8 (ocho)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

28-02-2018 Análisis Numérico I (75.12- 95.04) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido [redacted].......... Nombres : [redacted]...
Padrón: [redacted]

M

1. M a) Demostrar la siguiente afirmación: *Sea* $g \in C^{m+1}[a,b]$, tiene un cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$, existe un método para hallar esta raíz, como raíz simple de una función adecuada.

   M b) Usar tres iteraciones del método demostrado en a) para hallar la raíz múltiple de: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Trababajar al menos con cuatro decimales y redondeo tomar como semilla $p_0 = 0.5$.

B-

2. La difusión de una epidemia es modelada por la ecuación logística: $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)(m - x(t))$ donde $k > 0$, la población total del pueblo es m y $x(t)$ representa la cantidad de infectados pasados t días. La población de un pueblo es de 200 habitantes, para $t = 0$ un décimo de la población de la población está infectada. Sabiendo que para esta epidemia $k = 8.1.10^{-4}$. Usar cinco iteraciones del método de *Runge Kutta del punto medio* para estimar el porcentaje de población infectada al cabo de 10 días.

B

3. Dado el sistema de ecuaciones diferenciales: $\begin{cases} x' = -y + 3z \\ y' = -2x + y + 3z \\ z' = -2x - y + 5z \end{cases}$. Sabiendo que $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$, aplicar dos iteraciones del método de *Euler* para estimar $x(0.2)$, $y(0.2)$ y $z(0.2)$.

B

4. a) Hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la circunferencia $x^2 - 2x + y^2 = 0$ y la hipérbola $xy = 1$. Utilizar tres iteraciones del método de *Newton* para sistemas no lineales. Usar como semilla $x^{(0)} = (1.9\ \ 0.4)^t$. Trabajar con al menos tres decimales y redondeo.

   b) Graficar ambas curvas y la solución obtenida.

B

5. En 1601 el astrónomo alemán *Johannes Kepler* formuló su tercera ley del movimiento planetario, $T = Cx^{\alpha}$ donde x es la distancia al Sol medida en millones de kilómetros, T es el período orbital medido en días, C es una constante, al igual que α. Las parejas de datos (x, T) observados para los primeros cuatro planetas, *Mercurio*, *Venus*, *La Tierra* y *Marte*, son: $(58, 88)$, $(108, 225)$, $(150, 365)$ y $(228, 687)$. Obtener el coeficiente C y la constante α, usando cuadrados mínimos y graficar la curva junto con los puntos que representan a los datos.

[redacted]

(3) $T = C x^{\alpha}$ x = dist. al sol en millones de km.

T = período orbital - días

C = cte α = cte

x	58	108	150	228
T	88	225	365	687

$T = C x^{\alpha}$ es una función potencial. Para usar cuadrados mínimos voy a linealizarla:

$\ln T = \ln C + \alpha \ln x$ Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \ln T_1 \\ \ln T_2 \\ \ln T_3 \\ \ln T_4 \end{pmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ln x_1 & 1 \\ \ln x_2 & 1 \\ \ln x_3 & 1 \\ \ln x_4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \ln C \end{pmatrix}}_{x}$$

Para CM: $A^T A \tilde{x} = A^t b$

Calculo $A^T A$:

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 & \ln x_2 & \ln x_3 & \ln x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln x_1 & 1 \\ \ln x_2 & 1 \\ \ln x_3 & 1 \\ \ln x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} (\ln x_i)^2 & \sum_{i=1}^{4} \ln x_i \\ \sum_{i=1}^{4} \ln x_i & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 92{,}994 & 19{,}182 \\ 19{,}182 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculo $A^t b$

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 & \ln x_2 & \ln x_3 & \ln x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln T_1 \\ \ln T_2 \\ \ln T_3 \\ \ln T_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \ln 58 & \ln 108 & \ln 150 & \ln 228 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 88 \\ \ln 225 \\ \ln 365 \\ \ln 687 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108{,}567 \\ 22{,}326 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^t A \tilde{x} = A^t b$

$$\begin{pmatrix} 92,994 & 19,182 \\ 19,182 & 4 \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} 108,967 \\ 22,326 \end{pmatrix}$$

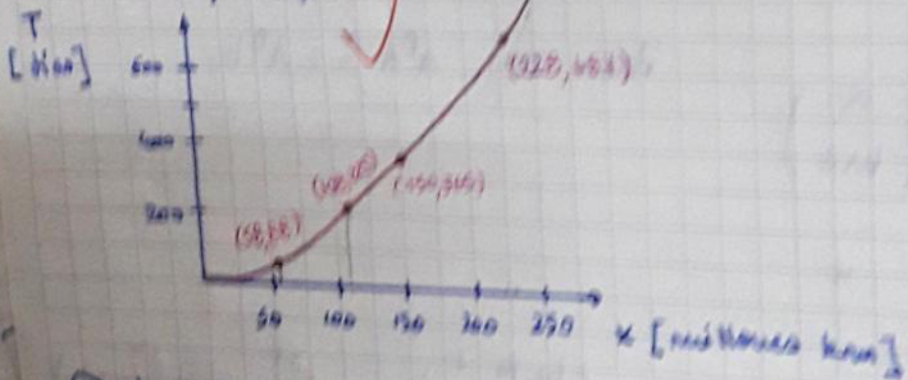
$$\Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1,49263796551 \\ -1,5764453636 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$\alpha = 1,49263796551 \cong 1,493$

$\ln c = -1,5764453636 \Rightarrow c = 0,20670856 7623 \cong 0,207.$

$\Rightarrow T = 0,207\, x^{1,493}$



④ $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 & \rightarrow \text{circunferencia} \\ xy = 1 & \rightarrow \text{hipérbola} \end{cases}$ Semilla $x^{(0)} = (1,9\,;\,0,4)^t$

Defino $F = (x^2 - 2x + y^2\,;\,xy - 1)$

El método de Newton es:

$\left\{ J_F(x^{k-1})\, y^{(k-1)} = -F(x^{k-1}) \qquad x^k = x^{k-1} + y^{k-1} \right\}$

La Jacobiana de F es:

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

[redacted] [redacted]

$$\begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}_{x^{k-1}} \bar{y} = -\begin{pmatrix} x^2-2x+y^2 \\ xy-1 \end{pmatrix}_{x^{k-1}}$$ Reemplazo:

k=1

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1{,}9-2 & 2\cdot 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix} \bar{y} = -\begin{pmatrix} 1{,}9^2-2\cdot 1{,}9+0{,}4^2 \\ 1{,}9\cdot 0{,}4-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix} \bar{y} = -\begin{pmatrix} -0{,}03 \\ -0{,}24 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} -4{,}355\times 10^{-2} \\ 0{,}1355 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^1 = x^0 + y^0 = \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4{,}355\times 10^{-2} \\ 0{,}1355 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8565 \\ 0{,}5355 \end{pmatrix}$$

k=2

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1{,}8565-2 & 2\cdot 0{,}5355 \\ 0{,}5355 & 1{,}8565 \end{pmatrix} \bar{y} = -\begin{pmatrix} 1{,}8565^2-2\cdot 1{,}8565+0{,}5355^2 \\ 1{,}8565\cdot 0{,}5355-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}7130 & 1{,}0710 \\ 0{,}5355 & 1{,}8565 \end{pmatrix} \bar{y} = -\begin{pmatrix} 0{,}0204 \\ -0{,}0058 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} -1{,}691\times 10^{-2} \\ 8{,}002\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$x^2 = x^1 + y^1 = \begin{pmatrix} 1{,}8565 \\ 0{,}5355 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}691\times 10^{-2} \\ 8{,}002\times 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8396 \\ 0{,}5435 \end{pmatrix}$$

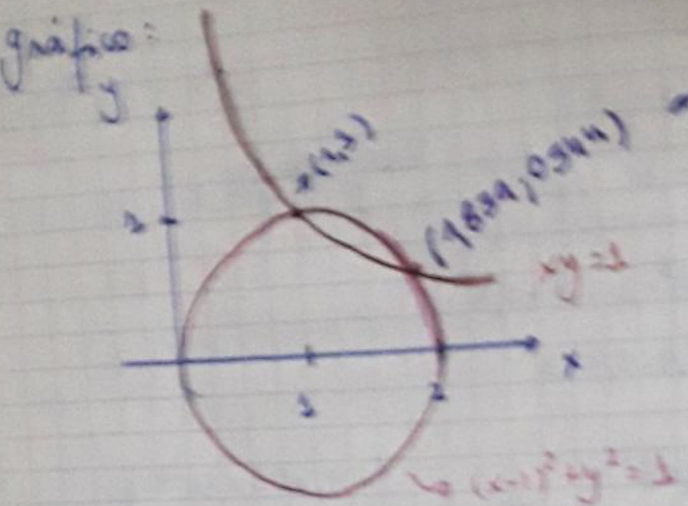
k=3

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1{,}8396-2 & 2\cdot 0{,}5435 \\ 0{,}5435 & 1{,}8396 \end{pmatrix} \bar{y} = -\begin{pmatrix} 1{,}8396^2-2\cdot 1{,}8396+0{,}5435^2 \\ 1{,}8396\cdot 0{,}5435-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}6792 & 1{,}087 \\ 0{,}5435 & 1{,}8396 \end{pmatrix} \bar{y} = -\begin{pmatrix} 0{,}0003 \\ -0{,}0001 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} -2{,}644\times 10^{-4} \\ 1{,}324\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$x^3 = x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} 1{,}8396 \\ 0{,}5435 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2{,}644\times 10^{-4} \\ 1{,}324\times 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}839 \\ 0{,}544 \end{pmatrix}$$

gráfico:



Obtuve esta sol... porque la semilla es más cercana.

③ $\begin{cases} x' = -y+3z \\ y' = -2x+y+3z \\ z' = -2x-y+5z \\ x(0)=1 \\ y(0)=1 \\ z(0)=1 \end{cases}$

Aplicar 2 iteraciones de Euler para estimar: $x(0,2)$, $y(0,2)$, $z(0,2)$

$h = \dfrac{b-a}{N} = \dfrac{0,2-0}{2} = \underline{0,1 = h}$

El método de Euler es:

$y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i; y_i) \qquad y' = f(t_i; y_i)$

Aplicandolo al sistema:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -y_i + 3z_i \\ -2x_i + y_i + 3z_i \\ -2x_i - y_i + 5z_i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=1 \\ z(0)=1 \end{matrix}$$

$\underline{i=0}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -y_0 + 3z_0 \\ -2x_0 + y_0 + 3z_0 \\ -2x_0 - y_0 + 5z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -1+3.1 \\ -2.1+1+3.1 \\ -2.1-1+5.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} ✓$$

[redacted]

$i=1$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} -1,2+3(1,2) \\ -2(1,2)+1,2+3(1,2) \\ -2(1,2)-1,2+5(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} 2,4 \\ 2,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{(0,2)} = \begin{pmatrix} 1,44 \\ 1,44 \\ 1,44 \end{pmatrix}$$

(2) $\frac{dx(t)}{dt} = k\,x(t)\,(m - x(t)) \quad k>0$

población total = m
$x(t)$ = infectados en t días

$k = 8,1 \times 10^{-4} \quad m = 200 \quad x(0) = 20$

5 iteraciones de R-K del punto medio para estimar $x(10)$.

$h = \frac{b-a}{N} = \frac{10-0}{5} = 2$

$x' = 8,1 \times 10^{-4} \cdot x\,(200 - x)$

El método de R-K del punto medio es:

$y_{i+1} = y_i + k_2 h \quad k_1 = f(t_i, y_i) \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2} ; y_i + \frac{h\,k_1}{2}\right)$

Aplicado al problema:

$x_{i+1} = x_i + k_2 h \quad k_1 = f(t_i, x_i) \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2} ; x_i + \frac{h\,k_1}{2}\right)$

$x' = f(t_i, x_i)$

$i=0 \quad t=0 \quad x=20$

$x_1 = x_0 + k_2 h \quad k_1 = f(t_0, x_0) \quad k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2} ; x_0 + \frac{h\,k_1}{2}\right)$

$k_1 = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 20\,(200-20) = 2,916$

$k_2 = f\left(1 ; 20 + \frac{2}{2} \cdot 2,916\right) = f(1 ; 22,916) = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 22,916\,(200 - 22,916) = 3,2870$

$x_1 = 20 + 3,2870 \cdot 2 = 26,574$, ~~como~~ $\Rightarrow$

$x_1(2) = 27$ personas

$i=1 \quad t_1 = 2 \quad x_1 = 27$

$x_2 = x_1 + k_2 \cdot 2 \qquad k_1 = f(t_1, x_1) \qquad k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2} ; x_1 + \frac{h k_1}{2}\right)$

$k_1 = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 27 (200 - 27) = 3,78351$

$k_2 = f\left(2+1 ; 27 + \frac{2}{2} \cdot 3,78351\right) = f(3, 30,78351)$

$k_2 = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 30,78351 (200 - 30,78351) = 4,219352478478$

$x_2 = 27 + k_2 \cdot 2 = 35,44 \rightarrow x_2 = 35$ personas

$i=2 \quad t_2 = 4 \quad x_2 = 35$

$x_3 = x_2 + k_2 \cdot 2 \qquad k_1 = f(t_2, x_2) \qquad k_2 = f\left(t_2 + \frac{h}{2} ; x_2 + \frac{h k_1}{2}\right)$

$k_1 = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 35 (200 - 35) = 4,67775$

$k_2 = f\left(4+1 ; 35 + \frac{2}{2} \cdot 4,67775\right) = f(5, 39,67775)$

$k_2 = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 39,67775 (200 - 39,67775) = 5,1525931855$

$x_3 = 35 + k_2 \cdot 2 = 45,30 \rightarrow x_3 = 45$ personas

$i=3 \quad t_3 = 6 \quad x_3 = 45$

$x_4 = x_3 + k_2 \cdot 2 \qquad k_1 = f(t_3, x_3) \qquad k_2 = f\left(t_3 + \frac{h}{2} ; x_3 + \frac{h k_1}{2}\right)$

$k_1 = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 45 (200 - 45) = 5,64975$

$k_2 = f\left(6+1 ; 45 + \frac{2}{2} \cdot 5,64975\right) = f(7, 50,64975)$

$k_2 = 8,1 \times 10^{-4} \cdot 50,64975 (200 - 50,64975) = 6,1272877882$

$x_4 = 45 + k_2 \cdot 2 = 57,254 \rightarrow x_4 = 57$ personas [redacted] [redacted]

$i=3$ $t_4 = 8$ $x_4 = 57$

$x_5 = x_4 + k_2 \cdot 2$ $k_1 = f(t_4, x_4)$ $k_2 = f(t_4 + \frac{h}{2}; x_4 + \frac{hk_1}{2})$

$k_1 = 8,1\times10^{-4} \cdot 57\,(200-57) = 6,60231$

$k_2 = f(8+1; 57 + \frac{2}{2}\cdot 6,60231) = f(9; 63,60231)$

$k_2 = 8,1\times10^{-4} \cdot 63,60231\,(200-63,60231) = 7,026918611 76$

$x_5 = 57 + k_2 \cdot 2 = 71,053 \Rightarrow X(10) = 71$ personas

9%

falta

(1) b. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ $p_0 = 0,5$

El método es el método de N-R para raíces múltiples:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)\cdot f'(p_n)}{f'(p_n)^2 - f(p_n)\cdot f''(p_n)}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \\ f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 \\ f''(x) = 6x - 10 \end{cases}$$

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)\cdot f'(p_0)}{[f'(p_0)]^2 - f(p_0)\cdot f''(p_0)}$$

$$p_1 = 0,5 - \frac{(-0,625)\cdot 2,75}{7,5625 - (-0,625)\cdot(-7)} = 0,5 - 4,072\times10^{-2}$$

$p_1 = 0,4593$

mal

$p_1 = 1.0392$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)\cdot f'(p_1)}{[f'(p_1)]^2 - f(p_1)\cdot f''(p_0)} = 0,4593 - \frac{(-0,743)\cdot 3,040}{9,241 - (-0,743)\cdot(-7,2442)}$$

$p_2 = 0,4593 - (-0,5853) = 1,0447$

arrastre error

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)\cdot f'(p_2)}{[f'(p_2)]^2 - f(p_2)\cdot f''(p_2)} = 1{,}0447 - \frac{(-0{,}0040)\cdot(-0{,}1428)}{2{,}486\times10^{-2} - (-0{,}0040)\cdot(-3{,}4848)}$$

Mal

$p_3 = 1{,}0447 - 1{,}5433\times10^{-2} = 1{,}0293$

Se aproxima a la raíz múltiple real que es 1.

$f(x) = (x-3)(x-1)^2$

a)

Para que g tenga un cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$ tiene que cumplir: $g(p) = g'(p) = g''(p) \dots = g^{m}(p) = 0$ y $g^{m+1}(p) \neq 0$

Defino una función $\mu(x) = \dfrac{g(x)}{g'(x)}$

Aplico el método de N-R a esta nueva función:

$$p_{m+1} = p_m - \frac{\mu(p_m)}{\mu'(p_m)} \qquad \mu(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

$$\mu'(x) = \frac{g'(x)\cdot g'(x) - g(x)\,g''(x)}{[g'(x)]^2}$$

reemplazo:

$$p_{m+1} = p_m - \frac{g(x)/g'(x)}{\dfrac{g'(x)\cdot g'(x) - g(x)\,g''(x)}{[g'(x)]^2}} =$$

$$p_{m+1} = p_m - \frac{g(x)\cdot[g'(x)]^{\cancel{2}}}{\cancel{g'(x)}\cdot g'(x)^2 - g(x)\cdot g''(x)}$$

Método de N-R para raíces múltiples.

No importa la multiplicidad del cero, lo busco como una raíz simple.

no es lo pedido
tenés que pensar que $\mu(x)$ tiene una raíz simple en p.