解析几何法解 25(3)

——湖南湘江新区思沁学校 2025 年下学期八年级数学期中模拟考试

1 原题

25. 如图 1，点 A 在 y 轴正半轴上，点 B 在 x 轴负半轴上，点 C 和点 D 分别在第四象限和第一象限，OA=OB，OC=OD，OC⊥OD，点 D 的坐标为 (m,n)，且满足 $n^2-4n+4+(2n-m)^2=0$.

(3) 如图 2，点 P,Q 分别在 y 轴正半轴和 x 轴负半轴上，且 OP=OQ，直线 ON⊥BP 交 AB 于点 N，MN⊥AQ 交 BP 的延长线于点 M，判断 ON，MN，BM 的数量关系并证明.

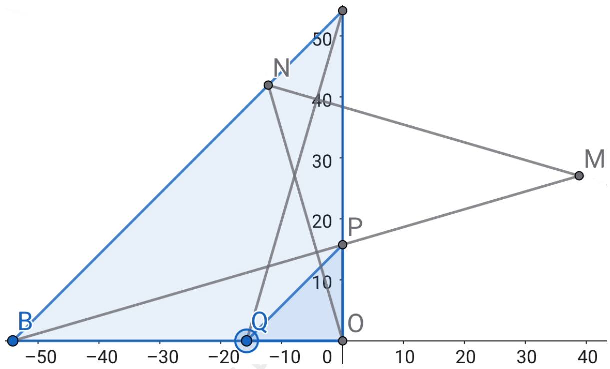

图 2: 图像由 GeoGebra® 绘制

2 使用公式

$$L=\int_b^a\sqrt{1+[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}]^2}\mathrm{d}x\quad(x\in[a,b])$$

3 解：

BM=ON+MN. 理由：

设 OP=OQ=a,AP=BQ=b

则很容易得到:

$$\overleftrightarrow{AB}: y = x + a + b \tag{1}$$
$$\overleftrightarrow{BM}: f_1(x) = \frac{a}{a+b}x + a \tag{2}$$
$$\overleftrightarrow{AQ}: f_2(x) = \frac{a+b}{a}x + a + b \tag{3}$$

∵ON⊥BM
∴ON 的斜率为 BM 的负倒数
∴ 有:

$$\overleftrightarrow{ON}: f_3(x) = -\frac{a+b}{a}x \tag{4}$$

令$f_3(x)$=y，得 AB 与 ON 的交点 N 有:

$$-\frac{a+b}{a}x = x + a + b$$

解得 $x = -\frac{a^2+ab}{2a+b}$
则有 N($-\frac{a^2+ab}{2a+b}$, $\frac{a^2+2ab+b^2}{2a+b}$)
∵MN$perp$AQ
∴ 有

$$\overleftrightarrow{MN}: f_4(x) = -\frac{a}{a+b}x + b \tag{5}$$

令$f_1(x)$=$f_4(x)$，得 BM 与 MN 的交点 M 有:

$$\frac{a}{a+b}x + a = -\frac{a}{a+b}x + b$$

解得 $x = \frac{b^2-a^2}{2a}$
则有 M($\frac{b^2-a^2}{2a}$, $\frac{a+b}{2}$)

$\therefore$ 有:

$$
\begin{aligned}
L_{\overline{\mathrm{ON}}} &= \int_{-\frac{a^2+ab}{2a+b}}^{0} \sqrt{1+[\frac{\mathrm{d}(-\frac{a+b}{a}x)}{\mathrm{d}x}]^2\mathrm{d}x} \\
&= \frac{a+b}{2a+b}\sqrt{2a^2+2ab+b^2} \\
L_{\overline{\mathrm{MN}}} &= \int_{-\frac{a^2+ab}{2a+b}}^{\frac{b^2-a^2}{2a}} \sqrt{1+[\frac{\mathrm{d}(-\frac{a}{a+b}x+b)}{\mathrm{d}x}]^2\mathrm{d}x} \\
&= \frac{b(a+b)}{2a(2a+b)}\sqrt{2a^2+2ab+b^2} \\
L_{\overline{\mathrm{BM}}} &= \int_{-a-b}^{\frac{b^2-a^2}{2a}} \sqrt{1+[\frac{\mathrm{d}(\frac{a}{a+b}x+a)}{\mathrm{d}x}]^2\mathrm{d}x} \\
&= \frac{a+b}{2a}\sqrt{2a^2+2ab+b^2}
\end{aligned}
$$

$\because \frac{a+b}{2a+b} + \frac{b(a+b)}{2a(2a+b)} = \frac{a+b}{2a}$
$\therefore L_{\overline{\mathrm{ON}}} + L_{\overline{\mathrm{MN}}} = L_{\overline{\mathrm{BM}}}$ ∴ON+MN=BM

参考文献

[1] 《解析几何》_ 丘维声著 _ 北京大学出版社 _ISBN:978-7-301-28005-8

[2] 《微分几何》第五版 _ 梅向明、黄敬之著 _ 高等教育出版社 _ ISBN:978-7-040-50741-6