By: Herminso Villarraga Gómez

Repaso de los principios fundamentales — Cap 1 Goldstein

Mecánica de una partícula:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dot{\vec{p}}} \rightarrow \text{Si } \vec{F}_T = 0 \rightarrow \vec{p} = cte$$

Conservación de la cantidad de movimiento.

$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$ → momento cinético

$\boxed{\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}}$ → momento de una fuerza.

$$\vec{N} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) + \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} = \frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{r} \times m\vec{v}}_{\vec{L}})$$

$$\boxed{\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \rightarrow \text{Si } \vec{N}_T = 0 \rightarrow \vec{L} = cte$$

Conservación del momento cinético

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = \frac{m}{2}\int_1^2 \frac{d}{dt}(v^2)\,dt = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$\boxed{W_{12} = T_2 - T_1}$ → Teorema del trabajo - energía $\quad T = \frac{1}{2}mv^2$

$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$ → en el caso en que las fuerzas sean conservat.

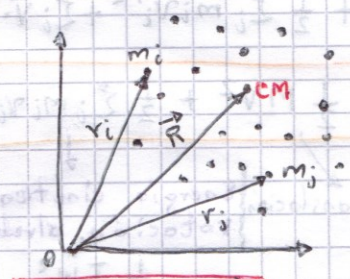
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int \nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2 = W_{12} = T_2 - T_1$$

$\Rightarrow \boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$ → Conservación de la energía.

- si $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}, t) \Rightarrow W_{12} = -\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial s} ds \neq V_1 - V_2$

El trabajo ya no es la variación total de $-V$ cuando el potencial depende además del tiempo ⇒ No hay conservación de la energía.

Mecánica de un sistema de partículas:



$$\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} = \frac{d^2}{dt^2}(m_i\vec{r}_i) = \dot{\vec{p}}_i \quad \text{(ley Newton)}$$

$$\sum_i \left(\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}\right) = \underbrace{\sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji}}_{0} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i (m_i\vec{r}_i)$$

$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$

$$\sum_i \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)} = M\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right]$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}} \qquad \boxed{\vec{F}^{(e)} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}} \qquad \vec{F} = M\vec{a}_{CM}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

Por otro lado $\vec{P}_T = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\overbrace{\left(\sum m_i \vec{r}_i\right)}^{M\vec{R}} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \dot{\vec{P}}_T \rightarrow \boxed{\vec{F}^{(e)} = \dot{\vec{P}}} \rightarrow \text{Si } \vec{F}^{(e)} = 0 \rightarrow \vec{P} = cte$$

Conservación de la cantidad de movimiento del sistema

$$\sum_i \vec{r}_i \times \left(\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i$$

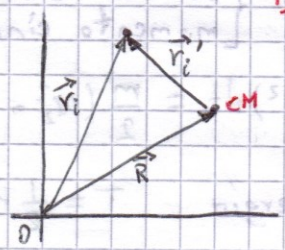
$$\sum_i \sum_{j\neq i} \cancel{\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}} + \sum_i \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}}_{\vec{N}_i^{(e)}} = \sum_i \frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{L}_i} = \frac{d}{dt}\sum \vec{L}_i = \dot{\vec{L}}$$

$\vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$

$\Downarrow \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \cancel{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}} \rightarrow 0$ ley fuerte de acción y reacción.

$$\Rightarrow \sum_i \vec{N}_i^{(e)} = \boxed{\vec{N}^{(e)} = \frac{d\vec{L}^{(e)}}{dt}} \rightarrow \text{Si } \vec{N}^{(e)} = 0 \rightarrow \vec{L} = cte$$

Conservación del momento cinético resultante.



$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times m_i(\vec{V} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_i \vec{R} \times m_i\vec{V} + \vec{R} \times \sum_i m_i v_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i'$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \left(\sum_i m_i\right)\vec{V} + \vec{R} \times \frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i m_i\vec{r}_i'}_{0} + \underbrace{\sum_i m_i\vec{r}_i'}_{0} \times \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'}$$

Definen el vector centro de masa respecto al centro de masa.

momento cinético del CM. | momento cinético de las partículas alrededor del C.M.

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot ds_i = \sum_i \int_1^2 (m_i\dot{\vec{v}}_i)\cdot(\vec{v}_i\,dt) = \sum_i \int_1^2 d\left(\tfrac{1}{2}m_i v_i^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{12} = T_2 - T_1} \quad \text{con } T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{V} + \vec{v}_i')^2$$

Teo. trabajo-Energía.

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \sum_i \vec{V}\cdot(m_i\vec{v}_i')$$

$$\sum_i \vec{V}\cdot(m_i\vec{v}_i') = \cancel{\vec{V}\cdot\frac{d}{dt}\sum m_i\vec{r}_i'} \rightarrow 0 \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2}$$

Energía de translación del C.M | Energía cinética de rotación alrededor del C.M

$\frac{1}{2}I\omega^2$

$$\boxed{I = \sum m_i r_i^2}$$

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i + \sum_i \sum_{i \neq j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i$$

Si las fuerzas interiores son conservativas, pueden obtenerse de un potencial V_{ij}. Para que cumplan la ley de acción - reacción necesariamente:

$$V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad t.q. \quad \vec{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}$$
$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_j V_{ij} = +\nabla_i V_{ij}$$

es decir $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

además deben estar en la recta que une las dos partículas: $\Rightarrow \nabla V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) f$

$$W_{12} = -\sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot ds_i - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

El último término se obtiene de escribir $\sum_i \sum_j$ en forma de pares:

$$\int_1^2 (\vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j) = -\int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot ds_i + \nabla_j V_{ij} \cdot ds_j)$$

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij} \longrightarrow \quad = -\int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot (ds_i - ds_j)$$

$$= -\int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

$$\Rightarrow W_{12} = -\sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot ds_i - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} \int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

para evitar sumar dos veces el mismo término.

$$\underbrace{W_{12}}_{T_2 - T_1} = -\sum_i V_i \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_1^2 = V_1 - V_2$$

$$T_2 - T_1 \longrightarrow \boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2} \quad \text{con} \quad \boxed{V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} V_{ij}}$$

Conservación de la Energía.

Energía potencial interna del sistema.

$\frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} V_{ij} \longrightarrow$ En oral no tiene porque ser nulo, puede variar cuando el sistema varía con el tiempo.
En los cuerpos rígidos será siempre cte ya que los $\vec{r}_{ij}$ son fijos y no varían con el tiempo de modo que los $d\vec{r}_{ij}$ solo pueden ser perpendiculares a los $\vec{r}_{ij}$ correspondientes y por tanto a las $\vec{F}_{ij}$ de modo que <u>las fuerzas interiores no trabajan</u> y el potencial interno se mantiene cte y podría no tenerse en cuenta al ser una cte aditiva que puede quitarse según elijamos la referencia nula del potencial.

By: Herminso Villarraga Gómez

Ligaduras: (Condiciones de ligadura)

Holonomas → Si se pueden expresar en forma de ecuaciones que relacionen las coordenadas de las partículas (y posiblemente el tiempo) de la forma

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) = 0$$

No Holonomas → No se pueden expresar como las holonomas.

Reónomas → depende explícitamente de t

Esclerónomas → No dependen explícitamente de t.

Principio de D'Alembert y Ecuaciones de Lagrange

Desplazamiento virtual → es el cambio de configuración del sistema debido a una variación infinitesimal $\delta\vec{r}_i$ de las coordenadas compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas en el sistema en el instante dado t.

Para un sistema en equilibrio $\vec{F}_i = 0 \rightarrow \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i \rightarrow \sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \cancel{\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i} = 0$$

fuerza de ligadura

El trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo.

$$\boxed{\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$$

→ Principio de trabajos virtuales (Estática)

En gral $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \rightarrow \sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i + \cancel{\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0} \rightarrow \text{Principio de D'Alembert.}$$

Usando coordenadas generalizadas:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \qquad v_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \sum_j \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad \text{con: } Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

By: Herminso Villarraga Gómez

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

$$= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right\}$$

donde se ha usado: $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)}$$

$$\Rightarrow \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \qquad \text{por otro lado}$$

$$- \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j Q_j \, \delta q_j$$

D'Alembert: $0 = \sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \longrightarrow$$ En total hay n ec. de Lagrange.

$$\boxed{Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Si } \boxed{L = T - V} \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \longrightarrow$$ Ecuaciones de Lagrange

Lagrangiano

Las ec. de Lagrange siguen siendo las mismas aún cuando no exista función potencial V, en el sentido usual, con tal que las fuerzas generalizadas se obtengan de $U(q_j, \dot{q}_j)$ mediante

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)} \longrightarrow \underline{L = T - U}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

cuando hay una función de disipación $\mathcal{F}$ que produce una fuerza $F_j = -\partial \mathcal{F}/\partial v_j = -\partial \mathcal{F}/\partial \dot{q}_j$

Ojo: Si $F = F(q, \dot{q}, t) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial F}{\partial q}}$

By: Herminso Villarraga Gómez

Solucion a los problemas del Cap 1 - Goldstein 3ed

1.1 $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} = \frac{1}{2m}\vec{p}\cdot\vec{p}$

$$\Rightarrow \frac{d(mT)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{p}\cdot\vec{p}) = \frac{1}{2}(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{p} + \vec{p}\cdot\dot{\vec{p}}) = \vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\cancel{m}\vec{v}}{\cancel{m}}\cdot\vec{F} \rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F}\cdot\vec{s}) = \frac{dW}{dt} \rightarrow$$ Definicion de potencia

1.2 $M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$

$$M^2R^2 = \sum_i (m_i\vec{r}_i)\cdot\sum_j (m_j\vec{r}_j) = \sum_i\sum_j m_i m_j \vec{r}_i\cdot\vec{r}_j$$

Sea $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \rightarrow r_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j$

$$\Rightarrow MR^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i\sum_j m_i m_j r_i^2 + \sum_i\sum_j m_i m_j r_j^2 - \sum_i\sum_j m_i m_j r_{ij}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(M\sum_i m_i r_i^2 + M\sum_j m_j r_j^2 - \sum_i\sum_j m_i m_j r_{ij}^2\right)$$

$$MR^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i\sum_j m_i m_j r_{ij}^2$$

1.3 Para las particulas individuales: $\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_{21}$

$\dot{\vec{p}}_2 = F_2^{(e)} + \vec{F}_{12}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}$$

pero el sistema satisface: $M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$

$$\text{ó} \quad \cancel{M}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\cancel{M}}\right] = \frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = F_1^{(e)} + F_2^{(e)}$$

$$= \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = F_1^{(e)} + F_2^{(e)}$$

$$\dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = F_1^{(e)} + F_2^{(e)}$$

$\Rightarrow$ Con ello en la ec. de arriba: $0 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}$

$\rightarrow \boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}} \rightarrow$ ley de acción y reacción débil.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = N^{(e)} + \sum_i N_i = N^{(e)} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}$$

como el sistema satisface $\frac{d\vec{L}}{dt} = N^{(e)}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{21}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21}$$

para que sea cero $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\vec{F}_{21}$ reposan sobre la línea que une las dos partículas

↳ ley de acción y reacción fuerte.

1.4 Si $\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \dots, x_n)\, dx_i = 0$ puede ser integrado

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \dots, x_n)\, dx_i = df = 0$$

si la función f existe: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \xi_i$ y $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$

ó $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$

Para el disco: $dx - a \sin\theta\, d\phi = 0$ (1)

$dy + a \cos\theta\, d\phi = 0$ (2)

En el primer ec: $\xi_x = 1$, $\xi_\phi = -a \sin\theta$, $\xi_\theta = 0$

$\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} = -a \cos\theta \neq \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} = 0 \longrightarrow$ la ligadura (1) no puede hacerse equivalente a una diferencial exacta.

$\Rightarrow$ es no-holonoma.

Solo es válida si $\theta = \pi/2$ $\Big\}$ $dx - a\,d\phi = 0$

$x = a(\phi - \phi_0)$.

En (2): $\xi_y = 1$, $\xi_\phi = a \cos\theta$ $\xi_\theta = 0$

pero $\frac{\partial \xi_\phi}{\partial \theta} = -a \sin\theta \neq \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} = 0 \longrightarrow$ la ligadura (2) no puede hacerse una diferencial exacta

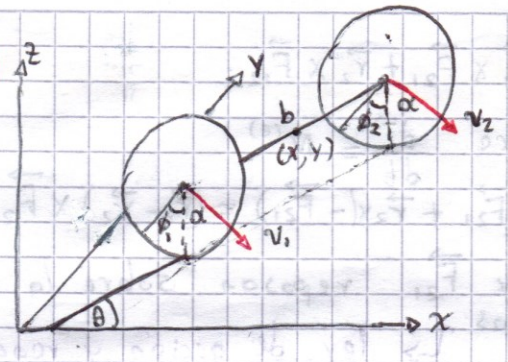
$\Rightarrow$ es no-holónoma.

Sólo es válida si $\theta = 0$ $\Big\}$ $dy + a\,d\phi = 0$

$y = -a(\phi - \phi_0)$.

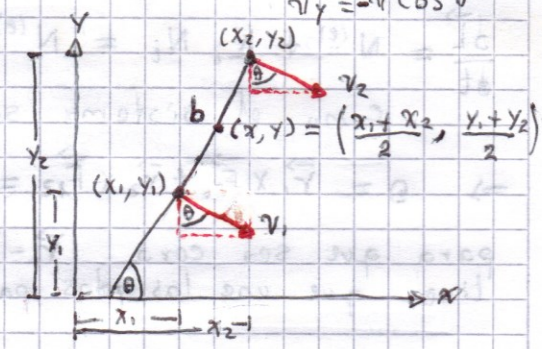
By: Herminso Villarraga Gómez

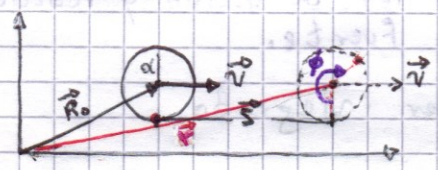
1.5



$v_x = v \sin\theta$

$v_y = -v \cos\theta$





$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{s} = \vec{R}_0 + \alpha\phi\,\hat{s}$$

$$\vec{v} = \cancel{\dot{\vec{R}}_0}^{\,0} + \alpha\dot{\phi}\,\hat{s}$$

$\Rightarrow \quad v_1 = \alpha\dot{\phi}_1 \quad$ y $\quad v_2 = \alpha\dot{\phi}_2$

$$v_{1x} = \frac{dx_1}{dt} = \alpha\frac{d\phi_1}{dt}\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx_1 - \alpha\sin\theta\, d\phi_1 = 0 \quad (1)$$

$$v_{1y} = \frac{dy_1}{dt} = -\alpha\frac{d\phi_1}{dt}\cos\theta \qquad \qquad dy_1 + \alpha\cos\theta\, d\phi_1 = 0 \quad (2)$$

$$dx_2 - \alpha\sin\theta\, d\phi_2 = 0 \quad (3)$$

$$dy_2 + \alpha\cos\theta\, d\phi_2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{(1)+(3)}{2} \rightarrow \quad d\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \alpha\sin\theta\left(\frac{d\phi_1+d\phi_2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{(2)+(4)}{2} \rightarrow \quad d\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + \alpha\cos\theta\left(\frac{d\phi_1+d\phi_2}{2}\right) = 0$$

$$dx - \alpha\sin\theta\,(d\phi_1 + d\phi_2)/2 = 0 \quad \cdot \cos\theta$$

$$dy + \alpha\cos\theta\,(d\phi_1 + d\phi_2)/2 = 0 \quad \cdot \sin\theta$$

sumando

$$\boxed{\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy = 0} \quad (5)$$

restando

$$dx - \alpha\sin\theta\,(d\phi_1 + d\phi_2)/2 = 0 \quad \cdot \sin\theta$$

$$dy + \alpha\cos\theta\,(d\phi_1 + d\phi_2)/2 = 0 \quad \cdot \cos\theta$$

Restando

$$\boxed{\sin\theta\, dx - \cos\theta\, dy = \frac{\alpha}{2}(d\phi_1 + d\phi_2)} \quad (6)$$

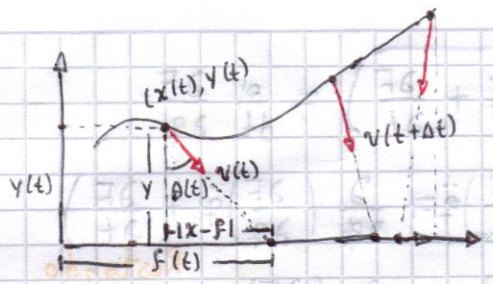
(5) y (6) no son integrables $\rightarrow$ son no holonomas.

Por otro lado $\quad x_2 - x_1 = b\cos\theta \rightarrow \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -b\dot{\theta}\sin\theta$

pero $\quad \dot{x}_1 = \alpha\dot{\phi}_1\sin\theta$, $\quad \dot{x}_2 = \alpha\dot{\phi}_2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \alpha\cancel{\sin\theta}\,(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) = -b\dot{\theta}\cancel{\sin\theta}$

$$\rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\alpha}{b}(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\alpha}{b}(\phi_2 - \phi_1) + C} \rightarrow \text{holonoma.}$$

1.6



$$\tan\theta(t) = \frac{v_x(t)}{v_y(t)} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{dx}{dy}$$

pero también $\tan\theta(t) = \dfrac{|x(t)-f(t)|}{y(t)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{|x(t)-f(t)|}{y(t)} \longrightarrow \frac{dx}{x(t)-f(t)} = \frac{dy}{y(t)}$$

ó $\quad y(t)\,dx - |x(t)-f(t)|\,dy = 0 \longrightarrow$ no integrable $\Rightarrow$ no holonoma.

1.7

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = Q_j \longrightarrow \frac{\partial \dot T}{\partial \dot q} - 2\frac{\partial T}{\partial q} = Q_j \ ?$$

$$T = T(q, \dot q, t) \qquad q = q(t) \qquad \dot q = \dot q(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)\dot q + \frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)\ddot q + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)$$

$$\dot T = \frac{\partial T}{\partial q}\dot q + \frac{\partial T}{\partial \dot q}\ddot q + \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \dot T}{\partial \dot q} = \left(\frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{\partial T}{\partial q}\dot q + \frac{\partial T}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{\partial T}{\partial \dot q}\ddot q + \frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)\dot q + \frac{\partial T}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)\ddot q + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)$$

Así:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)\dot q + \frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)\ddot q + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)\right] - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \frac{\partial T}{\partial q} - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\partial \dot T}{\partial \dot q} - 2\frac{\partial T}{\partial q} = Q_j} \longrightarrow \text{forma de Nielsen}$$

1.8

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(L + \frac{dF}{dt}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q}\left(L + \frac{dF}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{dF}{dt}\right] - \left(\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{dF}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{dF}{dt} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{dF}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\overbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}\right)}^{dF/dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\dot{q} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\ddot{q} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

Restando

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{dF}{dt} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\ddot{q} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{dF}{dt} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{dF}{dt}\right) = 0 \longrightarrow$$ la ec. de atrás se reduce a la ec. de Lagrange.

1.9 $L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$

si: $\vec{A}' \to \vec{A} + \nabla\psi(\vec{r},t)$, $\phi' \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ $\Longrightarrow$ $L' = \frac{1}{2}mv^2 - q\left[\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] + \frac{q}{c}\left[\vec{A} + \nabla\psi\right]\cdot\vec{v}$

$$L' = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + \frac{q}{c}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi(r,t)\cdot\vec{v}\right]$$

$$L' = L + \frac{q}{c}\left(\frac{d\psi}{dt}\right) \Longrightarrow \text{si } F = \frac{q}{c}\psi(r,t) \text{ y } L' = L + \frac{dF(\vec{r},t)}{dt}$$

donde debemos exigir que aunque ψ sea arbitrario, sea diferenciable necesariamente para que las ec. de Lagrange no se afecten y por tanto el comportamiento del sistema no es afectado.

1.10 $q_i = q_i(s_1, \ldots, s_n, t)$ $\longrightarrow$ transformación de puntos $\quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(s_1, \ldots, s_n, \dot{s}_1, \dot{s}_2, \ldots, \dot{s}_n, t)$

$$L = L(q, \dot{q}, t) = L(q(s_1, s_2, \ldots, s_n, t), \dot{q}(s_1, \dot{s}_1, \ldots, s_n, \dot{s}_n, t), t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_j}\right) - \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_j}\right)$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j}\left[\frac{\partial q_i}{\partial s_j}\dot{s}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}\right] = \frac{\partial q_i}{\partial s_j}$$

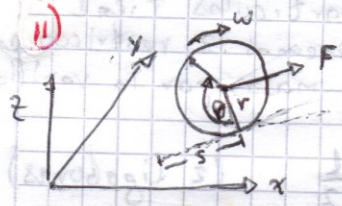
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial s_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_j}\right) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_j}$$

$$= \sum_i \underbrace{\cancel{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}}_{0 \text{ ec de Lagrange}}\frac{\partial q_i}{\partial s_j}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

11)



$F = Q \qquad L = T - V = \frac{1}{2} m (r\omega)^2 + \cancel{V}^{\,0}$

$s = r\theta \qquad \dot{s} = r\omega \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial s}}^{\,0} = Q \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{s}) = Q$

ó $m\ddot{s} = Q \rightarrow Q = m(r\ddot{\omega}) \qquad \boxed{Q = mr\ddot{\theta}}$

1.12 $\frac{GM\cancel{m}}{r} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \simeq 11.2 \text{ Km/s}.$

1.13 en $t \rightarrow p(t) = m \cdot v$, en $t + \Delta t \rightarrow p(t+\Delta t) = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m v_e$

$\Delta P = p(t+\Delta t) - p(t) = m\Delta v + (v_e - v)\Delta m - \cancel{\Delta m \Delta v}^{\,0}$ velocidad de escape de los gases respecto a tierra

$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = m\frac{dv}{dt} + (v_e - v)\frac{dm}{dt}$

Sea $v_e - v = v'$ la velocidad de escape de los gases respecto al proyectil.

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -mg\hat{k} \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} + v'\frac{dm}{dt} = -mg$

$\dot{m} < 0$

$dv = -g\,dt - \frac{v'}{m}dm$

$\frac{dm}{dt} = \dot{m} \rightarrow dt = \frac{dm}{\dot{m}} \rightarrow dv = -\frac{g}{\dot{m}}dm - \frac{v'}{m}dm$

Si $\dot{m} = cte \rightarrow \qquad v(m) = -\frac{g}{\dot{m}}m - v'\ln(m) + C$

cuando $m = m_0 \rightarrow v = 0 \rightarrow \quad 0 = -\frac{g}{\dot{m}}m_0 - v'\ln(m_0) + C$

$C = \frac{g}{\dot{m}}m_0 + v'\ln m_0 \rightarrow \boxed{v(m) = -\frac{g}{\dot{m}}(m - m_0) - v'\ln(m/m_0)}$

Si quisieramos v como función de t, hagase $m(t) = m_0 + \dot{m}t$

$\frac{dm}{dt} = \dot{m}\,dt$

$\Rightarrow dv = -g\,dt - \frac{v'(\overset{du}{\dot{m}\,dt})}{(m_0 + \underset{u}{(\dot{m}t)})} \rightarrow v(t) = -gt - v'\ln(m_0 + \dot{m}t) + C$

En $t = 0 \quad v = 0 \rightarrow 0 = -v'\ln m_0 + C \rightarrow \boxed{v(t) = -gt - v'\ln\left(1 + \frac{\dot{m}}{m_0}t\right)}$

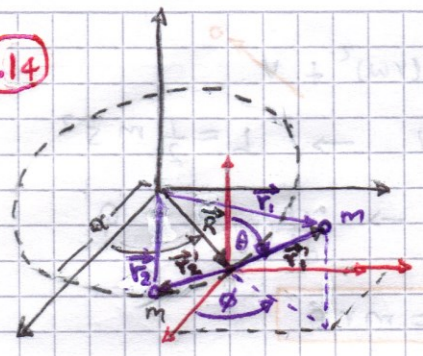
para tiempos largos $\quad v \simeq -v'\ln(m/m_0)$

$\rightarrow (m/m_0) = e^{-v/v'}$ usando $v' = 2.1$ Km/s, $v = 11.2$ Km/s

obtenemos $\boxed{\frac{m}{m_0} \simeq \frac{1}{300}}$ para alcanzar la velocidad de escape.

By: Herminso Villarraga Gómez

1.14



Un sistema de 2 partículas tiene 6 coordenadas, pero tenemos 3 restricciones
- la unión de las dos masas por la varilla que obliga a que:

$$|\vec{r}_1'| = \frac{l}{2} \qquad |\vec{r}_2'| = \frac{l}{2} \qquad \text{(2 ligaduras)}$$

- obligar al CM a moverse en un círculo:

$$|\vec{R}| = a \qquad \text{(1 ligadura)}$$

$\Rightarrow$ Podemos describir el movimiento del sistema en términos de 3 coordenadas generalizadas a saber: Φ, θ, ϕ.

$$\vec{R} = a\cos\Phi\,\hat{i} + a\sin\phi\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_1' = \frac{l}{2}\left(\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{r}_2' = \frac{l}{2}\left(\sin(\pi-\theta)\cos(\phi+\pi)\,\hat{i} + \sin(\pi-\theta)\sin(\phi+\pi)\,\hat{j} + \cos(\pi-\theta)\,\hat{k}\right)$$

$$= \frac{l}{2}\left(\sin\theta(-\cos\phi)\,\hat{i} + \sin\theta(-\sin\phi)\,\hat{j} - \cos\theta\,\hat{k}\right)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1' \longrightarrow \vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1' = \vec{V} + \vec{v}_1'$$

$$\vec{v}_{1,2} = \underbrace{\left(-a\dot{\Phi}\sin\Phi\,\hat{i} + a\dot{\Phi}\cos\Phi\,\hat{j}\right)}_{\vec{V}} + \underbrace{\frac{l}{2}\left[\left(\mp\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi \pm \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)\hat{i} + \left(\mp\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi \mp \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\right)\hat{j} \pm \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{k}\right]}_{\vec{v}_{1,2}'}$$

$$v_1^2 = V^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{v}_{1,2}' + v_{1,2}'^2$$

$$= \left(a\dot{\Phi}\right)^2 \pm a\dot{\Phi}l\sin\Phi\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)$$
$$\mp a\dot{\Phi}l\cos\Phi\left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\right)$$
$$+ \frac{l^2}{4}\left[\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\phi + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\phi - \cancel{2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi}\right.$$
$$\left. + \dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \cancel{2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi} + \dot{\theta}^2\sin^2\theta\right]$$

$$= \left(a\dot{\Phi}\right)^2 \pm a\dot{\Phi}l\sin\Phi\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)$$
$$\mp a\dot{\Phi}l\cos\Phi\left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\right)$$
$$+ \frac{l^2}{4}\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right]$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) \longrightarrow \boxed{T = \underbrace{ma^2\dot{\Phi}^2}_{\frac{1}{2}MV^2} + \underbrace{\frac{1}{4}ml^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right]}_{\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2}}$$

Notése que $\vec{v}_1' + \vec{v}_2' = 0$ como debe ser pues el sistema se comporta como si la masa estuviera concentrada en el CM y por ello $\vec{v}_{CM} = \vec{V} \neq 0$.

1.15 Antes de desarrollar el problema vale la pena hacer una anotación vectorial:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\imath} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

Notése que si definimos $\epsilon_{lmn} = \begin{cases} 1 & \text{si } lmn \text{ están en orden cíclico} \\ -1 & \text{si } lmn \text{ están en orden anticíclico} \\ 0 & \text{si se repite un índice.} \end{cases}$

ojo: $\boxed{\epsilon_{lmn} = -\epsilon_{mln} = \epsilon_{mnl} = -\epsilon_{nml}}$ ...

la componente l del producto $\vec{a}\times\vec{b}$ se puede escribir como

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})_l = \sum_{m,n} \epsilon_{lnm} a_m b_n}$$

así por ejemplo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})_1 = \cancelto{0}{\epsilon_{111}} a_1b_1 + \cancelto{0}{\epsilon_{112}} a_1b_2 + \cancelto{0}{\epsilon_{113}} a_1b_3 + \cancelto{0}{\epsilon_{121}} a_2b_1 + \cancelto{0}{\epsilon_{122}} a_2b_2 + \underbrace{\epsilon_{123}}_{1} a_2b_3 + \cancelto{0}{\epsilon_{131}} a_3b_1 + \underbrace{\epsilon_{132}}_{-1} a_3b_2 + \cancelto{0}{\epsilon_{133}} a_3b_3$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)$$

a) En Cartesianas: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ $\quad \vec{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$

$$U = V(r) + \vec{\sigma}\cdot\vec{L} = V(r) + \vec{\sigma}\cdot(\vec{r}\times m\vec{v}) = V(r) + m\sum_l \sigma_l (\vec{r}\times\vec{v})_l$$

$$= V(r) + m\sum_l \sigma_l \sum_{m,n} \epsilon_{lmn} x_m \dot{x}_n = V(r) + m\sum_{l,m,n} \epsilon_{lmn}\sigma_l x_m \dot{x}_n$$

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) = F_i \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial V(r)}{\partial x_i} + m\sum_{l,n} \epsilon_{lin}\sigma_l \dot{x}_n = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} - m\sum_{l,n} \epsilon_{iln}\sigma_l \dot{x}_n$$

$$= \frac{dV}{dr}\frac{x_i}{r} - (\vec{\sigma}\times\vec{p})_i \quad \text{por otro lado} \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = m\sum_{l,m} \epsilon_{lmi}\sigma_l x_m$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\right) = m\sum_{l,m} \epsilon_{lmi}\sigma_l \dot{x}_m = (\sigma\times\vec{p})_i$$

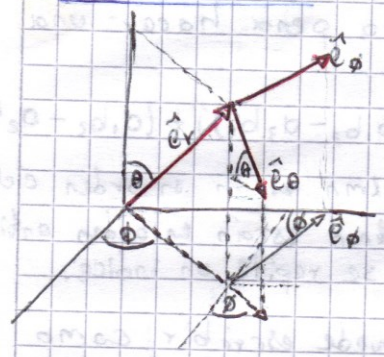
$$\Rightarrow \quad F_i = -\frac{dV}{dr}\frac{x_i}{r} + 2(\vec{\sigma}\times\vec{p})_i$$

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\frac{(x_1, x_2, x_3)}{r} + 2\left[(\vec{\sigma}\times\vec{p})_1, (\vec{\sigma}\times\vec{p})_2, (\vec{\sigma}\times\vec{p})_3\right]$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} + 2(\vec{\sigma}\times\vec{p})}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

En esféricas:



$$\hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$$
$$\dot{\hat{e}}_r = (\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)\hat{\imath} + (\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)\hat{\jmath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{k}$$
$$= \dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k}) + \dot{\phi}\sin\theta(-\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath})$$
$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}) \qquad \vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\sin\theta \end{vmatrix}$$
$$= m(-r^2\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta + r^2\dot{\theta}\,\hat{e}_\phi)$$

$$\Rightarrow \quad U = V(r) + \vec{\sigma}\cdot\vec{L} = V(r) + mr^2\vec{\sigma}\cdot(\dot{\theta}\hat{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta)$$

$$Q_r = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{d}{dt}\cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right)}^{0} = -\frac{dV}{dr} - 2mr\vec{\sigma}\cdot(\dot{\theta}\hat{e}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta)$$

$$Q_r = -\frac{dV}{dr} - \frac{2}{r}\vec{\sigma}\cdot\vec{L} = -\frac{dV}{dr} - \frac{2}{r}\vec{\sigma}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) \longrightarrow \boxed{Q_r = -\frac{dV}{dr} + 2\hat{e}_r\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{p})}$$

$$Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}}\right) = -mr^2\vec{\sigma}\cdot\left(-\dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta - \dot{\phi}\sin\theta\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}\right) + \cancel{\frac{d}{dt}(mr^2\vec{\sigma}\cdot\hat{e}_\theta)}$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} - \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - \cos\theta\,\hat{k} = -\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \quad Q_\theta = -mr^2\vec{\sigma}\cdot(-\dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_r) + 2mr\dot{r}\vec{\sigma}\cdot\hat{e}_\phi + mr^2\vec{\sigma}\cdot\dot{\hat{e}}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{\imath} - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{\jmath} = -\dot{\phi}(\sin\theta\,\hat{e}_r + \cos\theta\,\hat{e}_\theta)$$

$$\Rightarrow \quad Q_\theta = +mr^2\vec{\sigma}\cdot(\cancel{\dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta} - \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_r) + 2mr\dot{r}\vec{\sigma}\cdot\hat{e}_\phi + mr^2\vec{\sigma}\cdot(-\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_r - \cancel{\dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta})$$

$$Q_\theta = 2mr\vec{\sigma}\cdot(\dot{r}\hat{e}_\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_r) = -2mr\vec{\sigma}\cdot\begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\sin\theta \\ v_r & v_\theta & v_\phi \end{vmatrix}$$

$$= -2mr\vec{\sigma}\cdot(\hat{e}_\theta\times\vec{v}) = -2r\vec{\sigma}\cdot(\hat{e}_\theta\times\vec{p})$$

$$\boxed{Q_\theta = 2r\hat{e}_\theta\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{p})}$$

he usado $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$

By: Herminso Villarraga Gómez

$$Q_\phi = -\frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot\phi}\right) = -mr^2\vec{v}\cdot\left(\dot\theta\frac{d\hat e_\phi}{d\phi} - \dot\phi\sin\theta\frac{d\hat e_\theta}{d\phi}\right) + \frac{d}{dt}\left(-mr^2\sin\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_\theta\right)$$

$$\frac{d\hat e_\phi}{d\phi} = -\cos\phi\,\hat i - \sin\phi\,\hat j = -(\sin\theta\,\hat e_r + \cos\theta\,\hat e_\theta)$$

$$\frac{d\hat e_\theta}{d\phi} = -\cos\theta\sin\phi\,\hat i + \cos\theta\cos\phi\,\hat j = \cos\theta(-\sin\phi\,\hat i + \cos\phi\,\hat j) = \cos\theta\,\hat e_\phi$$

$$\Rightarrow Q_\phi = -mr^2\vec{v}\cdot\left(-\dot\theta(\sin\theta\,\hat e_r + \cancel{\cos\theta\,\hat e_\theta}) - \dot\phi\sin\theta\cos\theta\,\hat e_\phi\right)$$

$$-2mr\dot r\sin\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_\theta - \cancel{mr^2\dot\theta\cos\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_\theta} - mr^2\sin\theta\,\vec{v}\cdot\dot{\hat e}_\theta$$

$$\dot{\hat e}_\theta = (-\dot\theta\sin\theta\cos\phi - \dot\phi\cos\theta\sin\phi)\,\hat i + (-\dot\theta\sin\theta\sin\phi + \dot\phi\cos\theta\cos\phi)\,\hat j - \dot\theta\cos\theta\,\hat k$$

$$= -\dot\theta(\sin\theta\cos\phi\,\hat i + \sin\theta\sin\phi\,\hat j + \cos\theta\,\hat k) + \dot\phi\cos\theta(-\sin\phi\,\hat i + \cos\phi\,\hat j)$$

$$= -\dot\theta\,\hat e_r + \dot\phi\cos\theta\,\hat e_\phi$$

$$\Rightarrow Q_\phi = mr^2\dot\theta\sin\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_r + \cancel{mr^2\dot\phi\sin\theta\cos\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_\phi} - 2mr\dot r\sin\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_\theta$$

$$-mr^2\sin\theta\,\vec{v}\cdot(-\dot\theta\,\hat e_r + \cancel{\dot\phi\cos\theta\,\hat e_\phi})$$

$$= 2mr^2\dot\theta\sin\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_r - 2mr\dot r\sin\theta\,\vec{v}\cdot\hat e_\theta = 2mr\sin\theta\,\vec{v}\cdot(r\dot\theta\,\hat e_r - \dot r\,\hat e_\theta)$$

$$= -2mr\sin\theta\,\vec{v}\cdot\begin{vmatrix} \hat e_r & \hat e_\theta & \hat e_\phi \\ 0 & 0 & 1 \\ \dot r & r\dot\theta & r\dot\phi\sin\theta \end{vmatrix} = -2mr\sin\theta\,\vec{v}\cdot(\hat e_\phi\times\vec{v})$$

$$\qquad\qquad\qquad

$$Q_\theta = \left(-\frac{dV}{dr}\hat{r} + 2(\vec{\sigma}\times\vec{p})\right)\cdot\frac{\partial(r\hat{r})}{\partial\theta} \qquad \hat{r} = \hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial(r\hat{r})}{\partial\theta} = r(\cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k}) = r\hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow Q_\theta = -\frac{dV}{dr}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{e}_\theta}_{=0} + 2(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot(r\hat{e}_\theta) \rightarrow \boxed{Q_\theta = 2r\hat{e}_\theta\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{p})}$$

$$Q_\phi = \left(-\frac{dV}{dr}\hat{r} + 2(\vec{\sigma}\times\vec{p})\right)\cdot\frac{\partial(r\hat{r})}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial(r\hat{r})}{\partial\phi} = r(-\sin\theta\sin\phi\,\hat{\imath} + \sin\theta\cos\phi\,\hat{\jmath}) = r\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow Q_\phi = -r\sin\theta\frac{dV}{dr}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{e}_\phi}_{0} + 2r\sin\theta(\vec{\sigma}\times\vec{p})\cdot\hat{e}_\phi \rightarrow \boxed{Q_\phi = 2r\sin\theta\,\hat{e}_\phi\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{p})}$$

c) Las ec de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ con $L = T - U$

pero en lugar de ello usemos la expresión equivalente

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ aprovechando que tenemos los Q_j

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

Para r: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}}m\cdot\cancel{2}\dot{r}\right) - \frac{1}{2}m(2r\dot{\theta}^2 + 2r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = -\frac{dV}{dr} + 2\hat{e}_r\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{p})$

$$\hat{e}_r\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{p}) = -m\vec{\sigma}\cdot(\hat{e}_r\times\vec{v}) = -m\vec{\sigma}\cdot\begin{vmatrix}\hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi\\ 1 & 0 & 0\\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\sin\theta\end{vmatrix}$$

$$= -m\vec{\sigma}(-r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\phi)$$

sin pérdida de generalidad podemos elegir $\vec{\sigma}$ en la dirección del eje z,

$$\vec{\sigma} = \sigma\hat{k} = \sigma(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta) \rightarrow \hat{e}_r\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{p}) = -m\sigma r\dot{\phi}\sin^2\theta$$

Con ello la ec de movimiento toma la forma:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta = -\frac{dV}{dr} - 2m\sigma r\dot{\phi}\sin^2\theta$$

$$\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\phi}\sin^2\theta(2\sigma - \dot{\phi}) = -\frac{dV}{dr}}$$

para θ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} r^2\dot{\theta}\right) - \frac{1}{2} m \left(2r^2\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta\right) = 2r\hat{e}_\theta \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{p})$

$$\hat{e}_\theta \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{p}) = -m\vec{\sigma} \cdot (\hat{e}_\theta \times \vec{v}) = -m\vec{\sigma} \cdot \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= -m\sigma(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta) \cdot (r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_r - \dot{r}\hat{e}_\phi)$$

$$= -m\sigma r\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow (2\cancel{m}\cancel{r}\dot{r}\dot{\theta} + \cancel{m}r^{\cancel{2}}\ddot{\theta}) - \cancel{m}r^{\cancel{2}}\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -2\cancel{m}r^{\cancel{2}}\sigma\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta$$

$$\boxed{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta(2\sigma - \dot{\phi}) = 0}$$

para ϕ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) - \frac{1}{2} m (0) = 2r\sin\theta\,\hat{e}_\phi \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{p})$

$$\hat{e}_\phi \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{p}) = -m\vec{\sigma}\,(\hat{e}_\phi \times \vec{v}) = -m\vec{\sigma} \cdot \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ 0 & 0 & 1 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= -m\sigma(\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta) \cdot (-r\dot{\theta}\hat{e}_r + \dot{r}\hat{e}_\theta)$$

$$= m\sigma r\dot{\theta}\cos\theta + m\sigma\dot{r}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{m}(2\cancel{r}\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta + r^{\cancel{2}}\ddot{\phi}\sin^2\theta + 2r^{\cancel{2}}\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)$$
$$= 2\cancel{m}\sigma r^{\cancel{2}}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta + 2\cancel{m}\sigma\cancel{r}\dot{r}\sin^2\theta$$

$$\boxed{r\sin^2\theta\,\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin^2\theta(\dot{\phi} - \sigma) + 2r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta(\dot{\phi} - \sigma) = 0}$$

1.16 $F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right)$ y $F_r = \frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2r^2} + \frac{2\ddot{r}}{c^2 r}$

$$F_r = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) - \frac{2\dot{r}}{c^2r^2}\dot{r} + \frac{2\ddot{r}}{c^2 r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{2\dot{r}}{c}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\right] + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\right]\right\}$$

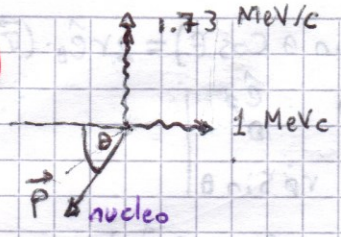
$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)}$$

En esféricas $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$, (ver problema anterior)

En el plano polar $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

y $L = T - V \rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)}$

1.17



Por conservación de momentum

$$(1\hat{i} + 1.73\hat{j})\,\frac{MeV}{c} + \vec{p} = 0$$

$$\rightarrow \vec{p} = (-1\hat{i} - 1.73\hat{j})\,\frac{MeV}{c}$$

$$p = |\vec{p}| = \sqrt{(1.73)^2 + 1^2} = 2\ MeV/c$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1.73}{1} = 60^\circ$$

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(2\,(5.34\times10^{-22}\,kg\,m/s)\right)^2}{2\,(3.9\times10^{-23}\,kg)}\cdot\frac{1\ MeV}{1.6\times10^{-13}\,J}\cdot\frac{10^6\,eV}{1\ MeV} = 9.13\ eV$$

1.18

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \qquad L' = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

para x:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\cancel{2}}(\cancel{2}a\dot{x} + \cancel{2}b\dot{y})\right) - \frac{K}{\cancel{2}}(\cancel{2}ax + \cancel{2}by) = 0$$
$$m(a\ddot{x} + b\ddot{y}) - K(ax + by) = 0$$

para y:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\cancel{2}}(\cancel{2}b\dot{x} + \cancel{2}c\dot{y})\right) - \frac{K}{\cancel{2}}(\cancel{2}bx + \cancel{2}cy) = 0$$
$$m(b\ddot{x} + c\ddot{y}) - K(bx + cy) = 0$$

Tenemos el sistema:
$$\boxed{\begin{aligned}(a\ddot{x} + b\ddot{y}) - \frac{K}{m}(ax + by) &= 0\\ (b\ddot{x} + c\ddot{y}) - \frac{K}{m}(bx + cy) &= 0\end{aligned}}$$
Ec. de Movimiento.

- Si $a = c = 0 \rightarrow \cancel{b}\ddot{y} - \frac{K}{m}\cancel{b}y = 0$ y $\cancel{b}\ddot{x} - \frac{K}{m}\cancel{b}x = 0$
- si $b = 0$ y $c = -a \rightarrow \cancel{a}\ddot{x} - \frac{K}{m}\cancel{a}x = 0 \rightarrow \ddot{x} - \frac{K}{m}x = 0$

y $(b\ddot{x} - a\ddot{y}) - \frac{K}{m}(bx - ay) = 0$

$$b\underbrace{\left(\ddot{x} - \frac{K}{m}x\right)}_{0} - a\left(\ddot{y} - \frac{K}{m}y\right) = 0 \rightarrow \ddot{y} - \frac{K}{m}\ddot{y} = 0$$

El sistema físico es un oscilador armónico de una partícula de masa m en 2 dimensiones.

Si $u = ax + by$, $v = bx + cy \rightarrow$
$$\ddot{u} - (K/m)u = 0$$
$$\ddot{v} - (K/m)v = 0$$

así mediante una transformación de puntos el sistema se puede trabajar como dos osciladores independientes pero idénticos.

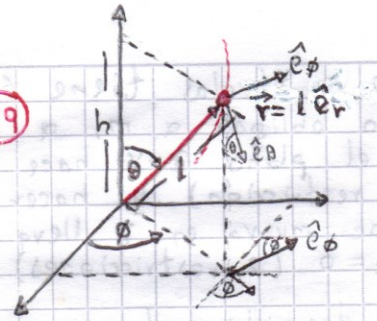
La transformación se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

el cual puede pensarse como un sistema que tiene solución si $b^2 - ac \neq 0$, de modo que la transformación sea posible.

By: Herminso Villarraga Gómez

1.19



$$\hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$
$$\vec{r} = l\,\hat{e}_r$$
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = l\,\dot{\hat{e}}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_r = (\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi)\hat{i} + (\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi)\hat{j} - \dot\theta\sin\theta\,\hat{k}$$
$$= \dot\theta(\cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}) + \dot\phi\sin\theta(-\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j})$$
$$\dot{\hat{e}}_r = \dot\theta\,\hat{e}_\theta + \dot\phi\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$
$$\Rightarrow \vec{v} = l(\dot\theta\,\hat{e}_\theta + \dot\phi\sin\theta\,\hat{e}_\phi) \rightarrow T = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta)$$

por otro lado el potencial es $V = mgh = mgl\cos\theta$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) - mgl\cos\theta$$

las ec. de Lagrange son $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

para θ: $\frac{d}{dt}(\cancel{m}l^{\cancel{2}}\dot\theta) - \cancel{m}l^{\cancel{2}}\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - \cancel{m}g\cancel{l}\sin\theta = 0$

$$\boxed{l\ddot\theta - l\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - g\sin\theta = 0}$$

para ϕ: $\frac{d}{dt}(\cancel{ml^2}\dot\phi\sin^2\theta) - 0 = 0$

$$\boxed{\ddot\phi\sin^2\theta + 2\dot\phi\dot\theta\sin\theta\cos\theta = 0}$$

1.20 Antes de comenzar hay que corregir un error de impresión que presenta la 3ed de Goldstein, realmente el lagrangiano del problema es:

$$L = \frac{m^2\dot x^4}{12} + m\dot x^2 V(x) - V^2(x)$$

la ec. de lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m^2\dot x^3}{3} + 2m\dot x V(x)\right) + m\dot x^2 V'(x) + 2V(x)V'(x) = 0$$
$$m^2\dot x^2\ddot x + 2mV\ddot x + m\dot x^2 V' + 2VV' = 0$$

dividiendo por 2 y factorizando:

$$m\ddot x\left(\frac{m\dot x^2}{2} + V\right) + \left(\frac{m\dot x^2}{2} + V\right)V' = 0 \quad ó \quad \boxed{\left(\frac{m\dot x^2}{2} + V\right)(m\ddot x + V') = 0}$$

Notése que el segundo factor es la derivada respecto a x del primero, así si $E = \frac{m\dot x^2}{2} + V$

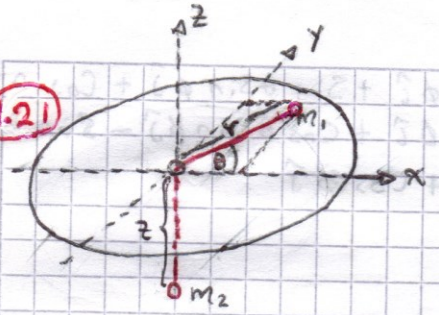
$$\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \rightarrow t = t(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{m\dot x^2}{2}\right) = m\cancel{\dot x}\ddot x\cdot\frac{dt}{\cancel{dx}} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow E\cdot E' = 0$ ó $2E\cdot E' = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(E^2) = 0 \rightarrow E^2 = cte$ de modo que E^2 se conserva.

$E\cdot E' = 0 \rightarrow$ si $E \neq 0$ $E' = 0 \rightarrow m\ddot x + V' = 0$

By: Herminso Villarraga Gómez

1.21



Un sistema de 2 partículas tiene 6 coordenadas, pero obligar a m_1 a moverse sobre el plano $x-y$ hace que $z_1 = 0$ (1 restricción) y hacer que m_2 solo se mueva en z lleva a que $x_2 = y_2 = 0$ (2 restricciones)

Son entonces suficiente 3 coordenadas para describir el comportamiento del sistema, a saber: r, θ, z. Pero tenemos una ligadura adicional:

$$l = r + z \rightarrow \dot{z} = -\dot{r} \quad (1 \text{ ligadura})$$

de modo que serán suficiente dos coordenadas generalizadas.

$$\vec{r}_1 = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{r}_2 = -z\hat{k} = (r-l)\hat{k}$$

$r, \theta \rightarrow$ Son las coordenadas generalizadas.

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\hat{\imath} + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\jmath}$$
$$\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = \dot{r}\hat{k}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2\cos^2\theta - \cancel{2\dot{r}r\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta} + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \dot{r}^2\sin^2\theta + \cancel{2\dot{r}r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta} + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -m_2 g z = -m_2 g(l-r)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 + m_2 g(l-r)$$

Las ec. de lagrange son $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

para θ: $\boxed{\frac{d}{dt}(m_1r^2\dot{\theta}) = 0} \rightarrow$ $m_1r^2\dot{\theta}$ se conserva en el tiempo.

resulta ser que ello es justamente el momento angular del sistema

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

$$\vec{L} = m_1\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta & \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta & 0 \end{vmatrix} + \cancel{m_2(r-l)\hat{k}\times(\dot{r}\hat{k})}$$

La masa 2 no contribuye

$$= m_1\left(\cancel{r\dot{r}\sin\theta\cos\theta} + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta - \cancel{r\dot{r}\sin\theta\cos\theta} + r^2\dot{\theta}\sin^2\theta\right)$$

$\vec{L} = m_1r^2\dot{\theta}\,\hat{k} \rightarrow$ lo cual igualmente se puede deducir sabiendo que la velocidad de m_1 es perpendicular al $\vec{r}$ radio vector que va del centro a m_1. tangencial a la trayectoria

$$\rightarrow \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = |\vec{r}||\vec{p}|\sin 90^\circ = r(m_1 r\omega) = m_1r^2\dot{\theta}$$

para r: $\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{r}\right) - m_1 r\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0$

momento Angular

$$(m_1+m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0$$

Usando $l_K = m_1 r^2\dot{\theta}$

$$\rightarrow \boxed{(m_1+m_2)\ddot{r} - \frac{l_K^2}{m_1 r^3} + m_2 g = 0}$$

donde $l_K = cte$ (Conservación de momento angular)

multiplicando por $\dot{r}$:

$$(m_1+m_2)\dot{r}\ddot{r} - \frac{l_K^2}{m_1 r^3}\dot{r} + m_2 g\dot{r} = 0$$

Nótese que ello corresponde a:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l_K^2}{m_1 r^2} + m_2 g r + C\right] = 0$$

con C una cte arbitraria

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\theta}^2 + m_2 g r - m_2 g l\right] = 0$$

hemos elegido $C = -m_2 g l$ para que en particular la expresión en el paréntesis coincida con $T+V$ y así lo que se tiene es:

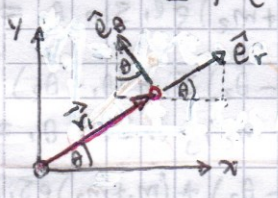
$$\frac{d}{dt}\left[T+V\right] = 0 \rightarrow T+V \text{ se conserva en el tiempo}$$

(Conservación de Energía)

→ Solución por leyes de Newton:

$$(m_2 g - T)\hat{k} = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2\ddot{r}\hat{k} \quad (1)$$

$$-T\hat{e}_r = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \quad (2)$$



$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \rightarrow \hat{e}_r = -\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta}$$

$$\vec{r}_1 = r\hat{e}_r \rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta$$

$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$$

de las ec (1) y (2):

$$m_2 g - T = m_2\ddot{r} \quad (3)$$

$$-T = m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (4)$$

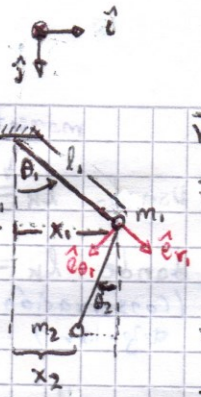
1ª ec de Lagrange

Restando (3) − (4) → Conduce a la 2ª ec. de Lagrange

$$0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r\dot{\theta}}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}^2)$$

Las leyes de Newton dan una manera de calcular $T = m_2(g+\ddot{r})$ conociendo $r(t)$, lo cual no podemos lograr de las ec. de Lagrange a menos que se usen multiplicadores de Lagrange.

By: Herminso Villarraga Gómez



1.22

$$\vec{r}_1 = l_1 \sin\theta_1\,\hat{\imath} + l_1\cos\theta_1\,\hat{\jmath} = l_1\hat{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\,\hat{\imath} - l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\,\hat{\jmath} = -l_1\dot{\theta}_1\,\hat{e}_{\theta_1}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 \qquad V_1 = -m_1 g\, l_1\cos\theta_1$$

$$\vec{r}_2 = (l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2)\,\hat{\imath} + (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)\,\hat{\jmath}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = (l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\,\hat{\imath} + (-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\,\hat{\jmath}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\Big(l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2\Big)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\Big(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2\Big)$$

$$V_2 = -m_2 g\,(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + (m_1+m_2)g\,l_1\cos\theta_1 + m_2 g\,l_2\cos\theta_2}$$

Las ec. de Lagrange $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

para θ_1: $\dfrac{d}{dt}\Big((m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\Big) + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)g\,l_1\sin\theta_1 = 0$

$$(m_1+m_2)l_1^{\cancel{2}}\ddot{\theta}_1 + m_2\cancel{l_1}l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2\cancel{l_1}l_2\dot{\theta}_2(\cancel{\dot{\theta}_1}-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2) + \cancel{m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)} + (m_1+m_2)g\,\cancel{l_1}\sin\theta_1 = 0$$

$$\boxed{(m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)g\sin\theta_1 = 0}$$

para θ_2: $\dfrac{d}{dt}\Big(m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\Big) - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2 g\,l_2\sin\theta_2 = 0$

$$m_2 l_2^{\cancel{2}}\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1\cancel{l_2}\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1\cancel{l_2}\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\cancel{\dot{\theta}_2})\sin(\theta_1-\theta_2) - \cancel{m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)} + m_2 g\,\cancel{l_2}\sin\theta_2 = 0$$

$$\boxed{m_2 l_2\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2 g\sin\theta_2 = 0}$$

para r: $\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{r}\right) - m_1 r\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0$

momento Angular

$(m_1+m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0$ Usando $l_K = m_1 r^2\dot{\theta}$

$\rightarrow \boxed{(m_1+m_2)\ddot{r} - \frac{l_K^2}{m_1 r^3} + m_2 g = 0}$ donde $l_K = cte$ (Conservación de momento angular)

multiplicando por $\dot{r}$:

$(m_1+m_2)\dot{r}\ddot{r} - \frac{l_K^2}{m_1 r^3}\dot{r} + m_2 g\dot{r} = 0$ Nótese que ello corresponde a:

$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l_K^2}{m_1 r^2} + m_2 g r + C\right] = 0$ con C una cte arbitraria

$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\theta}^2 + m_2 g r - m_2 g l\right] = 0$

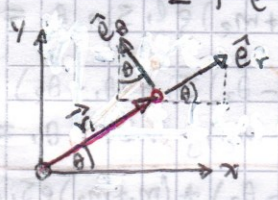
hemos elegido $C = -m_2 g l$ para que en particular la expresión en el parentesis coincida con $T+V$ y así lo que se tiene es:

$\frac{d}{dt}\left[T+V\right] = 0 \rightarrow$ $T+V$ se conserva en el tiempo (Conservación de Energía)

→ Solución por leyes de Newton:

$(m_2 g - T)\hat{k} = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2\ddot{r}\hat{k}$ (1)

$-T\hat{e}_r = m_1\ddot{\vec{r}}_1$ (2)



$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ $\rightarrow \hat{e}_r = -\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}$

$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta}$

$\vec{r}_1 = r\hat{e}_r \rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\dot{\theta}$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta$

$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}\dot{\theta}$

$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$

$\ddot{\vec{r}}_1 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$

de las ec (1) y (2): $m_2 g - T = m_2\ddot{r}$ (3)

$-T = m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ (4) → 1ª ec de Lagrange.

Restando (3) − (4) → Conduce a la 2ª ec. de Lagrange $0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r\dot{\theta}}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}^2)$

Las leyes de Newton dan una manera de calcular $T = m_2(g+\ddot{r})$ conociendo $r(t)$, lo cual no podemos lograr de las ec de Lagrange a menos que se usen multiplicadores de Lagrange.

1.23 $L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}Kv^2 = \frac{1}{2}K\dot{z}^2$

↳ la fuerza de fricción es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{z}} = 0 \qquad \text{donde} \rightarrow F_z = -\partial\mathcal{F}/\partial v_z = -K\dot{z}$$

$$m\ddot{z} - mg + K\dot{z} = 0 \qquad \text{ó} \qquad m\dot{v}_z + Kv_z = mg \qquad (1)$$

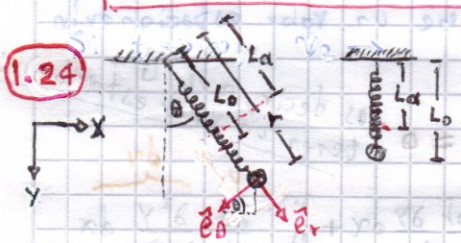
$$v_z(t) = \underbrace{a_0 e^{\lambda t}}_{\text{Solución homogenea}} + \underbrace{b}_{\text{s. particular}} \qquad \text{con } m\lambda + K = 0 \rightarrow \lambda = -K/m$$

Por sustitución de la sol particular en (1): $b = mg/K$

$$v_z(0) = v_0 = a_0 + b \rightarrow a_0 = v_0 - b = v_0 - mg/K.$$

$$\Rightarrow \boxed{v_z(t) = (v_0 - mg/K)e^{-(K/m)t} + mg/K} \rightarrow \text{Si } t \rightarrow \infty,\ v_z \rightarrow mg/K$$

1.24



$$mg - K(L_0 - L_a) = 0 \rightarrow L_0 = L_a + mg/K$$

$$\vec{r} = r(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) = r\hat{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r - r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\imath} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{\jmath} = -\dot{\theta}(-\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) = -\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}K(r - L_a)^2$$

para ver el comportamiento de r hay que analizar las variaciones alrededor de L_0, es decir variaciones de $r - L_0$ respecto a cero, usemos entonces la coordenada generalizada

$$\eta = r - L_0$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\eta}^2 + (\eta + L_0)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(\eta + L_0)\cos\theta - \frac{1}{2}K(\eta + mg/K)^2$$

Ec. de Lagrange:

para η: $\boxed{m\ddot{\eta} - m(\eta + L_0)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + K(\eta + mg/K) = 0}$

para θ: $\frac{d}{dt}\left(m(\eta + L_0)^2\dot{\theta}\right) + mg(\eta + L_0)\sin\theta = 0$

$$\boxed{2m(\eta + L_0)\dot{\eta}\dot{\theta} + m(\eta + L_0)^2\ddot{\theta} + mg(\eta + L_0)\sin\theta = 0}$$

b) Si $\eta \ll L_0$ y $\theta \ll 1$ ($\rightarrow \dot{\theta} \sim 0$), las ec. de Lagrange toman la forma

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\eta} + K\eta &= 0 \\ \cancel{m}L_0^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{L_0}\theta &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{osciladores con frecuencias } \omega_\eta = \sqrt{K/m},\ \omega_\theta = \sqrt{g/L_0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= A\cos(\omega_\eta + \phi_\eta) \\ \theta &= B\cos(\omega_\theta + \phi_\theta) \end{aligned}}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

Cap 2

PRINCIPIOS VARIACIONALES Y ECUACIONES DE LAGRANGE

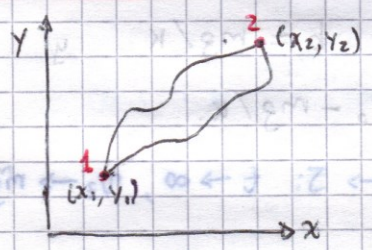
Goldstein

Principio de Hamilton:

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0}$$

→ el movimiento del sistema entre el tiempo t_1 y t_2 es tal que la integral de camino sea estacionaria, es decir por aquel camino para el cual la variación de la integral curvilínea sea nula.

Cálculo de variaciones:



$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx \quad \text{con} \quad \dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}$$

$y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\, \eta(x)$ → familia de curvas alrededor de $y(x,0)$.

$y(x,0)$ → camino correcto para el que J tiene un valor estacionario

$$\rightarrow J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x)\, dx$$

Estamos buscando que $(dJ/d\alpha)_{\alpha=0} = 0$ es decir, que J tenga un valor estacionario

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}}_{u}\, \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}\, dx}_{dv}$$

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\, dx + \cancel{\left\{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right\}_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\, dx$$

→ 0 todas las curvas pasan por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de modo que no hay variación respecto a α en esos puntos.

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}_{\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha} dx$$

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \rightarrow$$

por el lema fundamental del calculo de variaciones ya que $\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$ es una función de x arbitraria continua.

⇒ J puede tener un valor estacionario $\delta J = 0$ solo si $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0}$

siendo $\boxed{J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x)\, dx}$

Esto puede ser generalizado para una función f que depende de varias variables y_i y de sus derivadas $\dot{y}_i$.

Ec de Lagrange:

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$$

Basta con elegir un conjunto de curvas $y_i(x,\alpha)$ que varíen cada una según α.

$$\Rightarrow \underbrace{\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0}_{\text{principio de Hamilton}} \quad \text{solo si} \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0}$$

principio de Hamilton $\xrightarrow{\text{implica}}$ Ec. de Lagrange

Extensión a sistemas no holonomos:

Es posible un tratamiento razonable en sistemas no holonomos cuando las ec. de ligadura pueden ponerse en la forma:

$$\boxed{\sum_k a_{lk}\, dq_k + a_{lt}\, dt = 0}$$ → relación lineal entre las diferenciales de q.

$l = 1, 2, \ldots, m$ ↳ recuerdese que no es integrable por ser no holonoma

m → número de ec. de ligadura.

Se puede obtener un principio variacional cuando se construyan los caminos variados a partir del movimiento real mediante desplazamientos virtuales, para los que las ec. de ligadura son:

$$\sum_k a_{lk}\, \delta q_k = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_l \sum_k a_{lk}\, \delta q_k = 0 \qquad l = 1, 2, \ldots, m$$

↳ multiplicadores de Lagrange

Aplicando el principio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \quad \rightarrow \quad \int_1^2 \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k\, dt = 0$$

por otro lado $\int_1^2 \sum_l \lambda_l \left(\sum_k a_{lk}\, \delta q_k \right) dt = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k\, dt = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}} \qquad \text{con } k = 1, 2, \ldots, n$$

donde los a_{lk} son los coef. de la relación de ligadura de arriba, la cual debe ser lineal y que pues escribirse: $\boxed{\sum_k a_{lk}\, \dot{q}_k + a_{lt} = 0}$

Nótese que $\sum \lambda_l a_{lk}$ es asimilable a las fuerzas Q'_k que podriamos llamar aquí "fuerzas generalizadas" de ligadura.

$$\boxed{Q'_k = \sum_l \lambda_l a_{lk}} \rightarrow \text{"fuerzas generalizadas de ligadura"}$$

El método de multiplicadores de Lagrange se puede utilizar también para ligaduras holonomas cuando (1) sea conveniente reducir todas las q a coordenadas independientes (2) cuando queramos obtener las fuerzas de ligadura.

Teoremas de Conservación:

Si consideramos un sistema sometido a fuerzas que derivan de potenciales que solo dependen de la posición:

potencial no dependiente de las velocidades

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}}^{\,0} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{ix} \rightarrow$$

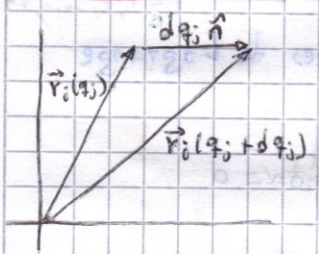
generalizando el resultado:

$$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \rightarrow \text{Cantidad de mov canónica ó conjugada}$$

si L no contiene una coordenada q_j, llamaremos a esta una coordenada cíclica y en la ec. de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_j}}^{\,0} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(p_j) = 0 \rightarrow \boxed{p_j = cte}$$

$\Rightarrow$ La cantidad de movimiento generalizada conjugada de una coordenada cíclica se conserva.



Consideremos un cambio dq_j que represente una translación del sistema en conjunto en una dirección dada. q_j no puede aparecer en T ya que las velocidades no se ven afectadas por un cambio de origen $\rightarrow \partial T/\partial q_j = 0$
Además si el sistema es conservativo, V no depende de las velocidades y $\partial V/\partial \dot{q}_j = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad ó \quad \frac{d}{dt}(p_j) - Q_j = 0 \rightarrow \boxed{\dot{p}_j = Q_j}$$

↳ Componente de la fuerza en la dirección de mov

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \to 0} \frac{\vec{r}_i(q_j+dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j} = \frac{dq_j\,\hat{n}}{dq_j} = \hat{n}$$

$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \hat{n} = \vec{F}\cdot\hat{n} \rightarrow$ Q_j es la componente de la fuerza en la dirección del movimiento.

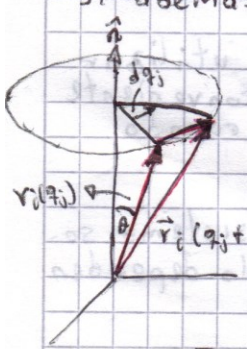
$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

recuérdese que si $r = r(q, \dot{q}, t)$

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial r}{\partial q}$$

$p_j = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \hat{n} = \vec{P}\cdot\hat{n} \rightarrow$ p_j es la componente de la cantidad de movimiento en la dirección $\hat{n}$.

si además q_j es cíclica, $\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \rightarrow \boxed{\dot{p}_j = 0}$ Conservación de p_j



De manera análoga si una coordenada cíclica q_j es tal que dq_j corresponde a una rotación del sistema de partículas alrededor de un eje,

$$|d\vec{r}_i| = r_i \sin\theta\, dq_j \rightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = r_i \sin\theta = \hat{n}\times\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\hat{n}\times\vec{r}_i) = \sum_i \hat{n}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{F}_i) = \hat{n}\cdot\vec{N}$$

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\hat{n}\times\vec{r}_i) = \sum_i \hat{n}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{p}_i) = \hat{n}\cdot\vec{L}$$

$\dot{p}_j = Q_j \Rightarrow \hat{n}\cdot\dot{\vec{L}} = N\cdot\hat{n}$ y si q_j es cíclica $\dot{p}_j = 0 \rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}\cdot\hat{n} = 0}$ Conservación de L en la dirección $\hat{n}$

De lo anterior se concluye que ① si una coordenada correspondiente a un desplazamiento es cíclica $\Rightarrow$ el sistema es invariante bajo una translación en la dirección del desplazamiento de la coordenada

— ② Si una coordenada de rotación es cíclica (se conserva el momento conjugado cinético), entonces el sistema es invariante ante una rotación en torno al eje dado.

Considerese ahora $L = L(q, \dot{q}, t)$ para un sistema en el que las fuerzas deriven de potenciales que dependan sólo de la posición:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L}_{h(q,\dot{q},t)}\Big) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0} \quad ó \quad \boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0}$$

$h(q, \dot{q}, t) \rightarrow$ función energía $\Rightarrow \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$

si la lagrangiana no es función explícita del tiempo, $\partial L/\partial t = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{h} = 0} \rightarrow$ Conservación de h. (Integral de Jacbi)

En ciertas circunstancias, la función h es la energía total del sistema, entonces se tiene la conservación de la energía.

→ Si las ec de transformación no contienen explícitamente el tiempo y ademas el potencial no depende de las velocidades generalizadas en ese caso:

$$h = T + V = E \text{ y si } \dot{h} = 0 \Rightarrow \boxed{E = cte}$$

Cuando el sistema no sea conservativo, pero haya fuerzas de rozamiento que deriven de una ~~potencial~~ función de disipación $\mathcal{F}$,

$$\boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j} \longrightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = -2\mathcal{F}}$$

Si L no depende explícitamente del tiempo: $\partial L/\partial t = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dh}{dt} = -2\mathcal{F}$ y si además el sistema es tal que h sea lo mismo que la energía

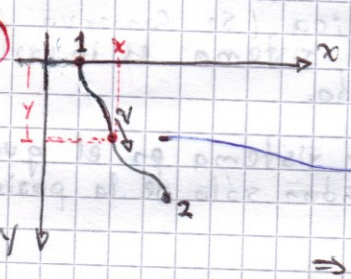
$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -2\mathcal{F}} \longrightarrow 2\mathcal{F} \text{ es la velocidad de disipación de energía.}$$

Ej/ $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} \longrightarrow \ddot{\theta}\,d\theta = \dot{\theta}\,d\dot{\theta} \longrightarrow$ ley de conservación de los puntos de Engel

By: Herminso Villarraga Gómez

Solución a los problemas del CAP 2 - Goldstein 3ed

2.1



$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx}{v}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = mg\Delta h = \cancel{m}gy \rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$\Rightarrow \quad t_{12} = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2gy}}\,dx \quad \text{con } \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\dot{y}}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+\dot{y}^2}} \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = c$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y}^2 = c^2\, 2gy\,(1+\dot{y}^2) \quad \text{ó} \quad \dot{y}^2(1-2gc^2y) = 2gc^2y$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \left[\frac{y}{(1/2gc^2)-y}\right]^{1/2} = \left(\frac{y}{K-y}\right)^{1/2} \quad \text{donde } K = \frac{1}{2gc^2}$$

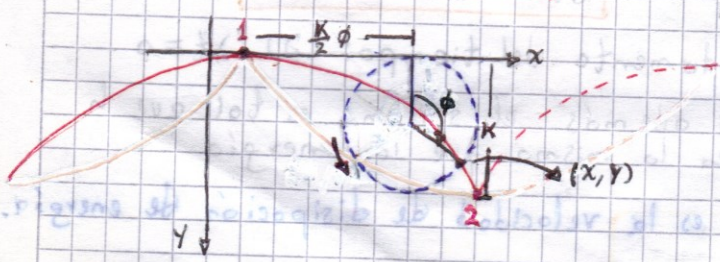
$$\Rightarrow \quad dx = \left(\frac{K-y}{y}\right)^{1/2} dy \qquad \text{sea} \quad y = \frac{K}{2}(1-\cos\phi)$$

$$dy = \frac{K}{2}\sin\phi\, d\phi$$

$$= \left(\frac{\cancel{\frac{K}{2}}(1+\cos\phi)}{\cancel{\frac{K}{2}}(1-\cos\phi)}\right)^{1/2}\left(\frac{K}{2}\sin\phi\, d\phi\right)$$

$$dx = \left(\frac{(1+\cos\phi)^2}{\cancel{1-\cos^2\phi}}\right)^{1/2}\left(\frac{K}{2}\cancel{\sin\phi}\, d\phi\right) = \pm\frac{K}{2}(1+\cos\phi)\,d\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_1 \pm \frac{K}{2}(\phi+\sin\phi)} \quad \text{y} \quad \boxed{y = \frac{K}{2}(1-\cos\phi)}$$



Estas son las ec paramétricas de una cicloide con cúspide en $K = 1/2gc^2$

b) Cuando la velocidad inicial es $v_0 \neq 0$, la ec. de conservación de energía cambia, luego hay que redefinir constantes en la solución del problema:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\Delta h = mgy \rightarrow v = \sqrt{2gy + v_0^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{2gy+v_0^2}\sqrt{1+\dot{y}^2}} \quad y \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \rightarrow \dot{y}^2 = c^2(2gy+v_0^2)(1+\dot{y}^2)$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y + v_0^2/2g}{1/2gc^2 - y - v_0^2/2g}\right)^{1/2} = \left(\frac{K_2 + y}{K_1 - y}\right)^{1/2} \quad \text{con} \quad \boxed{\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2gc^2} - \frac{v_0^2}{2g} \\ K_2 &= v_0^2/2g \end{aligned}}$$

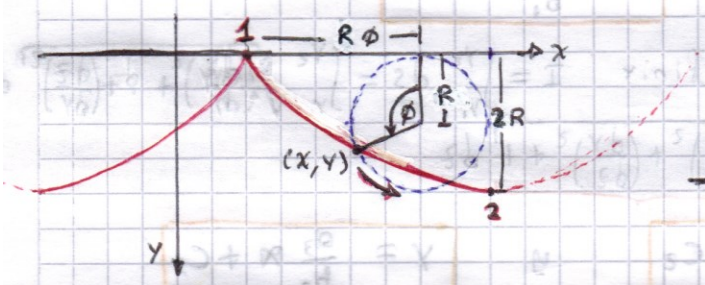
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\frac{K_1 - y}{K_2 + y}\right)^{1/2}$$

Sea ahora: $K_1 - y = R(1 - \cos\phi)$

$K_2 + y = R(1 + \cos\phi)$

$$dx = \left(\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}\right)^{1/2}(-R\sin\phi)\,d\phi \qquad K_1 + K_2 = 2R = 1/2gc^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_1 \pm R(\phi - \sin\phi)} \quad y \quad \boxed{y = R(1 - \cos\phi)}$$



Cicloide con cúspide en $2R = 1/2gc^2$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = \cancel{m}g(2R) + 0$$

$$\rightarrow \boxed{2R = \frac{v_0^2}{2g}}$$

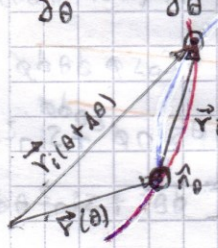
en la cúspide la velocidad se anula.

2.2 $L = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{r}}_i)^2 - U(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$

$$p_\theta = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{\theta}} - \sum\left[\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}\cdot\cancelto{0}{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{\theta}}} + \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{\theta}}\right]$$

la posición no depende explícitamente de las velocidades angulares

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0}\frac{\vec{r}_i(\theta+\Delta\theta) - \vec{r}_i(\theta)}{\Delta\theta} \rightarrow \hat{n}_\theta \times \vec{r}_i \quad \text{cuando } \Delta\theta \to 0$$



$$\Rightarrow p_\theta = \sum_i \vec{p}_i \cdot (\hat{n}_\theta \times \vec{r}_i) - \sum \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot(\hat{n}_\theta \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i \hat{n}_\theta \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) - \sum \hat{n}_\theta \cdot \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)$$

$$= \underbrace{\hat{n}_\theta \cdot \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}_{L_\theta} - \sum n_\theta \cdot (\vec{r}_i \times \nabla_{\vec{v}_i} U)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_\theta = L_\theta - \sum_i \hat{n}_\theta \cdot (\vec{r}_i \times \vec{\nabla}_{\vec{v}_i} U)}$$

para fuerzas electromagnéticas $U = \sum_i q_i \phi_i - q_i \vec{A}_i \cdot \vec{v}_i$

$$\nabla_{\vec{v}_i} U = -q_i \vec{A}_i \Rightarrow \boxed{p_\theta = L_\theta + \sum_i \hat{n}_\theta \cdot (\vec{r}_i \times q_i \vec{A}_i)}$$

2.3 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}_{f_1}\, dx$$

$\delta I = 0$ si $\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0$ en este caso

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-1/2} \cdot \frac{dy}{dx}\right\} = 0 \rightarrow \frac{dy/dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} = a_1$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-1/2} \cdot \frac{dz}{dx}\right\} = 0 \rightarrow \frac{dz/dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} = b_1$$

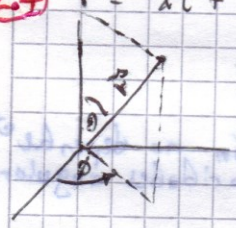
$$\frac{a}{b} = \frac{dy/dx}{dz/dx} = \frac{dy}{dz} \rightarrow \boxed{y = \frac{a_1}{b_1} z + C_1}$$

Similarmente podemos definir $I = \int_{y_1}^{y_2} ds = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dy$

e $I = \int_{z_1}^{z_2} ds = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}\, dz$

obteniendo: $\boxed{z = \frac{a_2}{b_2} x + C_2}$ y $\boxed{y = \frac{a_3}{b_3} x + C_3}$

2.4 $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = r\left(\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}\right)$



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= r^2\left[\left(\cos\theta\cos\phi\, d\theta + \sin\theta\sin\phi\, d\phi\right)^2 + \left(\cos\theta\sin\phi\, d\theta - \sin\theta\cos\phi\, d\phi\right)^2 + \left(-\sin\theta\, d\theta\right)^2\right]$$

$$ds^2 = r^2\left[\cos^2\theta\cos^2\phi\, d\theta^2 + \sin^2\theta\sin^2\phi\, d\phi^2 + \cancel{2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi\, d\theta\, d\phi} + \cos^2\theta\sin^2\phi\, d\theta^2 + \sin^2\theta\cos^2\phi\, d\phi^2 + \cancel{2\sin\theta\cos\phi\cos\theta\sin\phi\, d\theta\, d\phi} + \sin^2\theta\, d\theta^2\right]$$

$$ds^2 = r^2\left[\cos^2\theta\, d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 + \sin^2\theta\, d\theta^2\right] = r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right]$$

$$I = \int ds = \int \underbrace{r\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 + \sin^2\theta}}_{f}\, d\phi$$

$\delta I = 0 \rightarrow \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ siendo $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{d\phi}$

By: Herminso Villarraga Gómez

podemos obviar el factor r en toda la ec.

$$\Rightarrow \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\cancel{2}\dot{\theta}}{\cancel{2}\sqrt{\dot{\theta}^2+\sin^2\theta}}\right) - \frac{\cancel{2}\sin\theta\cos\theta}{\cancel{2}\sqrt{\dot{\theta}^2+\sin^2\theta}} = 0 \qquad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{d\phi}$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2+\sin^2\theta}} - \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\dot{\theta}\,(\cancel{2}\dot{\theta}\ddot{\theta} + \cancel{2}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta)}{(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta)^{3/2}} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\dot{\theta}^2+\sin^2\theta}} = 0$$

$$(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta)(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta) - \dot{\theta}^2(\ddot{\theta} + \sin\theta\cos\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta}\sin^2\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - \sin^3\theta\cos\theta = 0$$

Si $\hat{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ es un vector normal a la esfera en un punto dado por $\vec{r}$, si $\vec{r}$ es la posición de un punto sobre un círculo máximo sobre la esfera se debe tener:

$$\hat{n}\cdot\vec{r} = 0 \quad ó \quad r(\sin\theta(a\cos\phi + b\sin\phi) + c\cos\theta) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{a}{c}\cos\phi - \frac{b}{c}\sin\phi = A\cos\phi + B\sin\phi \qquad A^2+B^2<1$$

$$-\sin^4\theta\left\{-\frac{\ddot{\theta}}{\sin^2\theta} + \frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta}\dot{\theta}^2\right\} - \sin^3\theta\cos\theta = 0$$

$$-\sin^4\theta\,\frac{d}{d\phi}\left(-\frac{\dot{\theta}}{\sin^2\theta}\right) - \sin^3\theta\cos\theta = 0$$

$$-\sin^{\cancel{4}}\theta\,\frac{d^2}{d\phi^2}(\operatorname{ctg}\theta) - \cancel{\sin^3\theta}\cos\theta = 0$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = 0 \qquad \text{cuya solución es:}$$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = A\cos\phi + B\sin\phi$$

2.5 $L = \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 + Fx \qquad I = \int_0^{t_0} L\,dx$

$$\delta I = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow m\ddot{x} - F = 0$$

$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{F}{m} \qquad \dot{x} = \frac{F}{m}t + B \rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + Bt + A$$

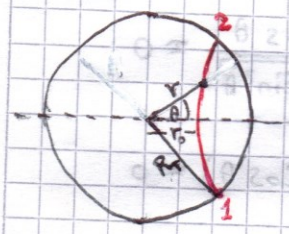
por otro lado $x(t) = ct^2 + Bt + A \rightarrow c = \frac{F}{2m}$

x va de 0 a a en $t_0 \Rightarrow$ si $t=0$, $x=0 \rightarrow A=0$

y si $t = t_0$ $\quad x(t_0) = a = \frac{F}{2m}t_0^2 + Bt_0 \rightarrow B = \frac{a}{t_0} - \frac{F}{2m}t_0$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + \left(\frac{a}{t_0} - \frac{F}{2m}t_0\right)t}$$

2.6 Sin pérdida de generalidad supongase que la curva reposa en el plano xy.



$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j}$$

$$ds^2 = (dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta)^2$$

$$= (dr)^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\,(d\theta)^2 - \cancel{2r\cos\theta\sin\theta\, dr\, d\theta}$$

$$+ (dr)^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\,(d\theta)^2 + \cancel{2r\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta}$$

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{v} \qquad ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

$$\vec{F}_g = \underbrace{\left(\frac{GM_T}{R^2}\right)}\cdot m \rightarrow U = \frac{GM_T}{R}m \quad \text{t.q.} \quad \vec{F}_g = -\frac{\partial U}{\partial R}$$

$$F_g = g\,m \rightarrow g = \frac{GM_T}{R_T} \longrightarrow$$ siendo R_T el radio de la tierra y g la aceleración de la gravedad en la superficie.

$$\rho = M_T / \left(\tfrac{4}{3}\pi R_T^3\right)$$

$$U(r) = \frac{GM(r)m}{r} = \frac{G\left(\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho\right)m}{r} = \frac{G(M_T r^{\cancel{3}\,2}/R_T^3)m}{\cancel{r}} = (g/R_T)\,m\,r^2$$

$\Rightarrow$ Por Conservacion de Energía: $\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}(g/R)r^2 = 0 + \cancel{m}(g/R)R^2$

$$\rightarrow v = \sqrt{2(g/R)(R^2 - r^2)}$$

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2}\frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\,d\theta}{\sqrt{2(g/R)(R^2-r^2)}} = \int \underbrace{\sqrt{\frac{R}{2g}}\sqrt{\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}{R^2 - r^2}}}_{f}\,d\theta$$

$$\delta(\Delta t) = 0 \rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0 \quad q = r$$ la cual resulta ser muy complicado en este caso.

dado que el potencial $U(r)$ deriva de fuerzas que dependen solo de la posicion, podemos usar la ec. alternativa (y equivalente):

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right) + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \theta}}^{\,0} = 0 \quad \text{ó} \quad \underbrace{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}}\cdot\dot{r} - f\right)}_{dh/d\theta = 0 \rightarrow \text{Integral de Jacobi}} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \theta}}^{\,0} = 0 \qquad \dot{r} \equiv \frac{dr}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}}\dot{r} - f\right) = cte \longrightarrow \text{integral de Jacobi}$$

$$\sqrt{\frac{R}{2g}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\dot{r}}{\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{\dot{r}^2+r^2}}\,\dot{r} - \sqrt{\frac{R}{2g}}\,\frac{\sqrt{\dot{r}^2+r^2}}{\sqrt{R^2-r^2}} = cte$$

$$\sqrt{\frac{R}{2g}}\left\{\frac{\cancel{\dot{r}^2} - (\cancel{\dot{r}^2} + r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{\dot{r}^2+r^2}}\right\} = cte$$ podemos absorber $\sqrt{R/2g}$ dentro de la cte. y si

By: Herminso Villarraga Gómez

evaluamos esa cte para la posición mínima $r = r_0$ de la partícula sobre el tunel, allí $dr/d\theta = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - r_0^2}} \frac{r_0^2}{\sqrt{0 + r_0^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \frac{r^2}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}} \Rightarrow \dot{r}^2 + r^2 = \frac{(R - r_0^2) r^4}{r_0^2 (R^2 - r^2)}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{(R^2 - r_0^2) r^4 - r^2 r_0^2 (R^2 - r^2)}{r_0^2 (R^2 - r^2)} = \frac{R^2 r^4 - \cancel{r_0^2 r^4} - r^2 r_0^2 R^2 + \cancel{r^4 r_0^2}}{r_0^2 (R^2 - r^2)}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} = R \frac{r}{r_0} \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{R} \frac{r_0}{r} \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r^2 - r_0^2}}\, dr$$

podemos integrar entre 0 y θ, es decir entre r_0 y r para la variable radial:

$$\Rightarrow R\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{r_0}{r} \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{r^2 - r_0^2}}\, dr$$

Sea $u = \left(\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2} \right)^{1/2} \Rightarrow du = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{u} \left\{ \frac{\cancel{2} r}{R^2 - r^2} + \frac{(r^2 - r_0^2) \cancel{2} r}{(R^2 - r^2)^2} \right\} dr$

$$du = \frac{r}{u} \left\{ \frac{1}{R^2 - r^2} + \frac{u^2}{(R^2 - r^2)} \right\} dr$$

$$\Rightarrow R\theta = \int_0^u \frac{r_0}{r} \frac{1}{\cancel{u}} \underbrace{\left(\frac{\cancel{u}}{r} \frac{R^2 - r^2}{1 + u^2} du \right)}_{dr}$$

$$\frac{R^2 - r^2}{r^2} = \frac{(R^2 - r^2)(R^2 - r_0^2)}{r^2 (R^2 - r_0^2)} = \frac{(R^2 - r_0^2)(R^2 - r^2)}{r^2 R^2 - r^2 r_0^2 + R^2 r_0^2 - R^2 r_0^2}$$

$$= \frac{(R^2 - r_0^2)(R^2 - r^2)}{r_0^2 (R^2 - r^2) + R^2 (r^2 - r_0^2)} = \frac{(R^2 - r_0^2)}{r_0^2 + R^2 u^2} = \frac{1 - (r_0/R)^2}{(r_0/R)^2 + u^2}$$

$$\Rightarrow R\theta = r_0 \int_0^u \frac{1 - (r_0/R)^2}{[(r_0/R)^2 + u^2][1 + u^2]} du = r_0 \int_0^u \left\{ \frac{1}{(r_0/R)^2 + u^2} - \frac{1}{1 + u^2} \right\} du$$

$$R\theta = \frac{r_0}{(r_0/R)} \tan^{-1} \frac{u}{(r_0/R)} - r_0 \tan^{-1} u \Big]_0^u = \left[R \left(\tan^{-1} \left(\frac{Ru}{r_0} \right) - \cancel{\tan^{-1} 0}^{\,0} \right) - r_0 (\tan^{-1} u - 0) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1} \frac{R}{r_0} \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}} - \frac{r_0}{R} \tan^{-1} \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

Si hacemos $\sqrt{\dfrac{r^2-r_0^2}{R^2-r^2}} = \tan\dfrac{\phi}{2} = \dfrac{\sin\phi/2}{\cos\phi/2}$.

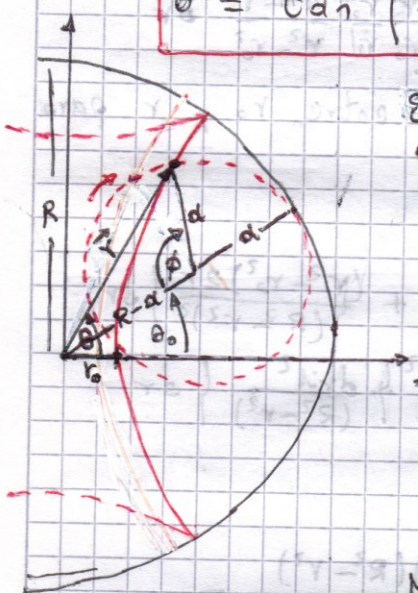
tenemos: $(r^2-r_0^2)\cos^2\phi/2 = (R^2-r^2)\sin^2\phi/2$

ó $r^2(\cos^2\phi/2+\sin^2\phi/2) = R^2\sin^2\phi/2 + r_0^2\cos^2\phi/2$.

$$r^2 = R^2\frac{1}{2}(1-\cos\phi) + r_0^2\frac{1}{2}(1+\cos\phi)$$

$$\boxed{r^2 = \frac{1}{2}(R^2+r_0^2) - \frac{1}{2}(R^2-r_0^2)\cos\phi}$$ además:

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\tan\frac{\phi}{2}\right) - \frac{r_0}{R}\frac{\phi}{2}}$$



El hipocicloide es generado por un círculo que rueda dentro del interior de un círculo mayor. Por ley del coseno:

$$r^2 = (R-a)^2 + a^2 - 2a(R-a)\cos\phi$$

si $a = \frac{1}{2}(R-r_0) \rightarrow R-a = \frac{1}{2}(R+r_0)$

$$\rightarrow r^2 = \frac{1}{4}(R^2+r_0^2-\cancel{2Rr_0}) + \frac{1}{4}(R^2+r_0^2+\cancel{2Rr_0}) - \frac{1}{2}(R^2-r_0^2)\cos\phi$$

$$\boxed{r^2 = \frac{1}{2}(R^2+r_0) - \frac{1}{2}(R^2-r_0^2)\cos\phi}$$

Nos queda probar la relación entre θ y ϕ:

$$\tan(\theta-\theta_0) = \frac{a\sin\phi}{(R-a)-a\cos\phi} = \frac{\frac{1}{2}(R-r_0)\sin\phi}{\frac{1}{2}(R+r_0)-\frac{1}{2}(R-r_0)\cos\phi}$$

$$= \frac{(R-r_0)\sin\phi}{R(1-\cos\phi)+r_0(1+\cos\phi)} = \frac{(R-r_0)\cancel{2}\sin\phi/2\cos\phi/2}{R(\cancel{2}\sin^2\phi/2)+r_0(\cancel{2}\cos^2\phi/2)}$$

$$= \frac{(R-r_0)\tan(\phi/2)}{R\tan^2(\phi/2)+r_0}$$ con esto la siguiente identidad queda:

$$\tan(\theta-\theta_0+\phi/2) = \frac{\tan(\theta-\theta_0)+\tan(\phi/2)}{1-\tan(\theta-\theta_0)\tan(\phi/2)}$$

$$= \frac{\dfrac{(R-r_0)\tan\phi/2}{R\tan^2(\phi/2)+r_0}+\tan\phi/2}{1-\dfrac{(R-r_0)\tan\phi/2}{R\tan^2\phi/2+r_0}\tan\phi/2}$$

$$= \frac{\dfrac{(R-\cancel{r_0})\tan(\phi/2) + R\tan^3(\phi/2) + \cancel{r_0\tan(\phi/2)}}{\cancel{R\tan^2(\phi/2)+r_0}}}{\dfrac{\cancel{R\tan^2(\phi/2)} + r_0 - \cancel{R\tan^2(\phi/2)} + r_0\tan^2\phi/2}{\cancel{R\tan^2(\phi/2)+r_0}}} \quad R(1+\tan^2\phi/2)$$

$$= \frac{R\cancel{(1+\tan^2\phi/2)}\tan(\phi/2)}{r_0\cancel{(1+\tan^2\phi/2)}}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta-\theta_0+\phi/2) = \frac{R}{r_0}\tan(\phi/2)$$

Cuando el círculo interior se desplaza un arco $R\theta_0$ sobre el círculo mayor el punto que describe el hipocicloide ha descrito un arco $a\phi$ equivalente a $R\theta$

$$\Rightarrow R\theta_0 = a\phi = \frac{1}{2}(R-r_0)\phi \Rightarrow \theta_0 = \left(1-\frac{r_0}{R}\right)(\phi/2)$$

$$\Rightarrow -\theta_0 + \phi/2 = \frac{r_0}{R}(\phi/2)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\theta + \frac{r_0}{R}(\phi/2)\right) = \frac{R}{r_0}\tan\phi/2.$$

$$\theta + \frac{r_0}{R}(\phi/2) = \tan^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\tan\phi/2\right)$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R}{r_0}\tan(\phi/2)\right) - \frac{r_0}{R}\frac{\phi}{2}}$$

que corresponde a la ec. hallada antes, ello significa que en efecto la trayectoria corresponde a un hipocicloide en el que el radio del círculo interior es $\underline{a = \frac{1}{2}(R-r_0)}$

Por último:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_0^\theta \sqrt{\frac{(dr/d\theta)^2 + r^2}{R^2-r^2}}\,d\theta = \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{1+r^2(d\theta/dr)^2}{R^2-r^2}}\,dr$$

donde $\dfrac{d\theta}{dr} = R\dfrac{r}{r_0}\sqrt{\dfrac{r^2-r_0^2}{R^2-r^2}} \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{r_0}{Rr}\sqrt{\dfrac{R^2-r^2}{r^2-r_0^2}}$ según vimos atrás

$$\Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{1+\cancel{r^2}\dfrac{r_0^2}{R^2\cancel{r^2}}\dfrac{R^2-r^2}{r^2-r_0^2}}{R^2-r^2}}\,dr = \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{R^2(r^2-r_0^2)+r_0^2(R^2-r^2)}{R^2(r^2-r_0^2)(R^2-r^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{R^2r^2-\cancel{R^2r_0^2}+\cancel{r_0^2R^2}-r_0^2r^2}{R^2(r^2-r_0^2)(R^2-r^2)}}\,dr = \frac{1}{\sqrt{2gR}}\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{R^2-r_0^2}{(r^2-r_0^2)(R^2-r^2)}}\cdot r\,dr$$

By: Herminso Villarraga Gómez

$$\Delta t = \sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{2gR}} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{(R^2-r^2)(r^2-r_0^2)}}$$

Si recordamos $\tan \phi/2 = \dfrac{\sqrt{r^2-r_0^2}}{\sqrt{R^2-r^2}} \begin{matrix} \longrightarrow y' \\ \longrightarrow x' \end{matrix}$ derivando

$$\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{R^2-r^2}{r^2-r_0^2}} \left\{ \frac{\cancel{2}r}{R^2-r^2} + \frac{(r^2-r_0^2)\cancel{2}r}{(R^2-r^2)^2} \right\}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{x'^2+y'^2}{x'^2}\, d\phi = \sqrt{\frac{R^2-r^2}{r^2-r_0^2}} \left\{ \frac{R^2 \cancel{-r^2} + \cancel{r^2} - r_0^2}{(R^2-r^2)^2} \right\} r$$

$$\frac{d\phi}{2}\,\frac{\cancel{(R^2-r^2)} + \cancel{(r^2-r_0^2)}}{\cancel{R^2-r^2}} = \sqrt{\frac{R^2-r^2}{r^2-r_0^2}} \left\{ \frac{R^2-r_0^2}{\cancel{(R^2-r^2)^2}} \right\} r$$

$$\frac{d\phi}{2}\,\frac{\cancel{(R^2-r_0^2)}}{1} = \sqrt{\frac{R^2-r^2}{r^2-r_0^2}} \left\{ \frac{\cancel{R^2-r_0^2}}{R^2-r^2} \right\} r = \frac{r}{\sqrt{(r^2-r_0^2)(R^2-r^2)}}$$

$$\frac{d\phi}{2} = \frac{r}{\sqrt{(r^2-r_0^2)(R^2-r^2)}}$$ que es justamente el integrando de la ec. de Δt.

$$\Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{R^2-r_0^2}{2gR}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{2} \longrightarrow \boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{R^2-r_0^2}{2gR}}\,\frac{\phi}{2}}$$

El ángulo ϕ total para viajar de un lado al otro debe ser 2π.

$$\Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{R^2-r_0^2}{2gR}}\,\pi = \sqrt{\frac{R}{2g}}\sqrt{1-(r_0/R)^2}\,\pi$$

Por otro lado: $\theta = \left(\dfrac{s}{2\pi R}\right) 2\pi$ será la separación angular entre las ciudades siendo s la distancia de separación sobre tierra. Y si $\phi = 2\pi$, por la expresión hallada atrás:

$$\theta = \tan^{-1}\Big(\underbrace{\frac{R}{r_0}\tan\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}}_{\infty}\Big) - \frac{r_0}{R}\frac{(\cancel{2}\pi)}{\cancel{2}} = \pi\left(1-\frac{r_0}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{s}{2\pi R}\right)2\cancel{\pi} = \cancel{\pi}\left(1-\frac{r_0}{R}\right) \longrightarrow \left(1-\frac{r_0}{R}\right) = \frac{s}{\pi R}$$

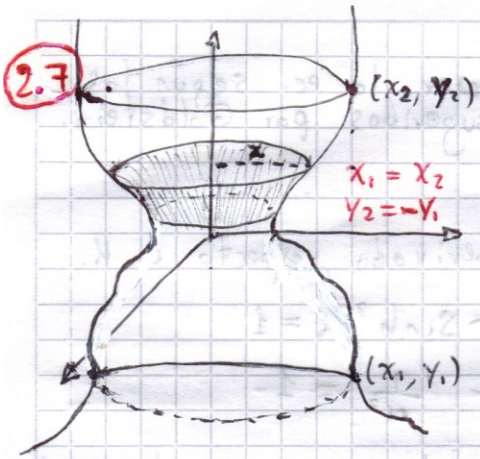
$$\Rightarrow \left(1-\frac{r_0}{R}\right)\left(1+\frac{r_0}{R}\right) = \frac{s}{\pi R}\left(2-\frac{s}{\pi R}\right)$$

$$1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 = \left(2-\frac{s}{\pi R}\right)\frac{s}{\pi R} \longrightarrow \boxed{\Delta t = \sqrt{\left(2-\frac{s}{\pi R}\right)\frac{s}{\pi \cancel{R}}\cdot\frac{\cancel{R}}{2g}}\,\pi}$$

Si $s = 4800$ km y $R = 6378.388$ m $\longrightarrow \Delta t \simeq$

By: Herminso Villarraga Gómez

2.7



$$dA(s) = 2\pi x\, ds = 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A = \int_1^2 \underbrace{x\sqrt{1+\dot{y}^2}}_{f}\, dx \qquad \dot{y} \equiv dy/dx$$

$$\delta A = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}^{\,0} = 0$$

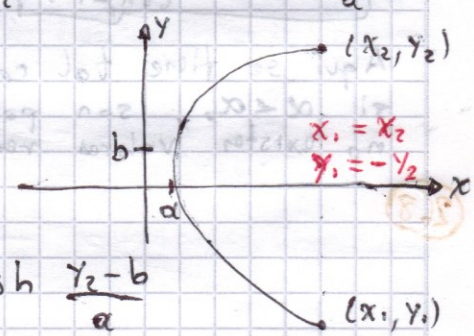
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\dot{y}x}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) = 0 \rightarrow \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \alpha = cte.$$

$$\Rightarrow x^2\dot{y}^2 = \alpha^2(1+\dot{y}^2) \rightarrow \dot{y}^2(x-\alpha^2) = \alpha^2$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} \rightarrow y = \alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \alpha\,\mathrm{Arc\,Cosh}\,\frac{x}{\alpha} + b$$

ó $\boxed{x = \alpha\cosh\frac{y-b}{\alpha}}$ $\rightarrow$ la solución es una catenaria

pero debemos tener $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$



$$\Rightarrow x_1 = \alpha\cosh\frac{y_1-b}{\alpha} \quad y \quad x_2 = \alpha\cosh\frac{y_2-b}{\alpha}$$

sean $x_1 = x_2 = x_0$ $\quad y_1 = -y_2 = y_0$

$$\Rightarrow x_0 = \alpha\cosh\frac{y_0-b}{\alpha} = \alpha\cosh\frac{-y_0-b}{\alpha} = \alpha\cosh\frac{y_0+b}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \cancel{y_0} - b = \cancel{y_0} + b \rightarrow b = 0 \rightarrow$$ tiende a ser simetrica la curva respecto al eje x.

$\Rightarrow \boxed{x = \alpha\cosh\frac{y}{\alpha}}$ la cual en el extremo inferior $(x_1, y_1) = (x_0, y_0)$ toma la forma:

$$x_0 = \alpha\cosh(y_0/\alpha) \rightarrow x_0/y_0 = (\alpha/y_0)\cosh(y_0/\alpha)$$

si $\rho = y_0/\alpha$ y $\alpha = y_0/x_0 \rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\rho}\cosh\rho$

minimizando para ρ: $\frac{1}{\rho}\sinh\rho - \frac{\cosh\rho}{\rho^2} = 0$

$$\rightarrow \sinh\rho = \frac{\cosh\rho}{\rho} \rightarrow \rho = \coth\rho \rightarrow \rho \simeq 1.2$$

Con lo cual $\boxed{\alpha \simeq 0.66}$

Sin embargo si usamos el siguiente truco:

$\frac{x}{a} = \cosh \frac{x}{a} \frac{y}{x}$ podemos expresar la ec. según los parámetros sugeridos por Goldstein.

Sea $K = x_2/a$ y $\alpha = y_2/x_2$.

$\Rightarrow K = \cosh(K\alpha)$ $\rightarrow$ tomando la derivada respecto a K.

$1 = \alpha \sinh \alpha$ usemos: $\underbrace{\cosh^2 A}_{K^2} - \sinh^2 A = 1$

$$K^2 - \frac{1}{\alpha^2} = 1$$

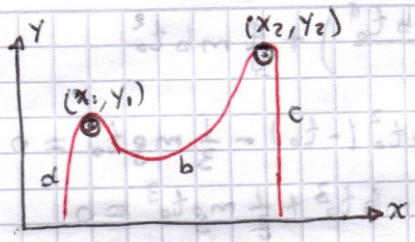
$\Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{K^2-1}}}$ hace la función mínima, para la cual

$\boxed{K_0 = \cosh\left(\frac{K_0}{\sqrt{K_0^2-1}}\right)}$ $\rightarrow$ lo cual numericamente conduce a $K_0 \approx 1.81 \rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{K^2-1}} \approx 0.66$.

Aquí se tiene tal como se pedía en el problema, que si $\alpha < \alpha_0$, son posibles 2 valores de K, pero si $\alpha > \alpha_0$ no existen valores reales de K, pero si $\alpha = \alpha_0 \Rightarrow K \approx 1.81$

2.8

2.9



En los segmentos a y c:

$$dU = (\lambda dy)\, g y$$

$$U_a = \lambda g \int_0^{y_1} y\, dy = \frac{1}{2}\lambda g y_1^2$$

$$U_c = \lambda g \int_0^{y_2} y\, dy = \frac{1}{2}\lambda g y_2^2$$

En el segmento b:

$$dU_b = (\lambda\, ds)\, g y \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+\dot{y}^2}\, dx \quad \text{con } \dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}$$

$$\rightarrow U_b = \lambda g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\dot{y}^2}\, dx$$ ó lo que es lo mismo:

$$U_b = \lambda g \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{y\sqrt{1+\dot{x}^2}}_{f}\, dy \qquad \text{con } \dot{x} \equiv dx/dy$$

hay que minimizar $\Rightarrow$ f $\rightarrow$ idéntico al problema de la catenaria (problema 7)

así el problema de hallar la curva supuesta entre las poleas es idéntico al de la superficie mínima de revolución. y la solución en este caso es:

$$\boxed{y = a\cosh\left(\frac{x-b}{a}\right)}$$ $\rightarrow$ donde a y b son determinados por las condiciones sobre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

2.10 $y = at + bt^2 \rightarrow \dot{y} = a + 2bt$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy = \frac{1}{2}m(a^2 + 4abt + 4b^2t^2) - mg(at + bt^2)$$

$$= \frac{1}{2}ma^2 + 2mabt + 2mb^2t^2 - mgat - mgbt^2$$

- La demostración directa se hace sin tener en cuenta las ec. de Lagrange:

$$\int_0^{t_0} L\, dt = \frac{1}{2}ma^2t_0 + mabt_0^2 + \frac{2}{3}mb^2t_0^3 - \frac{1}{2}mgat_0^2 - \frac{1}{3}mgbt_0^3$$

si los parámetros respecto a los que queremos minimizar son a y b debemos poner todo en términos de ellos:

si $y_0 = at_0 + bt_0^2 \rightarrow a = (y_0 - bt_0^2)/t_0$

$$\Rightarrow \int_0^{t_0} L\, dt = \frac{1}{2}m\left(\frac{y_0 - bt_0^2}{t_0}\right)^2 t_0 + mbt_0^2\left(\frac{y_0 - bt_0^2}{t_0}\right) + \frac{2}{3}mb^2t_0^3 - \frac{1}{2}mgt_0^2\left(\frac{y_0 - bt_0^2}{t_0}\right) - \frac{1}{3}mgbt_0^3$$

para minimizar la integral $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial b}\displaystyle\int_0^{t_0} L\, dt = 0 \rightarrow$

$$m\left(\frac{y_0 - bt_0^2}{\cancel{t_0}}\right)\cancel{t_0}\left(\frac{-t_0^{\cancel{2}}}{\cancel{t_0}}\right) + \left(\frac{my_0t_0^2 - 2mbt_0^4}{t_0}\right) + \frac{4}{3}mbt_0^3$$

$$-\frac{1}{2}mgt_0^2(-t_0) - \frac{1}{3}mgt_0^3 = 0$$

$$-\cancel{my_0t_0} + mbt_0^3 + \cancel{my_0t_0} - 2mbt_0^3 + \frac{4}{3}mbt_0^3 + \frac{1}{6}mgt_0^3 = 0$$

$$mt_0^3\left(b - 2b + \frac{4}{3}b + \frac{1}{6}g\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{3}b + \frac{1}{6}g\right) = 0 \rightarrow b = -\frac{g}{2}$$

si cambiamos g por $-g$ para cuerpos cayendo $\boxed{b = g/2}$

Ahora bien, $\alpha = \dfrac{y_0 - bt_0^2}{t_0}$ con $t_0 = \sqrt{2y_0/g}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\cancel{y_0} - \cancel{\left(\frac{g}{2}\right)\left(\frac{2y_0}{g}\right)}}{t_0} = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

- La demostración por ec. de Lagrange implica que:

si $\delta\int_0^{t_0} L\,dt = 0 \rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m\ddot{y} + mg = 0 \rightarrow \ddot{y} = -g \\ \text{pero } y = at + bt^2 \rightarrow \ddot{y} = 2b \end{array}\right\} \rightarrow b = -g/2.$$

Cambiando g por $-g \Rightarrow \boxed{b = g/2}$

para cuerpos que caen:

$$\ddot{y} = g \rightarrow \dot{y} = gt + \alpha \rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 + \alpha t + c$$

$y = 0$ en $t = 0 \rightarrow c = 0$

$\dot{y} = 0$ en $t = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

2.11 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \rightarrow Q_j$ la fuerza impulsiva

$$\int_{\Delta t}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)dt - \underbrace{\cancel{\int_{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial q_j}dt}}_{0} = \int_{\Delta t} Q_j\,dt = S_j$$

cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $\partial L/\partial q_j$ es finito y la integral se anula. Recuerde que $\partial L/\partial q_j$ se evalúa para fuerzas no impulsivas.

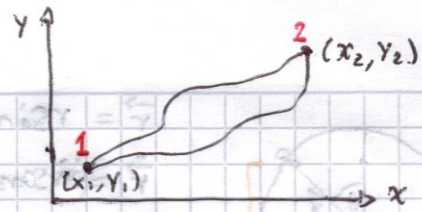
$\Rightarrow \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_f - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_i = S_j$ y si usamos la definición de $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$:

$$\boxed{(p_j)_f - (p_j)_i = S_j}$$

$\rightarrow$ Análoga a la definición de impulso $I = p_f - p_i$.

$\hookrightarrow$ impulso sobre la partícula j.

By: Herminso Villarraga Gómez



2.12 $I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} d\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha_i} d\alpha + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \alpha_i} d\alpha \right) dt$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial \ddot{q}}{\partial \alpha} d\alpha \right) dt$$

$$\int_1^2 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} dt = \int_1^2 \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{u} \underbrace{\frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial t} dt}_{dv} = \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \Big|_1^2}^{\,0} - \int_1^2 \frac{\partial q}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt$$

todas las curvas pasan por 1 y 2, luego no hay variación respecto a α en esos puntos.

$$\int_1^2 \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}}_{u} \underbrace{\frac{\partial \ddot{q}}{\partial \alpha} dt}_{dv} = \cancel{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \alpha} \Big|_1^2}^{\,0} - \int_1^2 \underbrace{\frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \alpha}}_{dv} \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right)}_{u} dt$$

$$= \cancel{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} \Big|_1^2}^{\,0} + \int_1^2 \frac{\partial q}{\partial \alpha} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) dt$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_1^2 \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \underbrace{\frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta q} + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \underbrace{\frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta q} \right) dt$$

$$= \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt = 0$$

por el lema fundamental del cálculo de variaciones $\delta I = 0$ requiere que los coeficientes δq_i se anulen separadamente:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} = 0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

si: $L = -\frac{1}{2} m q \ddot{q} - \frac{k}{2} q^2$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2} m \ddot{q} - k q \right) - 0 - \frac{1}{2} m \ddot{q} = 0 \rightarrow \boxed{m \ddot{q} + k q = 0}$$

Oscilador armónico ✓

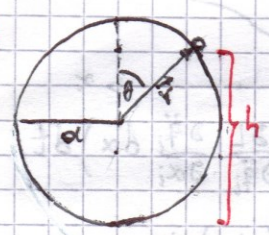
Nótese que el lagrangiano dado se puede escribir como:

$$L = \frac{m \dot{q}^2}{2} - \frac{k q^2}{2} - \frac{m q \ddot{q}}{2} - \frac{m \dot{q}^2}{2} = \frac{m \dot{q}^2}{2} - \frac{k q^2}{2} + \frac{d}{dt} \left(-\frac{m q \dot{q}}{2} \right)$$

$$L = L_{osc} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(-\frac{m q \dot{q}}{2} \right)}_{\text{tal vez represente una restricción.}}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

2.13



$$\vec{r} = r\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\hat{i} + (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\hat{j}$$

$$\dot{\vec{r}}^{\,2} = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mg\overbrace{(a + r\cos\theta)}^{h} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_i \lambda_i a_{ik} \quad \text{donde} \quad \sum_k a_{ik}\dot{q}_k + a_{it} = 0$$

es la relación de ligadura.

La partícula está ligada a mantenerse sobre el aro, de modo que:

$$r = a \rightarrow \dot{r} = 0 \rightarrow \underbrace{1}_{a_{ir}}\dot{r} + \underbrace{0}_{a_{i\theta}}\dot{\theta} = 0 \qquad i = 1 \text{ ec de ligadura.}$$

Para r:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1 \cancel{a_{ir}}^{\,1} \quad \text{pero } r = a \text{ y } \dot{r} = 0$$

$$\Rightarrow \text{para } \hat{r}\ \ m a\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1$$

para θ: $$mr^2\ddot{\theta} - mgr\sin\theta = \lambda_1 \cancel{a_{i\theta}}^{\,0}$$

$$\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta \qquad \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = (g/a)\sin\theta\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -(g/a)\cos\theta + C$$

$$\dot{\theta} = 0 \text{ en } \theta = 0 \rightarrow C = g/a \Rightarrow \dot{\theta}^2 = (2g/a)(1 - \cos\theta)$$

sustituyendo en la ec. para r:

$$-2mg(1 - \cos\theta) + mg\cos\theta = \lambda_1 \rightarrow -2mg + 3mg\cos\theta = \lambda_1$$

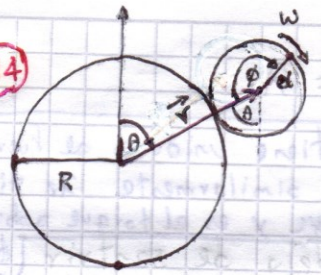
justo cuando la partícula empiece a caer, dejo de sentir la fuerza de restricción $\rightarrow \lambda_1 = 0$ y:

$$-2mg + 3mg\cos\theta_0 = 0 \rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \quad \text{para una altura}$$

$$h_0 = a(1 + \cos\theta_0) = a\left(1 + \frac{2}{3}\right) \rightarrow \boxed{h_0 = \frac{5}{3}a}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

2.14



$$\vec{r}_{cm} = r\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_{cm} = \dot{\vec{r}} = (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\hat{i} + (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\hat{j}$$

$$v_{cm}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

$$L = \frac{1}{2}m v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{aro}\,\omega^2 - mg(R + r\cos\theta)$$

$$\omega = \dot{\phi} + \dot{\theta} \rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}(ma^2)(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}) - mg(R + r\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk} \quad \text{con} \quad \sum_k a_{lk}\dot{q}_k + a_{lt} = 0$$

$k = r, \theta, \phi$. y $l = 1, 2, \ldots, m$ donde m es el # de ec. de ligadura.

Las ec. de ligadura son:

$$\left.\begin{array}{l} r = R + a \\ R\theta = a\phi \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{r} = 0 \\ R\dot{\theta} - a\dot{\phi} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \overbrace{a_{1r}}^{1}\dot{r} + \overbrace{a_{1\theta}}^{0}\dot{\theta} + \overbrace{a_{1\phi}}^{0}\dot{\phi} = 0 \\ \underbrace{a_{2r}}_{0}\dot{r} + \underbrace{a_{2\theta}}_{R}\dot{\theta} + \underbrace{a_{2\phi}}_{-a}\dot{\phi} = 0 \end{array}$$

para r: $\quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1 \underbrace{a_{1r}}_{1} + \lambda_2 \cancel{a_{2r}}^{\,0}$

pero $r = R + a$ y $\ddot{r} = 0 \Rightarrow -m(R+a)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1$ (1)

para θ: $\quad mr^2\ddot{\theta} + ma^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - mgr\sin\theta = \lambda_1 \cancel{a_{1\theta}}^{\,0} + \lambda_2 \underbrace{a_{2\theta}}_{R}$

$r = R + a \rightarrow m(R+a)^2\ddot{\theta} + ma^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - mg(R+a)\sin\theta = \lambda_2 R$ (2)

para ϕ: $\quad ma^{\cancel{2}}(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) = -\cancel{a}\lambda_2$ (3)

$R\theta = a\phi \rightarrow \ddot{\phi} = (R/a)\ddot{\theta}$ luego la ec. para θ queda:

$$m(R+a)^2\ddot{\theta} + ma(R+a)\ddot{\theta} - mg(R+a)\sin\theta = \{-m(R+a)\ddot{\theta}\}R$$

donde hemos usado el valor de λ_2 de la ec (3). Agrupando:

$$\Rightarrow 2\cancel{m}(R+a)^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = \cancel{m}g\,\cancel{(R+a)}\sin\theta$$

multiplicando por $\dot{\theta}dt$ e integrando:

$$2(R+a)\int \ddot{\theta}\dot{\theta}dt = g\int \sin\theta\,\dot{\theta}\,dt$$

$$\cancel{2}(R+a)\frac{\dot{\theta}^2}{\cancel{2}} = -g\cos\theta + C$$

$\dot{\theta} = 0$ cuando $\theta = 0 \rightarrow C = g \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{(R+a)}(1 - \cos\theta)$

Sustituyendo esto en (1):

$$-m(\cancel{R+a})\left\{\frac{g}{(\cancel{R+a})}(1-\cos\theta)\right\} + mg\cos\theta = \lambda_1$$

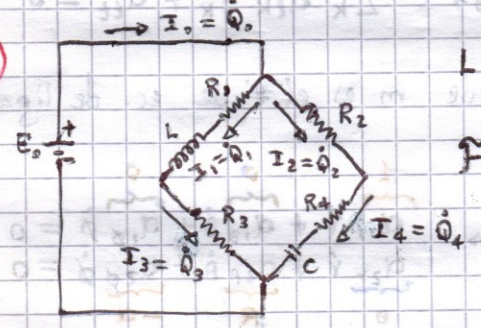
$$-mg(1-2\cos\theta) = \lambda_1$$

Note que λ_1 tiene unidades de fuerza y es la Normal, similarmente λ_2 tiene unidades de torque y es el torque sobre el pto de apoyo

justo cuando el aro empiece a caer, deja de sentir la fuerza normal, es decir la fuerza de restricción $Q'_r = \lambda_1 a_{1r} + \lambda_2 a_{2r} = \lambda_1$ se anula:

$$-mg(1-2\cos\theta_0) = 0 \longrightarrow \cos\theta_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{\theta_0 = 60^\circ}$$

2.15



$$L = \frac{1}{2}L\dot{Q}_1^2 - \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C} + E_0 Q_0$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_j R_j \dot{Q}_j^2 = \frac{1}{2}R_1\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}R_2\dot{Q}_2^2 + \frac{1}{2}R_3\dot{Q}_3^2 + \frac{1}{2}R_4\dot{Q}_4^2$$

pero $\left.\begin{matrix} I_3 = I_1 \\ I_4 = I_2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} \dot{Q}_3 = \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_4 = \dot{Q}_2 \end{matrix}\right\}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\dot{Q}_1^2 - \frac{1}{2C}\dot{Q}_2^2 + E Q_0 \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}(R_1+R_3)\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}(R_2+R_4)\dot{Q}_2^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{Q}_k}}_{\text{disipación}} = \sum_l \lambda_l a_{lk} \qquad \sum_k a_{lk}\dot{Q}_k + a_{lt} = 0$$

Por leyes de Kirchoff: $\dot{Q}_0 - \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = 0 \longrightarrow a_{10} = 1$, $a_{11} = a_{12} = -1$

Ec. de Lagrange:

$$L\ddot{Q}_1 + (R_1+R_3)\dot{Q}_1 = \lambda_1 a_{11} = -\lambda_1 \qquad (1)$$

$$Q_2/C + (R_2+R_4)\dot{Q}_2 = \lambda_1 a_{12} = -\lambda_1 \qquad (2)$$

$$-E_0 = \lambda_1 a_{10} = \lambda_1 \qquad (3)$$

igualando las 2 primeras para eliminar λ_1, se obtiene:

$$L\ddot{Q}_1 + (R_1+R_2)\dot{Q}_1 - \frac{Q_2}{C} - (R_2+R_4)\dot{Q}_2 = 0$$

ó $\boxed{L\frac{dI_1}{dt} + (R_1+R_2)I_1 - \frac{Q_2}{C} - (R_2+R_4)I_2 = 0}$ $\longrightarrow$ Ec. de malla interior Σ Voltajes $= 0$

similarmente sustituyendo λ_1 de la (3) en la (2):

$$Q_2/C + (R_2+R_4)\dot{Q}_2 = E_0$$

ó $\boxed{\frac{Q_2}{C} + (R_2+R_4)I_2 = E_0}$ $\longrightarrow$ Ec. de la malla exterior.

By: Herminso Villarraga Gómez

2.16 $L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$ $\longrightarrow$ La parte entre paréntesis es el lagrangiano de un oscilador armónico, y el factor $e^{\gamma t}$ debe representar una amortiguación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m e^{\gamma t}\dot{q}\right) + k e^{\gamma t} q = 0$$

$$m\left(e^{\gamma t}\ddot{q} + \gamma e^{\gamma t}\dot{q}\right) + k e^{\gamma t} q = 0 \longrightarrow \boxed{\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0}$$

Ec de un osc armónico Amortigu

- Si $\sqrt{k/m} > \gamma/2 \longrightarrow q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\cos\left(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)t + B\sin\left(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)t\right]$

Usando $q(0) = q_0$ y $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ para determinar las constantes A y B, obtenemos:

$$q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{q_0\cos\left(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)t + \left(\frac{\dot{q}_0 + \frac{\gamma}{2}q_0}{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}}\right)\sin\left(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)t\right\}$$

osc amortiguado.

- Si $\sqrt{k/m} = \gamma/2 \longrightarrow q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[C_1 + C_2 t\right]$

de nuevo usando $q(0) = q_0$ y $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ para obtener C_1 y C_2.

$$q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[q_0 + \left(\dot{q}_0 + \frac{\gamma}{2}q_0\right)t\right] \longrightarrow$$ Osc armónico críticamente amortiguado.

- Si $\sqrt{k/m} < \gamma/2 \longrightarrow q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A'\cosh\left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}\right)t + B'\sinh\left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}\right)t\right]$

usando las condiciones iniciales $q(0) = q_0$ y $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$

$$q(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{q_0\cosh\left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}\right)t + \left(\frac{\dot{q}_0 + \frac{\gamma}{2}q_0}{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}}\right)\sinh\left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}\right)t\right\}$$

Para hallar las constantes de movimiento examinemos $P = \partial L/\partial\dot{q}$ y E, es decir la cantidad de mov canónico conjugado y la energía.

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}e^{\gamma t} \longrightarrow \frac{dP}{dt} = m\ddot{q}e^{\gamma t} + m\dot{q}\gamma \neq 0$$

$$E = \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2\right)e^{\gamma t} \longrightarrow \frac{dE}{dt} = \gamma\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2\right)e^{\gamma t} \neq 0$$

$\Rightarrow$ No hay ctes de movimiento, no se conserva ni P, ni E.

si $s = e^{\gamma t} q \rightarrow q = s e^{-\gamma t}$ y $\dot{q} = \dot{s} e^{-\gamma t} - \gamma s e^{-\gamma t}$

$$\Rightarrow L = e^{\gamma t}\left\{\frac{1}{2} m e^{-2\gamma t}(\dot{s}^2 + \gamma^2 s^2 - 2\gamma s \dot{s}) - \frac{1}{2} k s^2 e^{-2\gamma t}\right\}$$

$$= e^{-\gamma t}\left\{\frac{1}{2} m \dot{s}^2 - m\gamma s \dot{s} + \frac{1}{2}(m\gamma^2 - k) s^2\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \longrightarrow \text{Ec de Lagrange}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\gamma t}(m\dot{s} - m\gamma s)\right] - e^{-\gamma t}\left[-m\gamma \dot{s} + (m\gamma^2 - k)s\right] = 0$$

$$e^{-\gamma t}(m\ddot{s} - \cancel{m\gamma \dot{s}}) - \gamma e^{-\gamma t}(m\dot{s} - \cancel{m\gamma s}) + \cancel{e^{-\gamma t}(m\gamma \dot{s})} - \cancel{e^{-\gamma t}(m\gamma^2 - ks)} = 0$$

$$e^{-\gamma t}(m\ddot{s} - \gamma m \dot{s} + ks) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{s} - \gamma \dot{s} + \frac{k}{m} s = 0} \longrightarrow \text{Osc armónico con amortiguación negativa}$$

Esta ec. no dice nada aún alrededor de las ctes de movimiento, para ello será mejor hacer la transformación:

$$s = e^{(\gamma/2)t} \rightarrow q = s e^{-\frac{\gamma}{2}t} \text{ y } \dot{q} = -\frac{\gamma}{2} s e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \dot{s} e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\Rightarrow L = \cancel{e^{\gamma t}}\left\{\frac{1}{2} m \cancel{e^{-\gamma t}}\left(\dot{s}^2 + \frac{\gamma^2 s^2}{4} - \gamma s \dot{s}\right) - \frac{1}{2} k s^2 \cancel{e^{-\gamma t}}\right\}$$

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + \frac{\gamma^2 s^2}{4} - \frac{\gamma}{2} s \dot{s}\right) - \frac{1}{2} k s^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{s} - \frac{1}{4}\gamma m s\right] - m\frac{\gamma^2}{4} s + \frac{1}{4} m \gamma \dot{s} + ks = 0 \longrightarrow \text{Ec de Lagrange}$$

$$m\ddot{s} - \cancel{\frac{1}{4}\gamma m \dot{s}} - m\frac{\gamma^2}{4} s + \cancel{\frac{1}{4} m \gamma \dot{s}} + ks = 0$$

ó $$\boxed{\ddot{s} + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right] s = 0} \longrightarrow \text{Osc armónico para } s \text{ con frecuencia } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}}$$

para un osc armónico simple la energía se conserva, entonces bajo la transformación de punto dado la energía se conserva si se define como:

$E = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} k s^2$ como puede comprobarse de la solución $s = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$E = \text{cte.}$

By: Herminso Villarraga Gómez

2.17 $L = T - V = \sum_i \left(f_i \dot{q}_i^2 - V_i \right) \qquad f_i = f_i(q_i), \quad V_i = V_i(q_i)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow \text{Ec. de Lagrange para } q_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(2 f_j \dot{q}_j\right) - \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_j}\dot{q}_j^2 - \frac{\partial V_j}{\partial q_j}\right) = 0 \longrightarrow$$

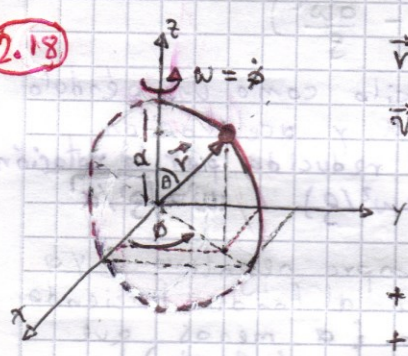
No aparece la sumatoria porque solo sobreviven los términos que dependen de q_j, pues estamos derivando respecto a q_j

$$2 f_j \ddot{q}_j + 2\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f_j}{\partial t}\right)\dot{q}_j - \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_j}\dot{q}_j^2 - \frac{\partial V_j}{\partial q_j}\right) = 0$$

$$2 f_j \ddot{q}_j + \frac{\partial f_j}{\partial q_j}\dot{q}_j^2 + 2\frac{\partial f_j}{\partial t}\dot{q}_j + \frac{\partial V_j}{\partial q_j} = 0$$

?

2.18



$$\vec{r} = a \sin\theta \cos\phi\, \hat{i} + a \sin\theta \sin\phi\, \hat{j} + a \cos\theta\, \hat{k}$$

$$\vec{v} = a\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)\hat{i} + a\left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\right)\hat{j} - a\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{k}$$

$$v^2 = a^2\left\{\dot{\theta}^2\cos^2\theta\cos^2\phi + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\sin^2\phi - \cancel{2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi} + \dot{\theta}^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \cancel{2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi} + \dot{\theta}^2\sin^2\theta\right\}$$

$$v^2 = a^2\left\{\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right\} = a^2\left\{\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right\}$$

$$L = \frac{1}{2} m a^2\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right) - mga\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \cancel{m}a^{\cancel{2}}\ddot{\theta} - \cancel{m}a^{\cancel{2}}\omega^2\sin\theta\cos\theta - \cancel{m}g\cancel{a}\sin\theta = 0$$

$$a\ddot{\theta} = +g\sin\theta\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\cos\theta\right)$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \neq 0 \longrightarrow$ el momento canónico conjugado no se conserva.

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \longrightarrow \dot{h}_\theta = 0 \longrightarrow$ la integral de Jacobi h se conserva.

$$h_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{1}{2} m a \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2\theta - mga\cos\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2 h_\theta}{m a^2} + \omega^2\sin^2\theta + \frac{2g}{a}\cos\theta$$

Note que: $E = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2 w^2 \sin^2\theta - mga\cos\theta$

$$h_\theta = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m a^2 w^2 \sin^2\theta - mga\cos\theta$$

$$h_\theta = E - m a^2 w^2 \sin^2\theta$$ → esta cantidad se conserva.

Para que la masa permanezca estacionaria sobre el aro, necesitamos $\theta = \theta_0 = cte$ y $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ lo cual implica:

$$+g\sin\theta_0\left(1 + \frac{aw^2}{g}\cos\theta_0\right) = 0 \rightarrow \sin\theta_0 = 0 \text{ ó } 1 = \frac{aw^2}{g}\cos\theta_0$$

$\sin\theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = 0, \pi$ → la masa esta en la cúspide o o en el fondo del aro.

$1 = \frac{aw^2}{g}\cos\theta_0 \rightarrow \cos\theta_0 = \frac{g}{aw^2} < 1$ → lo cual es posible solo para velocidades grandes de w.

$\Rightarrow \boxed{w^2 > g/a = w_0}$ → **Condición** para que se mantenga estacionario en algún punto diferente a la cúspide (o el fondo).

Si la masa empieza cerca de la cúspide $\theta \ll 1$ y:

$$a\ddot{\theta} = -g\sin\theta\left(1 - \frac{aw^2}{g}\cos\theta\right) \approx -g\theta\left(1 - \frac{aw^2}{g}\right)$$

ó $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\left(1 - \frac{aw^2}{g}\right)\theta = 0}$ → la masa oscila como un péndulo de longitud a y aceleracion gravitacional reducida por la rotación $g' = g(1 - aw^2/g)$ $\quad w' = \sqrt{g'/a}$

En general si $aw^2/g < 1 \rightarrow \ddot{\theta}$ es siempre negativo (ya que $\sin\theta > 0$) y ello conducirá la masa al fondo haciendo que oscile alrededor del punto más bajo. (a menos que empiece con velocidad cero, cuando este en el fondo)

Si la velocidad angular es mayor que $w_0^2 = g/a$ hay un ángulo α dado por $\cos\alpha = g/aw^2$ donde la aceleración $\ddot{\theta}$ es cero. Si la masa empieza cerca a ese punto podemos definir $\theta' = \theta - \alpha$ el cual será obviamente mucho menor que 1.

$$\Rightarrow \ddot{\theta}' = \ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\sin\theta\left(1 - \frac{w^2 a}{g}\cos\theta\right) \qquad \theta' = \theta - \alpha \rightarrow \ddot{\theta}' = \ddot{\theta}$$

$$= -\frac{g}{a}\sin(\theta' + \alpha)\left(1 - \frac{w^2 a}{g}\cos(\theta' + \alpha)\right)$$

$$= -\frac{g}{a}(\sin\theta'\cos\alpha + \cos\theta'\sin\alpha)\left(1 - \frac{w^2 a}{g}(\cos\theta'\cos\alpha - \sin\theta'\sin\alpha)\right)$$

$$\approx -\frac{g}{a}\sin\alpha\left(1 - \cancel{\frac{w^2 a}{g}\cos\alpha\cos\theta'} + \frac{w^2 a}{g}\sin\alpha\sin\theta'\right)$$

g/aw^2

≈ 0 si $\cos\theta' \approx 1$

$$\boxed{\ddot{\theta}' \approx -(w\sin\alpha)^2\theta'}$$

↳ oscilador armónico a frecuencia menor que la frecuencia angular del aro.

→ para frecuencias de rotación del aro muy altas, $\omega^2 \gg a/g$
$\cos\alpha = \frac{g}{a\omega^2} \approx 0 \rightarrow \alpha \sim \pi/2 \Rightarrow$ la frecuencia de vibración alrededor de $\theta = \alpha$ es de $\omega \sin\alpha \approx \omega$ es decir, la misma frecencia de rotación del aro. y ocurre cuando la masa esta en el centro del aro a $\theta = \alpha = \pi/2$.

2.19 Si la distribución de masa tiene una simetría particular, esa simetría la tendrá el potencial asociado con la fuerza y también el lagrangiano. Si las simetrías son asociadas con las cantidades conservadas a través del teorema de Noether's podemos encontrar que:

Simetrías translacionales son asociadas con la Conservación de las componentes de momento lineal

Simetrías rotacionales → Con Conservación de la componentes del momento angular.

Independencia del tiempo → Con conservación de Energía.

↳ Así como el potencial es fijo en todos los casos propuestos en el problema (de a) a g)) entonces la energía se conserva en todos los sistemas.

a) La masa está uniformemente distribuida en el plano $z = 0 \Rightarrow$ las fuerzas no dependen de las coordenadas x y y, y así

$p_x, p_y \rightarrow$ Se conservan

también la fuerza es invariante bajo rotaciones alrededor de z, así:

$L_z \rightarrow$ se conserva.

b) La masa está uniformemente distribuida en el plano $z = 0$, $y > 0 \Rightarrow$ existe solo simetría translacional con respecto al eje x y no tiene simetría rotacional; entonces:

$p_x \rightarrow$ se conserva.

c) La masa está distribuida en un cilindro circular de longitud infinita, con su eje a lo largo de z: La configuración tiene simetría translacional a lo largo de z y rotacional alrededor de z, entonces:

p_z y L_z se conservan

d) La masa está uniformemente distribuida en un cilindro circular de longitud finita con eje a lo largo de z; entonces no existe simetría translacional en z pero si tiene simetría rotacional alrededor de z, entonces: L_z se conserva.

e) La masa está uniformemente distribuida en un cilindro elíptico recto (de secc. transv elíptico) y longitud infinita a lo largo de z (eje en z) $\Rightarrow$ no hay simetría rotacional pero sí translacional:

$p_z \longrightarrow$ se conserva.

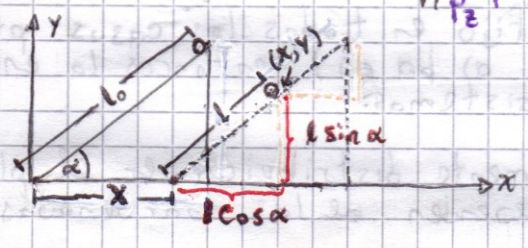
f) La masa es uniformemente distribuida en un "dumbell" cuyo eje se orienta a lo largo de z $\Rightarrow$ No hay simetría translacional pero existe simetría rotacional alrededor de z, así

$L_z \longrightarrow$ se conserva.

g) La masa es de la forma de un alambre con la geometría de un solenoide infinito, con eje a lo largo de z. No hay simetría pura rotacional ni translacional, pero existe una simetría combinada de translación en z una distancia h (distancia entre espiras o enrollamientos) y una rotación alrededor de z de 2π. Así p_z y L_z no se conservan individualmente, pero

$h p_z + L_z \longrightarrow$ se conserva.

2.20



$x = X + l\cos\alpha$ $\quad$ l depende de t

$y = l\sin\alpha$ $\quad$ $l = l(t)$

$$(x-X)\sin\alpha = l(t)\cos\alpha\sin\alpha$$
$$y\cos\alpha = \cancel{l(t)\sin\alpha\cos\alpha}$$

ligadura $\longleftarrow$ $(x-X)\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_l \lambda_l a_{lk} \quad \text{donde} \quad \sum_k a_{lk}\dot q_k + a_{lt} = 0$$ relaciona las ligaduras.

La partícula está ligada a mantenerse sobre la cuña mediante la relación $\longrightarrow$ $(x-X)\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$, $\quad (\dot x - \dot X)\sin\alpha - \dot y\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow$ el nº de ec. de ligadura es $l = 1$ $\longrightarrow$ $a_{1x} = \sin\alpha$ $\quad a_{1y} = -\cos\alpha$

$a_{1X} = -\sin\alpha$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{1}{2}M\dot X^2 - mgy$$

para x: $m\ddot x = \lambda_1 a_{1x}$
X: $M\ddot X = \lambda_1 a_{1X}$
para y: $m\ddot y + mg = \lambda_1 a_{1y}$

$\Rightarrow$ $m\ddot x = \lambda\sin\alpha$, $M\ddot X = -\lambda\sin\alpha$ $\Big\}$ $m\ddot x + M\ddot X = 0$ (1)

$m\ddot y + mg = -\lambda\cos\alpha$ (2)

de (1), $\ddot X = -\frac{m}{M}\ddot x \longrightarrow X + \cancelto{0}{X_0 t} + \cancelto{0}{X_0} = -\frac{m}{M}(x + \cancelto{0}{x_0 t} + x_0)$

de la ec. de ligadura: $y = (x - X)\tan\alpha = [x(1 + m/M) + (m/M)x_0]\tan\alpha$

$\Rightarrow$ $\ddot y = \ddot x(1 + m/M)\tan\alpha$ (3)

de (2): $\lambda = -\frac{m}{\cos\alpha}(\ddot{y}+g)$ con esto en la ec para x:

$$m\ddot{x} = \lambda \sin\alpha = -m\tan\alpha(\ddot{y}+g)$$

$$\cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}\tan\alpha\left(\ddot{x}(1+m/M)\tan\alpha + g\right)$$

$$\ddot{x}\left(1+(1+m/M)\tan^2\alpha\right) = -g\tan\alpha$$

$$\ddot{x}\left(\frac{\cos^2\alpha + (1+m/M)\sin^2\alpha}{\cos^{\cancel{2}}\alpha}\right) = -g\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} \qquad \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -g\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha} = -a_x \longrightarrow$$ aceleracion cte en x

$$\left(x = x_0 + \cancel{v_{0x}}^{\,0}t - \tfrac{1}{2}a_x t^2\right)$$

$$x = (l_0\cos\alpha) - \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

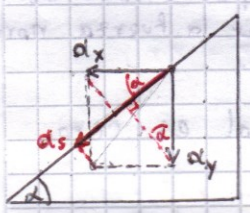
Con esto: $\ddot{y} = \ddot{x}(1+m/M)\tan\alpha$

$$= \left[-g\frac{\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}{1+(m/M)\sin^2\alpha}\right](1+m/M)\left(\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\right)$$

$$\ddot{y} = -g\frac{(1+m/M)\sin^2\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha} = -a_y \longrightarrow$$ aceleración cte en y

$$\left(y = y_0 + \cancel{v_{0y}}^{\,0}t - \tfrac{1}{2}a_y t^2\right)$$

$$y = (l_0\sin\alpha) - \tfrac{1}{2}a_y t^2$$



$$a_s = -a_x\cos\alpha - a_y\sin\alpha$$

$$= -g\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}\cos\alpha - g\frac{(1+m/M)\sin^2\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}\sin\alpha$$

$$= -g\frac{\sin\alpha\left[\overbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}^{1}+(m/M)\sin^2\alpha\right]}{1+(m/M)\sin^2\alpha}$$

$$a_s = -g\sin\alpha \longrightarrow$$ aceleración tangencial a la cuña

$$\left(l = l_0 + \cancel{v_0}^{\,0}t + \tfrac{1}{2}a_s t^2\right)$$

$$l = l_0 - \tfrac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2$$

por otro lado:

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M}\ddot{x} = \frac{m}{M}a_x = \frac{m}{M}g\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}$$

$$= a_M \longrightarrow$$ aceleración de la masa M

$$\left(X = \cancel{X_0}^{\,0} + \cancel{V_{0x}}^{\,0}t + \tfrac{1}{2}a_M t^2\right)$$

de la ec (1) para $\ddot{x}$, $\lambda = \frac{m\ddot{x}}{\sin\alpha}$

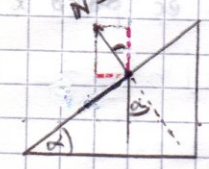
$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{m}{\cancel{\sin\alpha}}\left[-g\frac{\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}\right]} \longrightarrow$$ $-\lambda$ es la fuerza de restricción, en este caso la fuerza normal

- Si $\alpha = 0 \longrightarrow \lambda = -mg$
- Si $\alpha = \pi/2 \longrightarrow \lambda = 0$

- Si $M > m \longrightarrow \ddot{x} \approx 0$ y $\lambda \approx -mg\cos\alpha$

By: Herminso Villarraga Gómez

$\vec{N} = N(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ con $N = |\lambda| = -\lambda$



$$\vec{N} = \lambda(\sin\alpha, -\cos\alpha) \qquad P_m = \frac{dW_m}{dt} = \vec{N}\cdot\vec{v}_m$$

$$\Rightarrow \frac{dW_m}{dt} = \lambda(\dot{x}\sin\alpha - \dot{y}\cos\alpha) \qquad \dot{x} = -a_x t + \cancel{v_{0x}}^{\,0} \quad \dot{y} = -a_y t + \cancel{v_{0y}}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_m}{dt} = \lambda\left\{\left(-g\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}\right)t\sin\alpha - \left(-g\frac{(1+m/M)\sin^2\alpha}{1+m/M\sin^2\alpha}\right)t\cos\alpha\right\}$$

$$= -\lambda g t\left\{\frac{\cancel{\sin^2\alpha\cos\alpha} - \cancel{(1+m/M)}\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}\right\}$$

$$\boxed{\frac{dW_m}{dt} = \lambda g t\,\frac{(m/M)\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}}$$ → trabajo por unidad de tiempo hecho por la fuerza normal sobre m.

$$P_M = \frac{dW_M}{dt} = -\vec{N}\cdot\vec{v}_M = \lambda(\dot{x}\sin\alpha - \cancel{\dot{y}}^{\,0}\cos\alpha) \qquad \dot{x} = a_M t + \cancel{v_0}^{\,0}$$

$$= -\lambda\left(\frac{m}{M}g\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}\right)t\sin\alpha$$

$$\boxed{\frac{dW_M}{dt} = -\lambda g t\,\frac{(m/M)\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}}$$ → trabajo por unidad de tiempo hecho por la fuerza normal sobre M.

El trabajo total hecho por la fuerza normal es cero. las fuerzas de reestricción no hacen trabajo.

Para encontrar las cantidades que se conservan, debemos expresar el Lagrangiano en términos de coordenadas independientes:

$$(x - X)\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \longrightarrow X = \frac{-y}{\tan\alpha} + x$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mgy$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\left(\dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tan\alpha}\right)^2 + mgy$$

La coordenada x es cíclica y así su cantidad de movimiento canonica conjugada se conserva: P_x → se conserva.

$$\Rightarrow P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} - M\frac{\dot{y}}{\tan\alpha} \qquad \dot{x} = -a_x t,\ \dot{y} = -a_y t$$

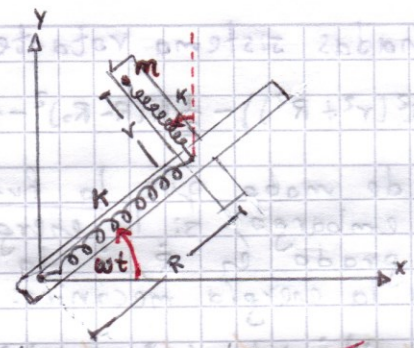
$$= (m+M)\left(-g\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+(m/M)\sin^2\alpha}t\right) - M\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}\left(-g\frac{(1+m/M)\cancel{\sin^2\alpha}}{1+(m/M)\sin^2\alpha}t\right)$$

$P_x = 0$ para todo t.

L no depende explícitamente del tiempo, entonces la integral de Jacobi se conserva → h → se conserva.
Como las ec. de transformación no contienen explícitamente el tiempo y además el potencial no depende de las velocidades generalizadas ⇒ $h = T + V = cte$ → Conservación de la Energía.

By: Herminso Villarraga Gómez

2.21



$$x = R\cos wt - r\sin wt$$
$$y = R\sin wt + r\cos wt$$

$$x\cos wt = R\cos^2 wt - \cancel{r\sin wt\cos wt}$$
$$y\sin wt = R\sin^2 wt + \cancel{r\cos wt\sin wt}$$
$$x\cos wt - y\sin wt = R$$

$$-\{x\sin wt = \cancel{R\cos wt\sin wt} - r\sin^2 wt\}$$
$$y\cos wt = \cancel{R\sin wt\cos wt} + r\cos^2 wt$$
$$-x\sin wt + y\cos wt = r$$

$$\Rightarrow \quad R = x\cos wt - y\sin wt$$
$$r = y\cos wt - x\sin wt$$

$(x,y) \rightarrow$ Coordenadas naturales en el sistema Lab

$(R,r) \rightarrow$ coordenadas naturales del sistema rotante.

$$\dot{x} = \dot{R}\cos wt - Rw\sin wt - \dot{r}\sin wt - rw\cos wt$$
$$= (\dot{R} - rw)\cos wt - (\dot{r} + Rw)\sin wt$$

$$\dot{y} = \dot{R}\sin wt + Rw\cos wt + \dot{r}\cos wt - rw\sin wt$$
$$= (\dot{R} - rw)\sin wt + (\dot{r} + Rw)\cos wt$$

$$\dot{x}^2 = (\dot{R} - rw)^2\cos^2 wt + (\dot{r} + Rw)^2\sin^2 wt - \cancel{(\dot{R} - rw)(\dot{r} + Rw)\cos wt\sin wt}$$
$$\dot{y}^2 = (\dot{R} - rw)^2\sin^2 wt + (\dot{r} + Rw)^2\cos^2 wt + \cancel{(\dot{R} - rw)(\dot{r} + Rw)\sin wt\cos wt}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{R} - rw)^2 + (\dot{r} + Rw)^2$$
$$= \dot{R}^2 + r^2w^2 - 2wr\dot{R} + \dot{r}^2 + R^2w^2 + 2wR\dot{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2 + \dot{r}^2 + 2w(R\dot{r} - r\dot{R}) + w^2(r^2 + R^2)\right)$$

$$V = \frac{1}{2}K(R - R_0)^2 + \frac{1}{2}Kr^2 = \frac{1}{2}K(x\cos wt + y\sin wt - R_0)^2 + \frac{1}{2}K(-x\sin wt + y\cos wt)^2$$

$$E = T + V$$

En términos de x, y (Cordenadas LAB):

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}K(x\cos wt + y\sin wt - R_0)^2 - \frac{1}{2}K(-x\sin wt + y\cos wt)^2$$

Como L depende explícitamente de t, la función de energía h no se conserva. Como el potencial no depende de las velocidades generalizadas $\dot{x}, \dot{y}$ y la energía cinética es homogenea de 2º grado en $\dot{x}, \dot{y}$ sabemos que la función de energía h es la energía mecánica y **no se conserva.**

$$h = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - L$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}K(x\cos wt + y\sin wt - R_0)^2 + \frac{1}{2}K(-x\sin wt + y\cos wt)^2$$
$$h = T + V = E$$

En términos de R, r (Coordenadas sistema rotante)

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{R}^2 + \dot{r}^2 + 2\omega(R\dot{r} - \dot{R}r) + \omega^2(r^2 + R^2) \right) - \frac{1}{2} K (R - R_0)^2 - \frac{1}{2} K r^2$$

es independiente del tiempo, de modo que la función de energía se conserva. Sin embargo, si la energía cinética no es homogénea de 2º grado en $\dot{R}, \dot{r}$ la función de energía no es equivalente a la energía mecánica:

$$h = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \cancel{\frac{1}{2}} m (\cancel{2}\dot{R} - \cancel{2}\omega r)\dot{R} + \cancel{\frac{1}{2}} m (\cancel{2}\dot{r} + \cancel{2}\omega R)\dot{r} - L$$

$$= m\dot{R}^2 - m\omega r \dot{R} + m\dot{r}^2 + m\omega R\dot{r} - L$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{R}^2 + \dot{r}^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (r^2 + R^2) + \underbrace{\frac{1}{2} K (R - R_0)^2 + \frac{1}{2} K r^2}$$

$$= T - m\omega(R\dot{r} - \dot{R}r) - m\omega^2(r^2 + R^2) + V$$

$$h = E - m\omega(R\dot{r} - \dot{R}r) - m\omega^2(R^2 + r^2)$$ → Es equivalente a E cuando $\omega = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(h + m\omega(R\dot{r} - \dot{R}r) + m\omega^2(R^2 + r^2) \right)$$

$$= \cancel{\frac{dh}{dt}}^{\,0} + m\omega(\cancel{\dot{R}\dot{r}} + R\ddot{r} - \ddot{R}r - \cancel{\dot{R}\dot{r}}) + 2m\omega^2(R\dot{R} + r\dot{r})$$

h se conserva.

Por otro lado, el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{R}^2 + \dot{r}^2) \underbrace{- \frac{1}{2} K (R - R_0)^2 - \frac{1}{2} K r^2} + \underbrace{m\omega(R\dot{r} - \dot{R}r) + \frac{1}{2} m\omega^2 (r^2 + R^2)}$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{R}^2 + \dot{r}^2)} + V - U(r, R; \dot{r}, \dot{R})$$

Energía cinética en el sistema rotante.

→ "potencial extra" debido a la rotación del sistema

→ las fuerzas derivadas de este potencial son las fuerzas centrífugas y ellas no son conservativas.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

para r: $m\ddot{r} + m\omega\dot{R} + Kr - m\omega^2 r = 0$

$m\ddot{r} = -m\omega\dot{R} - Kr + m\omega^2 r$

para R: $m\ddot{R} - m\omega\dot{r} + K(R - R_0) - m\omega^2 R = 0$

$m\ddot{R} = m\omega\dot{r} - K(R - R_0) + m\omega^2 R$

En el punto de equilibrio, $\dot{r} = \ddot{r} = \dot{R} = \ddot{R} = 0$ → $0 = -K(R - R_0) + m\omega^2 R$

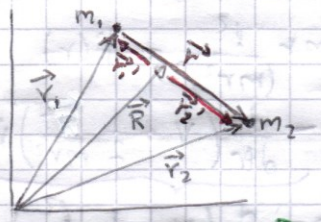
→ $(K - m\omega^2) R_e = K R_0$ → $R_e = R_0 / (1 - m\omega^2/K)$ → la posición de equilibrio para el resorte de cte K no es R_0.

Asumiendo pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio y definiendo:

$$\eta = R - R_0 / (1 - m\omega^2/K)$$

By: Herminso Villarraga Gómez

Problemas de Fuerzas Centrales — Cap 3 - Goldstein



$$T = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}_{CM}^{\,2}}_{\text{cinética de translación del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}}_{\text{cinética de rotación alrededor del CM.}}$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^{\,2}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_1' &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\\ \vec{r}_2' &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2\cancel{(m_2+m_1)}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} \quad \text{con} \quad \boxed{\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{R}_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(\vec{r},\dot{\vec{r}},\ldots)}$$

Las 3 coordenadas de $\vec{R}_{CM}$ son cíclicas $\rightarrow$ $\vec{P}_{CM} = cte$ $\rightarrow$ CM en reposo ó a velocidad cte.

Ecuaciones de Movimiento:

$V = V(r)$ $\Rightarrow$ el sistema tiene simetría esférica ya que V depende solo de r $\Rightarrow$ $\vec{L}$ se conserva

$\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = cte}$ $\rightarrow$ $\vec{r}$ es siempre perpendicular a $\vec{L}$, el cual tiene siempre una dirección fija en el espacio

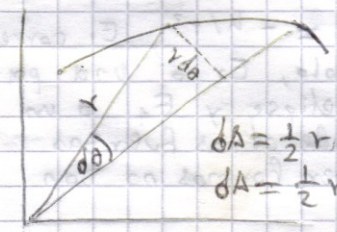
$\Rightarrow$ El movimiento bajo fuerza central está limitado a un plano.

$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)}$ $\rightarrow$ problema de un solo cuerpo sujeto a un potencial central.

θ es cíclica $\rightarrow$ $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ se conserva

$\Rightarrow$ $\boxed{mr^2\dot{\theta} = l = cte}$ $\rightarrow$ conservación de p_θ, momento cinético conjugado de θ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = cte \rightarrow \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = cte$$



$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta)$$
$$dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = cte} \rightarrow 2^{a}\text{ ley de Kepler}$$

↳ Conservación de la velocidad areolar

↳ Esta es una propiedad del movimiento debido a una fuerza central no solo aplicable a $f \sim 1/r^2$

la otra ec. de Lagrange, esta vez para r es:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial r}}_{-f(r)} = 0 \longrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r)$$

$$m\ddot{r} - mr\frac{l^2}{(mr^2)^2} = f(r)$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right) \longrightarrow \underbrace{m\dot{r}\ddot{r}} = \underbrace{-\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)\dot{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}} + V\right) = 0 \qquad l = (mr^2\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V = E = cte}$$

Conservación de Energía.

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)} \longrightarrow t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

Problema unidimensional Equivalente:

Del apartado anterior la ec. de movimiento para r es de la forma

$$m\ddot{r} = f(r) + mr\dot{\theta}^2 \qquad \text{con } \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3} \qquad \text{donde } f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$V(r)$ el potencial central

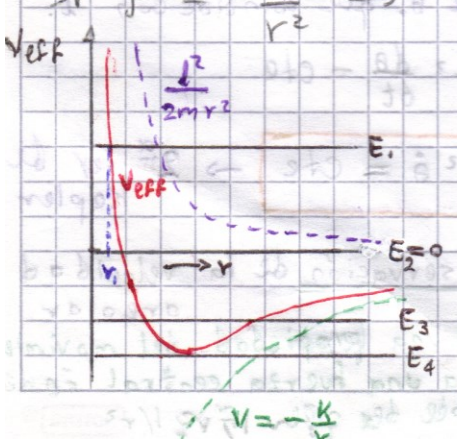
el último término puede pensarse como una fuerza f' derivable de un potencial V':

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} \Rightarrow V' = \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{eff} = V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}} \quad \text{de modo que} \quad m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = F_{eff}$$

$$\text{Si } f = -\frac{K}{r^2} \longrightarrow V = -\frac{K}{r} \longrightarrow V_{eff} = -\frac{K}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}}$$



En el caso de $f = -K/r^2$, E_1 corresponde a una hipérbola, E_2 a una parábola, E_3 a una elipse y E_4 a un círculo. En el caso de otras fuerzas las orbitas pueden tener formas no tan sencillas:

By: Herminso Villarraga Gómez

El problema de Kepler ($f \sim 1/r^2$)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) \quad ; \quad \text{si} \quad f = -\frac{k}{r^2} = -ku^2 \quad y \quad V = -\frac{k}{r} = -ku$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{l^2}, \quad \text{sea} \quad y = u - \frac{mk}{l^2} \rightarrow \frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$$

$$\rightarrow y = \overset{1/r}{u} - \frac{mk}{l^2} = B\cos(\theta - \theta_0) \rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right)}$$

No necesariamente es el angulo inicial

→ Ec. gral de cónica con el origen en un foco.

por otro lado:

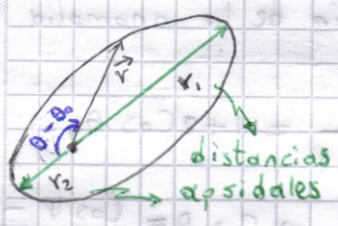
$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{l^2}(E + ku) - u^2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\cos^{-1}\left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right)$$

$$\rightarrow \theta = \theta_0 - \cos^{-1}\left(-\frac{\frac{2mk}{l^2} - 2u}{\sqrt{\left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2\left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right)}}\right) = \theta_0 - \cos^{-1}\left(\frac{\frac{l^2u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{1/r}{\frac{l^2u}{mk}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} = \cos(\theta - \theta_0) \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \rightarrow$$

- $e > 1$, $E > 0$ → hipérbola
- $e = 1$, $E = 0$ → parábola
- $e < 1$, $E < 0$ → elipse
- $e = 0$, $E = -\frac{mk^2}{2l^2}$ → circunferencia



En las distancias apsidales de una elipse

$$\dot{r} = 0 \rightarrow E = \frac{1}{2}m\cancel{\dot{r}^2}^{\,0} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2mE} = 0 \rightarrow$$ Cuadrática cuya solución son las distancias apsidales r_1 y r_2 tal que.

$$r_1 + r_2 = -\frac{k}{E} \rightarrow \frac{r_1 + r_2}{2} = \boxed{\alpha = -\frac{k}{2E}}$$

→ Semi-eje mayor

En el límite circular

$$r_1 = r_2 = r_0 \rightarrow \boxed{r_0 = -k/2E} \rightarrow \text{radio de la orbita circular}$$

$$\rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mk\alpha}} \rightarrow \frac{l^2}{mk} = \alpha(1 - e^2) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{(1 + e\cos(\theta - \theta_0))}{\alpha(1 - e^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{\alpha(1 - e^2)}{(1 + e\cos(\theta - \theta_0))}} \rightarrow$$ para la elipse

Note que $\boxed{r_1 = r_{máx} = \alpha(1 + e)}$

$\boxed{r_2 = r_{mín} = \alpha(1 - e)}$

By: Herminso Villarraga Gómez

$$V = -\frac{K}{r}$$

Movimiento en el tiempo en el problema de Kepler

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{E - V - \frac{l^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{E + \frac{K}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2K}}\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{E}{K}r^2 + r - \frac{l^2}{2mK}}}$$

$$\left.\begin{aligned} l^2/mK &= a(1-e^2) \\ -K/E &= 2a \end{aligned}\right\} \text{para la elipse}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2K}}\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}$$

sea $\boxed{r = a(1 - e\cos\psi)}$

$\downarrow$

Ec de orbita eliptica

$0 \leq \psi \leq 2\pi \rightarrow$ Revolución Completa

"anomalía excéntrica" $\leftarrow \psi$

perihelio $\rightarrow \psi = 0 \quad (\theta = 0)$

afelio $\rightarrow \psi = \pi \quad (\theta = \pi)$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2K}}\int_0^{\psi}\frac{a(1-e\cos\psi)(a e\sin\psi\, d\psi)}{\sqrt{a(1-e\cos\psi) - a\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{2e\cos\psi}{2}} + \frac{e^2\cos^2\psi}{2}\right) - \frac{a(1-e^2)}{2}}}$$

$$= \sqrt{\cancel{\frac{m}{2K}}}\int_0^{\psi}\frac{a^2(1-e\cos\psi)(\cancel{e\sin\psi}\, d\psi)}{\sqrt{\cancel{\frac{a e^2}{2}(-\cos^2\psi + 1)}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{K}}\, a^{3/2}\int_0^{\psi}(1 - e\cos\psi)\, d\psi \rightarrow \tau = \sqrt{\frac{m}{K}}\, a^{3/2}\int_0^{2\pi}(1 - e\cos\psi)\, d\psi$$

$$t = \frac{\tau}{2\pi}(\psi - e\sin\psi) \quad \text{con} \quad \boxed{\tau = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{K}}} \rightarrow 3^{a} \text{ ley de Kepler.}$$

ó $\boxed{\omega t = \psi - e\sin\psi} \rightarrow$ Ec de Kepler para la elipse en función de la anomalía ψ.

$$r = \frac{\cancel{a}(1-e^2)}{(1 + e\cos(\theta - \cancel{\theta_0}))} = \cancel{a}(1 - e\cos\psi) \rightarrow \frac{1-e^2}{1 - e\cos\psi} = 1 + e\cos\theta$$

$\theta_0 = 0$ por elección.

$$e\cos\theta = \frac{\cancel{1} - e^2}{1 - e\cos\psi} - \left(\frac{\cancel{1} - e\cos\psi}{1 - e\cos\psi}\right) = \frac{e(\cos\psi - e)}{1 - e\cos\psi} \rightarrow \cos\theta = \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \cos\theta = \left(\frac{1 - e\cos\psi}{1 - e\cos\psi}\right) - \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi} = \frac{(1+e)(1-\cos\psi)}{1 - e\cos\psi} \\ 1 + \cos\theta = \left(\frac{1 - e\cos\psi}{1 + e\cos\psi}\right) + \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi} = \frac{(1-e)(1-\cos\psi)}{1 - e\cos\psi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{(1+e)}{1-e}\cdot\frac{1 - \cos\psi}{1 + \cos\psi} \rightarrow \boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\psi}{2}}$$

- **De la 2^{a} ley de Kepler:** $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m} \rightarrow \int dA = \frac{l}{2m}\int_0^{\tau} dt$

$$\Rightarrow \pi ab = \frac{l}{2m}\tau \qquad \pi ab = \pi a\left(a\sqrt{1-e^2}\right) = \pi a^2\sqrt{\cancel{l^2}/mKa} = \frac{\cancel{l}}{2m}\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/K}}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

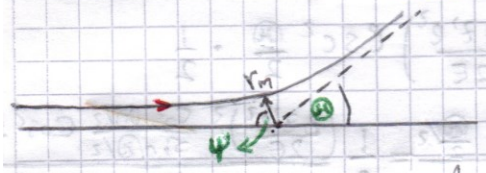
Dispersión en un campo de Fuerzas Central:

$$\sigma(\Omega)\,d\Omega = \frac{\#\text{ de partículas dispersadas por unidad de tiempo en un ángulo sólido } d\Omega}{\text{intensidad incidente}}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\Theta\, d\Theta \qquad L = m v_0 s = m\sqrt{\frac{2E}{m}}\, s = \sqrt{2mE}\, s$$

$$2\pi I s\, ds = 2\pi \sigma(\Theta) I \sin\Theta\, |d\Theta| \longrightarrow \boxed{\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right|}$$

Sección Eficaz



$$\Theta = \pi - 2\psi$$

$$\psi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2m}{l^2}(E-V) - \frac{1}{r^2}}}$$

$$\Rightarrow \Theta = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{s\,dr}{\frac{l}{\sqrt{2mE}}\, r\sqrt{\frac{2mEr^2}{l^2}\left(1-\frac{V}{E}\right) - 1}} \qquad \text{con } \frac{l}{\sqrt{2mE}} = s$$

$$\boxed{\Theta = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{s\,dr}{r\sqrt{r^2\left(1-\frac{V}{E}\right) - s^2}}}$$

$$\text{si } u = 1/r \rightarrow du = -1/r^2 \rightarrow \Theta = \pi - 2\int_0^{u_m} \frac{s\,du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2u^2}}$$

para potencial repulsivo coulombiano: creado por carga fija $-ze$ al dispersar partículas incidentes $-z'e$.

$$f = \frac{zz'e^2}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \rightarrow V = \frac{zz'e^2}{r} = -\frac{K}{r} \quad \text{con } K = -zz'e^2$$

$V = zz'e^2/r \rightarrow E > 0$ y la órbita es una hipérbola.

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(zz'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E(2\cancel{m}ES^2)}{\cancel{m}(zz'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2ES}{zz'e^2}\right)^2}$$

Angulo θ_0

$$\frac{1}{r} = \frac{mK}{l^2}\left(1 + \epsilon\cos(\theta - \theta_0)\right) = -\frac{mzz'e^2}{l^2}\left(1 + \epsilon \underbrace{\cos(\theta - \pi)}_{-\cos\theta}\right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mzz'e^2}{l^2}\left(\epsilon\cos\theta - 1\right)$$

como se eligió $\theta_0 = \pi$, el periápside se corresponde a un ángulo para el que $r = r_{min} \rightarrow (\epsilon\cos\theta - 1)$ es máximo es decir en $\theta = 0$. $\longrightarrow$

esto último significa que θ se mide respecto al r_{min}. Así la dirección ~~θ que~~ de la asíntota de incidencia que corresponde a $r \to \infty$ queda determinada por:

$$\cancel{\frac{1}{r}\Big|_{r\to\infty}}^{\,0} = \frac{mzz'e^2}{l^2}(\epsilon\cos\theta - 1) \longrightarrow \cos\theta = 1/\epsilon$$

pero justo en ese punto $\theta = -\psi \to \cos\psi = 1/\epsilon$

$$\Theta = \pi - 2\psi \to \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} \quad \cancel{\to \cos\psi =}$$

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right) = \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0}\cos\frac{\Theta}{2} + \cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{\,1}\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\cot^2\frac{\Theta}{2} = \csc^2\frac{\Theta}{2} - 1 = \epsilon^2 - 1 = \cancel{1} + \left(\frac{2Es}{zz'e^2}\right)^2 - \cancel{1}$$

$$\to \cot\frac{\Theta}{2} = \frac{2Es}{zz'e^2} \longrightarrow s = \frac{zz'e^2}{2E}\cot\frac{\Theta}{2}$$

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right| \quad \text{con} \quad \frac{ds}{d\Theta} = -\left(\frac{zz'e^2}{2E}\right)\csc^2\frac{\Theta}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{2}\,\frac{(zz'e^2/2E)^2\cot\frac{\Theta}{2}\cdot\csc^2\frac{\Theta}{2}}{\sin\left(2\frac{\Theta}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{zz'e^2}{2E}\right)^2\frac{\cancel{\cos\Theta/2}}{\sin\Theta/2}\cos^2\frac{\Theta}{2}}{2\sin\frac{\Theta}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{\Theta}{2}}}$$

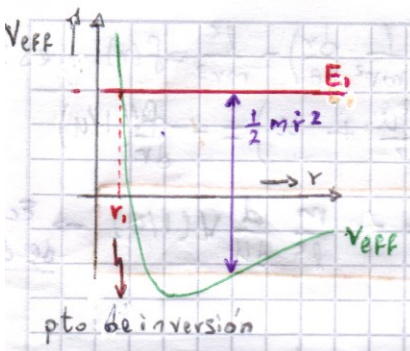
$$\boxed{\sigma(\Theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{zz'e^2}{2E}\right)^2\csc^4\frac{\Theta}{2}} \longrightarrow \text{Sección eficaz de dispersión de Rutherford}$$

$$\sigma_T = \int\sigma(\Omega)\,d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi}\sigma(\Theta)\sin\Theta\,d\Theta \longrightarrow \text{Sección eficaz total de dispersión}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

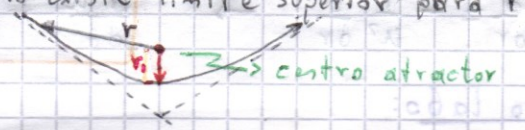
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff} \quad , \quad V_{eff} = V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}$$

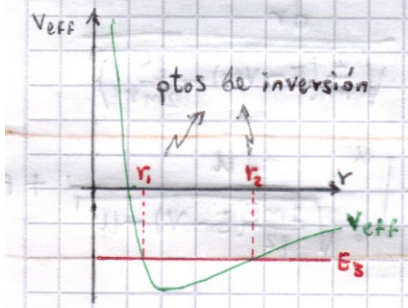
con $l = mr^2\dot{\theta}$



- **Partícula con energía E_1:** nunca podrá acercarse a $r < r_1$, pues si ello pasara $V_{eff} > E_1 \rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 < 0$ "$\rightarrow\leftarrow$"

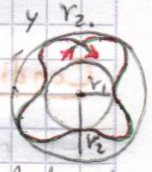
No existe límite superior para r (orbita No acotada)

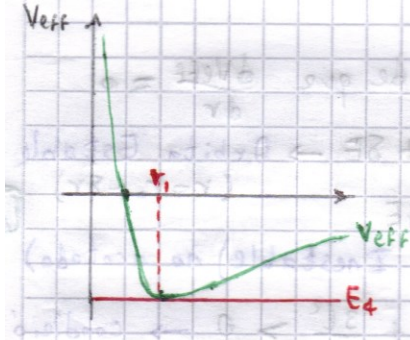




- **partícula con energía E_3:** hay un límite inferior r_1 y un máximo r_2 que no puede superar r con energía cinética positiva.

Movimiento limitado por dos puntos de inversión r_1 y r_2 (Orbitas cerradas), acotadas contenidas entre dos circunferencias de radio r_1 y r_2.





- **partícula con energía E_4:** justo la del mínimo de V_{eff}. La cota superior e inferior coinciden de modo que solo es posible un radio $r = r_1 \rightarrow \boxed{\dot{r} = 0}$ (Orbita circular)

Ello ocurre en el mínimo de V_{eff}, es decir en:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \rightarrow -\frac{dV}{dr} = -\frac{l^2}{mr^3}$$

$$\boxed{f(r) = -m\underbrace{r\dot{\theta}^2}_{\text{aceleración centripeta}}}$$

fuerza derivable del potencial

La misma división cualitativa general en órbitas abiertas, limitadas y circulares será cierta para todo potencial atractivo que ① Disminuya más lentamente que $1/r^2$ si $r \rightarrow \infty$

② tienda a infinito mas lentamente que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow 0$:

→ asegura que el potencial predomina sobre el término centrífugo para r grande.

→ para r pequeña es tal que el término importante es el centrífugo.

Ecuación diferencial de la órbita

$$l = mr^2\dot{\theta} = mr^2(d\theta/dt) \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\right)$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \rightarrow \frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)$$

Nótese que $\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d(1/r)}{d\theta} \rightarrow \frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)$

con $u = 1/r$ $\quad \cancel{-}u^2\frac{l^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \cancel{-}\frac{dV}{dr}$

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{du}\frac{d}{dr} = -\frac{1}{u^2}\frac{d}{dr} \rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V(1/u)} \rightarrow \text{Ec diff de órbita}$$

Por otro lado:

$$l = mr^2\dot{\theta} = mr^2(d\theta/dt) \rightarrow dt = \frac{mr^2}{l}d\theta = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \theta = \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2m}{l^2}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \rightarrow \boxed{\theta = -\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{l^2}(E - V) - u^2}} + \theta_0}$$

Condiciones para Orbitas Cerradas:

El carácter de orbita circular depende de que $\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$

- Si $V_{eff}(r_0)$ es mínimo y $E = V_{eff}(r_0) + \delta E \rightarrow$ Orbita Estable acotada $(r = r_0 + \delta r)$
- Si $V_{eff}(r_0)$ es máximo y $E = V_{eff}(r_0) + \delta E$ $\rightarrow$ (Orbita Inestable no acotada)

$$V_{eff} = V + \frac{l^2}{2mr^2} \rightarrow \left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} = -\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0 \rightarrow \text{condición para mínimos}$$

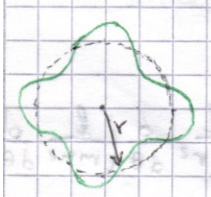
$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=r_0} < \frac{3l^2}{mr_0^4} \quad \text{como} \quad f(r_0) = -m(\underbrace{r_0\dot{\theta}^2}_{a_c}) = -\frac{l^2}{mr_0^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=r_0} < -\frac{3f(r_0)}{r_0}} \rightarrow \text{Condición de Estabilidad}$$

- Si $f = -\frac{K}{r^{n+1}} \rightarrow -\frac{(n+1)\cancel{K}}{\cancel{r_0^{n+2}}} < \frac{3\cancel{K}}{\cancel{r_0^{n+2}}} \rightarrow \boxed{n < 2.} \rightarrow$ El potencial atractivo debe ser tal que f varíe más lentamente que $\frac{1}{r^2}$.

Para pequeñas variaciones respecto a las condiciones de circularidad:

$$\boxed{u = u_0 + \alpha\cos\beta\theta} \quad \text{con} \quad \boxed{\beta^2 = 3 + \frac{r}{f}\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0}}$$



u efectua β ciclos de oscilación cuando r barre por completo el plano.
Si $\beta = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ al cabo de q revoluciones el vector de posición volverá a recorrerse la orbita, es decir la orbita es cerrada.

By: Herminso Villarraga Gómez

Solución a los ejercicios del Cap 3 - Goldstein 3ed

3.10 $U(r) = -\frac{K}{r}$ con $K = GMM_s$ $\quad M \rightarrow$ masa del planeta. $M_s \rightarrow$ masa del sol

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{MK^2}} \approx 1 + \frac{EL^2}{MK^2} \equiv 1 - \alpha \rightarrow \alpha = -\frac{EL^2}{MK^2}$$

$\rightarrow$ excentricidad de una órbita elíptica. $(E<0,\ e<1)$

$$E = \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}\right) + V(r)$$

En el afelio: $\dot{r} = 0 \rightarrow E_a = \frac{L^2}{2Mr_a^2} - \frac{K}{r_a}$ antes de la colisión.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M(\vec{r} \times \vec{v})$$

en el afelio $\vec{v}$ es tangencial a la trayectoria y perpendicular a $\vec{r} \Rightarrow$

$$L_a = M r_a v_a \rightarrow v_a = \frac{L}{Mr_a} \rightarrow$$ velocidad en el afelio antes de la colisión

el subindice a en L se ha suprimido ya que $L = cte$ en toda la orbita elíptica independiente de su posición. Ahora bien, pero

$$Mv_a + mv_c = (M+m)v' \rightarrow$$ Colisión completamente inelástica.

masa del cometa $\quad$ velocidad del cometa antes de la colisión

$$M\left(\frac{L}{Mr_a}\right) + mv_c = (M+m)v' \simeq Mv' \qquad M \gg m.$$

$$\Rightarrow v' = \frac{L}{Mr_a} + \frac{m}{M}v_c \rightarrow$$ velocidad después del choque.

Para que la nueva orbita sea una parábola, la energía del conjunto después de la colisión debe ser $E' = 0$

$$E' = 0 = \frac{1}{2}(M+m)v'^2 - \frac{K'}{r_a} \approx \frac{1}{2}Mv'^2 - \frac{K}{r_a} \quad \text{para } M \gg m$$

donde se ha usado $K' = G(M+m)M_s \simeq GMM_s = K$ ya que $M \gg m$. Esta aprox estrictamente se esta usando desde arriba, ya que como $M \gg m$ la perturbación por la presencia del planeta al potencial $U(r) = -\frac{GMM_s}{r}$ es insignificante.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{K}{r_a} = \left(-E_a + \frac{L^2}{2Mr_a^2}\right) \Rightarrow$$

$\rightarrow$ energía del cometa antes de la colisión.

$$\frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{L^2}{2Mr_a^2} - E_a \qquad \text{donde } v' = \frac{L}{Mr_a} + \frac{m}{M}v_c$$

$$\frac{1}{2}M\left(\cancel{\frac{L^2}{M^2r_a^2}} + 2\left(\frac{L}{Mr_a}\right)\left(\frac{m}{M}\right)v_c + \underbrace{\cancel{\left(\frac{m}{M}\right)^2 v_c^2}}_{\approx 0 \quad M>>m}\right) = \cancel{\frac{L^2}{2Mr_a^2}} - E_a$$

$$\left(\frac{L}{r_a}\right)\left(\frac{m}{M}\right)v_c = -E_a$$

antes de la colisión, la energía del planeta se conserva y $\alpha = -\frac{EL^2}{MK^2}$ según se encontró atras $\Rightarrow$ $E_a = -\frac{\alpha MK^2}{L^2}$ → Energía del planeta en el afelio antes del choque

$$\Rightarrow \left(\frac{L}{r_a}\right)\left(\frac{m}{M}\right)v_c = \frac{\alpha MK^2}{L^2}$$

$$v_c = \frac{\alpha M^2K^2r_a}{mL^3}$$ → Velocidad que requerimos para el cometa antes de la colisión.

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{\alpha^2M^4K^4r_a^2}{2mL^6}$$

donde $r_a = r_{máx} = a(e+1) = a(2-a) \approx 2a$ si $a << 1$

$\quad\quad\quad

$$\Rightarrow dt = -\sqrt{\frac{\mu a}{2K}}\sqrt{\frac{r}{a-r}}\,dr \qquad r = a\sin^2\theta, \quad dr = 2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \Delta t = -\sqrt{\frac{\mu a}{2K}}\int\sqrt{\frac{\cancel{a}\sin^2\theta}{\cancel{a(1-\sin^2\theta)}}}\,(2a\sin\theta\,\cancel{\cos\theta})$$

$$= -\sqrt{\frac{2\mu a^3}{K}}\int_{\pi/2}^{0}\sin^2\theta\,d\theta \qquad \text{si } r=a \rightarrow \sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/2, \quad \text{si } r=0 \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$= -\sqrt{\frac{2\mu}{K}a^3}\int_{\pi/2}^{0}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \cancel{-}\sqrt{\frac{2\mu a^3}{K}}\left(\cancel{-}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Delta t = \frac{1}{4\sqrt{2}}\underbrace{\left(2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{K}}\right)}_{\tau \rightarrow 3^a \text{ ley de Kepler}} \longrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}}$$

Método 2: $L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \rightarrow \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{K}{r^2} = 0 \quad \text{para } r.$$

$$\mu r^2\dot{\theta} = 0 \quad \text{para } \theta$$

de la ec. para r:

$\ddot{r} = -\frac{K}{\mu r^2} + r\dot{\theta}^2$ cuando se para el sistema $\dot{\theta} = 0$ y

$\Rightarrow \ddot{r} = -\frac{K}{\mu r^2}$ para las partículas colapsando

$$2\dot{r}\ddot{r} = -\frac{2K}{\mu r^2}\dot{r} \rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2K}{\mu r}\right) \rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2K}{\mu r} + C$$

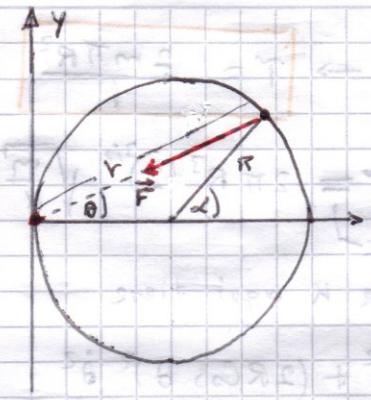
Cuando $\dot{r} = 0$ aún $r = a \Rightarrow 0 = \frac{2K}{\mu a} + C \rightarrow C = -\frac{2K}{\mu a}$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2K}{\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2K}{\mu a}}\sqrt{\frac{a-r}{r}}$$ igual que antes.

3.12

By: Herminso Villarraga Gómez

3.13



$$r\cos\theta = R + R\cos\alpha = R(1+\cos\alpha)$$

$$r\sin\theta = R\sin\alpha$$

$$r^2\cos^2\theta = R^2(1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$r^2\sin^2\theta = R^2(\qquad\qquad \sin^2\alpha)$$

$$r^2 = R^2(2 + 2\cos\alpha)$$

$$= 2R^2(1+\cos\alpha)$$

$$r\cancel{^2} = 2R\cancel{r}\cos\theta$$

$\Rightarrow$ $\boxed{r = 2R\cos\theta}$ $\longrightarrow$ Ec. de órbita.

a) $E = T + V(r) \longrightarrow V(r) = E - T = E - \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$

$\dot{r} = -2R\sin\theta\,\dot{\theta}$ donde $l = mr^2\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = l/mr^2$

$$\Rightarrow \dot{r} = -\frac{2Rl}{mr^2}\sin\theta \longrightarrow m\dot{r}^2 = \cancel{m}\frac{4R^2l^2}{m^{\cancel{2}}r^4}\sin^2\theta$$

$$= \frac{4R^2l^2}{mr^4}(1-\cos^2\theta)$$

$$= \frac{4R^2l^2}{mr^4}\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right)$$

$$= \frac{4R^2l^2}{mr^4} - \frac{l^2}{mr^2}$$

$$\Rightarrow V(r) = E - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{4R^2l^2}{mr^4} - \cancel{\frac{l^2}{mr^2}}\right) - \cancel{\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}}\right]$$

$$V(r) = E - \frac{2R^2l^2}{mr^4}$$

$$f = -\frac{dV}{dr} = -\frac{8R^2l^2}{mr^5} \longrightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{8R^2l^2}{mr^5}\hat{r}}$$

b) $V(r) = -\frac{K}{r^4} + E$, en particular $V(r\to\infty) \to 0 \Rightarrow E = 0$

$\hookrightarrow K = 2R^2l^2/m$

$$V_{eff} = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = -\frac{K}{r^4} + \frac{l^2}{2mr^2} = -\frac{l^2}{2mr^2}\left(\frac{4R^2}{r^2} - 1\right)$$

Los puntos de retorno se encuentran para $E = V_{eff} = 0$

$\Rightarrow$ $r = 2R$ $\longrightarrow$ es el punto de retorno.

c) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m} = \frac{A}{\tau} = \frac{\pi R^2}{\tau} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{2m\pi R^2}{l}}$

$K = \frac{2R^2 l^2}{m} \rightarrow l = \sqrt{\frac{mK}{2}}\frac{1}{R} \rightarrow \tau = \pi R^3 (2)^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}}$

Comparable con la 3ª ley de Kepler $\tau = 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/K}$ salvo que K aquí tiene unidades diferentes.

d) $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = (-2R\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (2R\cos\theta)^2\dot{\theta}^2$
$= 4R^2\dot{\theta}^2$

$mr^2\dot{\theta} = l \rightarrow \dot{\theta} = l/mr^2 \Rightarrow \boxed{v = \frac{2R\,l}{mr^2}} \rightarrow$ la velocidad crece a medida que se aleja del centro de fuerza.

Método 2:

a) Partiendo de la ec. diferencial de orbita:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{con} \quad u = 1/r$$

$r = 2R\cos\theta \rightarrow u = 1/(2R\cos\theta)$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2R}\left\{\frac{\cancel{-}\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\} = \frac{1}{2R}\sin\theta\cos^{-2}\theta$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2R}\left\{\sin\theta(\cancel{-}2\cos^{-3}\theta)(\cancel{-}\sin\theta) + \cos^{-2}\theta\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{2R}\left\{\frac{2\sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta}\right\} = \frac{1}{2R}\frac{\sin^2\theta + 1}{\cos^3\theta}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\sin^2\theta + 1}{2R\cos^3\theta} + \frac{\cos^2\theta}{2R\cos^3\theta} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}R\cos^3\theta} = \frac{8R^2}{(2R\cos\theta)^3} = 8R^2u^3$$

$$\Rightarrow 8R^2u^3 = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow \int \frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right)du = -\frac{8R^2l^2}{m}\int u^3 du$$

$$\rightarrow V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{8R^2l^2}{m}\frac{u^4}{4} + cte. = -\frac{2R^2l^2}{m}\frac{1}{r^4} + cte$$

$$f(r) = -\frac{d}{dr}V(r) = -\frac{8l^2R^2}{m}\frac{1}{r^5} \rightarrow \boxed{f(r) = -\frac{K}{r^5}}$$

b) $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m\left\{(2R\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (2R\cos\theta)^2\dot{\theta}^2\right\}$

$$= \frac{1}{2}m\left\{4R^2\dot{\theta}^2\right\} = 2mR^2\frac{l^2}{(mr^2)^2} = \frac{2R^2l^2}{m}\frac{1}{r^4}$$

si elegimos $V(r\to\infty)=0 \Rightarrow$ la cte es nula en el potencial

y $V(r) = -\frac{2R^2 l^2}{m}\frac{1}{r^4} \Rightarrow E = T + V = 0$.

c) $\tau = \int dt = \int \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\dot\theta} = \int \frac{mr^2}{l} d\theta$

$l =$ cte en movimiento orbital $\rightarrow$ $= \frac{m}{l}\int r^2 d\theta$

$\rightarrow \tau = \frac{m}{l}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2R\cos\theta)^2 d\theta = \frac{4mR^2}{l}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$

$= \frac{4mR^2}{l}\left(\frac{\theta}{2}+\cancel{\frac{1}{4}\sin 2\theta}^{\,0}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4mR^2}{l}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow \boxed{\tau = \frac{2m\pi R^2}{l}}$ $\rightarrow$ igual que antes!!

d) $x = r\cos\theta = 2R\cos^2\theta$

$y = r\sin\theta = 2R\cos\theta\sin\theta = R\sin 2\theta$

$\Rightarrow \dot x = -4R\dot\theta\cos\theta\sin\theta = -2R\dot\theta\sin 2\theta$

$\dot y = 2R\dot\theta\cos 2\theta$

$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 \rightarrow v^2 = 4R^2\dot\theta^2 = 4R^2\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2 \rightarrow \boxed{v = \frac{2Rl}{mr^2}}$

3.14 $r = \frac{l^2}{mk}\left(\frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\right)$

a) para un círculo $\epsilon = 0 \rightarrow r_c = l^2/mk$

para una parábola $\epsilon = 1 \rightarrow r = \frac{l^2}{mk}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$

la distancia mínima r_{min} para la parábola ocurre cuando

$\theta = 0 \rightarrow r_p = \frac{l^2}{mk}\frac{1}{2}$ ó $\boxed{r_p = \frac{1}{2}r_c}$ $\rightarrow$ es el perihelio.

b) $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2$

para la parábola: $\dot r = \frac{l^2}{mk}\left\{\cancel{-}\frac{\cancel{-}\sin\theta\dot\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right\} = r\dot\theta\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$

$v_p^2 = r^2\dot\theta^2\left\{\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}+1\right\} = r^2\dot\theta^2\left\{\frac{\sin^2\theta+(1+\cos^2\theta+2\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}\right\}$

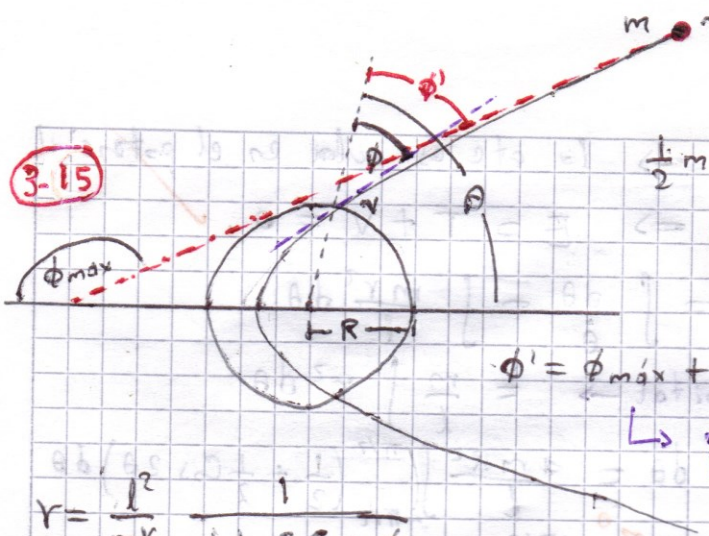
$v_p^2 = r^2\dot\theta^2\frac{2\cancel{(1+\cos\theta)}}{(1+\cos\theta)^{\cancel{2}}} = 2r^3\frac{mk}{l^2}\dot\theta^2 = \frac{2mkr^3}{\cancel{l^2}}\frac{\cancel{l^2}}{(mr^2)^2} = \frac{2k}{mr}$

para el círculo: $\dot r = 0 \rightarrow v_c^2 = r^2\dot\theta^2 = r^2\frac{l^2}{(mr^2)^2} = \frac{l^2}{m^2r^2}$

$r_c = \frac{l^2}{mk} \rightarrow v_c^2 = \frac{\cancel{l^2}}{m\cancel{r}}\cdot\frac{\cancel{m}k}{\cancel{l^2}} = \frac{k}{mr} = \frac{1}{2}v_p^2 \Rightarrow \boxed{v_p = \sqrt{2}\,v_c}$

By: Herminso Villarraga Gómez

3.15



$r \gg R$

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \cancel{\frac{K}{r'}}^{\approx 0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{R}$$

$$\boxed{v' = \sqrt{v^2 - 2K/mR}}$$

$$\phi' = \phi_{máx} + \theta - \pi$$

θ → Latitud del punto de impacto.

ϕ' → ángulo de la asíntota a la hipérbola

$$r = \frac{l^2}{mK}\,\frac{1}{1+\epsilon\cos\phi}$$

$r \to \infty$ cuando $\phi \to \phi_{máx} \Rightarrow 1 = -\epsilon\cos\phi_{máx}$

$\Rightarrow \phi_{máx} = \cos^{-1}(-1/\epsilon)$ con $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mK^2}}$

$$\Rightarrow \phi' = \theta - \pi + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{mK^2}}}\right)$$

$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{K}{R} = cte$ → conservación de la energía

$l = m|\vec{r}\times\vec{v}| = cte$ por conservación de l, luego puede evaluarse en el punto de impacto:

$l = m|\vec{r}\times\vec{v}| = mRv\sin\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\phi' = \theta - \pi + \cos^{-1}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\left(\frac{mv^2}{2}-\frac{K}{R}\right)m^{\cancel{2}}R^2v^2\sin^2\phi}{\cancel{m}K^2}}}\right\}}$$

3.16

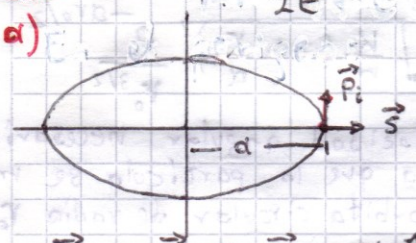
$r + p = 2a \to \dot{r} + \dot{p} = 0 \to \dot{p} = -\dot{r}$

$v^2 = \dot{r}^2 +$

By: Herminso Villarraga Gómez

3.18 $a = -\dfrac{K}{2E}$ $\longrightarrow$ semi-eje mayor de la elipse.

a)



Antes del impulso $\vec{p}_i = p_i \hat{j}$

después del impulso $\vec{p}_f = s\hat{i} + p_i \hat{j}$

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = s\hat{i} \longrightarrow \Delta\vec{v} = (s/m)\hat{i}$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v} = v_i\hat{j} + \frac{s}{m}\hat{i} \longrightarrow v_f^2 = v_i^2 + \left(\frac{s}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m v_f^2 = \frac{1}{2}m v_i^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{s^2}{m^{\cancel{2}}} = E_i + \frac{s^2}{2m}$$

$$\Rightarrow a_f = -\frac{K}{2E_f} = -\frac{K}{2E_i + s^2/m} = \frac{-K/2E_i}{1+(s^2/2mE_i)} \longrightarrow \boxed{a_f = \frac{a_i}{1+(s^2/2mE_i)}}$$

b) $$\epsilon_f = \sqrt{1 + \frac{2E_f L^2}{mK^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E_i L^2}{mK^2} + \frac{L^2 s^2}{m^2K^2}}$$

c) $$r = \frac{l^2}{mK}\frac{1}{1+\epsilon\cos\theta} \quad \text{con} \quad \epsilon = \sqrt{1+\frac{2El^2}{mK^2}} \quad y \quad a = -\frac{K}{2E}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{MKa}} \longrightarrow a(1-\epsilon^2) = \frac{l^2}{MK}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$$

si la posición de la partícula no ha cambiado en instantes inmediatamente antes y justo después del impulso:

$$\frac{a_i(1-\epsilon_i^2)}{1+\epsilon_i\underbrace{\cos\theta_0}_{1}} = \frac{a_f(1-\epsilon_f^2)}{1+\epsilon_f\cos\theta_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\epsilon_f\cos\theta_0}{\cancel{1+\epsilon_i}} = \frac{a_f(1-\epsilon_f^2)}{a_i(1-\epsilon_i)\cancel{(1+\epsilon_i)}} \longrightarrow \boxed{\cos\theta_0 = \frac{1}{\epsilon_f}\left[\frac{a_f(1-\epsilon_f^2)}{a_i(1-\epsilon_i)} - 1\right]}$$

3.19 $$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

$$\text{Si} \quad F(r) = -\frac{K}{r^2}e^{-r/a} \Rightarrow V(r) = -\frac{K}{r}e^{-r/a}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}e^{-r/a}$$

para θ: $\quad mr^2\dot{\theta} = 0 \longrightarrow mr^2\dot{\theta} = l = cte \longrightarrow$ Conservación del Momento Ang.

para r: $\quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + K\left(1+\frac{r}{a}\right)\frac{e^{-r/a}}{r^2} = 0$

$$\boxed{\ddot{r} = r\frac{l^2}{m^2r^4} - \frac{K}{m}\left(1+\frac{r}{a}\right)\frac{e^{-r/a}}{r^2}}$$

La orbita es circular cuando $\dot{r}=0$, $\ddot{r}=0$

$$\Rightarrow r\dot{\theta}^2 = \frac{K}{m}\left(1+\frac{r}{a}\right)\frac{e^{-r/a}}{r^2} \longrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{K}{m}\left(1+\frac{r_0}{a}\right)}\,\frac{e^{-ar_0/2}}{r_0^{3/2}}$$

↳ Velocidad angular necesaria para que la partícula se mueva en orbita circular de radio r_0.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{eff}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}$$

$$\Rightarrow V_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}e^{-r/a} = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2mK}{l^2}\frac{e^{-r/a}}{r}\right)$$

$$V_{eff} = A\left(\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-r/a}}{br}\right) \quad \text{con} \quad A = \frac{l^2}{2m}, \quad b = \frac{l^2}{2mK}$$

hay un mínimo valor de energía que permite una orbita circular. El potencial efectivo tiene un extremo en:

$$\frac{d}{dr}V_{eff} = 0 \Rightarrow e^{-r/a}\frac{r}{a}\left(1+\frac{r}{a}\right) = 2\frac{b}{a} = \frac{l^2}{mKa}$$

$$\Rightarrow V_{min} = A\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{e^{-r_0/a}}{br_0}\right) = A\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{2b/r_0}{br_0(1+r_0/a)}\right) = -\frac{A}{r_0^2}\frac{a-r_0}{a+r_0}$$

Si la energía es $E = V_{min}$, la orbita será circular con radio r_0.

3.20 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$ y $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi mr^2}{l}$

$f(r) = -\frac{K}{r^2} - mCr$, luego por 2ª ley de Newton

$$f(r) = ma_c = m\frac{v_t^2}{r} = m\frac{(\dot{\theta}r)^2}{r} = mr\dot{\theta}^2 = mr\frac{l^2}{(mr^2)^2} = \frac{l^2}{m^2r^3}$$

↳ esto ocurre en el equilibrio entre la fuerza central y la fuerza efectiva.

$$\Rightarrow mCr_0 + \frac{K}{r_0^2} = \frac{l^2}{mr_0^3} \longrightarrow l = \sqrt{mr_0K + m^2Cr_0^4}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi mr^2}{\sqrt{mr_0K + m^2Cr_0^4}} \longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{(K/mr_0^3)+C}}}$$

$$\longrightarrow \omega_{orbital} = \sqrt{\frac{K}{mr^3}+C} \longrightarrow \text{Velocidad angular orbital}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

b) $T_{osc} = T/\beta \longrightarrow$ β es el numero de ciclos de oscilación que la partícula da en una orbita completa.

$$u \equiv \frac{1}{r} = u_0 + a\cos\beta\theta$$

$$y \quad \beta^2 = 3 + \frac{r}{f}\frac{df}{dr}\Big|_{r=r_0} \longrightarrow \text{Ec. 3.46 Goldstein.}$$

$$f = mcr + k/r^2 \longrightarrow \frac{df}{dr} = -\frac{2k}{r^3} + mc$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 3 + r\,\frac{\left(-\frac{2k}{r^3} + mc\right)}{\left(\frac{k}{r^2} + mcr\right)} = \frac{3\left(\frac{k}{r^2} + mcr\right) - \left(\frac{2k}{r^2} + mcr\right)}{\left(\frac{k}{r^2} + mcr\right)}$$

$$= \frac{\frac{k}{r^2} + 4mcr}{\frac{k}{r^2} + mcr} = \frac{\frac{k}{mr^3} + 4c}{\frac{k}{mr^3} + c}$$

$$\Rightarrow T_{osc} = \frac{T}{\beta} = \frac{2\pi / \cancel{\sqrt{k/mr_0^3 + c}}}{\sqrt{\frac{k}{mr_0^3} + 4c} / \cancel{\sqrt{k/mr_0^3 + c}}}$$

$$\boxed{T_{osc} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/mr_0^3 + 4c}}} \longrightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{k}{mr_0^3} + 4c} \longrightarrow \text{Frecuencia angular de oscilación}$$

c) $r = \frac{l^2}{mk}\frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}$ con $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$

$$y \quad a = -\frac{k}{2E} \text{ para la elipse} \longrightarrow \epsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}$$

$$\Rightarrow a(1-\epsilon^2) = \frac{l^2}{mk} \Rightarrow r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$$

Con $\epsilon << 1$ para una orbita cercana a la circular, una elipse precesando envolverá al circulo que se haría con $\epsilon = 0$.

$$\omega_{prec} = \omega_r - \omega_{orb} = \sqrt{\frac{k}{mr^3} + 4c} - \sqrt{\frac{k}{mr^3} + c}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{mr^3}}\left(\sqrt{1 + \frac{4cmr^3}{k}} - \sqrt{1 + \frac{cmr^3}{k}}\right)$$

$$\approx \sqrt{\frac{k}{mr^3}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{4cmr^3}{k} - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{cmr^3}{k}\right)\right) \longrightarrow \text{Se uso expans binomial.}$$

$$\Rightarrow \omega_{prec} = \sqrt{\frac{k}{mr^3}}\,\frac{4cmr^3 - cmr^3}{2k} = \frac{3cmr^3}{2k}\sqrt{\frac{k}{mr^3}} = \frac{3c}{2}\sqrt{\frac{mr^3}{k}}$$

$$\boxed{\omega_{prec} = \frac{3c}{2}\sqrt{\frac{mr^3}{k}}}$$

Note que $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{mr_0^3} + 4c}$

en presencia de la fuerza adicional $-mcr$, si ella no existise $c=0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/mr_0^3}$

$$\Rightarrow \omega_{prec} = \frac{3c}{2\omega_0} \rightarrow \boxed{f_{prec} = \frac{\omega_{prec}}{2\pi} = \frac{3c}{4\pi\omega_0}}$$

otra manera de hallar esto mismo es encontrando el cambio en el angulo para ~~algo~~ cada oscilación

$$\Delta\theta = 2\pi - \frac{2\pi}{\beta} \quad y \quad T_{prec.} = \frac{2\pi}{\Delta\theta}T_{osc}$$

3.21 $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2} = -ku + hu^2 \qquad u \doteq 1/r$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{dV}{du} \rightarrow \text{Ec de la órbita con } u = \frac{1}{r}$$

$$= -\frac{m}{l^2}(-k + 2hu)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + \underbrace{\left(1 + \frac{2mh}{l^2}\right)}_{\beta^2}u = \frac{km}{l^2} \rightarrow u = \frac{km}{l^2} + A\cos\beta(\theta - \theta_0)$$

- una revolución alrededor del origen barre un angulo $\theta = 2\pi$. Si $\beta >> 1$, hay muchas oscilaciones radiales en una revolución;
- Si $\beta \approx 1$, la órbita muesta una precesión suave.
- Si $2mh/l^2 << 1$ y la energía es negativa, la orbita es una elipse precesando.

En un ciclo de movimiento periodico con periodo τ las coordenadas radiales retornan al valor original cuando $\beta(\theta - \theta_0) = 2\pi$:

$$\theta - \theta_0 = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 2mh/l^2}} = 2\pi - \dot{\Omega}\tau$$

$$\Rightarrow \dot{\Omega} = \frac{2\pi}{\tau}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2mh/l^2}}\right) \simeq \frac{2\pi}{\tau}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{mh}{l^2}\right)\right)$$

$$\boxed{\dot{\Omega} = 2\pi mh/\tau l^2}$$

para la orbita elíptica $a = -\frac{k}{2E}$ y $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$

es $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}} \longrightarrow mka(1-\epsilon^2) = l^2$

Usando esto para l^2 en aproximación de orbita elíptica:

$$\dot{\Omega} \simeq \frac{2\pi m h}{l^2 h} = \frac{2\pi m h}{mka(1-\epsilon^2)\tau} \longrightarrow \boxed{\dot{\Omega} = \frac{2\pi \Omega}{(1-\epsilon^2)\tau}}$$

donde $\Omega = h/ka$.

El efecto es más pronunciado para órbitas excentricas y largas. El perihelio de mercurio es precesante por 43 segundos de arco por 100 años:

$$\Rightarrow \dot{\Omega} = \frac{43\,(2\pi/360) \times (1/3600\ \text{rad})}{100\ \text{años}} = 2.1 \times 10^{-6}\ \text{rad/año}.$$

$$\Rightarrow \Omega \simeq \frac{(1-\epsilon^2)\dot{\Omega}}{2\pi} \simeq 7.6 \times 10^{-8}$$

3.22

3.23 $\tau = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\mu/K} \rightarrow \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 = a^3 \mu/K$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ y $K = G m_1 m_2$.

Si $m_1 >> m_2 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3\left(\frac{\cancel{m_1 m_2}}{m_1+m_2}\right)}{G\,\cancel{m_1 m_2}} \simeq \frac{a^3}{G M_1}$

tierra - Sol: $(\tau_{ts}/2\pi)^2 = a_{ts}^3/GM_s$

tierra - luna: $(\tau_{tl}/2\pi)^2 = a_{tl}^3/GM_t$

$$\left(\frac{\tau_{ts}}{\tau_{tl}}\right)^2 = \frac{a_{ts}^3}{a_{tl}^3}\frac{M_t}{M_s}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{M_s}{M_e}\right) = \left(\frac{a_{ts}}{a_{tl}}\right)^3\left(\frac{\tau_{tl}}{\tau_{ts}}\right)^2 = \left(\frac{1.5\times10^8}{3.8\times10^5}\right)^3\left(\frac{27.3}{365}\right)^2 = 3.4\times10^5$$

3.24 $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$ $\quad E = -\frac{K}{2a}$ para orbitas elipticas

$$\Rightarrow \epsilon = \sqrt{1+\frac{2El^2}{mK^2}} = \sqrt{1-\frac{l^2}{mKa}} \rightarrow mKa(1-\epsilon^2) = l^2$$

$$\Rightarrow -\frac{K}{2a} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\cancel{m}Ka(1-\epsilon^2)}{2\cancel{m}r^2} - \frac{K}{r}$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(-\frac{K}{2a} - \frac{Ka(1-\epsilon^2)}{2r^2} + \frac{K}{r}\right)$$

$$= \frac{K}{mar^2}\left(-r^2 - a^2(1-\epsilon^2) + 2ar\right) = \frac{K}{mar^2}\left(a^2\epsilon^2 - (r-a)^2\right)$$

$$\tau = 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/K} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{ma^3}}} = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{ma^3}}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{K}{ma}}\frac{1}{r}\sqrt{a^2\epsilon^2-(r-a)^2} = \frac{\omega a}{r}\sqrt{a^2\epsilon^2-(r-a)^2}$$

$$\boxed{\dot{r} = \frac{\omega a}{r}\sqrt{a^2\epsilon^2-(r-a)^2}} = \frac{dr}{dt}$$

Ec. de la órbita elíptica.

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{\omega a}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2\epsilon^2-(r-a)^2}}$$

donde $r = a(1-\epsilon\cos\psi)$

Ec (3.68) Goldstein

y ψ es una variable auxiliar denotado como anomalía excentrica.

By: Herminso Villarraga Gómez

$$\Rightarrow \quad dr = \epsilon a \sin\psi \, d\psi \quad y \quad \omega dt = \frac{1}{\cancel{a}} \frac{\cancel{a}(1-\epsilon\cos\psi)\,\epsilon a \sin\psi \, d\psi}{\sqrt{a^2\epsilon^2 - (-a\epsilon\cos\psi)^2}}$$

$$\omega dt = \frac{(1-\epsilon\cos\psi)\,\cancel{\epsilon a \sin\psi}\, d\psi}{\cancel{a\epsilon\sqrt{1-\cos^2\psi}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega t = \psi - \epsilon \sin\psi} \longrightarrow \text{Ec. integrada de Kepler.}$$

3.25

By: Herminso Villarraga Gómez

Ec. (3.65) Goldstein.

3.27 $$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r}-\frac{l^2}{2mr^2}+E}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{Er^2+kr-\frac{l^2}{2m}}}$$

si $r = a(e\cosh F - 1)$ $\rightarrow$ $dr = ae\sinh F\, dF$

$$\therefore\ Er^2+kr-\frac{l^2}{2m} = Ea^2(e^2\cosh^2 F - 2e\cosh F + 1) + ka(e\cosh F - 1) - \frac{l^2}{2m}$$

$$= Ea^2e^2\cosh^2 F + ae(k-2Ea)\cosh F + \left(Ea^2 - ka - \frac{l^2}{2m}\right)$$

de la ec. de la órbita se sigue que si $a(e-1)$ es la distancia de máximo acercamiento, se obtiene

$$a = \frac{k}{2E}$$

$$\Rightarrow Er^2+kr-\frac{l^2}{2m} = \frac{k^2e^2}{4E}\cosh^2 F - \frac{k^2e}{4E} - \frac{l^2}{2m}$$

$$= \frac{k^2}{4E}\left\{e^2\cosh^2 F - \left(1+\frac{2El^2}{mk^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{k^2e^2}{4E}\left[\cosh^2 F - 1\right] = \frac{k^2e^2}{4E}\sinh^2 F$$

$$= a^2e^2E\sinh^2 F$$

$$\Rightarrow \sqrt{Er^2+kr-\frac{l^2}{2m}} = ae\sqrt{E}\sinh F$$

con esto en t y con $r = a(e\cosh F - 1)$, $dr = ae\sinh F\, dF$.

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{F_0}^{F}\frac{a(e\cosh F - 1)(\cancel{ae}\cancel{\sinh F}\, dF)}{\cancel{ae}\sqrt{E}\,\cancel{\sinh F}}$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{m}{2E}}\,a\left\{e(\sinh F - \sinh F_0) - (F - F_0)\right\}}$$

3.28 $\vec{B} = \frac{b\vec{r}}{r^3} = \frac{b}{r^2}\hat{e}_r$ $\rightarrow$ campo del monopolo magnético

$V(r) = -\frac{k}{r}$ $\rightarrow$ $\vec{F} = -\frac{dV}{dr} = -\frac{k}{r^2}\hat{e}_r = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$ $\rightarrow$ Fuerza central

$\vec{F}_B = q\vec{V}\times\vec{B} = q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$ $\rightarrow$ Fuerza de Lorentz.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\left(q\dot{\vec{r}}\times\vec{B} - \frac{k}{r^3}\vec{r}\right) = \vec{r}\times(q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}) - \frac{k}{r^3}\cancelto{0}{(\vec{r}\times\vec{r})}$$

$$= q\dot{\vec{r}}(\vec{r}\cdot\vec{B}) - q\vec{B}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) = q\dot{\vec{r}}\left(\vec{r}\cdot\frac{b}{r^3}\vec{r}\right) - q\frac{b}{r^3}\vec{r}(r\dot{r})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$= q\dot{\vec{r}}\frac{b\cancel{r^2}}{\cancel{r^3}} - q\frac{b\dot{r}\vec{r}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = qb\left(\frac{1}{r}\dot{\vec{r}} - \frac{1}{r^2}\dot{r}\vec{r}\right) = qb\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\vec{L} - qb\frac{\vec{r}}{r}\right)}_{\vec{D}} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{D} = \vec{L} - qb\frac{\vec{r}}{r} = \vec{cte}}$$

$\hookrightarrow$ $\vec{D}$ se conserva.

b) Para una fuerza central y de la 2ª ley de Newton.

$$f(r)\hat{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow \dot{\vec{p}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\dot{\vec{p}} \times \vec{D} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \times \left(\vec{L} - qb\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{f(r)}{r}\left(\vec{r}\times(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}) - \frac{qb}{r}\cancel{\vec{r}\times\vec{r}}^{\,0}\right)$$

$$= \frac{m f(r)}{r}\left[\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\right] = \frac{m f(r)}{r}\left[\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}\right]$$

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2) = r\dot{r}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{p}}\times\vec{D} = \frac{m f(r)}{r}\left[\vec{r}(r\dot{r}) - r^2\dot{\vec{r}}\right] = -\underbrace{m f(r) r^2}_{-\frac{k}{r^2}}\underbrace{\left[\frac{1}{r}\dot{\vec{r}} - \frac{1}{r^2}\dot{r}\vec{r}\right]}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}$$

$\hookrightarrow$ $\vec{D} = \vec{cte}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\vec{p}}\times\vec{D}) = -m\left(-\frac{k}{\cancel{r^2}}\right)\cancel{r^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\dot{\vec{p}}\times\vec{D} - mk\frac{\vec{r}}{r}\right]}_{\vec{A}'} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{A}' = \dot{\vec{p}}\times\vec{D} - mk\frac{\vec{r}}{r} = \vec{cte}}$$

$\hookrightarrow$ Vector de Runge-Lenz asociado.

3.29 $\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - \frac{k m \vec{r}}{r}$

Considérese: $\vec{p}' \equiv \vec{p} - \frac{\vec{L}\times\vec{A}}{l^2}$ en el espacio de momentos:

$$\vec{p}'^2 = p^2 + \frac{|\vec{L}\times\vec{A}|^2}{l^4} - 2\frac{\vec{p}\cdot(\vec{L}\times\vec{A})}{l^2}$$

$\underbrace{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}_{\text{vector } \perp \text{ a } \vec{r}}$ $\qquad \vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - mk\vec{r}/r$

$$= \underbrace{m\vec{v}\times\underbrace{(\vec{r}\times\vec{p})}_{\text{vector } \perp \text{ a } \vec{r} \text{ y } \vec{v}}}_{\text{vector paralelo a } \vec{r}} - mk\vec{r}/r$$

$$\Rightarrow |\vec{L}\times\vec{A}| = l\cdot A\sin 90^\circ = lA$$

$$\Rightarrow \vec{p}'^2 = p^2 + \frac{l^2A^2}{l^4} - 2\frac{\vec{p}\cdot(\vec{L}\times\vec{A})}{l^2}$$

By: Herminso Villarraga Gómez

$$\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - mK\hat{r} \longrightarrow \vec{A}^2 = p^2 l^2 + m^2K^2 - 2mK\hat{r}\cdot\underbrace{(\vec{p}\times\vec{L})}_{\parallel\ a\ \hat{r}}$$

$$E = p^2/2m - K/r \qquad = \left(p^2 - 2mK\frac{p}{L}\right)l^2 + mK^2 = 2mE + mK^2$$

$$\Rightarrow p'^2 = p^2 + 2mE + \frac{K^2m^2}{l^2} - \frac{2\vec{p}\cdot(\vec{L}\times\vec{A})}{l^2}$$

$$\vec{p}\cdot(\vec{L}\times\vec{A}) = \vec{p}\cdot\left[\vec{L}\times(\vec{p}\times\vec{L}) + \frac{Km}{r}(\vec{r}\times\vec{L})\right]$$

$$= \vec{p}\cdot\left[l^2\vec{p} + \frac{Km}{r}(\vec{r}\cdot\vec{p}\,\vec{r} - r^2\vec{p})\right]$$

$$= (l^2 - Kmr)p^2 + \frac{Km}{r}(\vec{r}\cdot\vec{p})^2$$

$$\Rightarrow p'^2 = 2mE + \frac{K^2m^2}{l^2} + p^2 - 2\left(1 - \frac{Kmr}{l^2}\right)p^2 - \frac{2Km}{l^2 r}(\vec{r}\cdot\vec{p})^2$$

$$= 2mE + \frac{K^2m^2}{l^2} - p^2 + \frac{2Kmr}{l^2}p^2 - \frac{2Km}{l^2 r}(\vec{r}\cdot\vec{p})^2$$

$$= 2mE + \frac{K^2m^2}{l^2} - p^2 + \frac{2Kmr}{l^2}\left[p^2 - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})^2}{r^2}\right]$$

$$= \frac{K^2m^2}{l^2} + 2m\left\{\underbrace{E - \frac{p^2}{2m}} + \frac{Kr}{l^2}\left(p^2 - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})^2}{r^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{K^2m^2}{l^2} + 2m\left\{-\frac{K}{r} + \frac{Kr}{l^2}\left(p^2 - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})^2}{r^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{K^2m^2}{l^2} + 2m\frac{K}{r}\left\{-1 + \frac{r^2}{l^2}\left(p^2 - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})^2}{r^2}\right)\right\}$$

$$l^2 = \vec{L}\cdot\vec{L} = (\vec{r}\times\vec{p})\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) \qquad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$= \vec{p}\cdot[(\vec{r}\times\vec{p})\times\vec{r}] = \vec{p}\cdot[\vec{r}\times(\vec{p}\times\vec{r})]$$

$$= \vec{p}\cdot[r^2\vec{p} - (\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}] \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$= r^2\left[p^2 - (\vec{r}\cdot\vec{p})^2/r^2\right]$$

$$\Rightarrow p'^2 = \frac{K^2m^2}{l^2} + 2m\frac{K}{r}\left\{\cancel{-1} + \underbrace{\cancel{\frac{r^2}{l^2}\left[p^2 - (\vec{r}\cdot\vec{p})^2/r^2\right]}}_{1}\right\}$$

$$\boxed{p'^2 = \frac{K^2m^2}{l^2}} \longrightarrow$$ Ec. de un círculo en el espacio de momentos. de radio mK/l.

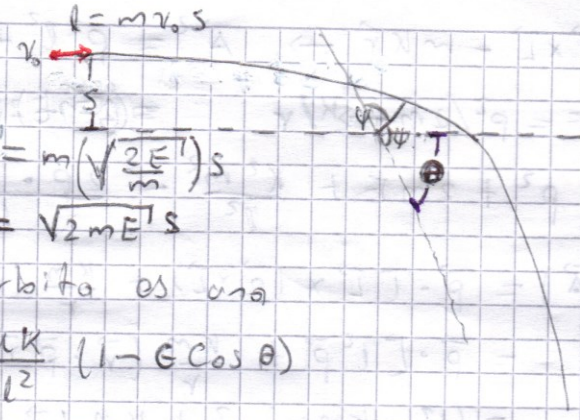
$$\vec{p} = \vec{p}' - \frac{\vec{L}\times\vec{A}}{l^2} = p'^2 - \frac{\cancel{l}A}{l^{\cancel{2}}}\hat{y} \longrightarrow$$ ello suponiendo $\vec{L} = l\hat{z}$, $\vec{A} = A\hat{r} = A\hat{x}$

$$\vec{p} = \vec{p}' - \frac{A}{l}\hat{y}$$

$\longrightarrow$ Corrimiento A/l del centro.

Refiérase a la derivación de las ec. (3.98) a (3.102) Goldstein

3.30 $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\hat{e}_r$



$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \longrightarrow l = m\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)s$

$$l = \sqrt{2mE}\, s$$

Como $E > 0$, la orbita es una hipérbola:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu K}{l^2}(1 - \epsilon \cos\theta)$$

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{\mu K^2} = 1 + \frac{2E}{\mu K^2}(2mE)s^2 = 1 + \frac{m}{\mu}\left(\frac{2Es}{K}\right)^2 > 1$$

↳ la excentricidad es la misma que en el caso repulsivo, dependiendo de K^2 pero la ec. de la orbita es diferente ya que depende de K.

$\Theta = 2\psi - \pi \longrightarrow$ ángulo de scattering (similar pero diferente al caso repulsivo)

$$\frac{1}{\epsilon} = -\cos\psi = -\cos[(\Theta+\pi)/2] = \sin(\Theta/2) \quad y$$

$$\cot^2(\Theta/2) = \epsilon^2 - 1 = \frac{m}{\mu}\left(\frac{2Es}{K^2}\right)^2$$

de modo que:

$$s = \frac{K}{2E}\sqrt{\frac{\mu}{m}}\cot\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

y la sección transversal de scattering sigue siendo

$$\boxed{\sigma(\Theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{K}{2E}\right)^2 \frac{\mu}{m}\csc^4\frac{\Theta}{2}}$$

3.31 $\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right|$ con $\Theta(s) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty}\frac{s\,dr}{r\sqrt{r^2\left(1-\frac{V(r)}{E}\right) - s^2}}$

$$f = K/r^3 = -\frac{dV}{dr} \longrightarrow V(r) = K/2r^2$$

$$\Rightarrow \Theta(s) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty}\frac{s\,dr}{r\sqrt{r^2 - [s^2 + K/2E]}}$$

En el punto de máximo acercamiento $\dot{r} = 0$ y $r = r_{min}$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m r_m^2 \dot{\theta}^2 + V(r) = \frac{1}{2} m r_m^2 \frac{l^2}{(m r_m^2)^2} + \frac{K}{2r_m^2}$$