DOI:10.13316/j.cnki.jhem.1987.s1.010

二次曲线正负区域的一些性质

吴 顺 唐

1 引 设 $\Phi(x,y)=0$ 为 xy 平面上的曲线 Γ^* 的方程，则我们称

$$\Phi^+=\{(x,y):\Phi(x,y)>0,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2\}$$

$$\Phi^-=\{(x,y):\Phi(x,y)<0,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2\}$$

为曲线 Γ^* 的正区域和负区域。确定一曲线的正负区域，在计算机数控绘图中经常会碰到。关于二次曲线 Γ：

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

正负区域 F^+、F^- 的确定，〔1〕，〔2〕中已讨论过，但都没有进一步讨论二次曲线划分平面所得区域的特征。本文将详细地讨论 F^+ 和 F^- 的性质，同时利用正负区域的概念，给出二次曲线奇点的一个新定义。

2．F^+ 和 F^- 的连通性和凸性．

引理1 设 $\Phi(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，则 Φ^+ 和 Φ^- 均为 $\mathbf{R}^2$ 内的开集

证：利用连续函数的保号性定理即得。

引理2 设 $L(x,y)=Ax+By+C$，则 L^+，L^- 均为凸域。

这是显然的。

引理3 二次曲线 Γ：$F(x,y)=0$ 为实椭园，则 F^+，F^- 都是（连通）区域；且 $a_{11}>0$ 时，F^- 为凸域。

证 不妨假定 $a_{11}>0$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 为 F^- 内的任意两点，$P(x,y)$ 为线段 P_1P_2 上的任意一点，其中

$$x=x_1t+x_2(1-t),\quad y=y_1t+y_2(1-t)\qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

由二元二次多项式配极形式的性质，不难得

$$\begin{aligned} F(t)&=F(x_1t_1+x_2(1-t),\ yt+y_2(1-t))\\ &=t^2F(x_1,y_1)+2t(1-t)F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)+(1-t)^2F(x_2,y_2)\\ &=At^2+Bt+C\qquad (0\leqslant t\leqslant 1)\end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$A=F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)-2F^*(x_1,y_1;x_2,y_2) \tag{3}$$

$$B=2[F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)-F(x_2,y_2)] \tag{4}$$

$$C=F(x_2,y_2) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)=&a_{11}x_1x_2+a_{12}(y_1x_2+x_1y_2)+a_{22}y_1y_2+a_{13}(x_1+x_2)+\\ &+a_{23}(y_1+y_2)+a_{33}\end{aligned}$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由于$a_{11}>0$，$I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$，故

$$A=a_{11}(x_1-x_2)^2+2a_{12}(x_1-x_2)(y_1-y_2)+a_{22}(y_1-y)^2\geqslant 0$$

又，

$$C=F(x_2,y_2)<0$$

$$A+B+C=F(x_1,y_1)<0 \tag{6}$$

故方程$At^2+Bt+C=0$必有实根，记为x_1,x_2：

$$x_1=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\quad x_2=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

因$B^2-4AC\geqslant B^2$，$\therefore x_1\leqslant 0$；又因$4A(A+B+C)\leqslant 0$

从而$(2A+B)^2=4A^2+4AB+B^2\leqslant B^2-4AC$，故$x_2\geqslant 1$。

$$\therefore\quad x_1\leqslant 0<1\leqslant x_2$$

注意到$A>0$，就知$\forall t\in(0,1)$，$F(t)<0$。故$P_1P_2\subset F^-$，F^-为凸集，又由引理1，F^-为凸区域。

下面证F^+为域区，显然，只需证明连通性已够。先证明：若$P_1(x_1,y_1)\in F^+$。则必存在无限多条过P_1的直线L，便$L\subset F^+$。考虑过P_1的直线

$$L(m,n):x=x_1+mt,\ y=y_1+nt\ (m^2+n^2\neq 0)$$

则$\forall P\in L(m,n)$，有

$$F(t)=F(p)=\phi(m,n)t^2+2(mm^*+nn^*)t+F(x_1,y_1) \tag{7}$$

其中

$$\phi(m,n)=a_{11}m^2+2a_{12}mn+a_{22}n^2 \tag{8}$$

$$m^*=F_1(x,y)|_{(x_1,y_1)}=a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13} \tag{9}$$

$$n^*=F_2(x,y)|_{(x_1,y_1)}=a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23} \tag{10}$$

由于$F(0)=F(x_1,y_1)>0$，故要使$L(m,n)\subset F^+$，只需使上面的二次函数之判别式$\Delta<0$。注意

$$\frac{1}{4}\triangle=(mm^*+nn^*)^2-F(x_1,y_1)\phi(m,n)$$

$$=[m^{*2}-a_{11}F(x_1,y_1)]m^2+2[m^*n^*-a_{12}F(x_1,y_1)]mn+[n^{*2}-a_{22}F(x_1y_1)]n^2$$

故要证明我们所说的结论，只需证明上述关于m,n的二次式之判别式$\Delta^*>0$。由于

$$\frac{1}{4}\Delta^*=[m^*n^*-a_{12}F(x_1,y_1)]^2-[m^{*2}-a_{11}F(x_1,y_1)][n^{*2}-a_{22}F(x_2,y_2)]$$

$$=F(x_1y_1)[-I_2F(x_1,y_1)+a_{22}m^{*2}-2a_{12}m^*n^*+a_{11}n_1^{*2}]$$

$$=F(x_1,y_1)[-I_2F(x_1,y_1)+I_2F(x_1,y_1)-I_3]$$

$$=-I_3F(x_1,y_1) \tag{11}$$

其中

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad I_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}.$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因 $a_{11}>0$，$I_2>0$，由此即知 $I_3<0$，故

$$\Delta^*>0$$

这样，存在无穷多组 m,n 使 $\Delta>0$，这就证明了开头所说的结论。

现设 $P_2(x_2,y_2)$ 为 F^+ 内的另一点，则由上面所证明的，必定存在分别过 P_1，P_2 的两条不平行的直线 L_1 和 L_2，使 $L_1\subset F^+$，$L_2\subset F^+$。设 M 为 L_1，L_2 的交点，则显然折线 $P_1MP_2\subset F^+$。所以 F^+ 为连通集。

引理 4 设 Γ：$F(x,y)=0$ 为抛物线，则 F^+、F^- 为区域，而且当 $a_{11}>0$ 时，F^- 是凸域。

证 F^+ 连通性的证明与引理 3 完全相同。事实上，当 $a_{11}>0$ 时，$a_{22}>0$，故 $a_{11}+a_{22}=I_1>0$，$I_3<0$。因此，由(11)仍有 $\Delta^*>0$。至于 F^- 的凸性，只需注意由 $a_{11}>0$ 及 $I_2=0$，仍可得 $A\geqslant 0$，从而当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时(2)中的二次函数 $F(t)<0$，即 $P_1P_2\subset F^-$。

引理 5 若 Γ：$F(x,y)=0$ 为双曲线，且 $I_3>0$。则 F^- 为连通域，F^+ 为两个不相交的凸域之并。

证 先考虑 F^-。显然，Γ 的对称中心 $M_0(x_0,y_0)\in F^-$。事实上，

$$F(x_0,y_0)=x_0F_1(x_0,y_0)+y_0F_2(x_0,y_0)+F_3(x_0,y_0)$$

$$=F_3(x_0,y_0)=-\frac{I_3}{I_2}<0.$$

今设 $P_1(x_1,y_1)$ 为 F^- 中的任意一点，则对线段 PM_0 上的任意一点 $P(tx_0+(1-t)x_1,y_0t+(1-t)y_1)$，$0<t<1$，有

$$F(P)=F(x_1,y_1)(1-t)^2-a_{33}(1-t)^2+F(x_0t,y_0t),$$

这里我们用到了恒等式(7)及

$$a_{11}x_0+a_{12}y_0=-a_{13},\quad a_{21}x_0+a_{22}y_0=-a_{23}$$

但 $\phi(x_0,y_0)=-(a_{13}x_0+a_{23}y_0)$，故

$$F(x_0t,y_0t)-a_{33}(1-t)^2=-(a_{13}x_0+a_{23}y_0)t^2$$
$$+2(a_{13}x_0+a_{23}y_0)t+a_{33}(2t-t^2)$$
$$=\frac{I_3}{I_2}t(2-t)$$

$$\therefore\quad F(P)=F(x_1,y_1)(1-t^2)+\frac{I_3}{I_2}t(2-t)\tag{11}$$

注意 $F(x_1,y_1)<0$，$I_3>0$，$I_2<0$，$0<t<1$，即知 $F(P)<0$。从而 $P_1M_0\subset F^-$。若 P_2 为 F^- 内的另一点，则折线 $P_1M_0P_2\subset F^-$。故 F^- 是连通的。

今证 F^+ 的凸性，容易验证，$I_2<0$ 时，关于 λ_1，λ_2，φ 的方程组

$$\begin{aligned}&\lambda_1\cos^2\varphi+\lambda_2\sin^2\varphi=a_{11}\\&(\lambda_1-\lambda_2)\sin\varphi\cos\varphi=a_{12}\\&\lambda_1\sin^2\varphi+\lambda_2\cos^2\varphi=a_{22}\end{aligned}\tag{12}$$

的解存在，而且 $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$。不失一般性，假定 $\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$。又设 L 为直线，其方程为

$$L(x,y)=(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi\tag{13}$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中x_0,y_0为Γ的中心。下面我们证明$F^+\cap L^+$和$F^+\cap L^-$均为凸域。

任取$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in F^+\cap L^+$，$P(x,y)$为线段$P_1P_2$上的任意一点，其中$x=tx_1+(1-t)y_1$，$y=tx_2+(1-t)y_2$ $(0<t<1)$。那么由恒等式(2)，只需证明

$$F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)\geqslant 0 \tag{14}$$

即可。事实上，此时$P\in F^+$。而由引理2，$P\in L^+$故$P_1P_2\subset F^+\cap L^+$，即$F^+\cap L^+$为凸集。又因$F^+L^+$均为开集，故$F^+\cap L^+$亦为开集，$\therefore F^+\cap L^+$为凸域。现在往证(14)。

经过简单计算，容易验证

$$F(x,y)=\lambda_1[(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi]^2+\lambda_2[-(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi]^2$$

故

$$\lambda_1[(x_i-x_0)\cos\varphi+(y_i-y_0)\sin\varphi]^2>-\lambda_2[-(x_i-x_0)\sin\varphi+(y_i-y_0)\cos\varphi]^2 \quad (i=1,2)$$

因上面两式右端均为正，且$P_1,P_2\in L^+$。故不论右端是正是负，两式相乘并开方，总可得

$$\lambda_1[(x_1-x_0)\cos\varphi+(y_1-y_0)\sin\varphi][(x_2-x_0)\cos\varphi+(y_2-y_0)\sin\varphi]>-$$
$$-\lambda_2[-(x_1-x_0)\sin\varphi+(y_1-y_0)\cos\varphi][-(x_2-x_0)\sin\varphi+(y_2-y_0)\cos\varphi].$$

移项，並注意到(12)，就得

$$a_{11}(x_1-x_0)(x_2-x_0)+a_{12}[(x_1-x_0)(y_2-y_0)+(x_2-x_0)(y_1-y_0)]+$$
$$+a_{22}(y_1-y_0)(y_2-y_0)>0$$

或

$$F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)-F_3(x_0,y_0)>0 \tag{15}$$

但不难直接验证恒等式：

$$[F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)-F_3(x_0,y_0)]^2-[F(x_1,y_1)-F_3(x_0,y_0)][F(x_2,y_2)-F_3(x_0,y_0)]$$
$$=-I_2[(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)]^2$$

注意$I_2<0$，故

$$[F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)-F_3(x_0y_0)]^2\geqslant[F(x_1,y_1)-F_3(x_0,y_0)][F(x_2,y_2)-F_3(x_0,y_0)]$$

因

$$F_3(x_0,y_0)=\frac{I_3}{I_2}<0,\quad F(x_1,y_1)>0,\quad F(x_2,y_2)>0$$

$$\therefore\quad F(x_i,y_i)-F_3(x_0,y_0)>-F_3(x_0,y_0)\quad (i=1,2)$$

$$\therefore\quad [F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)-F_3(x_0,y_0)]^2\geqslant F_3^2(x_0,y_0)$$

由(15)，就得

$$F^*(x_1,y_1;x_2,y_2)-F_3(x_0,y_0)>-F_3(x_0,y_0).$$

这就证明了(14)。所以$F^+\cap L^+$为凸域，同理可证$F^+\cap L^-$为凸域。因不难证明$L\subset F^-$，故

$$F^+=(F^+\cap L^-)\cup(F^+\cap L^+),$$

这就完全证明了引理。

由引理3，4，5；同时考虑到[1]，[2]中的结果，那么实际上我们已用初等方法证明了下面关于二次曲线划分平面的较完整的定理了：

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理 1 椭园和抛物线将整个平面划分成两个区域：F^+和F^-。而且在引理3，4的条件下，焦点所在的区域为F^-，而且是凸域。

定理 2 双曲线将整个平面分成三个区域，且在引理5的条件下，对称中心所在的区域为F^-；焦点所在的区域为F^+，F^+可以表示为两个不相交凸域的并。

当然，如果利用坐标变换将曲线化为标准形式再进行讨论，则更易得到定理1，2的结论。

3.切线与正负区域。 今设$M(x_0,y_0)$为曲线(1)上的任意一点，而L为二次曲线Γ的过M的切线。则有

定理 3 在定理1，2的假定下，对椭园和抛物线，有

$$L-\{M\}\subset F^+, \tag{16}$$

而且F^-位于直线L的一侧；对双曲线，有

$$L-\{M\}\subset F^-, \tag{17}$$

而且F^+的两个凸子集分别位于L的两侧。

证 记 $m=F_1(x_0,y_0)$，$n=F_2(x_0,y_0)$。则过M之切线L的方程为

$$x=x_0+nt,\quad y=y_0-mt$$

于是对切线上的任意一点$P(x,y)$，有

$$\begin{aligned}F(P)&=F(x_0+nt,\ y_0-mt)\\&=F(x_0,y_0)+(a_{11}n^2-2a_{12}mn+a_{22}m^2)t^2+[2n(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})\\&\quad-2m(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})]t\\&=(a_{11}n^2-2a_{12}mn+a_{22}m^2)t^2\\&=[I_2F(x_0,y_0)-I_3]t^2=-I_3t^2\end{aligned}$$

故对椭园和双曲线，结论(16)自然成立；而对抛物线，因当$a_{11}>0$时，由$a_{11}a_{22}=a_{12}^2>0$知$a_{22}>0$。从而

$$I_3=a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=-(a_{22}a_{13}^2+a_{11}a_{23}^2)<0$$

故结论(17)亦成立。

再由F^-(对椭园和抛物线)和$F^+\cap L^+$，$F^+\cap L^-$的凸性，即知它们必位于切线的一侧，定理证毕。

4.二次曲线的奇点。 大家知道，若$L(x,y)=0$为直线方程，则当动点P沿任一异于L的直线穿过L上的任一点时，$L(P)$总变号.但非退化的二次曲线Γ则不同,此时对Γ上的任一点M，必存在一过M的直线L，例如Γ的切线，当动点P沿L穿过M时，$F(P)$不变号。但下面的定理表明：这种直线的数目不能多于2。

定理 4 设Γ：$F(x,y)=0$为二次曲线，若在Γ上存在一点M及过M的两条不同的直线L_1，L_2，使当动点P沿L_1，L_2穿过M时，$F(P)$不变号，则Γ为两相交直线。若这种点多于一个，则Γ为重合直线

证 设M之坐标为(x_0,y_0)，而

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.   http://www.cnki.net

$$L_i:\ x = x_0 + m_i t,\ y = y_0 + n_i t \qquad (i=1,2)$$

其中

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{18}$$

设 $P(x,y)$ 为 L_1 上的任意一点，则由恒等式

$$F(x+x_0, y+y_0) = \phi(x,y) + 2xF_1(x_0,y_0) + 2yF_2(x,y) + F(x_0,y_0)$$

得

$$F(P) = \phi(m,n)t^2 + 2[m_1F_1(x_0,y_0) + n_1F_2(x_0,y_0)]t.$$

由假定，上式右端关于 t 的二次函数不变号，故必

$$m_1F_1(x_0,y_0) + n_1F_i(x_0,y_0) = 0$$

同理可得

$$m_2F_1(x_0y_0) + n_2F_2(x_0,y_0) = 0$$

由(18)，即知

$$F_1(x_0,y_0) = F_2(x_0,y_0) = 0 \tag{19}$$

但 $M \in \Gamma$，故 M 为 Γ 的二重点，所以定理结论成立。

在一般书中，二次曲线 Γ 上的点 $M(x_0,y_0)$ 若满足(19)，则称 M 为 Γ 的奇点。二次曲线的二重点是奇点，反之亦然。因此，也有的书上将奇点定义为两重点。而由定理4，我们可以利用二次曲线的正负区域的概念给出奇点的一个新定义。

定义 设 Γ 为二次曲线，$M \in \Gamma$。若过 M 存在两条方向不同的直线 $L_i(i=1,2)$，使当动点 P 沿 L_i 通过 M 时，$F(P)$ 不变号，则称 M 为 Γ 的奇点。

参 考 文 献

〔1〕 孙存金，圆锥曲线划分平面的定理及其证明，数学通报，11(1985)，P13—15。

〔2〕 马 明，点与二次曲线的相关位置，数学通讯，10(1983)，P20—23。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net