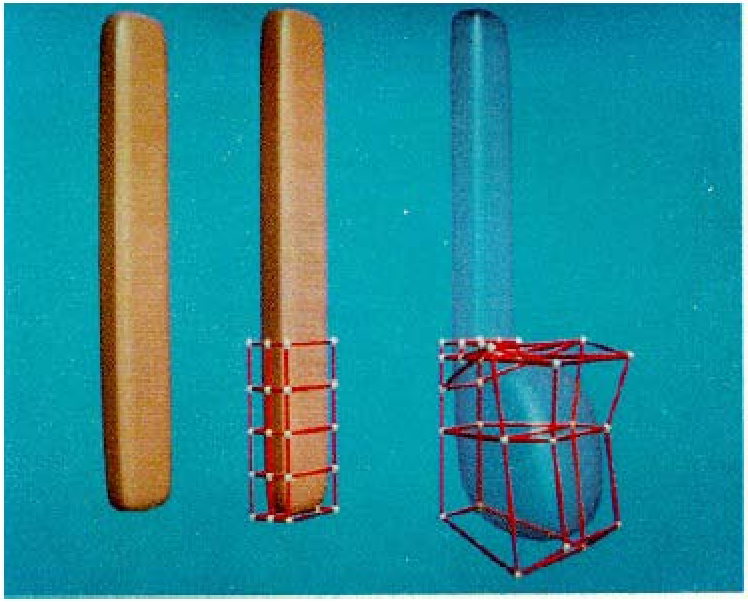
- 如果 $\mathbf{J}(X_{ffd}) \equiv 1$，则该**FFD**是保体积的。

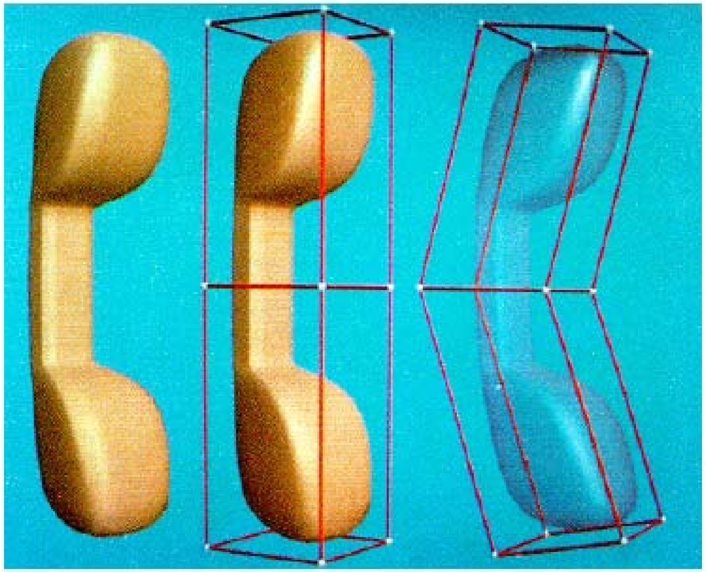
FFD应用





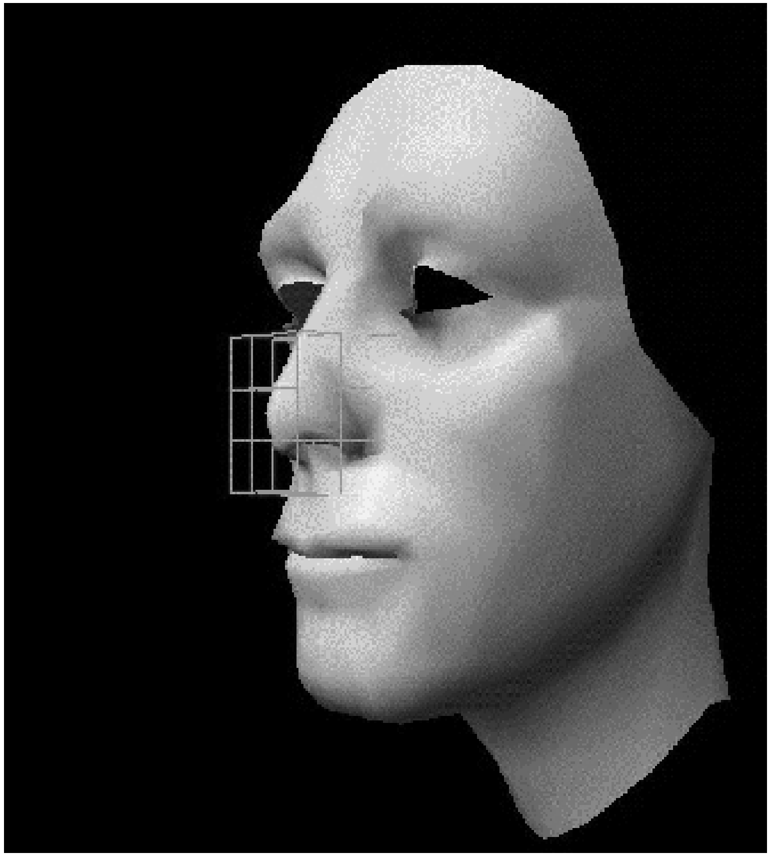
FFD应用

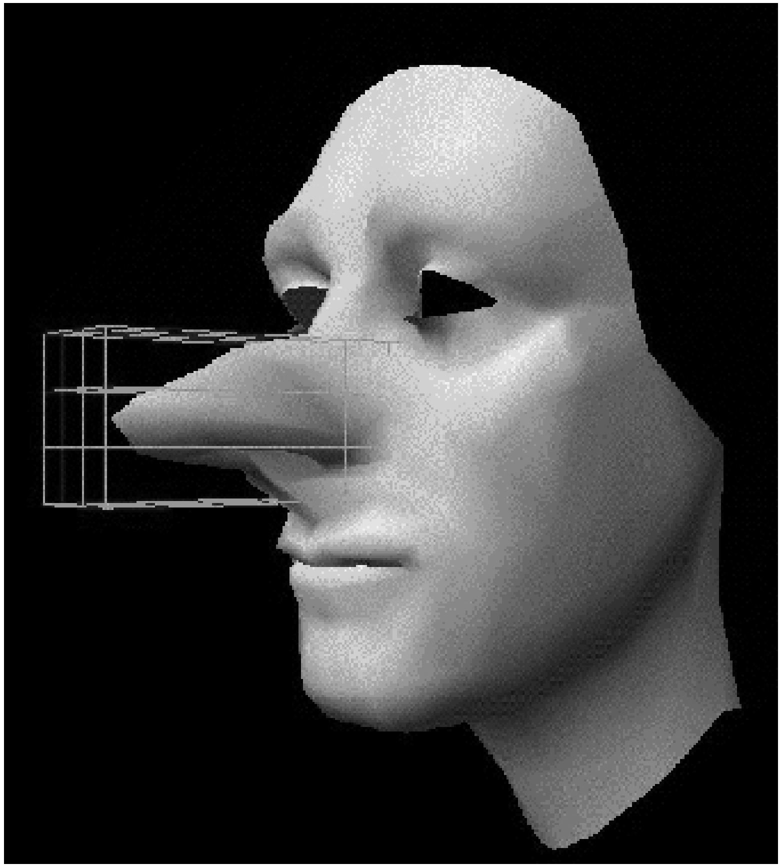




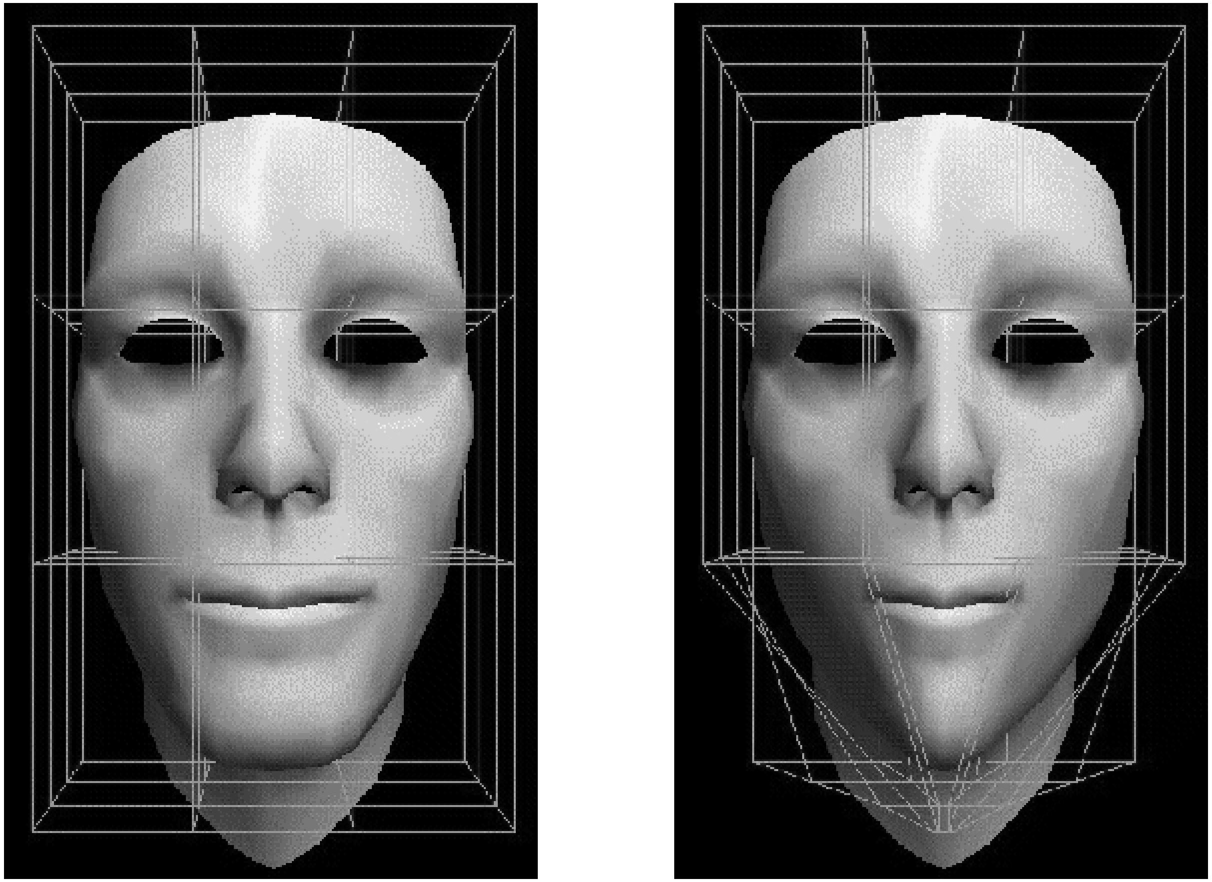
FFD应用

FFD应用

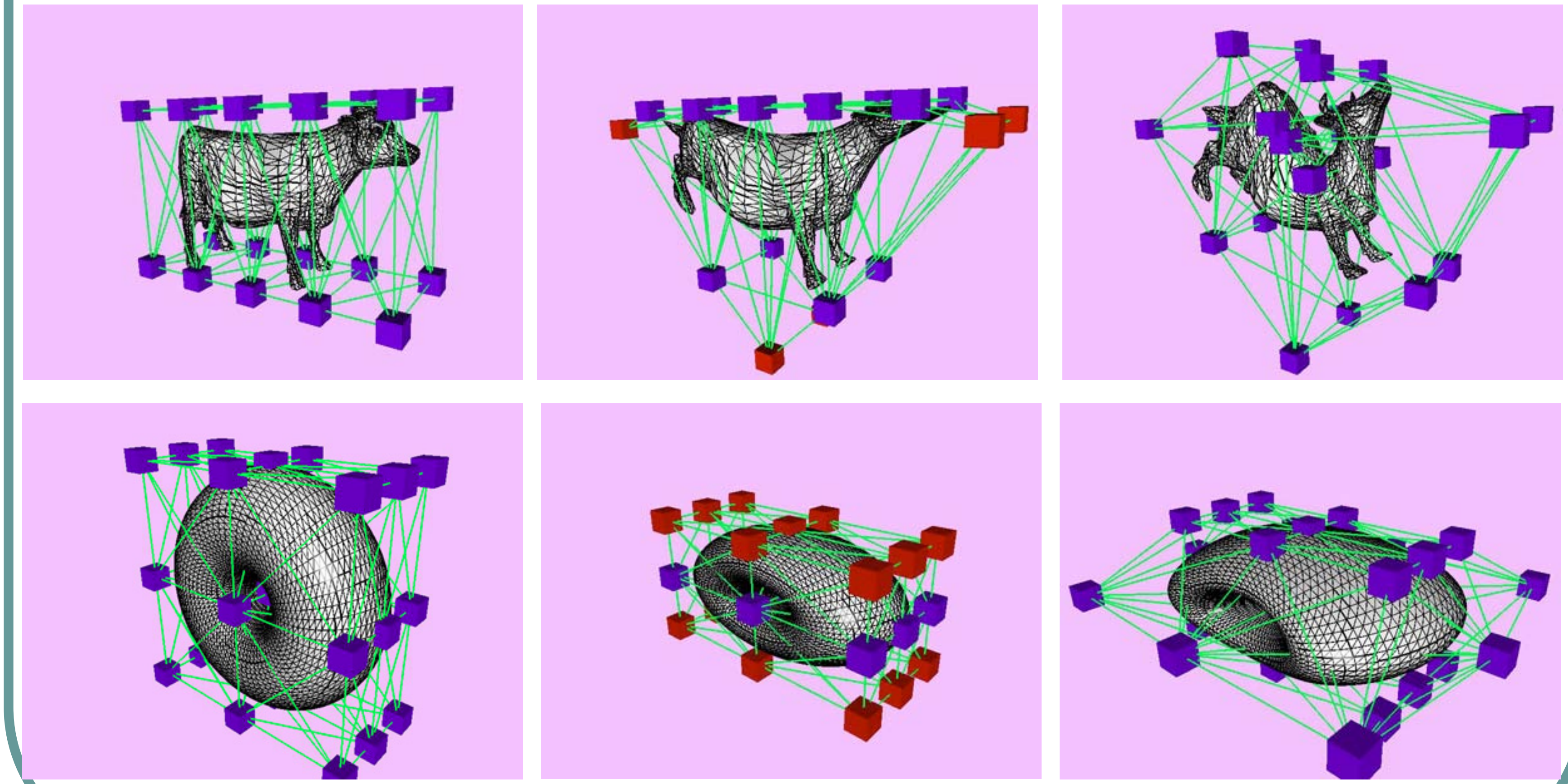




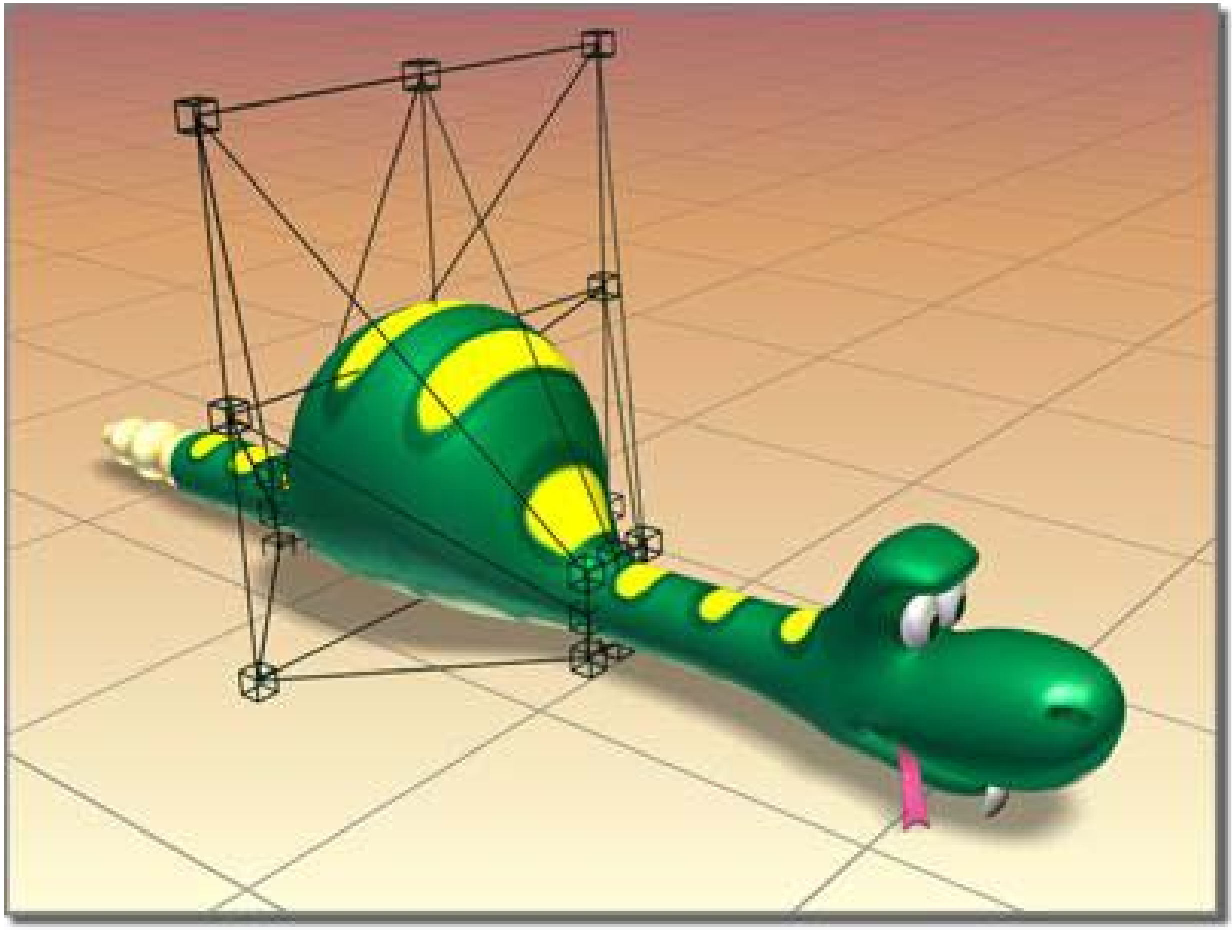
FFD应用



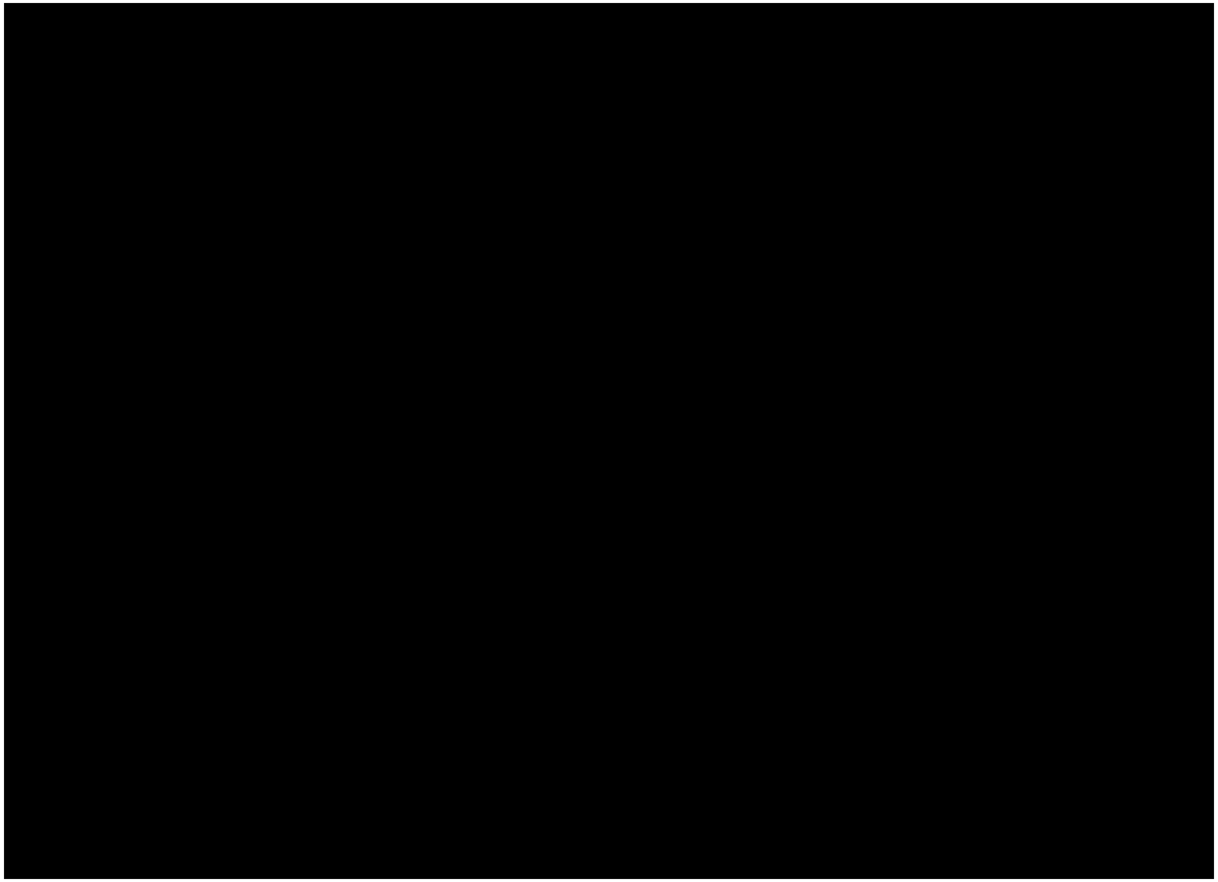
FFD应用



FFD应用

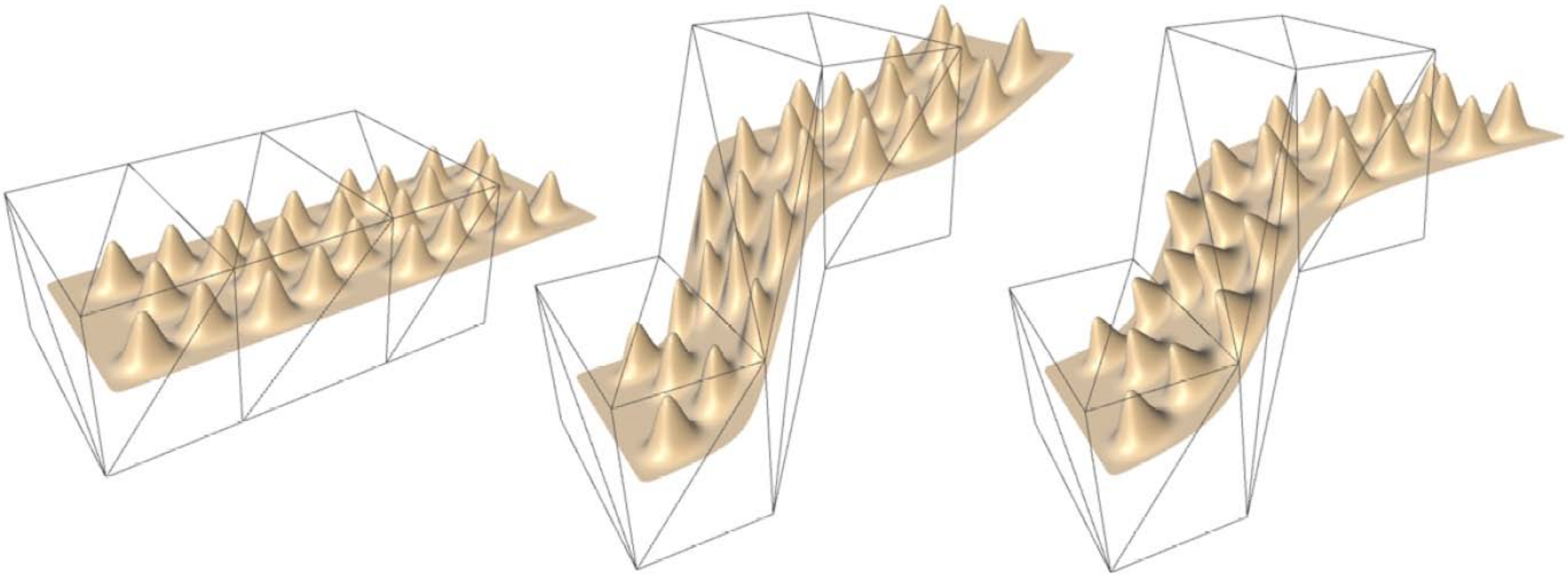


FFD演示



FFD总结

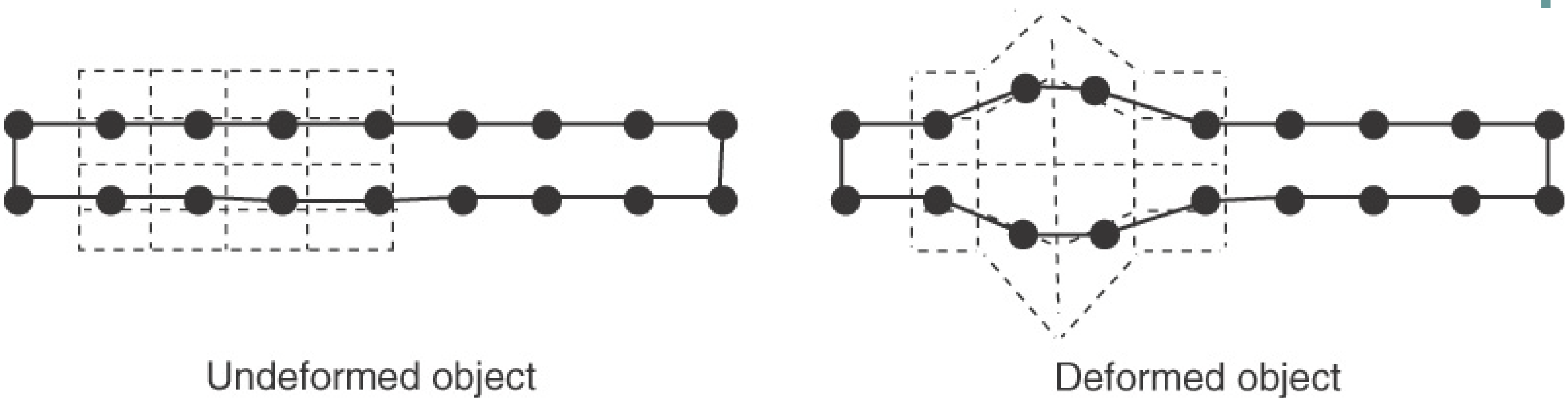
- 优点：
  - 与物体的几何表示无关；
  - 直观；
  - 有效；
- 缺点：
  - Lattice为平行六面体形状；
  - 不遵循物理规律；
  - 细节很难被保持；



原始模型

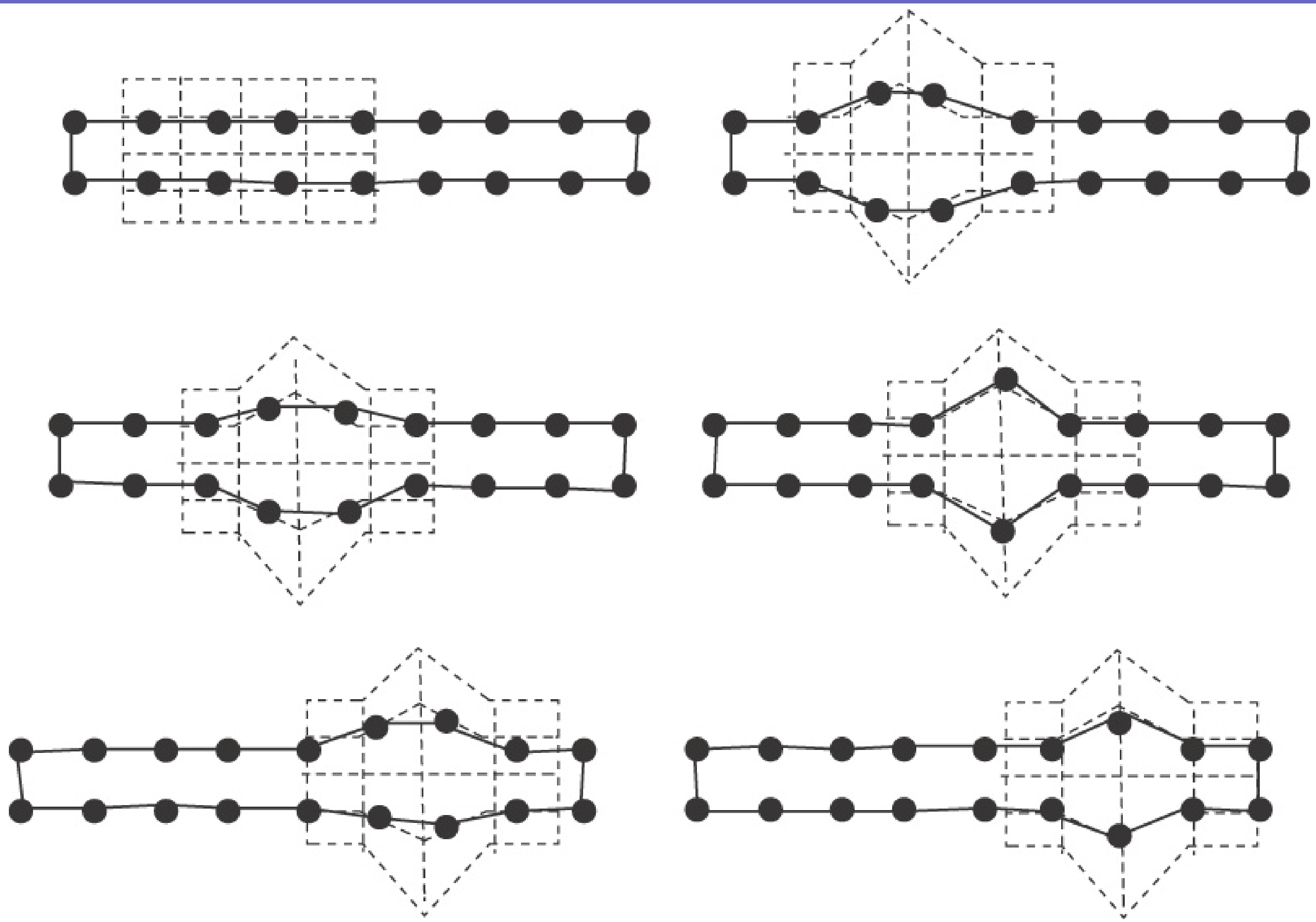
Green Coordinate可保持细节

Animated FFD



变形工具应用到一物体

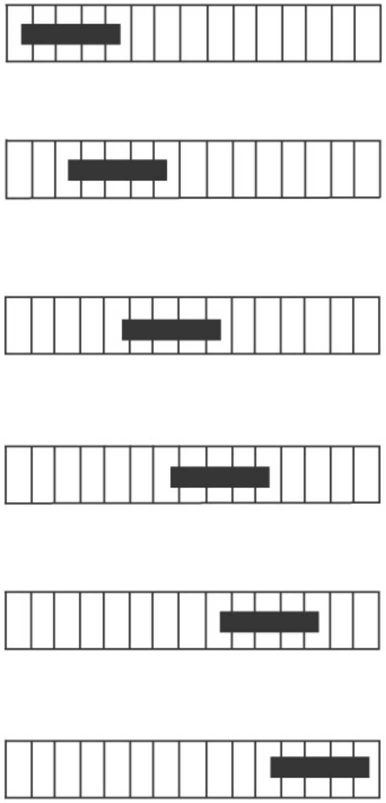
Animated FFD

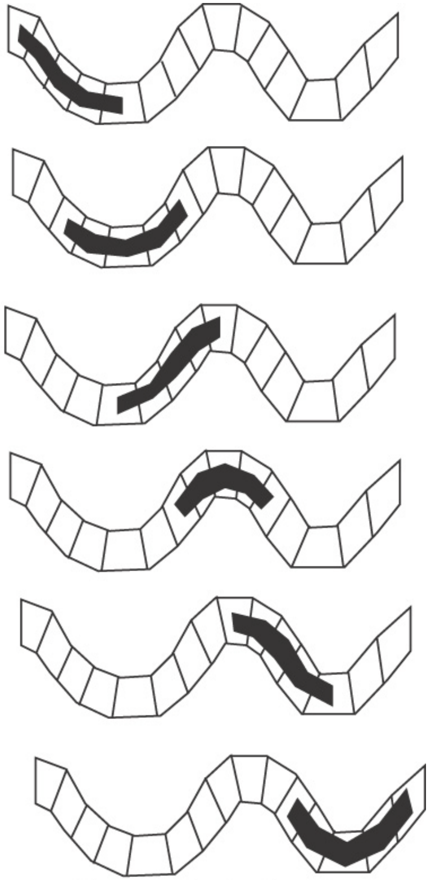


通过移动变形工具相对于物体的位置来获得变形

Animated FFD

Deformation by moving the object through FFD space

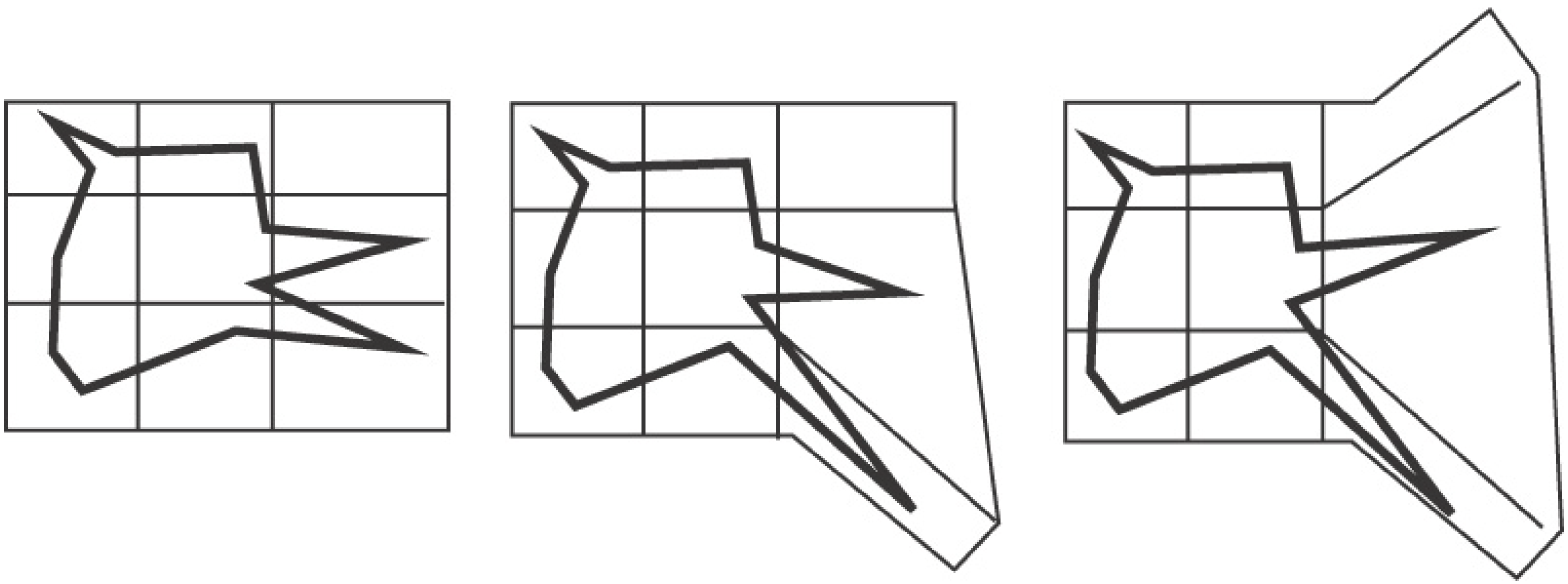

Object traversing the logical FFD coordinate space


Object traversing the distorted space

In logical FFD space **In distorted FFD space**

Animated FFD

- Animating the FFD control points using, e.g., key-frame animation or by the result of physically based simulation.



扩展的FFD方法EFFD

- **FFD是一个非常直观的变形工具，但它只适合于平行六面体的lattice形状。**

- **1990年，Coquillart提出了一种称为扩展的FFD方法，该方法允许非平行六面体的lattice形状，从而能实现更任意的变形。**

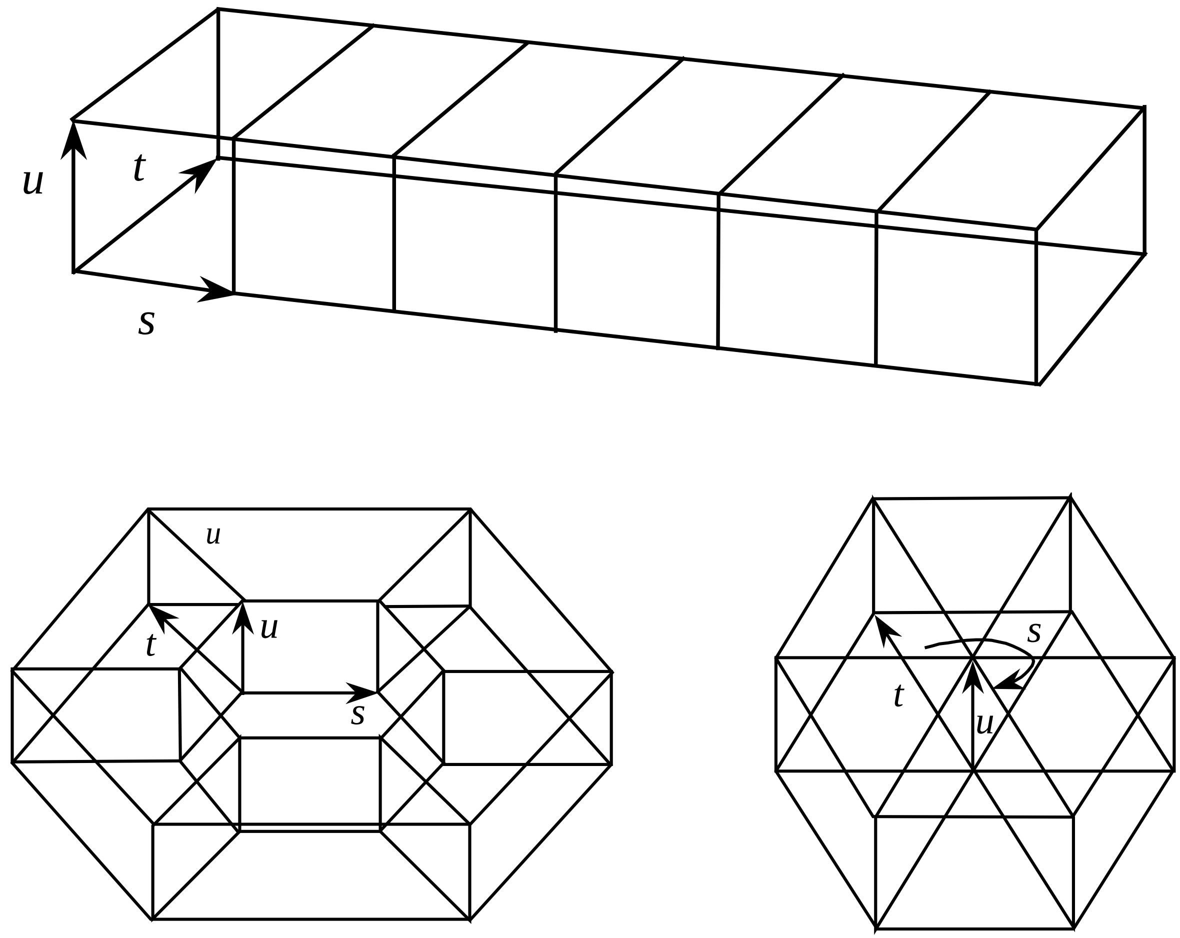
- Ref：Coquillart S. Extended free-form deformation: a sculpturing tool for 3D geometric modeling. Computer Graphics, 1990, 24(4):187~196

扩展的FFD方法EFFD

- **EFFD型lattice和FFD型lattice的区别在于：它允许FFD型lattice作为它结构的一部分，许多个FFD型lattice可合并构成EFFD的lattice 。**

- **例如，对于下图所示的棱柱形lattice，可以用下面的方法来构造。首先，在Lattice空间，构造由六个超曲面组成的FFD块，见图(a)。然后，通过合并平面s=0和s=1的控制顶点，把lattice两端的两块超平面融合在一起，如图(b)所示。最后，合并所有沿轴的顶点，即使所有满足且和且的点重合，如图(c)所示。这样，我们得到一个基本的EFFD块。**

- **通过把多个基本EFFD块融合，我们可以得到更复杂的复合EFFD块。在合并超曲面块的控制顶点时，必须注意合并后的块之间的切向连续性问题。**



棱柱形EFFD的构造

(a) Lattice空间的超曲面 (b) 融合两端平面 (c) 合并轴的控制顶点

扩展的FFD方法EFFD

- **EFFD块构造好以后，我们可以采用与FFD方法类似的方法来使物体变形。**
- **在FFD方法中，由于FFD块的三条轴与景物空间的坐标轴重合，景物空间的点在lattice空间的局部坐标很容易求得（线性关系！）。**
- **但在EFFD中，两个空间之间不再有这种简单的对应关系，通常需要迭代求解。采用EFFD块对物体变形的步骤如下：**

扩展的FFD方法EFFD

1. 给定物体上的一点Q，我们首先利用超曲面的凸包性质找到Q所在的超曲面，然后对方程

$$\mathbf{Q}(u,v,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}_{ijk}B_i(u)B_j(v)B_k(w),$$

进行牛顿迭代，**求得Q在相应超曲面的局部坐标(u, v, w),** 其中$\mathbf{P}_{ijk}$为该超曲面变形前的控制顶点。在迭代时，只需把初始值简单地设为(u, v, w)=(0.5, 0.5, 0.5)，便可得到较好的收敛结果。

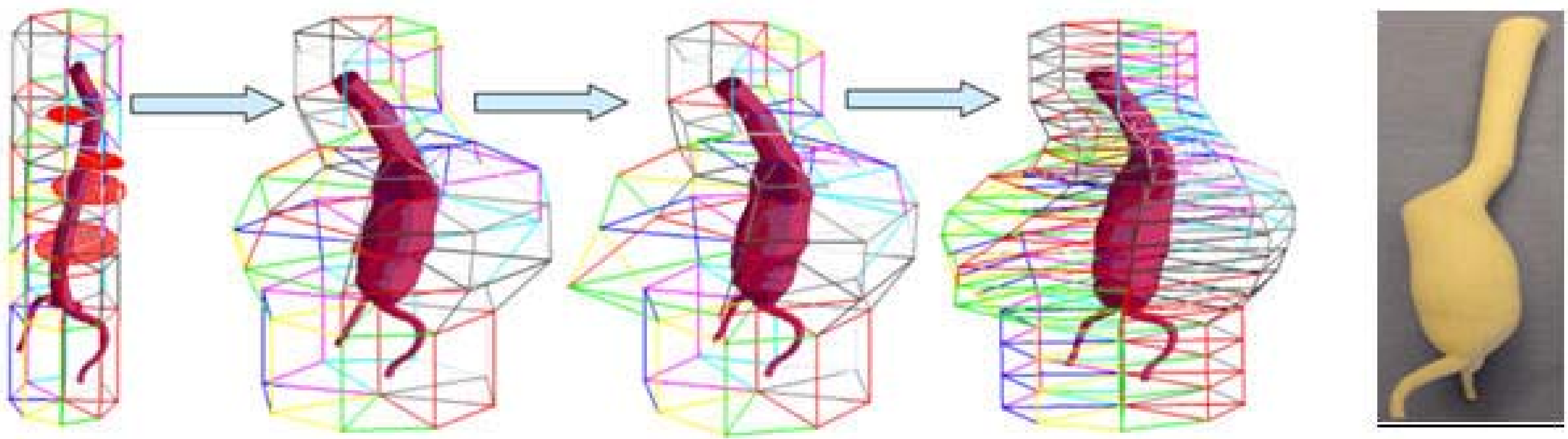
扩展的FFD方法EFFD

2. 根据动画设计的需要，移动EFFD块的控制顶点。

3. 根据超曲面方程，求得变形后的位置。

- EFFD方法的优点是允许更加复杂的变形空间，但同时也丧失了FFD方法的一些优点。
- EFFD方法的缺点是：⑴ 在移动内部控制顶点时必须保持块与块之间的连续性。⑵ 计算景物点在lattice空间的局部坐标需要数值求解方法，导致计算速度变慢。

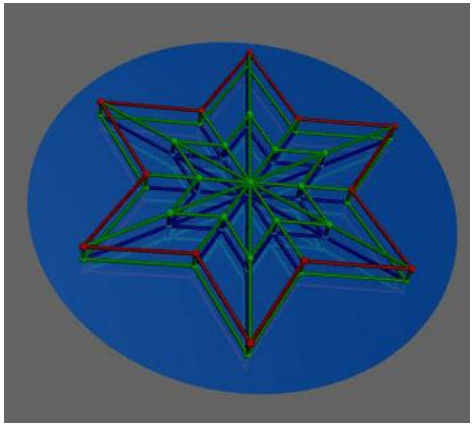
Example

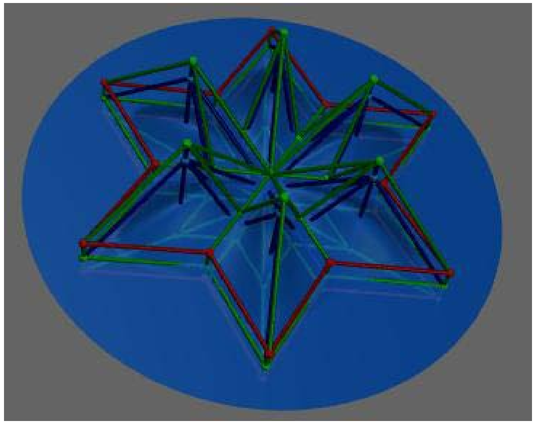


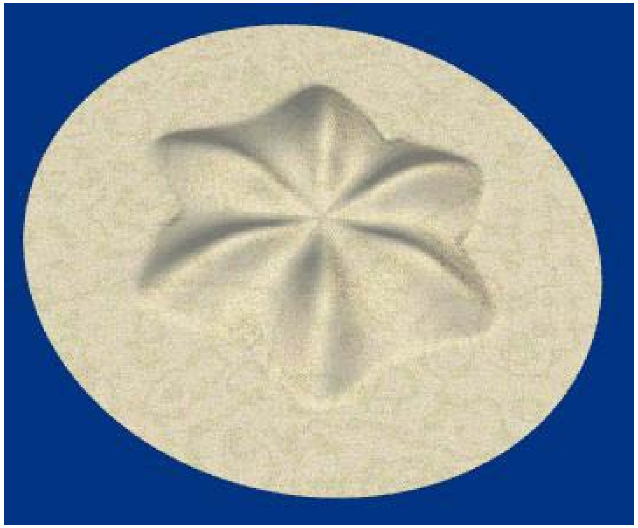
基于任意拓扑Lattice的FFD方法

- Sederberg的FFD方法要求lattice为平行六面体，Coquillart的EFFD允许多个lattice组合成任意形状lattice的空间。
- 1996年，MacCracken提出了一种允许lattice为任意拓扑形状的更一般的FFD方法。在该方法中，变形空间由细分(subdivision)方法生成的体来定义。
- 在细分过程中，lattice一步步加细，生成一系列收敛于一三维区域的lattice。加细过程定义了一个嵌入点的伪参数化方法，当lattice的控制顶点改变时，嵌入的物体产生变形。

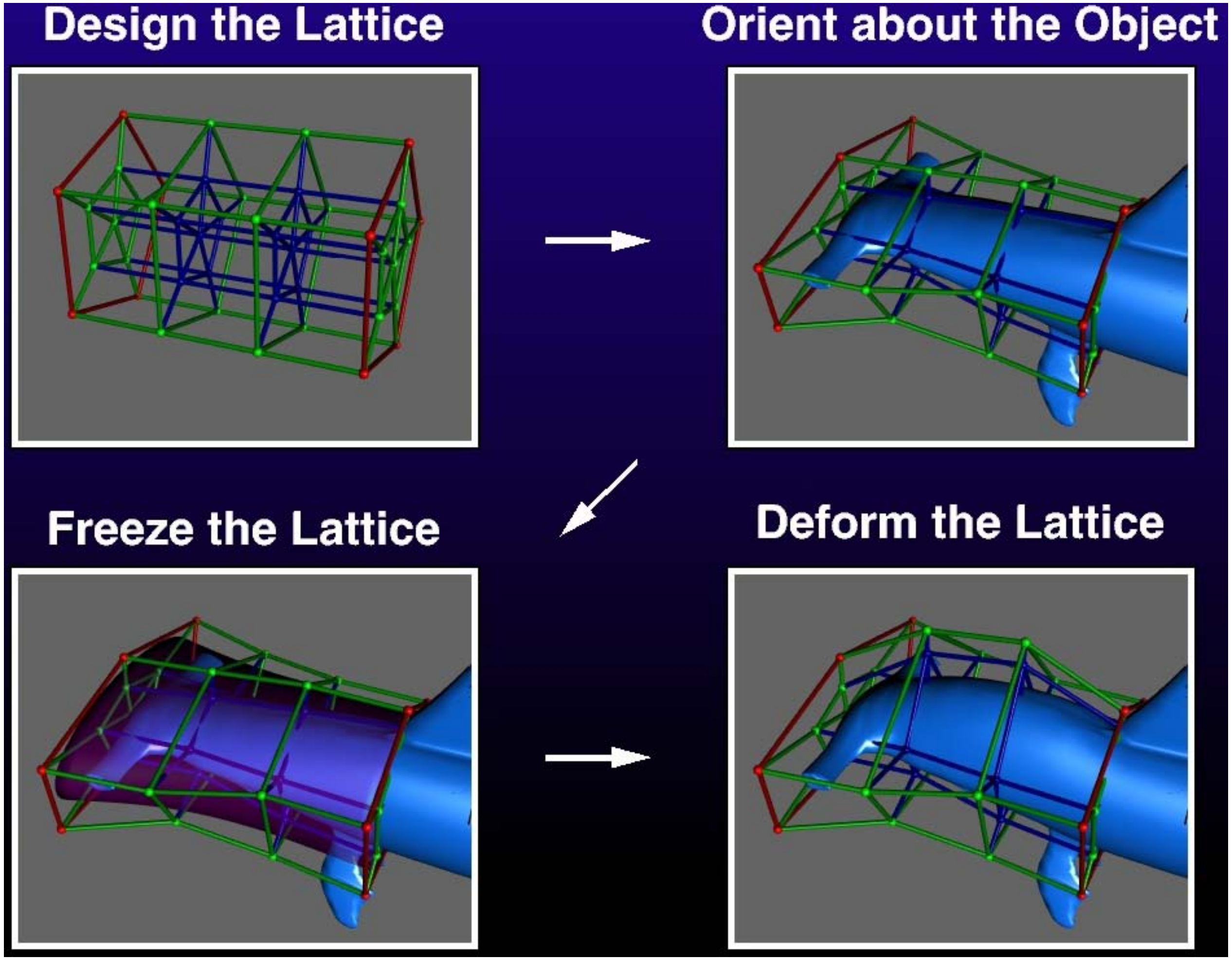
Example



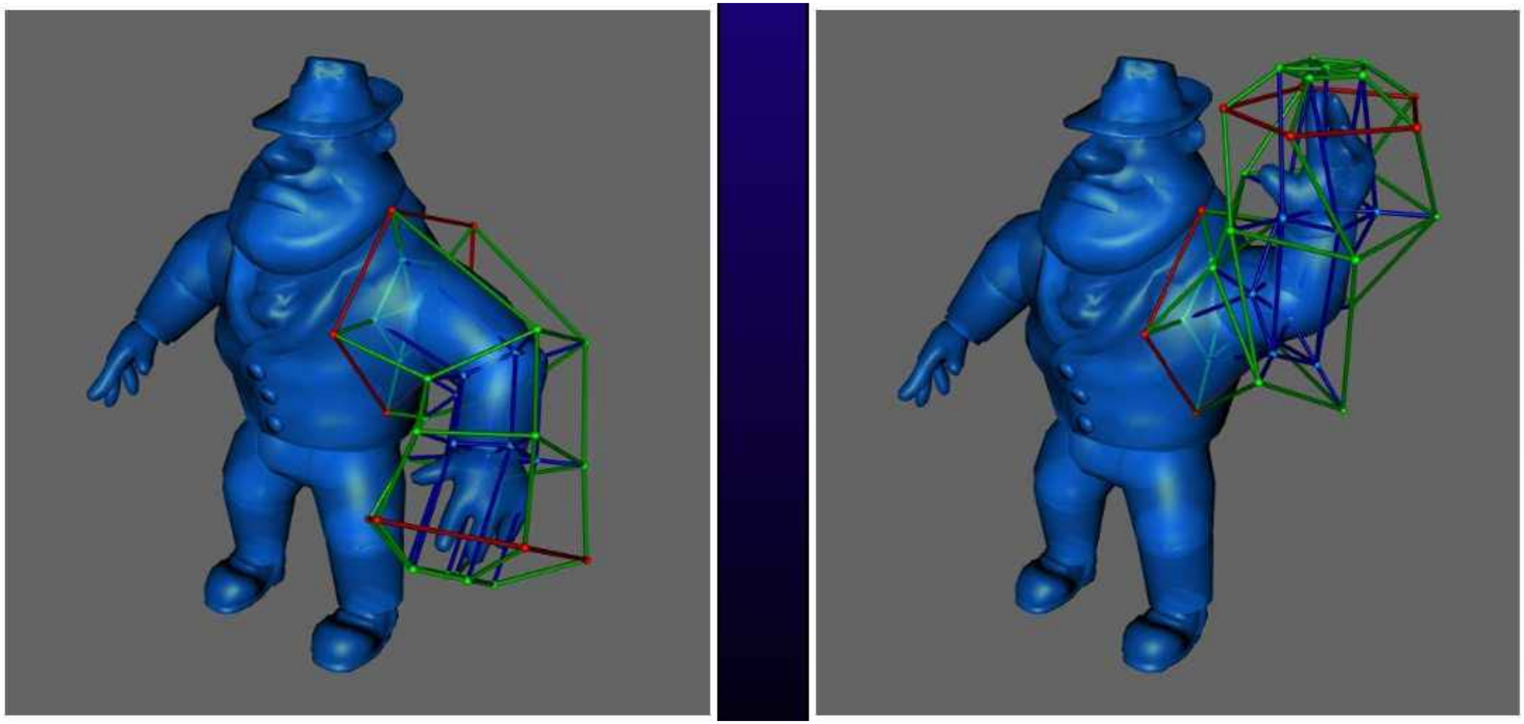




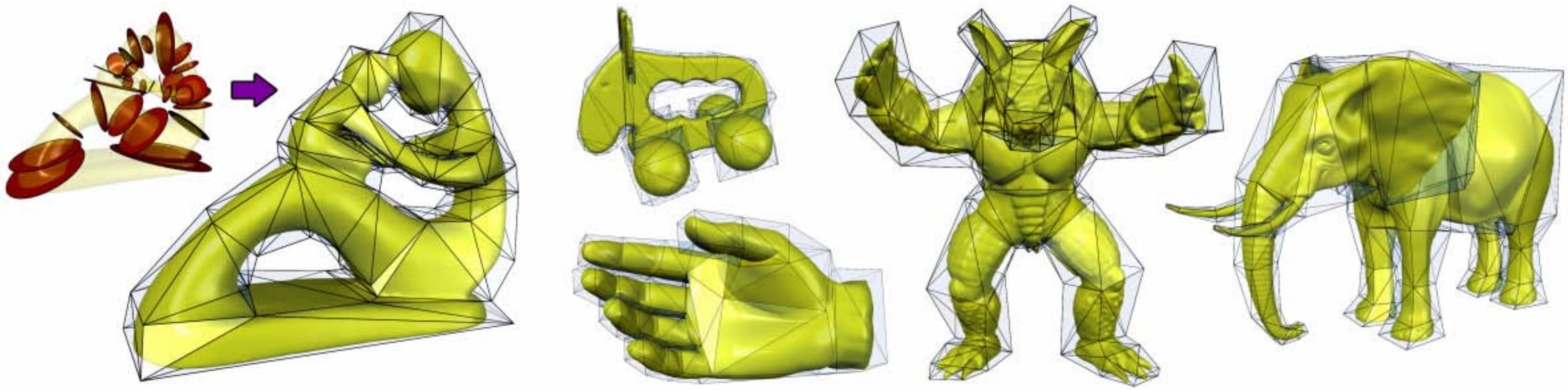
Example


Design the Lattice
Orient about the Object
Freeze the Lattice
Deform the Lattice

Example



基于Cage的变形原理



- **Cage**：一个包裹高分辨率模型的低分辨率控制网格。
- 基于**cage**的变形方法具有直观性、简单性和高效性，在最近十多年得到了越来越多的关注。
- 变形原理: **(1).** 构建模型的**Cage**；**(2).** 计算模型的**Cage**坐标; **(3).**编辑**Cage**模型; **(4).** 把**Cage**的变形通过预先计算的**Cage**坐标光滑传播到其包裹的模型。

与物体表示有关的变形

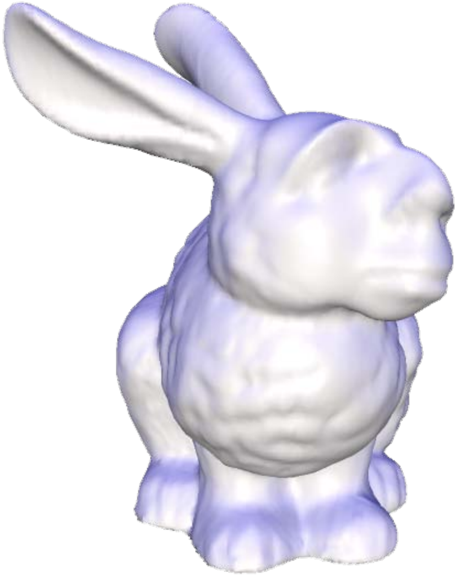
- **Mesh Editing**

- **Mesh Deformation**

Digital Geometry Processing！

基于Laplacian坐标的Mesh Deformation

- Differential surface representation
- Ideas and applications
  - Compact shape representation
  - Mesh editing and manipulation



Olga Sorkine, Daniel Cohen-Or, Yaron Lipman, Marc Alexa, Christian Rössl, Hans-Peter Seidel: Laplacian Surface Editing. Symposium on Geometry Processing 2004: 175-184

Triangle mesh

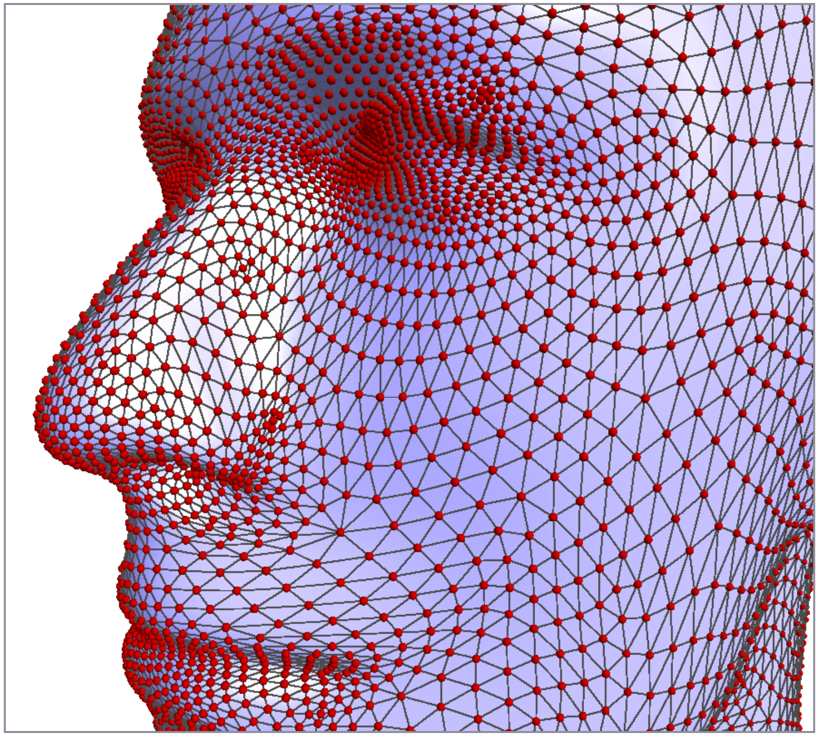
- Geometry:
  - Vertex coordinates

    (x_1, y_1, z_1)

    (x_2, y_2, z_2)

    . . .

    (x_n, y_n, z_n)



- Connectivity (the graph)
  - List of triangles

    (i_1, j_1, k_1)

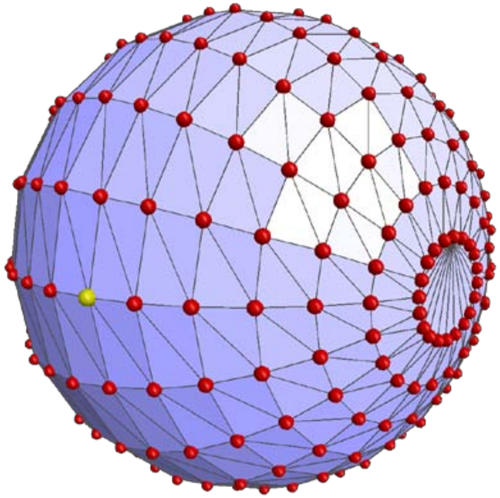
    (i_2, j_2, k_2)

    . . .

    (i_m, j_m, k_m)

Motivation

- Meshes are great, but:
  - Topology is explicit, thus hard to handle
  - Geometry is represented in a *global* coordinate system
    - Single Cartesian coordinate of a vertex doesn't say much

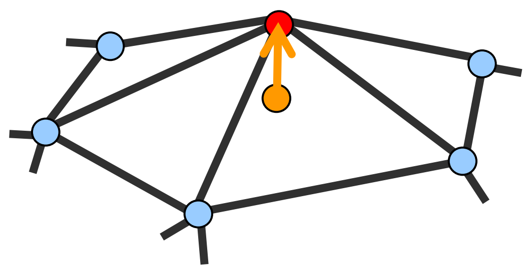


Differential coordinates

- Represent *local detail* at each surface point
  - better describe the shape
- Linear transition from global to differential
- Useful for operations on surfaces where surface details are important

Differential coordinates

- Detail = surface – *smooth*(surface)
- Smoothing = averaging



$$\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{v}_i - \frac{1}{d_i}\sum_{j\in N(i)} \mathbf{v}_j$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = \sum_{j\in N(i)} \frac{1}{d_i}\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\right)$$

Laplacian matrix

- The transition between the δ and *xyz* is linear:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \mathrm{L} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1^{(x)} \\ \delta_2^{(x)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_n^{(x)} \end{pmatrix}$$

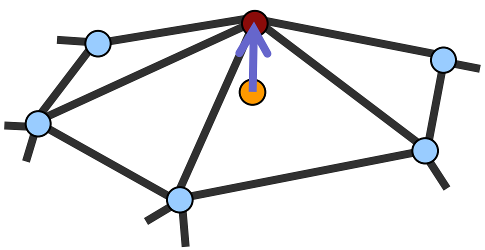
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in N(j) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{I} - \mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}$$

Laplacian matrix

- The transition between the δ and xyz is linear:



$$\boldsymbol{\delta}_i = \sum_{j\in N(i)} w_{ij}\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\right)$$

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v_x} = \boldsymbol{\delta}_\mathbf{x}$$

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v_y} = \boldsymbol{\delta}_\mathbf{y}$$

$$\mathbf{L}\,\mathbf{v_z} = \boldsymbol{\delta}_\mathbf{z}$$

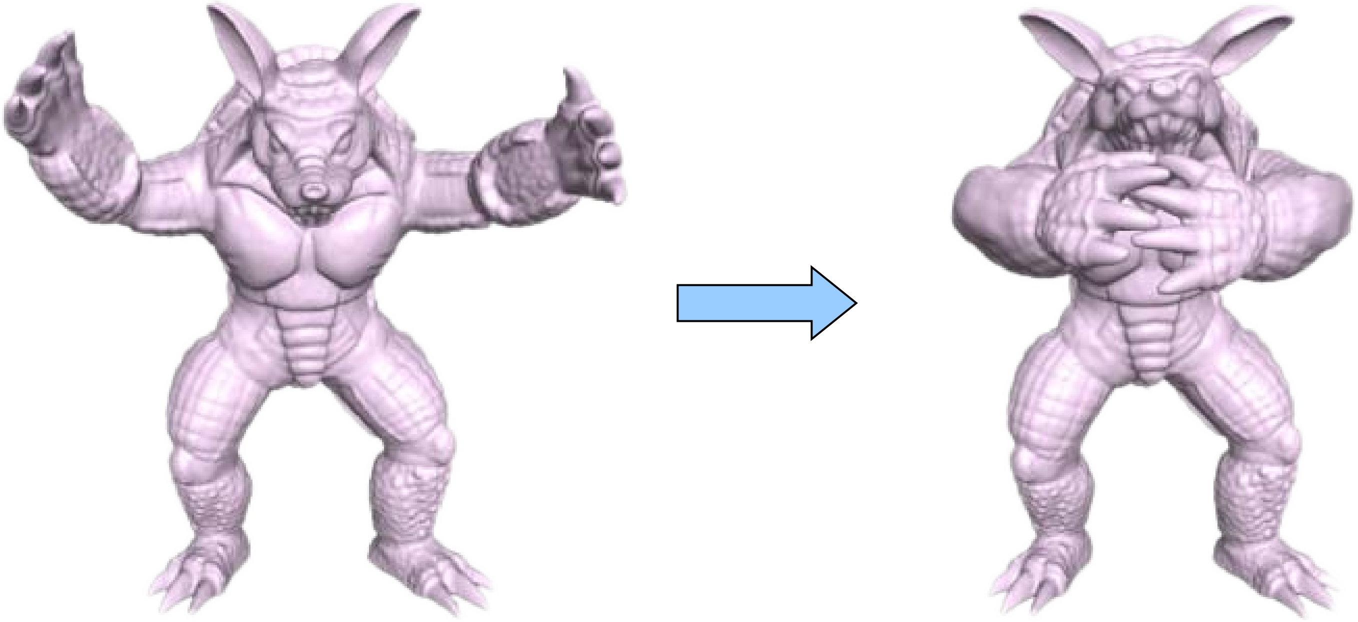
Basic properties

- Rank(L) = n-c (n-1 for connected meshes)
- We can reconstruct the xyz geometry from delta up to translation

$$L\mathbf{x} = \boldsymbol{\delta}$$

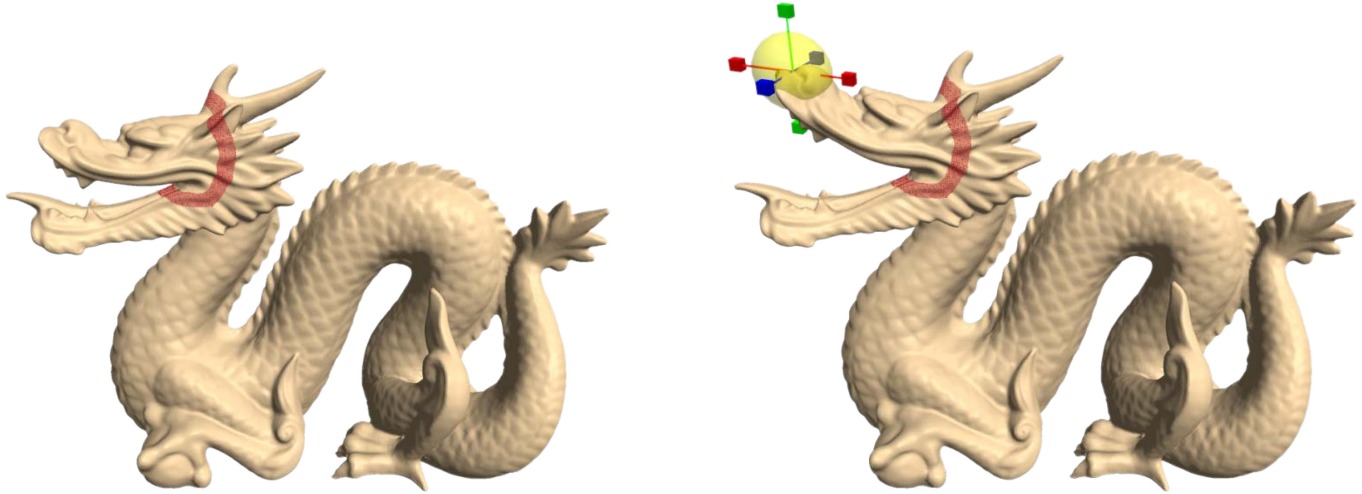
Differential coordinates for editing

- Intrinsic surface representation
- Allows various surface editing operations that preserve local surface details



Why differential coordinates?

- Local detail representation – enables detail preservation through various modeling tasks
- Representation with sparse matrices
- Efficient linear surface reconstruction



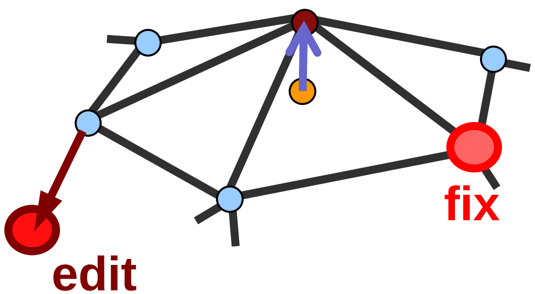
Editing framework

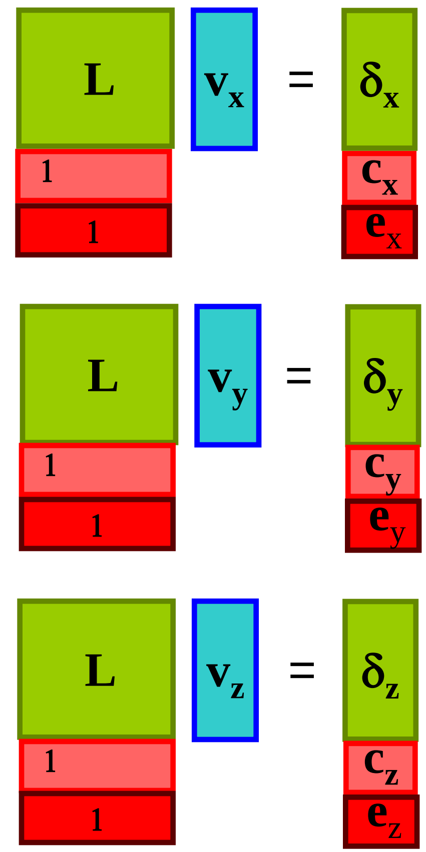
- The spatial constraints will serve as modeling constraints
- Reconstruct the surface every time the modeling constraints are changed

Detail constraints: $L\mathbf{x} = \boldsymbol{\delta}$

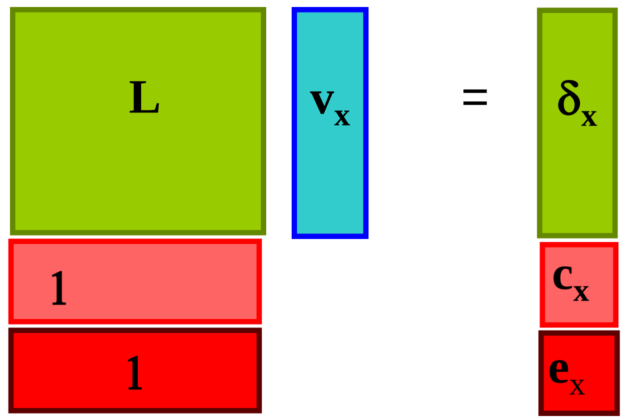
Modeling constraints: $x_j = c_j, \quad j \in \{j_1, j_2, \ldots j_k\}$

Reconstruction



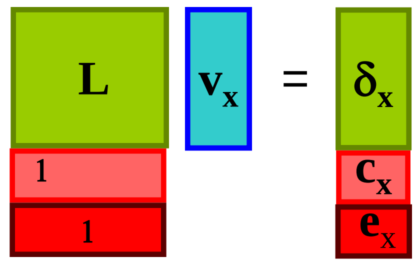


Reconstruction



$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \left(\left\| L\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta}_x \right\|^2 + \sum_{s=1}^{k} \left| x_k - c_k \right|^2 \right)}$$

Reconstruction



$$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

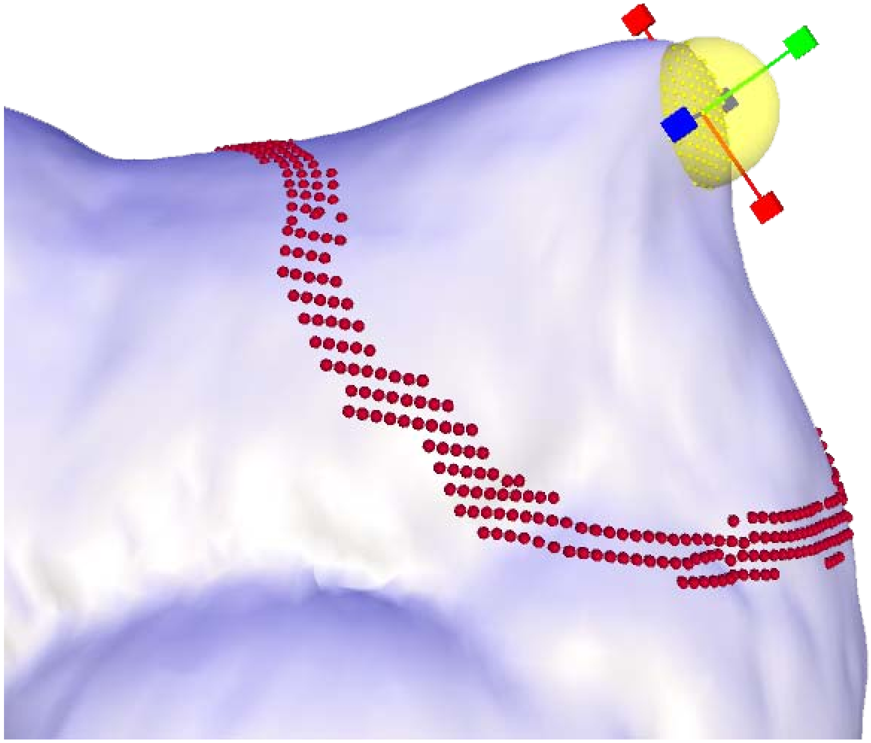
Normal Equations:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\ \mathbf{A}^T}_{\text{compute once}}\mathbf{b}$$

Editing framework

- ROI is bounded by a belt (static anchors)
- Manipulation through handle(s)



Demo

Laplacian Mesh Editing

A short editing session
with the *Octopus*

Demo

The End