10 (diez)

No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con tres ejercicios correctamente resueltos en su totalidad. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras de precisión (preferible usar memorias de la calculadora). La función log indica logaritmo natural.

Apellido, nombre(s):

B 1. El momento de apoyo de una ménsula con carga uniforme distribuida y carga concentrada en la punta se calcula:

$$M = q \cdot \frac{l^2}{2} + P \cdot l$$

Donde q es la carga distribuida, P la concentrada, y l la longitud de la ménsula. Se determinó que la longitud es $1.2m$ con un error absoluto menor a $2cm$, la carga distribuida es $(2.00 \pm 0.08)kN/m$, y la carga concentrada es $1.5kN$ con una cota de error relativo de 5 %

B (a) Calcular el momento de apoyo. Informar dicho momento con su cota de error.

R (b) Calcular una cota para el error relativo cometido.

B 2. Se desea conocer una raíz r de la función $f(x) = x^4 - e^x + 2$ que se sabe está cercana a $x_0 = 8$. Encontrar la raíz por el método de Newton-Raphson, interrumpir el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0.05. Expresar el resultado $r = \overline{r} \pm \Delta r$.

B 3. Dados los datos: $f(1) = 2$, $f(3) = 8$, $f'(1) = 0$, $f'(3) = 8.78889831$, se pide:

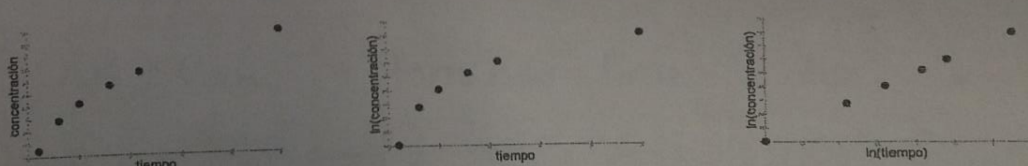
(a) Hallar un polinomio interpolante de orden 3 y estimar $f(2)$.

(b) ¿Es único el polinomio interpolante hallado? ¿Se puede acotar el error cometido?

B 4. Para un proceso químico se obtuvo la siguiente tabla de mediciones de concentración, $c(t)$ (en mg/ml), versus tiempo t (en minutos). Además, para analizar el comportamiento se realizan cálculos auxiliares y los gráficos: (a) $c(t)$ vs. t (b) $\log(c(t))$ vs. t (c) $\log(c(t))$ vs. $\log(t)$:

Datos		Cálculos auxiliares	
t	$c(t)$	$\log(t)$	$\log(c(t))$
1	1.5000	0	0.4055
3	1.9741	1.0986	0.6801
5	2.2430	1.6094	0.8078

Datos		Cálculos auxiliares	
t	$c(t)$	$\log(t)$	$\log(c(t))$
8	2.5227	2.0794	0.9253
11	2.7317	2.3979	1.0049
25	3.3541	3.2189	1.2102



(a) (b) (c)

B (a) ¿Cuál de los siguientes modelos (donde A y B son constantes) le parece más adecuado para ajustar a los datos?

1. $c(t) = A \cdot t + B$ 2. $c(t) = A \cdot t^B$ 3. $c(t) = A \cdot e^{B \cdot t}$

B (b) Estimar por mínimos cuadrados el valor de los parámetros A y B del modelo seleccionado en el ítem anterior.

B (c) Usar el modelo del ítem anterior para estimar la concentración a tiempo $t = 18$ minutos.

B 5. Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, resolver el sistema mediante descomposición LU sin pivoteo parcial (sin intercambio de filas). Escriba todos los pasos intermedios.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

① Siendo $M = q\frac{l^2}{2} + Pl$, con:

$\bar{l} = 1,2\,m$ $\quad e_{a_l} < 0,02\,m \Rightarrow \Delta l \geq e_{a_l} \rightsquigarrow \Delta l = 0,02\,m$

$q = (2,00 \pm 0,08)\,kN/m$, siendo $\Delta q = 0,08\,kN/m$ y $\bar{q} = 2,00\,kN/m$

$\bar{P} = 1,5\,kN$ $\quad e_{rP} = 5\% = 0,05$

Siendo $e_{r_l} = \frac{e_{a_l}}{\bar{P}} \rightsquigarrow e_{aP} = 0,075\,kN = 75\,N$

a. $M = \bar{M} \pm \Delta M$

La cota de error del momento de apoyo, la calculo a partir de:

$$\Delta M = \left|\frac{\partial M}{\partial q}\right| \Delta q + \left|\frac{\partial M}{\partial l}\right| \Delta l + \left|\frac{\partial M}{\partial P}\right| \Delta P$$

$$\Delta M = \frac{\bar{l}^2}{2} \Delta q + (\bar{q}\bar{l} + \bar{P})\Delta l + \bar{l}\,\Delta P$$

$$\Delta M = \frac{(1,2\,m)^2}{2}(0,08)\,kN/m + (2,00\,kN/m \cdot 1,2\,m + 1,5\,kN)\,0,02\,m + 1,2\,m \cdot 0,075\,kN$$

$$\Delta M = 0,2256 = 0,3\,\cancel{kN/m}\,kN.m$$

↳ redondeo para arriba la cota de error

$$\bar{M} = \bar{q}\frac{\bar{l}^2}{2} + \bar{P}\bar{l} = 3,24\,\cancel{kN}\,kN.m = 3,2$$

↓ por redondeo simétrico

$$\boxed{M = (3,2 \pm 0,3)}\,kN.m$$

✓

b. $\Delta M \geq e_{aM} \rightsquigarrow$ tomando $e_{aM} =$ no! usa la info sin truncar

$$e_{rM} = \frac{e_{aM}}{\bar{M}} = \frac{0,3}{3,2} = 0,094 = \boxed{9,4\% = e_{rM}}$$

↳ 7%

② Tengo la función $f(x) = x^4 - e^x + 2$

Quiero hallar la raíz r por el método de Newton-Raphson utilizando como semilla $x_0 = 8$ (ya que se que r es cercana a x_0)

La tolerancia utilizada será: $\varepsilon : |P_n - P_{n-1}| \leq 0,05$

~~[illegible]~~ Utilizando: $P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_n)}{f'(P_{n-1})}$

Busco entonces la derivada de la función proporcionada.

$f'(x) = 4x^3 - e^x$

NOTA

n	p_n	p_{n-1}	$f(p_{n-1})$	$f'(p_{n-1})$	ε	
0	8	-	-	-	-	
1	9,197312235	8	1117,042013	-932,957987	1,197	> 0,05 ⊗
2	8,795893914	9,197312235	-2713,002075	-6758,54073	0,4014	> 0,05 ⊗
3	8,636487796	8,795893914	-619,2903775	-3884,985003	0,1594	
4	8,614241457	8,636487796	-68,00180172	-3056,763765	0,022	

llegue a la tolerancia pedida

$r = \bar{r} \pm \Delta r$ $\quad \bar{r} = 8,614241457$

$\Delta r = 0,022 \simeq 0,03$

↳ redondeo para arriba la cota de error

$$\boxed{r = 8,61 \pm 0,03}$$

③a. Tengo los datos: $f(1) = 2 \quad f(3) = 8 \quad f'(1) = 0 \quad f'(3) = 8,78889831$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
1	2	0
3	8	8,78889831

Como me dan sólo dos nodos, y requiero un polinomio de grado 3; es decir: n nodos y polinomio de grado 2n-1 debo utilizar el polinomio de Hermite

Ya que a partir de n nodos medidos, obtengo 2n+2 nodos utilizados en el polinomio. Siendo este de la forma

$$H_{2n-1}(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[z_0, z_1 \ldots z_i](x-x_0)^2(x-x_1)^2 \ldots (x-z_{2n-1})$$

$x_i = z_{2i} = z_{2i+1}$. Entonces, mis nuevos nodos son

$z_0 = 1 \quad z_1 = 1 \quad z_2 = 3$ y $z_3 = 3$

z_i	$f[z_i]$	$f[z_i, z_{i+1}]$	$f[z_i, z_{i+1}, z_{i+2}]$
$z_0 = 1$	$f[z_0] = f(x_0) = 2$	$f[z_0, z_1] = f'(x_0) = 0$	$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0} = 1,5$
$z_1 = 1$	$f[z_1] = f(x_0) = 2$	$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1} = 3$	$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1} = 2,894449155$
$z_2 = 3$	$f[z_2] = f(x_1) = 8$	$f[z_2, z_3] = f'(x_1) = 8,78889831$	
$z_3 = 3$	$f[z_3] = f(x_1) = 8$		

$$f[z_0, z_1, z_2, z_3] = \frac{f[z_1, z_2, z_3] - f[z_0, z_1, z_2]}{z_3 - z_0} = 0,6972245775$$

$$\boxed{H_3(x) = 2 + 1,5(x-1)^2 + 0,6972245775(x-1)^2(x-3)}$$

$H_3(2) = 2,802775423 \cong f(2)$

$$\boxed{f(2) \cong 2,8028}$$

③b- en hoja 3

⑤ Tengo el sistema de ecuaciones $Ax=b$ con

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Utilizando el método de descomposición $LU=A$, obtengo

$$L.U.x=b \rightsquigarrow \begin{cases} U.x=y \\ L.y=b \end{cases}$$

siendo L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior.

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Inicialmente defino por doolittle $\rightarrow l_{11}=l_{22}=l_{33}=1$

$$L^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{(0)}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$F_1(L).C_1(U) \rightsquigarrow 1.u_{11}=a_{11} \rightarrow \underline{u_{11}=3}$

$F_1(L).C_2(U) \rightsquigarrow 1.u_{12}=a_{12} \rightarrow \underline{u_{12}=1}$

$F_1(L).C_3(U) \rightsquigarrow 1.u_{13}=a_{13} \rightarrow \underline{u_{13}=-1}$

$F_2(L).C_1(U) \rightsquigarrow l_{21}.u_{11}=a_{21} \rightarrow l_{21}.3=6 \rightarrow \underline{l_{21}=2}$

$F_3(L).C_1(U) \rightsquigarrow l_{31}.u_{11}=a_{31} \rightarrow l_{31}.3=-3 \rightarrow \underline{l_{31}=-1}$

$$L^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{(1)}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$F_2(L).C_2(U) \rightsquigarrow 2.1+1.u_{22}=a_{22} \rightarrow u_{22}=4-2 \rightarrow \underline{u_{22}=2}$

$F_2(L).C_3(U) \rightsquigarrow 2(-1)+1.u_{23}=a_{23} \rightarrow u_{23}=-2+2 \rightarrow \underline{u_{23}=0}$

$F_3(L).C_2(U) \rightsquigarrow (-1)1+l_{32}.u_{22}=a_{32} \rightarrow l_{32}.2=-1+1=0 \rightarrow \underline{l_{32}=0}$

$$L^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{(2)}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$F_3(L).C_3(U) \rightsquigarrow (-1)(-1)+1.u_{33}=a_{33} \rightsquigarrow \underline{u_{33}=-1}$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$L.y = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{y_1 = 0}$

$y_2 = -2 - 2y_1 \rightarrow \underline{y_2 = -2}$ $\qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$y_3 = -2 + y_1 \rightarrow \underline{y_3 = -2}$

$U.x = y \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \underline{x_2 = -1} \\ \rightarrow \underline{x_3 = 2} \end{matrix}$

$3x_1 = -x_2 + x_3 \rightarrow x_1 = 3/3 = \underline{1 = x_1}$

La solución del sistema es: $\boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ ✓

(4) Observo que según los gráficos proporcionados, los valores tienen una relación lineal cuando se evalúa $\ln(t) - \ln(c(t))$

a. Por lo tanto, un modelo adecuado para ajustar los datos de manera lineal sería:

$$\ln(c(t)) = b\ln(t) + a$$

$$e^{\ln(c(t))} = e^{b\ln(t)+a}$$

$$c(t) = e^{b\ln(t)} . e^{a} \rightarrow c(t) = e^{\ln(t^b)} e^{a}$$

$c(t) = t^b . e^a$ $\qquad$ Llamando $b = B$ y $e^a = A \Rightarrow$

obtengo que el método más adecuado es el (2) $c(t) = At^B$ ✓

b. Para hacer la estimación por cuadrados mínimos parto de la ecuación $\ln(c(t)) = b\ln(t) + a$

Debo resolver:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \ln(t_1) \\ 1 & \ln(t_2) \\ 1 & \ln(t_3) \\ 1 & \ln(t_4) \\ 1 & \ln(t_5) \\ 1 & \ln(t_6) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(c_1) \\ \ln(c_2) \\ \ln(c_3) \\ \ln(c_4) \\ \ln(c_5) \\ \ln(c_6) \end{pmatrix}}_{b}$$

Por cuadrados mínimos $\rightarrow$

$$A^t A . \hat{x} = A^t b$$

$\hookrightarrow$ el sistema no tiene solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1{,}0986 & 1{,}6094 & 2{,}0794 & 2{,}3979 & 3{,}2189 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1{,}0986 \\ 1 & 1{,}6094 \\ 1 & 2{,}0794 \\ 1 & 2{,}3979 \\ 1 & 3{,}2189 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^t b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 10,4042 \\ 10,4042 & 24,2322363 \end{pmatrix}}_{A^tA} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1,0986 & 1,6094 & 2,0794 & 2,3979 & 3,2189 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4055 \\ 0,6801 \\ 0,8078 \\ 0,9253 \\ 1,0049 \\ 1,2102 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10,4042 \\ 10,4042 & 24,2322363 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,0338 \\ 10,27646249 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a = 0,4054768687 \\ b = 0,2499893108 \end{matrix}$$

Para hallar los coeficientes A y B ⇒

$b = B$ y $e^a = A = 1,500017641$

$\boxed{B = 0,25}$ $\boxed{A = 1,5}$

La fórmula del modelo es: $\underline{C(t) = 1,5\, t^{0,25}}$ [mg/mL]

c. Puedo estimarlo porque se halla dentro de mi rango de datos

Entonces:

$C(18 \text{ min}) = 1,5(18)^{0,25} = 3,089650716$ mg/mL

$\boxed{C(t=18) = 3,0897 \text{ mg/mL}}$

3 b. El polinomio interpolante hallado por Hermite es único, no
podría haberse utilizado el polinomio de Lagrange ni de Newton
porque obtendría polinomios de grado 1. Con Hermite, tengo 4
nodos y por lo tanto, un polinomio de grado 3. Para que no
fuera único requeriría de una mayor cantidad de nodos.
Tomando una mayor cantidad de nodos la oscilación será mayor
y no obtendré ~~en~~ un polinomio que se ajuste mejor a la
función de forma asegurada, por lo que depende de la función si
puede acotarse el error.