8 (ocho)

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

26-07-2017 Análisis Numérico I (75.12- 95.04-95.13) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: [redacted] .... Nombres : [redacted]

Padrón: [redacted]

B

1. B a) Suponer que $\tilde{x}$ es una aproximación a la solución del sistema $Ax = b$, que A es una matriz no singular y que r es el vector residual de $\tilde{x}$. Demostrar que:

$\|x-\tilde{x}\| \leq \|r\|\|A^{-1}\|$

$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|b\|} \qquad b \neq 0 \; y \; r \neq 0$

B b) Dado el sistema: $\begin{cases} 39x_1 + 16x_2 = 71 \\ 0.68x_1 + 0.29x_2 = 1.26 \end{cases}$ Tomar como aproximación $\tilde{x} = (0.98\ 1.98)^t$ y aritmética de tres dígitos, para estimar el número de condición de la matriz A. Realizar un paso de refinamiento iterativo para mejorar la aproximación.

B-

2. La ley de radiación de *Stefan* establece que la razón de cambio en la temperatura de un cuerpo a $T(t)$ grados en un medio a $M(t)$ grados es proporcional a $M^4 - T^4$. Sea $K = 40^{-4}$ la constante de proporcionalidad. Suponer la temperatura del medio constante, es decir $M(t) = 70°F$.

R a) Si $T(0) = 100°F$, plantear el problema como un problema de valores iniciales para $0 \leq t \leq 2$. Mostrar que tiene solución única.

B b) Usar el método de Runge Kutta del punto medio para aproximar la temperatura en el instante $t = 0.2$, usar $h = 0.1$.

B

3. En el estudio de un circuito eléctrico consistente en una resistencia, un condensador, un inductor y una fuerza electromotriz obtenemos un problema con valores iniciales de la forma: $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE(t)}{dt}$. Donde L es la inductancia en *henrios*, R es la resistencia en *ohms*, C es la capacidad en *faradios*, $E(t)$ es la fuerza electromotriz en *voltios*, e I es la corriente en *amperios*. Determinar la corriente en el instante $t = 0.3$ si la corriente inicialmente es nula lo mismo que su derivada. Sabiendo que: $L = 1H$, $R = 1\Omega$, $C = 0.5F$ y $E(t) = t^2$. Usar el método de Euler para aproximar el valor pedido, calcular el h para realizar tres iteraciones. Usar al menos dos decimales y redondeo.

B

4. Determinar la intersección entre la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y la hipérbola $xy = \frac{1}{2}$ en el primer cuadrante tomando como valor inicial el vector $(1.94, 0.26)^t$. Utilizar dos iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales. Usar al menos cuatro decimales y redondeo.

B

5. Si la velocidad de un fluido está descrita por $V(x,y,z) = (y^2, zx, z)$. Determinar, usando la regla de los trapecios compuesta con $N = 6$ la circulación a lo largo de la curva C. Sabiendo que la curva C es la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas, en el plano $z = 0$. Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos dos decimales y redondeo. ($F = \int_a^b V(\sigma(t))\sigma'(t)dt$, $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3/\sigma(t) = (cos(t), sen(t), 0)$)

1

[redacted]

1) a) • $r = b - A\tilde{x}$

$r = Ax - A\tilde{x}$ $\quad \downarrow b = Ax$

$r = A(x - \tilde{x})$

$\downarrow$ si A es no singular $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$A^{-1}r = A^{-1}A(x - \tilde{x})$

$A^{-1}r = (x - \tilde{x})$

$\|A^{-1}r\| = \|x - \tilde{x}\|$

$\|A^{-1}\| \|r\| \geq \|x - \tilde{x}\|$ (1)

• $Ax = b$

$\|Ax\| = \|b\|$

$\|A\| \|x\| \geq \|b\|$

$\frac{1}{\|b\|} \geq \frac{1}{\|A\| \|x\|}$ $\quad \downarrow b \neq 0, \|x\| \neq 0$

$\downarrow$ (1)

$\frac{\|A^{-1}\| \|r\|}{\|b\|} \geq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|A\| \|x\|}$

$\|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \geq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$ (2)

b) $\frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|} 10^t \approx \|A^{-1}\| \|A\| = k(A)$ que es el número de condición de la matriz

$\begin{cases} A\tilde{y} = r \\ r = b - A\tilde{x} \end{cases}$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0,98 \\ 1,98 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 39 & 16 \\ 0,68 & 0,29 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 71 \\ 1,26 \end{pmatrix}$

$r = b - A\tilde{x}$

$$= \begin{pmatrix} 71 \\ 1,26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39 & 16 \\ 0,68 & 0,29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,98 \\ 1,98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 1,26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 69,9000 \\ 1,2406 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,0194 \end{pmatrix}$$

$A\tilde{y} = r$

$$\begin{pmatrix} 39 & 16 \\ 0,68 & 0,29 \end{pmatrix} \tilde{y} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,0194 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{y} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{pmatrix}$$

$\|\tilde{y}\|_\infty = 0,02$

$\|\tilde{x}\|_\infty = 1,98$ $\Rightarrow$ aritmética de 3 dígitos: $t=3$

$$\frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|} 10^3 = \frac{0,02}{1,98} 10^3 = 10,101 \gg 1 \Rightarrow \text{no está bien condicionada}$$

Paso de refinamiento:

$$\tilde{x}^{1} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,98 \\ 1,98 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 2,0 \end{pmatrix}$$

[redacted]

2

② ~~$\frac{\partial T}{\partial M} = (M^4 - Z^4)k$~~

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (M^4 - T^4(t))k$$

$$\begin{cases} T' = (M^4 - T^4)k \\ T(0) = 100°F \end{cases}$$

$0 \le t \le 2$, Planteo entonces un

$D = \{t, t \in \mathbb{R} / 0 < t < 2\}$

$\Rightarrow D$ es convexo

Ya que tengo un recinto D convexo, para que tenga solución única debe existir $L \in \mathbb{R}$ /

$|f(t_1) - f(t_2)| \le L |t_1 - t_2|$ $f(t) = (M^4 - T^4_{(t)})k$.

$|f(t_1; y_1) - f(t_2; y_2)| \le L |y_1 - y_2|$

$|(M^4 - T^4(t_1))k - (M^4 - T^4(t_2))k| \le L |t_1 - t_2|$

$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 2 \end{cases}$

$|k\cancel{M^4} - kT^4(0) - k\cancel{M^4} + T^4(2)k| \le L |0 - 2|$

$|-k(T^4(0) - T^4(2))| \le L\,2$. cual

esto es lo que debe probar

$k\,|T^4(0) - T^4(2)| \le L\,2$.

$k\,|100^4 - T^4(2)| \le L\,2 \Rightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ para que se cumple $\Rightarrow$ el sistema tiene solución única

b) Runge Kutta del punto medio $\Rightarrow$ $y_{i+1} = y_i + h\,k_2$, $k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{h}{2}k_1)$

$k_1 = f(t_i, T_i)$.

$$\begin{cases} T' = (M^4 - T^4)k \\ T(0) = 100°F \end{cases}$$

$T_1(t = 0{,}1) = T(0) + 0{,}1\,k_2^0$

$k_1^0 = (M^4 - T^4(0))\,40^{-4} = -29{,}68$

$k_2^0 = f\left(0 + \frac{0{,}1}{2}, 100 + \frac{0{,}1}{2}(-29{,}68)\right) = f(0{,}05, 98{,}52)$

$k_2^0 = (M^4 - 98{,}52^4)\,40^{-4} = -27{,}42$

$T_1 = 100 + 0{,}1(-27{,}42) = 97{,}26$.

$T_2(t=0{,}2) = T_1 + 0{,}1\ k_2^{(1)}$

$k_1^{(1)} = f(t_1, T_1)$

$= (M^4 - 97{,}26^4)\,40^{-4} = -25{,}58$

$k_2^{(2)} = f(t_1 + \frac{h}{2},\ T_1 + \frac{h}{2} k_1)$

$= f(0{,}15,\ 95{,}98)$

$= (M^4 - 95{,}98^4)\,40^{-4} = -23{,}77.$

$T_2 = 97{,}26 + 0{,}1(-23{,}77) = \boxed{94{,}88}$.

$\Rightarrow \boxed{T(0{,}2) = 94{,}88}$.

3 $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE(t)}{dt}$ si $E(t) = t^2 \Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = 2t$

$$\begin{cases} LI'' + RI' + \frac{I}{C} = 2t \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = 0 \end{cases}$$

hago un cambio de variables $\Rightarrow$

$U = I'$

$I'' = U' = \dfrac{2t - \frac{I}{C} - RU}{L}$

Planteo nuevamente el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} U' = \dfrac{2t - \frac{I}{0{,}5F} - 1\Omega\, U}{1H} \\ I' = U \\ U(0) = 0 \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

y resuelvo con Euler que planteo

$$\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ I_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i \\ I_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(U, I(t)) \\ U_i \end{pmatrix}$$

con $\boxed{f(U, I(t)) = U'}$

Quiero llegar a $t = 0{,}3$ desde $t_0 = 0$ con 3 iteraciones $\Rightarrow \frac{0{,}3 - 0}{3} = \boxed{0{,}1 = h}$

$$\begin{pmatrix} U_1(t=0{,}1) \\ I_1(t=0{,}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ I_0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} \dfrac{2.0 - \frac{I_0}{0{,}5} - 1U_0}{1} \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} \dfrac{2.0 - \frac{0}{0{,}5} - 1.0}{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_2\,(t=0,2) \\ I_2\,(t=0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} \dfrac{2\cdot 0,1 - \frac{I_1}{0,5F} - 1\Omega\, U_1}{1H} \\ U_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} \dfrac{0,2 - \frac{0}{0,5F} - 1\Omega \cdot 0}{1H} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_3\,(t=0,3) \\ I_3\,(t=0,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} \dfrac{2\cdot 0,2 - \frac{I_2}{0,5F} - 1\Omega\, U_2}{1H} \\ 0,02 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} \dfrac{0,4 - \frac{0}{0,5F} - 1 \cdot 0,02}{1H} \\ 0,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,058 \\ 2\cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

~~Si pide solo 2 decimales ⇒~~

$I(t=0,3) = 0,00\ A$

no al menos dos

con 3 decimales ya se puede ver

$I(t=0,3) = 0,002\ A$

[redacted]

HOJA N° 4

FECHA

④ $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ xy = 1/2 \end{cases}$

el método de Newton plantea

$$\begin{cases} J_F(\underset{\sim}{x})\ y = -F(x,y) \\ x^{i+1} = x^i + y^i \end{cases}$$

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1,\ xy - 1/2\right)$$

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1,94 \\ 0,26 \end{pmatrix}$$

① $J_F(\bar{x}_0)\ \bar{y}_0 = -F(\bar{x}_0)$

$$\begin{pmatrix} 0,97 & 0,52 \\ 0,26 & 1,94 \end{pmatrix} \bar{y}_0 = -\begin{pmatrix} 8,5 \cdot 10^{-3} \\ 4,4 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \qquad \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} -8,1312 \cdot 10^{-3} \\ -1,1783 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1,94 \\ 0,26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8,1312 \cdot 10^{-3} \\ -1,1783 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9319 \\ 0,2588 \end{pmatrix}$$

② $$\begin{pmatrix} 0,9660 & 0,5176 \\ 0,2588 & 1,9319 \end{pmatrix} \bar{y}_1 = -\begin{pmatrix} 3,6843 \cdot 10^{-5} \\ -2,4260 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \qquad \bar{y}_1 = \begin{pmatrix} -4,8344 \cdot 10^{-5} \\ 1,9044 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1,9319 \\ 0,2588 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4,8344 \cdot 10^{-5} \\ 1,9044 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9319 \\ 0,2588 \end{pmatrix}$$

[redacted]

HOJA N° 6.

FECHA

$V=(y^2, zx, z)$

$\sigma(t)=(\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0)$

5)

$$\int_a^b V(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt \Rightarrow \quad V(\sigma(t)) = (\operatorname{sen}^2(t),\ 0\cdot\cos(t),\ 0) = (\operatorname{sen}^2(t), 0, 0)$$

$$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$$

$$V(\sigma(t))\cdot\sigma'(t) = (\operatorname{sen}^2(t), 0, 0)\cdot(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$$

$$= -\operatorname{sen}^3(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3(t)\,dt \underset{\pi\cong 3}{=} \int_0^6 -\operatorname{sen}^3(t)\,dt.$$

Si: $a=0$ $N=6$
$b=6$
$\Rightarrow \frac{6-0}{6} = \boxed{1 = h}$

trapecios compuesta: (*)

$$\int_0^6 -\operatorname{sen}^3(t)\,dt = \frac{h}{2}\left[-\operatorname{sen}^3(0) - \operatorname{sen}^3(6) + 2\sum_{j=1}^{5}\left(-\operatorname{sen}^3(x_j)\right)\right]$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	2	3	4	5	6

→ veo la sumatoria.

$$\sum_{j=1}^{5}\left(-\operatorname{sen}^3(x_j)\right) = -\operatorname{sen}^3(1) - \operatorname{sen}^3(2) - \operatorname{sen}^3(3) - \operatorname{sen}^3(4) - \operatorname{sen}^3(5) =$$

$$= -0{,}60 - 0{,}75 - 2{,}81\cdot10^{-3} + 0{,}43 + 0{,}88 = -0{,}035$$

$$= 0{,}5\left[0 + 0{,}02 - 0{,}035\cdot 2\right] = -0{,}025$$

(*) $\int_a^b f(t)\,dt = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right]$, en nuestro caso $a=0$
$b=6$
$f(t) = -\operatorname{sen}^3 t$