

解析几何法解 25(3)

——湖南湘江新区思沁学校 2025 年下学期八年级数学期中模拟考试

1 原题

25. 如图 1, 点 A 在 y 轴正半轴上, 点 B 在 x 轴负半轴上, 点 C 和点 D 分别在第四象限和第一象限, $OA=OB$, $OC=OD$, $OC \perp OD$, 点 D 的坐标为 (m, n) , 且满足 $n^2 - 4n + 4 + (2n - m)^2 = 0$.

(3) 如图 2, 点 P, Q 分别在 y 轴正半轴和 x 轴负半轴上, 且 $OP=OQ$, 直线 $ON \perp BP$ 交 AB 于点 N, $MN \perp AQ$ 交 BP 的延长线于点 M, 判断 ON, MN, BM 的数量关系并证明.

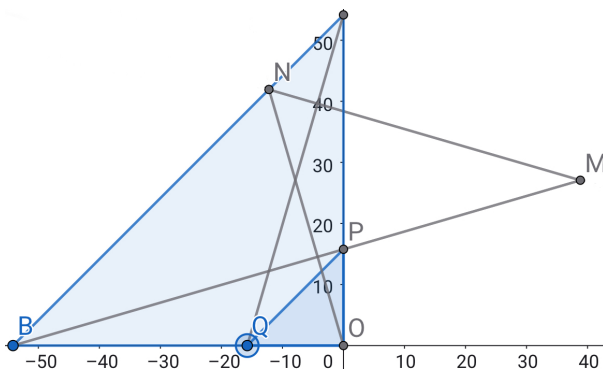


图 2: 图像由 GeoGebra[®] 绘制

2 使用公式

$$L = \int_b^a \sqrt{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2} dx \quad (x \in [a, b])$$

3 解:

$BM=ON+MN$. 理由:

设 $OP=OQ=a, AP=BQ=b$

则很容易得到：

$$\overleftrightarrow{AB} : y = x + a + b \quad (1)$$

$$\overleftrightarrow{BM} : f_1(x) = \frac{a}{a+b}x + a \quad (2)$$

$$\overleftrightarrow{AQ} : f_2(x) = \frac{a+b}{a}x + a + b \quad (3)$$

$\therefore ON \perp BM$

$\therefore ON$ 的斜率为 BM 的负倒数

\therefore 有：

$$\overleftrightarrow{ON} : f_3(x) = -\frac{a+b}{a}x \quad (4)$$

令 $f_3(x) = y$ ，得 AB 与 ON 的交点 N 有：

$$-\frac{a+b}{a}x = x + a + b$$

解得 $x = -\frac{a^2+ab}{2a+b}$

则有 $N(-\frac{a^2+ab}{2a+b}, \frac{a^2+2ab+b^2}{2a+b})$

$\therefore MN \perp AQ$

\therefore 有

$$\overleftrightarrow{MN} : f_4(x) = -\frac{a}{a+b}x + b \quad (5)$$

令 $f_1(x) = f_4(x)$ ，得 BM 与 MN 的交点 M 有：

$$\frac{a}{a+b}x + a = -\frac{a}{a+b}x + b$$

解得 $x = \frac{b^2-a^2}{2a}$

则有 $M(\frac{b^2-a^2}{2a}, \frac{a+b}{2})$

∴ 有:

$$\begin{aligned}
 L_{\overline{ON}} &= \int_{-\frac{a^2+ab}{2a+b}}^0 \sqrt{1 + \left[\frac{d(-\frac{a+b}{a}x)}{dx}\right]^2} dx \\
 &= \frac{a+b}{2a+b} \sqrt{2a^2 + 2ab + b^2} \\
 L_{\overline{MN}} &= \int_{-\frac{a^2+ab}{2a+b}}^{\frac{b^2-a^2}{2a}} \sqrt{1 + \left[\frac{d(-\frac{a}{a+b}x + b)}{dx}\right]^2} dx \\
 &= \frac{b(a+b)}{2a(2a+b)} \sqrt{2a^2 + 2ab + b^2} \\
 L_{\overline{BM}} &= \int_{-a-b}^{\frac{b^2-a^2}{2a}} \sqrt{1 + \left[\frac{d(\frac{a}{a+b}x + a)}{dx}\right]^2} dx \\
 &= \frac{a+b}{2a} \sqrt{2a^2 + 2ab + b^2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a+b}{2a+b} + \frac{b(a+b)}{2a(2a+b)} = \frac{a+b}{2a}$$

$$\therefore L_{\overline{ON}} + L_{\overline{MN}} = L_{\overline{BM}} \therefore \overline{ON} + \overline{MN} = \overline{BM}$$

参考文献

- [1] 《解析几何》 _ 丘维声著 _ 北京大学出版社 _ ISBN:978-7-301-28005-8
- [2] 《微分几何》第五版 _ 梅向明、黄敬之著 _ 高等教育出版社 _ ISBN:978-7-040-50741-