

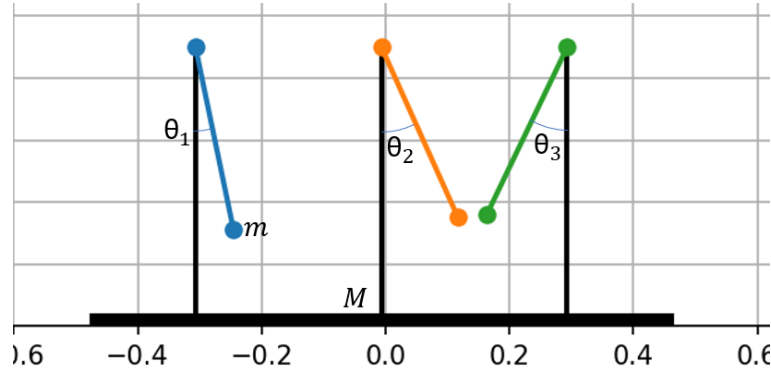
# Risonanza e sincronizzazione di oscillatori

Giuseppe Cairone

19 settembre 2023

## 1 Introduzione

Il sistema che si intende studiare è composto da un supporto di massa  $M$  libero di muoversi orizzontalmente su un piano senza attrito, e da  $n$  pendoli, ciascuno di lunghezza  $l$  e con massa attaccata  $m$ .



Il sistema ha quindi  $n + 1$  gradi di libertà, uno legato al moto orizzontale del supporto e uno per ogni pendolo. Il primo è determinato dalla posizione  $x(t)$  del supporto, i gradi di libertà associati ai pendoli sono determinati dall'angolo del pendolo rispetto alla verticale. Per ciò che si è interessati a studiare poniamo  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Dunque lo stato iniziale è determinato da  $\theta_i(0), \dot{\theta}_i(0)$  per ogni  $i$ -esimo pendolo con  $1 \leq i \leq n$ .

## 2 Oscillazioni libere

### 2.1 Equazioni del moto

L'energia cinetica del sistema è  $K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}mv_i^2$  in cui  $v_i$  è il modulo della velocità della massa sull' $i$ -esimo pendolo rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, quindi:

$v_i^2 = (\dot{\theta}_i \sin(\theta_i))^2 + (\dot{x} + \dot{\theta}_i \cos(\theta_i))^2$ ,  $K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}_i^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{\theta}_i\dot{x}\cos(\theta_i))$ . L'energia potenziale gravitazionale del sistema è  $U = \sum_{i=1}^n -mgl\cos(\theta_i)$ . La lagrangiana del sistema è:

$$L(x, \dot{x}, \theta_i, \dot{\theta}_i) = K - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}_i^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{\theta}_i\dot{x}\cos(\theta_i)) + \sum_{i=1}^n mgl\cos(\theta_i).$$

Per ottenere il sistema di equazioni differenziali del moto applico l'equazione di Eulero-Lagrange  $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$  ad ogni coordinata ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{g \sin(\theta_1) - \ddot{x} \cos(\theta_1)}{l} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{g \sin(\theta_2) - \ddot{x} \cos(\theta_2)}{l} \\ \dots \\ \ddot{\theta}_n = \frac{g \sin(\theta_n) - \ddot{x} \cos(\theta_n)}{l} \\ \ddot{x} = \frac{ml \sum_{i=1}^n \ddot{\theta}_i^2 \sin(\theta_i) - mg \sum_{i=1}^n \sin(2\theta_i)}{M + m \sum_{i=1}^n \sin^2(\theta_i)} \end{cases}$$

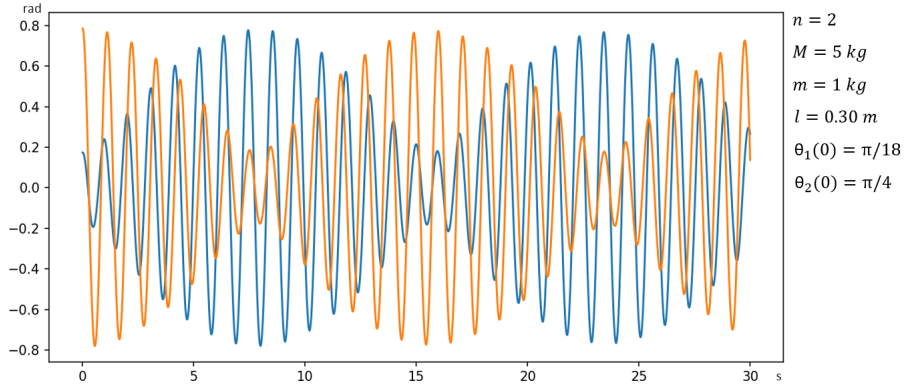
che risolto per le coordinate  $x(t), \theta_i(t)$  rappresenta l'evoluzione del sistema.

## 2.2 Simulazione numerica

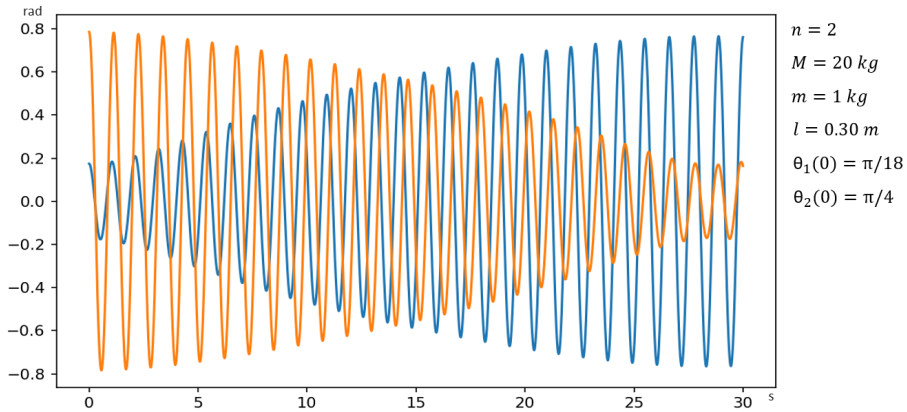
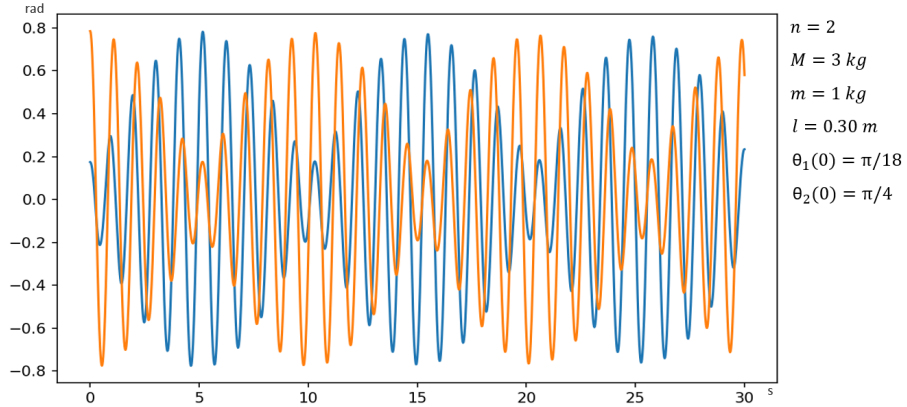
Per la simulazione numerica è stata usata la libreria scipy di Python, che contiene nel modulo scipy.integrate la funzione solveivp(). Questa funzione ha come parametri:

- le condizioni iniziali
- un array che contiene gli istanti di tempo
- una funzione che prende in input lo stato del sistema  $(\theta_0, \dot{\theta}_0, \dots, \theta_n, \dot{\theta}_n, x, \dot{x})$  e restituisce un array con  $(\ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_1, \dots, \ddot{\theta}_n, \ddot{x}, \ddot{x})$ , calcolandolo attraverso le equazioni precedentemente ottenute.

La funzione solveivp(), partendo dalle condizioni iniziali, applica iterativamente la funzione passata come parametro, e restituisce degli array che contengono l'evoluzione del moto, coerentemente con l'array degli istanti di tempo. Per l'integrazione numerica la funzione usa il metodo di Runge-Kutta di quarto ordine.



Da questa simulazione il fenomeno della risonanza risulta evidente, essa è dovuta al moto del supporto, che fa in modo che i due pendoli continuino a scambiarsi energia. La dipendenza dello "scambio di energia" dal moto del supporto diventa ancora più evidente cambiando il rapporto  $M/m$ , ridimensionando l'ampiezza del moto del supporto di massa  $M$ .



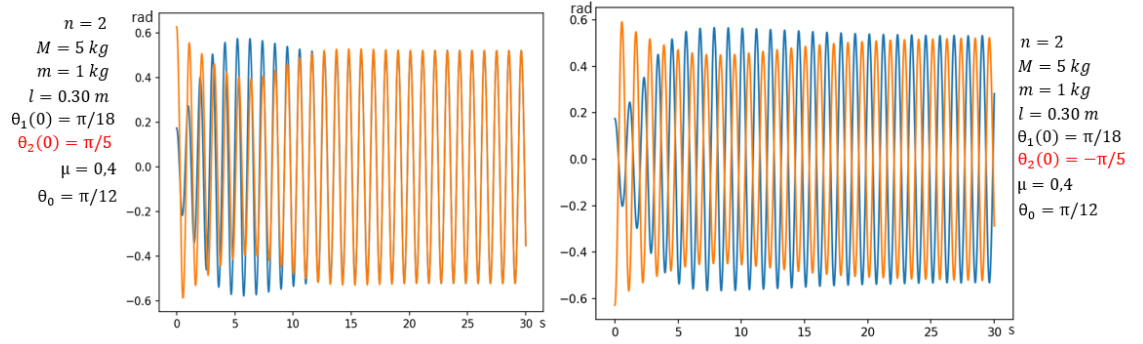
### 3 Oscillazioni self-sustained

Il sistema fisico finora analizzato modella dei pendoli su un supporto, in tale sistema risulta evidente il fenomeno della risonanza, ma non il noto fenomeno di sincronizzazione dei metronomi. Un metronomo meccanico differisce da un pendolo semplice per la presenza di meccanismi che ne alterano il moto, che servono a compensare l'effetto smorzante dell'attrito dell'aria. Per includere questo effetto nel nostro modello, aggiungiamo un termine di "damping-driving" nel sistema ottenuto precedentemente, modificando le equazioni relative ai pendoli:

$\ddot{\theta}_i = \frac{g \sin(\theta_i) - \ddot{x} \cos(\theta_i)}{l} + \mu \dot{\theta}_i ((\frac{\theta_i}{\theta_0})^2 - 1)$  dove  $\theta_0$  è un angolo "di equilibrio" scelto a priori,  $\mu$  è un coefficiente con il quale si sceglie l'intensità di questo effetto smorzante. Questa nuova equazione, da sostituire nel sistema precedente per ogni pendolo, caratterizza l'oscillatore di Van Der Pol, oscillatore non conservativo con dissipazione non lineare. Dall'equazione si nota che quando  $\theta_i > \theta_0$  l'effetto del termine smorzante è simile a quello di una forza di attrito viscoso e il pendolo perde energia, quando invece  $\theta_i < \theta_0$  il pendolo acquista energia.



La sincronizzazione che si ottiene non risulta tuttavia essere sempre in fase, infatti se poniamo sul supporto due pendoli con angoli iniziali di segno opposto, si ottiene una sincronizzazione in antifase.



## 4 Conclusioni

Dai risultati ottenuti si può concludere che la risonanza caratterizza il sistema composto dai pendoli con oscillazioni semplici, invece la sincronizzazione richiede delle oscillazioni self-sustained, che sono state ottenute con il modello di Van der Pol. Inoltre dagli esempi finali si nota che il modello scelto non evolve sempre verso una sincronizzazione totale (intesa come  $\theta_i - \theta_j \rightarrow 0$  per ogni coppia di pendoli), ma può evolvere verso sincronizzazioni in antifase o più complesse.

