No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con tres ejercicios correctamente resueltos en su totalidad. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras de precisión (preferible usar memorias de la calculadora). La función log indica logaritmo natural.

Apellido, nombre(s): ______________________________

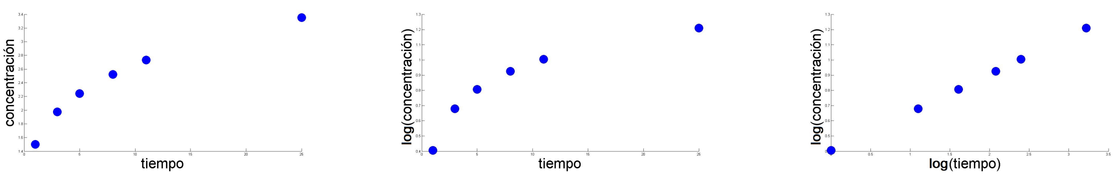
1. Se sabe que la fuerza de rozamiento F_r ejercida sobre un objeto que se mueve sobre una superficie se calcula como el producto entre un coeficiente de rozamiento dinámico μ y la fuerza de vínculo N que ejerce la superficie sobre ese mismo objeto. Si se midió una fuerza de vínculo $N = 40N$ con un error absoluto de $2N$,
   (a) ¿Con qué precisión debería medirse el coeficiente de rozamiento μ de valor 0.4 para que el error relativo porcentual de la fuerza de rozamiento F_r no supere el 5 %?
   (b) Calcule la fuerza de rozamiento y exprésela según $F_r = \overline{F_r} \pm \Delta F_r$.

2. Se desea conocer una raíz r del polinomio $p(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3$. Encuentre la raíz por el método de la secante utilizando como semillas $p_0 = 1$ y $p_1 = 1.2$, Interrumpa el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 2.10^{-4}. Exprese el resultado $r = \overline{r} \pm \Delta r$.

3. Para un proceso químico se obtuvo la siguiente tabla de mediciones de concentración, $c(t)$ (en mg/ml), versus tiempo t (en minutos). Además, para analizar el comportamiento se realizan cálculos auxiliares y los gráficos: **(a)** $c(t)$ vs. t **(b)** $\log(c(t))$ vs. t **(c)** $\log(c(t))$ vs. $\log(t)$:

Datos		Cálculos auxiliares	
t	$c(t)$	$\log(t)$	$\log(c(t))$
1	1.5000	0	0.4055
3	1.9741	1.0986	0.6801
5	2.2430	1.6094	0.8078

Datos		Cálculos auxiliares	
t	$c(t)$	$\log(t)$	$\log(c(t))$
8	2.5227	2.0794	0.9253
11	2.7317	2.3979	1.0049
25	3.3541	3.2189	1.2102



(a) (b) (c)

   (a) ¿Cuál de los siguientes modelos (donde A y B son constantes) le parece más adecuado para ajustar a los datos?

      1. $c(t) = A \cdot t + B$ 2. $c(t) = A \cdot t^B$ 3. $c(t) = A \cdot e^{B \cdot t}$

   (b) Estimar por mínimos cuadrados el valor de los parámetros A y B del modelo seleccionado en el ítem anterior.
   (c) Usar el modelo del ítem anterior para estimar la concentración a tiempo $t = 18$ minutos.

4. Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

resolver el sistema mediante descomposición LU sin pivoteo parcial (sin intercambio de filas). Escriba todos los pasos intermedios.

Calificación: 5 (cinco)

[redacted]

hoja 1/6

B

(1) Fuerza de rozamiento F_r ejercida sobre un objeto que se mueve sobre una superficie

$$F_r = \mu \cdot N$$

si $N = 40N \pm 2N$

a) precisión de μ para que el error relativo % de F_r no supere el 5%

$\mu \to 0,4$

$$\Rightarrow \varepsilon(F_r) = \left|\frac{\partial F_r}{\partial \mu}\right|_{\bar{\mu}, \bar{N}} \cdot \Delta\mu + \left|\frac{\partial F_r}{\partial N}\right|_{\bar{\mu}, \bar{N}} \Delta N$$

$$\varepsilon(F_r) = \bar{N} \cdot \Delta\mu + \bar{\mu} \cdot \Delta N$$

luego $\varepsilon_r\% = 100 \cdot \dfrac{\varepsilon(F_r)}{F_r}$

$$\varepsilon_r\% = 100 \cdot \frac{(\bar{N}\,\Delta\mu + \bar{\mu} \cdot \Delta N)}{\bar{\mu} \cdot \bar{N}}$$

$$5\% \geq 100 \cdot \left(\frac{40N \cdot \Delta\mu + 0,4 \cdot 2N}{0,4 \cdot 40N}\right)$$

~~40N·Δμ~~

$$5\% \geq \frac{100}{16N}(40N\,\Delta\mu + 0,8N)$$

$$\frac{5 \cdot 16}{100} \geq 40 \cdot \Delta\mu + 0,8$$

$$\underbrace{\frac{4}{5} - 0,8}_{0} \geq 40 \cdot \Delta\mu$$

$$\Rightarrow 40 \neq 0 \Rightarrow \Delta\mu = 0$$

No es correcto considerar el error absoluto $= 0$, ya que es algo que no puede. ✓ Podemos considerar un número varios órdenes menor a 0,4, tal que sea casi despreciable al considerar menos decimales. Por ejemplo 1×10^{-6}.

b) en tal caso $F_r = (16{,}0 \pm 0{,}8)\ N$ ✓

3

(2) Se desea conocer la raíz del polinomio $p(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3$ usando $p_0 = 1$ y $p_1 = 1{,}2$ usar método de la secante con $|p_n - p_{n-1}| < 2 \times 10^{-4}$.

$\Rightarrow$ Consideramos la aproximación de $p'(x) = \dfrac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$

luego reemplazamos en $p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$

$$= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1}) \cdot (p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

luego $p_2 = 1{,}2 - \dfrac{f(1{,}2) \cdot (1{,}2 - 1)}{f(1{,}2) - f(1)} = 1{,}17088$

$\Delta = 6{,}77 \times 10^{-3}$

$p_3 = 1{,}17765$

$\Delta = 3{,}74 \times 10^{-3}$

$p_4 = 1{,}17391$

$\Delta = 3{,}98 \times 10^{-3}$

$p_5 = 1{,}17789$

$\Delta = 1{,}5 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-4}$ ✓

$p_6 = 1{,}17789$

[redacted]

luego $r = 1,17789 \pm 0,00001$ ✓

R

(3) a) el modelo más adecuado para ajustar los datos es el modelo nro 2. $c(t) = A\ t^{B}$

No está justificado. El modelo es el correcto porque al aplicarle log(), queda el gráfico de una recta.

b) para facilitar el cálculo por cuadrados mínimos utilizo los datos logarítmicos $\Rightarrow \log(c(t)) = \alpha \log(t) + \beta$

luego al desarrollar $c(t) = 10^{\beta} \cdot t^{\alpha}$

✗ El examen dice que utiliza logaritmos en base e.

$\Rightarrow$ planteo la ecuación de cuadrados mínimos con

$$A^T A x = A^T b$$

siendo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1,0986 & 1 \\ 1,6094 & 1 \\ 2,0794 & 1 \\ 2,3979 & 1 \\ 3,2189 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 0,4055 \\ 0,6801 \\ 0,8078 \\ 0,9253 \\ 1,0049 \\ 1,2102 \end{pmatrix}$$

luego
$$A^T A = \begin{pmatrix} 24,2322 & 10,4042 \\ 10,4042 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 10,2765 \\ 5,0338 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 24,2322\,\alpha + 10,4042\,\beta &= 10,2765 \\ 10,4042\,\alpha + 6\,\beta &= 5,0338 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{5,0338 - 10,4042\,\alpha}{6}$$

$$\downarrow$$

$$24,2322\,\alpha + \left(\frac{5,0338 - 10,4042\,\alpha}{6}\right) \cdot 10,4042 = 10,2765$$

$$\alpha\left(24,2322 + \frac{-(10,4042)^2}{6}\right) = 10,2765 - \frac{10,4042 \cdot 5,0338}{6}$$

$$\alpha = \frac{1,5477}{6,1910}$$

$$\alpha = 0,24999$$

$$\downarrow$$

$$A = 10^{\beta} \Leftarrow \beta = 0,4055$$

~~logaritmo~~ $A = 2,5439$

$$B = \alpha = 0,24999$$

$$\Rightarrow \quad C(t) = 2,5439\; t^{0,24999}$$

c) $C(18\text{ min}) = 5,2397.$

No verifica que sea consistente con las mediciones

④ Sist de ecn lineales $Ax = b$

M

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ triangulo superiormente mediante eliminación de Gauss la matriz A, llevándolo a U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[redacted]

hoja 5/6

luego paso a armar $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $LUx = b$

$Ux = y$

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 7$

$-2y_1 + y_2 = 11 \Rightarrow y_2 = 11 + 14 = 25$

$y_1 + y_3 = -13 \Rightarrow y_3 = -13 - 7 = -20$

luego $y = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix}$

$3x_3 = -20$

$\boxed{x_3 = \frac{-20}{3}}$

$-x_2 + x_3 = 25$

$x_3 - 25 = x_2$

$\frac{-20}{3} - 25 = x_2 = -\frac{95}{3}$

$x_1 = 7 + \frac{40}{3} - \frac{95}{3} = -\frac{34}{3} \leftarrow x_1 + x_2 - 2x_3 = 7.$

luego $x = \begin{pmatrix} -34/3 \\ -95/3 \\ -20/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 34 \\ 95 \\ 20 \end{pmatrix}$ ✗

No verifica $Ax = b$