① Dado el sistema de ec. lineales $Ax=b$ con

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -9 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}12\\ -49\\ 3\end{bmatrix}$$

• Hallar x resolviendo el sist. mediante descomposición LU.

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ L_{21} & 1 & 0\\ L_{31} & L_{32} & 1\end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12} & U_{13}\\ 0 & U_{22} & U_{23}\\ 0 & 0 & U_{33}\end{bmatrix}$$

$L^{f_1}C^{c_1}=a_{11}=U_{11}=3$

$L^{f_1}U^{c_2}=a_{12}=U_{12}=1$

$L^{f_1}U^{c_3}=U_{13}=0$

actualizado

$$U=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & U_{22} & U_{23}\\ 0 & 0 & U_{33}\end{bmatrix}$$

• ahora fila 2

$L^{f_2}U^{c_1}=a_{21}=\overset{U_{11}}{3}L_{21}\rightarrow L_{21}=-3$

$L^{f_2}U^{c_2}=a_{22}=L_{21}+U_{22}=-3+U_{22}$

$\rightarrow U_{22}=1$

$L^{f_2}U^{c_3}=a_{23}=U_{23}=-1$

actualizado

$$U=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & U_{33}\end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ L_{31} & L_{32} & 1\end{bmatrix}$$

• ahora con la fila 3

$L^{f_3}U^{c_1}=a_{31}=U_{11}L_{31}=3L_{31}$

$\rightarrow L_{31}=0$

$L^{f_3}U^{c_2}=a_{32}=L_{32}=-1$

$L^{f_3}U^{c_3}=1+U_{33}\rightarrow U_{33}=-1$

actualizado

$$\underbrace{U=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}}$$

ya tenemos nuestras matrices

$Ax=b$

$L(\underbrace{Ux}_{Y})=b$

buscamos $y\rightarrow Ly=b$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_0\\ Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ -49\\ 3\end{bmatrix}\longrightarrow Y=\begin{bmatrix}12\\ -13\\ -10\end{bmatrix}$$

buscamos $x\rightarrow Ux=y$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ -3\\ -10\end{bmatrix}\longrightarrow x=\begin{bmatrix}5\\ -3\\ 10\end{bmatrix}$$

RTA

(2) encontrar la raíz entre (7,10) con el método secante de

$f(x) = x^4 - e^x + 2$

semillas propuestas, $x_0 = 8$, $x_1 = 9$ diferencia absoluta "0,05"

$$\boxed{P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})(P_{n-1} - P_{n-2})}{f(P_{n-1}) - f(P_{n-2})}}$$

$P_0 = 8$, $P_1 = 9$

$$P_2 = 9 - \frac{f(9)(9-8)}{f(9) - f(8)} = 8{,}46 \rightarrow f(8{,}46) = 402{,}44 \quad , |P_2 - P_1| = 0{,}54$$

$$P_3 = 8{,}46 - \frac{f(8{,}46)(8{,}46 - 9)}{f(8{,}46) - f(9)} = 8{,}57 \rightarrow f(8{,}57) = 125{,}02 \quad , |P_3 - P_2| = 0{,}11$$

$$P_4 = 8{,}57 - \frac{f(8{,}57)(8{,}57 - 8{,}46)}{f(8{,}57) - f(8{,}46)} = 8{,}61 \rightarrow f(8{,}61) = 11{,}31 \quad ,$$

$|P_4 - P_3| = 0{,}04$

$$\boxed{\bar{r} = 8{,}61 \pm 0{,}04}$$

③ Hallar un interpolador con las sig. funciones de orden 3.

$f(1) = 2$, $f(3) = 8$, $f'(1) = 0$, $f'(3) = 8{,}78889831$

y luego estimar $f(2)$.

Al tener las derivadas

↳ Hermite

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1	2	0
1	3	8	8,78889831

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$		
1	2			
		0		
1	2		$\frac{3-0}{3-1} = 1{,}5$	
		$\frac{8-2}{3-1} = 3$		$\frac{2{,}89444916 - 1{,}5}{3-1}$
3	8		$\frac{8{,}78889831 - 3}{3-1} = 2{,}89444916$	$\boxed{0{,}69722458}$
		8,78889831		
3	8			

$$H_3(x) = f(z_0) + f(z_0, z_1)(x - z_0) + f(z_0, z_1, z_2)(x - z_0)(x - z_1) + f(z_0, z_1, z_2, z_3) \cdot (x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)$$

$$H_3(x) = 2 + 0(x-1) + 1{,}5(x-1)(x-1) + 0{,}69722458(x-1)(x-1)(x-3)$$

$$f(2) \cong H(2) \cong 2{,}80278$$

tip punto fijo

$$g(x) = x - \alpha(x) \cdot f(x), \quad \alpha(x) = \frac{1}{f'(x)}, \quad f'(x) \neq 0$$

④ el Periodo T de un Péndulo está dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, siendo la longitud del hilo: L, y $\vec{g}$ la gravedad

se conoce: $L = (20.000 \pm 0{,}003)\,m$, $g = 9{,}81\,m/s^2$ con $e_r = 2\%$ y

$\pi = 3{,}1416 \pm 0{,}0001$

ⓐ Calcular el error absoluto del Periodo (con su unidad correspondiente) y expresarlo $T = \bar{T} \pm \Delta T$

ⓑ Calcular el error relativo.

$$T = 2\pi\sqrt{g/L} = 2\pi (L)^{1/2} (g)^{-1/2}$$

Primero calculemos la incerteza

$$\Delta T = \Delta\pi \left|\frac{\partial T}{\partial \pi}\right| + \Delta g \left|\frac{\partial T}{\partial g}\right| + \Delta L \left|\frac{\partial T}{\partial L}\right|$$

$$\Delta T = \Delta\pi \left|2\sqrt{\frac{L}{g}}\right| + \Delta g \left|2\pi \cdot \sqrt{L}\left(\frac{-1}{2} g^{-3/2}\right)\right| + \Delta L \left|\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2}(L)^{-1/2}\right|$$

$$\bar{T} = 2.(3{,}1416)\sqrt{\frac{20\,m}{9{,}81\,m}} = 8{,}971423915$$

$\Delta T = 0{,}0906722664525$ $\quad \boxed{\bar{T} = 9{,}0 \pm 0{,}1}$

ⓑ $e_r = \left|\frac{\Delta T}{T}\right| = 1{,}010683091$

(5) el volumen de agua de un tanque esférico de radio $R=3$ está definido x la función $V(x)=\frac{\pi x^2(9-x)}{3}$

Se desea conocer el valor de x para el cual el tanque esférico se encuentre al 70%. Encuentre la función que modela el problema mencionado y halle una raíz por el método N-R. Interrumpa el algoritmo cuando la dif. absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0,01. Exprese el rto. $x=\bar{x}\pm\Delta x$.

ayuda → Máx. volumen se alcanza en $V(2R)$

$R=3 \rightarrow V(x)=\frac{\pi x^2(9-x)}{3}$, volumen Máximo → $(V(2R)) = 36\pi = 113,097$

$V_p = 70\% . V_{max} = 79,1679$

1) deseamos conocer $V(x)=V_p \xrightarrow{\text{entonces}}$ "$V(x)-V_p=0$" es mi función

Sabemos que:

→ la raíz se encuentra entre 0 y 2R (x)

→ la función va a ser monótonamente creciente en el intervalo, por lo que $F'(x) \neq 0 \in (0,2R)$

∘ tomamos como semilla $x=R$, el medio de $(0,2R)$

Newton-Raphson: $P_{n+1} = P_n - \frac{F(P_n)}{F'(P_n)}$

$$\frac{f(x)=\frac{\pi x^2(9-x)}{3}-V_p}{f'(x)=\frac{\pi}{3}(18x-3x^2)} = \frac{x^2(9-x)-V_p\frac{3}{\pi}}{18x-3x^2}$$

n	P_n	ΔP_n
0	3,00000	—
1	3,80000	0,8
2	3,82042	0,03
3	3,82046	0,00005

$\boxed{P = 3,82046 \pm 0,00005}$

6) dada la siguiente tabla

x	0	2	3	4	5
f(x)	1	9	27	81	243

a) hallar un polinomio interpolante orden 3

b) Estime f(1) y el error cometido.

x	f(x)	1DD	2DD	3DD	4DD
0	1	4	4,6667	3,3333	1,73333
2	9	18	18	12	
3	27	54	54		
4	81	152			
5	243				

a) $P(x) = 1 + 4x + 4,6667(x-2)x + 3,3333(x-3)(x-2)x$

$\text{error} = 1,73333(x-4)(x-3)(x-2)x$

$\hookrightarrow$ el polinomio p es único.

elijo separar el pto 5 para estimar el error

$P(1) = 7$ $\quad$ $\text{error}(1) = 10,4$

7) Se observa que ciertos datos medidos tienen un comportamiento parabólico en un gráfico $x-y$.

a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para det. una ecuación que ajuste los datos. Los coeficientes del modelo que propone ¿Minimizan el error cuadrático total?

b) Estime el valor y para $x_0 = 1,8$.

x	0,5	1,0	1,5	2,0	4,0
y	7,105	7,030	6,575	6,070	0,880

Como es un comportamiento parabólico $\longrightarrow y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x^2 & x & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 & 1 \\ 1,0 & 1,0 & 1 \\ 2,25 & 1,5 & 1 \\ 4,0 & 2,0 & 1 \\ 16,0 & 4,0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad x = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7,105 \\ 7,030 \\ 6,575 \\ 6,070 \\ 0,880 \end{bmatrix} \qquad A^T A x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} A^T A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61,96 \\ 36,105 \\ 27,66 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} a_2 = -0,528577338 5 \quad a \\ a_1 = 0,6019650655 \quad b \\ a_0 = 6,932776373 \quad c \end{array}$$

$$\boxed{y = a\,x^2 + b\,x + c}$$

no minimiza el error cuadrático total xq no sabemos si es el modelo q mejor ajusta a los datos.

b) $y(1,8) = 6,303722914$

8) Se considera que en la fase inicial de una Pandemia podría aproximar la evolución de contagios según una función exponencial.

En Argentina, el primer caso covid-19 se registró el 3 de Marzo de 2020 y 6 días después se registró el 1er contagio en la Prov. de Chaco. A partir del primer mes, donde la cantidad de infectados en esa Prov. ascendió a 81 contagios, se registraron los casos mensuales que se muestran en la tabla

mes	1	2	3	5
cantidad de infectados	81	314	874	3326

a) ~~Estime~~ Use la aproximación de cuadrados mínimos para det. una ecuación q permita calcular la cantidad en función al mes.

b) Estime la cantidad de infectados para el mes 4.

modelo exponencial $\rightarrow y = a_0 \cdot e^{a_1 x}$

$\rightarrow$ linealizamos el modelo

$\ln(y) = \ln(a_0 \cdot e^{a_1 x})$

$\ln(y) = \ln(a_0) + a_1 x$

x = mes	1	2	3	5
y = cantidad	81	314	874	3326
$\ln(y)$	4,3944	5,7494	6,7731	8,1095

entonces nos queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \log(a_0) \end{bmatrix} = \overset{\ln(y)}{\begin{bmatrix} 4,3944 \\ 5,7494 \\ 6,7731 \\ 8,1095 \end{bmatrix}}$$

$A^T A x = A^T B$

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 39 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \log(a_0) \end{bmatrix} = \ln(y)$$

$$\begin{cases} \log(a_0) = 3,77 \\ a_1 = 0,91 \end{cases} \rightsquigarrow e^{\log(a_0)} = e^{3,77} \rightarrow a_0 = 43,21$$

$$\boxed{y = 43,21\, e^{0,91x}}$$

b) Estime la cantidad de infectados del mes 4

$$y = 43,21\, e^{0,91(4)} = \boxed{1645,95}$$

Scanned with CamScanner

9) el calor que recibe un cuerpo cuando pasa del estado sólido al líquido se calcula $Q = mL$, siendo m la masa de sustancia que cambia de estado y "L" el calor latente de la fusión.

Si se sabe q el calor necesario para fundir una masa m de aluminio es 500 J con un error relativo del 2% y el calor latente es $L_f = (3{,}97 \times 10^5 \pm 0{,}01 \times 10^5) \frac{J}{kg}$

a) Estimar la masa del aluminio fundido con su cota del error

$m = \bar{m} \pm \Delta m$

mi función $m = \frac{Q}{L}$ $\quad \Delta m = \left|\frac{1}{L}\right| \Delta Q + \Delta L \left|\frac{-Q}{L^2}\right|$

datos

$Q = 500J \pm 2\%$ $\quad 10 \longrightarrow \frac{2 \cdot \bar{Q}}{100} = 10$

$L = 3{,}97 \times 10^5 \pm 0{,}01 \times 10^5$

resolvemos primero el error

$$\Delta m = \left|\frac{1}{3{,}97 \times 10^5}\right| \cdot 10 + 0{,}01 \times 10^5 \left|\frac{500}{(3{,}97 \times 10^5)^2}\right| = 0{,}00003$$

$$\bar{m} = \frac{500}{3{,}97 \times 10^5} = 1{,}25945 \qquad \boxed{m = 1{,}25945 \pm 0{,}00003}$$

b) Estimar el error relativo porcentual

$$e_p = \frac{\Delta m}{\bar{m}} \cdot 100 = 0{,}002\%$$

(10) Se desea conocer la solución de la ecuación $sen(x) + e^{-x} = 0$ que se sabe que está en el intervalo $[0,5]$

(a) Indique qué cantidad de "n" iteraciones deberían realizarse según el método de bisección para obtener una cota para el error absoluto sea menor 0,6

(b) realice "n" iteraciones del método bisección y utilizando la última aproximación como semilla, aplique el método de N-R hasta lograr 0,0001. $\boxed{\bar{r} = \bar{r} \pm \Delta r}$

(a) $\dfrac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} < n \rightarrow \dfrac{\ln(5) - \ln 0{,}6}{\ln 2} \rightarrow 4 \rightarrow n°$ it.

(b)

$x = 0 \rightarrow sen(0) + e^{-0} = 1$

$x = 1 \rightarrow sen(1) + e^{-1} = 1{,}21$

$x = 2{,}5 \rightarrow 0{,}680$

$x = 3 \rightarrow 0{,}1909$

$x = 4 \rightarrow -0{,}738$ bolzano → hay raiz

- $\dfrac{3+4}{2} = 3{,}5 \rightarrow f(3{,}5) = -0{,}3205$

- $\dfrac{3+3{,}5}{2} = 3{,}25 \rightarrow f(3{,}25) = -0{,}069$

- $\dfrac{3+3{,}25}{2} = 3{,}126 \rightarrow f(3{,}126) = 0{,}06$

aplico N-R con $x_0 = 3{,}126$

$x_0 = 3{,}126$

$x_1 = 3{,}126 - \dfrac{f(3{,}126)}{f'(3{,}126)} = 3{,}1830 \rightarrow f(3{,}1830) = 0{,}00008$

$\boxed{\bar{r} = 3{,}1830 \pm 0{,}0001}$

(11) datos del enunciado

$\Delta L = \alpha . L(T_f - T_i)$

L: longitud del material

α: coeficiente de dilatación

$T_f^\circ, T_i^\circ \rightarrow$ Temperatura inicial y final

(A) $\alpha = \bar{\alpha} \pm \Delta\alpha$?

$L = 1{,}5\,m \pm 0\,m$ $T_i = (5{,}00 \pm 0{,}01)°c$

$T_f = (25 \pm 0{,}01)°c$

$\Delta L = 0{,}001$ $e_r = 2\%$

Primero busco mi $\Delta\alpha$ para saber los decimales que voy a ocupar

$e_r(\Delta L) = \frac{2 \cdot \overline{\Delta L}}{100} = 0{,}00002$

$$\Delta\alpha = \Delta(\Delta L) . \left|\frac{\partial\alpha}{\partial\Delta L}\right| + \Delta T_i \left|\frac{\partial\alpha}{\partial T_i}\right| + \Delta T_f \left|\frac{\partial\alpha}{\partial T_f}\right|$$

$$\Delta\alpha = 2\% . \left|\frac{1}{1{,}5(25-5)}\right| + 0{,}01\left|\frac{0{,}001}{1{,}5(25-5)^2}\right| + 0{,}01\left|\frac{0{,}001}{1{,}5(25-5)^2}\right|$$

$$\boxed{\Delta\alpha = 0{,}00000007}$$

$$\boxed{\alpha = 0{,}00003333 \pm 0{,}00000007}$$

ahora busco el valor representativo

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta L}{L(T_f - T_i)} = \frac{0{,}001}{1{,}5\,m(25-5)} = \boxed{0{,}00003333}$$

(b) error relativo porcentual

$$e_{r/p} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right| . 100 = 2{,}1\%$$

(12) Con la siguiente tabla

x	0	1	2	3
$f(x)$	4	9	15	18

(a) Hallar un Polinomio de grado 3 para estimar $f(2,5)$

(b) ¿Es Posible estimar $f(4)$?

Como no tenemos info. de sus derivadas voy a elegir el interpolador de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -0{,}1666(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = +0{,}5\,x(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = -0{,}5\,x(x-1)(x-3)$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = 0{,}1666(x)(x-1)(x-2)$$

$$P_1(x) = -0{,}1666\cdot\underbrace{4}_{=f(0)}(x-1)(x-2)(x-3) + 0{,}5\cdot\underbrace{9}_{=f(1)}(x)(x-2)(x-3) +$$
$$+(-0{,}5)\cdot\underbrace{15}_{=f(2)}(x)(x-1)(x-3) + 0{,}1666\cdot\underbrace{18}_{=f(3)}(x)(x-1)(x-2)$$

$$\boxed{P_1(x) = -0{,}6664(x-1)(x-2)(x-3) + 4{,}5000(x)(x-2)(x-3) - 7{,}5000(x)(x-1)(x-3) + + 3{,}080(x)(x-1)(x-3)}$$

(b) No es Posible estimar $f(4)$ xq en ese caso estaríamos EXTRAPOLANDO en lugar de interpolando ya que 4 no se encuentra en el intervalo de los nodos. $4 \notin [0,3]$.

(13) Se desea conocer por el método de iteración por punto fijo una raíz r de la función $f(x) = e^{-x} - x$ que se sabe que está en el intervalo $[0,1 ; 1]$

(a) Demuestre que la función $f(x)$ posee una raíz única en dicho intervalo.

(b) Realizar 3 iteraciones del método y expresar la raíz r hallada con su cota de error.

Buscamos que $g(x)$ tenga un único punto fijo en $[0,1 ; 1]$

esto ocurre si $\quad f(x) = g(x) - x \longrightarrow g(x) = e^{-x}$

i) $g(x) \in [0,1 ; 1] \ \forall x \in [0,1 ; 1]$

ii) $g'(x) \exists \ \forall x \in [0,1 ; 1] \wedge 0 < K < 1 \ / \ |g'(x)| \leq K$

$g'(x) = -e^{-x} \longrightarrow 1 \cdot |e^{-x}| \longrightarrow 1 \cdot e^{-1} = \overset{K}{0,37} < 1$ ✓

cota del error $\longrightarrow \dfrac{K(P_n - P_{n-1})}{1-K}$

semilla por medio de bisección

n	P_n	$g(P_{n-1})$	e
0	0,55	0,5769498104	—
1		0,66 1603377	
2		0,570290867	
3		0,5653609740	0,005

$$\frac{0,36787(0,5702.. - 0,565..)}{1 - 0,36787} = 0,00505$$

$$\boxed{r = 0,565 \pm 0,005}$$

Scanned with CamScanner

para hallar un polinomio de orden 3 se necesite
3+1 nodos

(14) Se observa que ciertos datos medidos tienen un comportamiento aprox parabólico en un gráfico x-y, propio de un modelo cuadrático

(a) Use la aprox. de cuadrados mínimos para det. una ecuación que ajuste los datos. Los coeficientes del modelo que propone ¿Minimizan el error cuadrático?

(b) Estimar el valor para $x_0 = 4,8$

$$Y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

x	4,0	4,2	4,5	4,7	5,1
y	102,56	113,18	130,11	142,05	167,53

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 4,2 & 4,2^2 \\ 1 & 4,5 & 4,5^2 \\ 1 & 4,7 & 4,7^2 \\ 1 & 5,1 & 5,1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102,56 \\ 113,18 \\ 130,11 \\ 142,05 \\ 167,53 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 22,5 & 101,99 \\ 22,5 & 101,99 & 465,687 \\ 101,99 & 465,687 & 2141,7203 \end{bmatrix} \qquad A^T b = \begin{bmatrix} 655,43 \\ 2993,129 \\ 13.767,3225 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema y queda $Y \approx 1,2417 - 1,1285x + 6,6143x^2$
no minimizan el error.

(b) Estimar 4,8

$$\boxed{y(4,8) \approx 148,22298}$$

~~15 Para un lanzamiento de un nuevo producto se realiza un estudio de análisis de fallas.~~
~~P es la probabilidad y t el tiempo~~

15 Se quiere estimar a través de un polinomio interpolante el valor de la función en 1,2 y su error cometido.

x	f(x)	f'(x)	f''(x)
0	0	1	2
1	2,2874	-	-
2	6,7188	3,6439	-

Spline
↳ nop

Newton / lagrange
↳ no, xq no usamos los datos de las derivadas

Usamos Hermite !

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ [Por la cantidad de derivadas]

z_i						
$z_0 = x_0 = 0$	0					
$z_1 = x_0 = 0$	0	1				
$z_2 = x_0 = 0$	0	1	2			
$z_3 = x_1 = 1$	2,2874	2,2874	1,2874	-0,7126		
$z_4 = x_2 = 2$	6,7188	4,4314	1,072	-0,1077	0,30245	
$z_5 = x_2 = 2$	6,7188	3,6439	-0,7875	-0,92975	-0,411025	-0,35674

en este caso lo hacemos por debajo

$$P_H(x) = 6,7188 + 3,6439(x-2) - 0,7875(x-2)^2 - 0,92975(x-2)^2(x-1)$$
$$- 0,411025(x-2)^2(x-1)x$$

(el último lo guardo para el error)

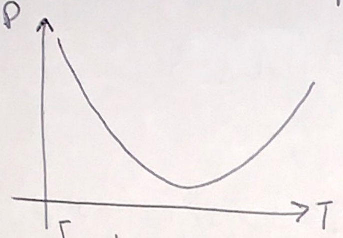
$$P_H(1,2) = 3,1175$$

$$\varepsilon_{P_H}(x) = \left| -0,35674(x-2)^2(x-1)x^2 \right| \overset{x=1,2}{=} -0,065739$$

ya el lanzamiento de un nuevo producto se realiza un estudio
análisis de fallos
es la probabilidad y t el tiempo

P[%]	0,9	0,16	0,05	0,6	0,9
t[horas]	1	10	50	90	100

ⓐ Plantee el modelo que crea correspondiente y Plantear $A^TAx = A^Tb$
ⓑ Una vez planteado, hallar x a través de LU.
ⓒ Estime el valor para 20 horas.



→ es una función parabólica
↳ el modelo es

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^2 & 10 & 1 \\ 50^2 & 50 & 1 \\ 90^2 & 90 & 1 \\ 100^2 & 100 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}6 \\ 0{,}05 \\ 0{,}6 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 50 & 90 & 100 \\ 1 & 10^2 & 50^2 & 90^2 & 100^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^2 & 50^2 & 90^2 & 100^2 \\ 1 & 10 & 50 & 90 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^2 & 10 & 1 \\ 50^2 & 50 & 1 \\ 90^2 & 90 & 1 \\ 100^2 & 100 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10^2 & 50^2 & 90^2 & 100^2 \\ 1 & 10 & 50 & 90 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}6 \\ 0{,}05 \\ 0{,}6 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 171870001 & 1.855.001 & 20701 \\ 1.855.001 & 20701 & 251 \\ 20701 & 251 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 14046 \\ 153{,}4 \\ 3{,}05 \end{bmatrix}$$

ahora que ya lo tenemos, hacemos descomposición LU.

$$A = L \cdot U \qquad (LU)x = b \leftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1

$$\left.\begin{aligned} &L^{f_1} \cdot U^{c_1} = a_{11} \to a_{11} = U_{11} = 1.718.7001 \\ &L^{f_1} \cdot U^{c_2} = U_{12} = a_{12} \to U_{12} = 1.855.001 \\ &L^{f_1} \cdot U^{c_3} = U_{13} = a_{13} \to U_{13} = 20701 \end{aligned}\right\} U = \begin{bmatrix} 17.187.001 & 1855001 & 20701 \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$L^{f_2} \cdot U^{c_1} = a_{21} \rightarrow L_{21} \cdot U_{11} = a_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{a_{21}}{U_{11}} = 0{,}010793$

$L^{f_2} \cdot U^{c_2} = a_{22} \rightarrow L_{21} \cdot U_{12} + U_{22} = a_{22}$
$\hookrightarrow U_{22} = a_{22} - L_{21} \cdot U_{12} = 679{,}97$

$L^{f_2} \cdot U^{c_3} = a_{23} \rightarrow L_{21} \cdot U_{13} + U_{23} = a_{23}$
$\hookrightarrow U_{23} = a_{23} - L_{21} \cdot U_{13} = 27{,}574$

$$U = \begin{bmatrix} 17.187.001 & 1.855.001 & 20701 \\ 0 & 679{,}97 & 27{,}574 \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}010793 & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$L^{f_3} \cdot U^{c_1} = a_{31} \rightarrow L_{31} \cdot U_{11} = a_{31} \rightarrow L_{31} = \frac{a_{31}}{U_{11}} = 0{,}00120$

$L^{f_3} \cdot U^{c_2} = a_{32} \rightarrow L_{31} \cdot U_{12} + L_{32} \cdot U_{22} = a_{32}$

$L_{32} = \frac{a_{32} - L_{31} \cdot U_{12}}{U_{22}} = \frac{251 - 0{,}00120 \cdot 1855001}{679{,}97}$

$L_{32} = 0{,}04554$

$L^{f_3} \cdot U^{c_3} = a_{33} \rightarrow$

$\rightarrow L_{31} \cdot U_{13} + L_{32} \cdot U_{23} + U_{33} = a_{33}$

$U_{33} = a_{33} - L_{31} \cdot U_{13} - L_{32} \cdot U_{23} = 1{,}887$

$$U = \begin{bmatrix} 17.187.001 & 1.855.001 & 20701 \\ 0 & 679{,}97 & 27{,}574 \\ 0 & 0 & 1{,}887 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}010793 & 1 & 0 \\ 0{,}000120 & 0{,}04554 & 1 \end{bmatrix}$$

$Ly = b$

~~$\left[\begin{array}{ccc|c} 17.187.001 & 1855001 & 20701 & 14046 \\ 0 & 679{,}97 & 27{,}574 & 153{,}4 \\ 0 & 0 & 1{,}887 & 3{,}05 \end{array}\right] \rightarrow Y_c =$~~

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 14046 \\ 0{,}010793 & 1 & 0 & 153{,}4 \\ 0{,}00012 & 0{,}04554 & 1 & 3{,}05 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} Y_A = 14046 \\ Y_B = 1{,}8001 \\ Y_C = 1{,}2852 \end{bmatrix}$$

ahora que tenemos y hacemos

$Ux = y$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 17.187.001 & 1855001 & 20701 & 14046 \\ 0 & 679{,}97 & 27{,}574 & 1{,}8001 \\ 0 & 0 & 1{,}887 & 1{,}2852 \end{array}\right] \begin{array}{l} a = 0{,}00026919 \\ \rightarrow b = -0{,}024970 \\ \rightarrow c = 0{,}6811 \end{array}$$

$P(x) = 0{,}00026919x^2 - 0{,}024970x + 0{,}6811 \overset{20\,horas}{=} 0{,}790$

• Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax=b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -48 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hallar x resolviendo el sistema mediante descomposición LU. sin pivoteo parcial.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

- $a_{11} = L_1 U^1 = U_{11} = 3$
- $a_{12} = L_1 U^2 = U_{12} = 1$
- $a_{13} = L_1 U^3 = U_{13} = 0$

$$U^{(I)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

- $a_{21} = L_2 U^1 = 3L_{21} = a_{21}$

  $L_{21} = \frac{-9}{3} = -3$

$$U^{(II)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}, \quad L^{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- $a_{22} = L_2 U^2 = L_{21} + U_{22} = a_{22}$

  $-3 + U_{22} = -2 = 1$
- $a_{23} = L_2 U^3 = U_{23} = -1$

$\cdot L_3 U^1 = 3L_{31} = a_{31}$

$L_{31} = \frac{0}{3} = 0$

$\circ\ a_{32} = L_3 U^2 = L_{32} = -1$

$\cdot\ a_{33} = L_3 U^3 = 1 + U_{33} = a_{33}$

$1 + U_{33} = 0 = -1$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$L(\underbrace{Ux}_{Y}) = b \rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

el resultado es exacto x q todos los valores son enteros, sino tendría error de redondeo y truncamiento y no sería ~~correcta~~ exacto

$$\begin{array}{ccc} L & y & = b \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -49 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} U & X & = y \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -13 \\ -10 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Ejercicios

(1)

- El Periodo T de un péndulo está dado x la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, siendo L la longitud del hilo g la $\vec{a}$ de la gravedad.

Se conoce: $L = 20.000 \pm 0,003$ m, $g = 9.81$ m/s² con un $e_r = 2\%$. y $\pi = 3,1416 \pm 0.0\ldots$

(a) Calcular el error absoluto del Periodo (con su unidad correspondiente) y expresar el periodo en la forma $T = \bar{T} \pm \Delta T$

(b) Calcular el error relativo del periodo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}} = 2\pi (L)^{1/2} g^{-1/2}$$

$$\Delta T = \Delta\pi\left|\frac{\partial T}{\partial \pi}\right| + \Delta L\left|\frac{\partial T}{\partial L}\right| + \Delta g\left|\frac{\partial g}{\partial L}\right|$$

$$\Delta T = \Delta\pi \underbrace{2\sqrt{\frac{L}{g}}}_{T/\pi} + \Delta L \underbrace{\left|\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2}\cdot(L)^{-1/2}\right|}_{T/2L} + \Delta g\underbrace{\left|2\pi\sqrt{L}\left(-\frac{1}{2}g^{-3/2}\right)\right|}_{T/(-2)\cdot g} = T\left(\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta L}{2L} - \frac{\Delta g}{2g}\right)$$

$$\bar{T} = 2\cdot 3,1416\sqrt{\frac{20\,m}{9,81\,m}} = 8,971423915 \text{ (A)}$$

$$\Delta T = \bar{T}\left(\frac{0,0001}{3,1416} + \frac{0,003}{40} + \frac{2\%}{2}\right) = 0,0906726645\,25 \text{ (B)}$$

(a) $\boxed{T = (8,9 \pm 0,1)\,s}$

(b) $\varepsilon_T = \left|\frac{\Delta T}{T}\right| = 1,010683091\% < 2\%$

- El volumen de agua de un tanque esférico de Radio $R = 3$ está def. x la función $V(x) = \frac{\pi x^2(9-x)}{3}$.

Se desea conocer el valor de x para el cual el tanque esférico se encuentra al 70%. Encuentre la función que modela el Problema mencionado y halle una raíz por el método de N-R. Interrumpa el algoritmo cuando la dif. absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0,01. Exprese el resultado $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

AYUDA: Máximo volumen se alcanza en $V(2R)$

- $R = 3 \rightarrow V(x) = \frac{\pi x^2(9-x)}{3}$

volumen máximo $\rightarrow V(2R) = 36\pi = 113,097$

$V_p = 70\% \cdot V_{max} = 79,1679$

deseamos conocer $V(x) = V_p \rightarrow \boxed{V(x) - V_p = 0}$ mi función para N-R.

Sabemos que:

→ la raíz se encuentra entre $x = 0$ y $x = 2R$.

→ la función va a ser monótonamente creciente en el intervalo, x lo que $F' \neq 0 \in (0, 2R)$

tomamos como partida $x = R$, el medio entre $(0, 2R)$

dada $F(x)=e^x$ usar los nodos $(0,1),(1,e),(2,e^2)$ y $(3,e^3)$ Para obtener una spline natural q aproxime a la función.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&4&1&0\\0&1&4&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\3(e^2-2e+1)\\3(e^3-2e^2+e)\\0\end{bmatrix}\quad y\quad x=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

x_i	$F(x_i)$	$h_i=x_{i+1}-x_i$
0	1	$h_0=1$
1	e	$h_1=1$
2	e^2	$h_2=1$
3	e^3	

entonces mi sistema

$$\begin{cases}c_0=0\\ c_0+4c_1+c_2=3(e^2-2e+1)\\ c_1+4c_2+c_3=3(e^3-2e^2+e)\\ c_3=0\end{cases}$$

$$c_1\cong\frac{1}{5}(-e^3+6e^2-9e+4)\cong\boxed{0{,}75685=c_1}$$

$$c_2=\frac{1}{5}(4e^3-9e^2+6e-1)\cong\boxed{5.83007=c_2}$$

ahora buscamos los b

$$b_0=\frac{1}{h_0}(a_1-a_0)-\frac{h_0}{3}(c_1+2c_0)\cong\boxed{1{,}46600}$$

$$b_1=\frac{1}{h_1}(a_2-a_1)-\frac{h_1}{3}(c_2+2c_1)=(e^2-e)-\frac{1}{15}(2e^3+3e^2-12e+7)\cong\boxed{2{,}22285}$$

$$b_2=\frac{1}{h_2}(a_3-a_2)-\frac{h_2}{3}(c_3+2c_2)\cong\boxed{8{,}80977}$$

ahora buscamos los d

$$d_0=\frac{1}{3h_0}(c_1-c_0)\cong\boxed{0{,}25228}$$

$$d_1=\frac{1}{3h_1}(c_2-c_1)\cong\boxed{1{,}69107}$$

$$d_2=\frac{1}{3h_2}(c_3-c_2)\cong\boxed{-1{,}94336}$$

$$S(x)=\begin{cases}1+1{,}46600x+0{,}25228x^3 & \forall x\in[0,1]\\ 2{,}71828+2{,}22285(x-1)+0{,}75685(x-1)^2+1{,}69107(x-1)^3 & \forall x\in[1,2]\\ 7{,}38906+8{,}80977(x-2)+5{,}83007(x-2)^2-1{,}94336(x-2)^3 & \forall x\in[2,3]\end{cases}$$

Para un Proceso químico se obtuvo mediante una tabla de mediciones c(t) (en mg/ml), versus el tiempo t (en minutos). Además para analizar el comportamiento se realizan cálculos auxiliares y los gráficos
(a) $C(t)$ vs t (b) $\log(c(t))$ vs t (c) $\log(C(t))$ vs $\log(t)$:

DATOS t	Calculos auxiliares $C(t)$	$\log(t)$	$\log(c)$
1	1,500	0	0,4055
3	1,9741	1,0986	0,6801
5	2,2430	1,6094	0,8078

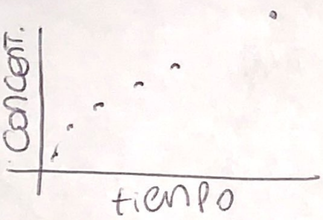
datos t	calculos auxiliares $c(t)$	$\log(t)$	$\log(c)$
8	2,5227	2,0794	0,9253
11	2,7317	2,3979	1,0049
25	3,3541	3,2189	1,2102

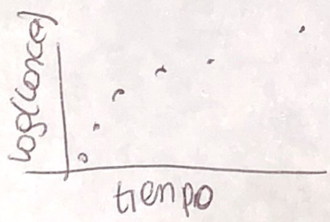
(a) ¿Cuál de los sig. modelos (donde A y B son constantes) le parece más adecuado para ajustar los datos?

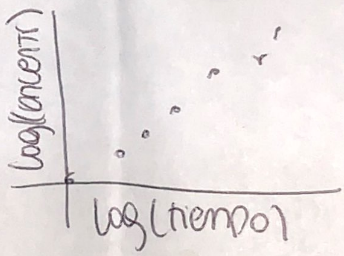
1. $C(t) = At + B$ 2. $C(t) = A \cdot t^{B}$ 3. $C(t) = A \cdot e^{B \cdot t}$

(b) Estimar por cuadrados mínimos el valor de los parámetros A y B del modelo seleccionado en el ítem anterior.

(c) Usar el modelo del ítem anterior para estimar la concentración a tiempo $t = 18$ minutos.







no es muy lineal

Combinación lineal → la más lineal es la de los log

→ aplicamos log a ambos lados en las 3 ecuaciones.

1.) $\log(C) = (\log(A) + \log(t)) + \log(B)$ $\quad$ 2) $\boxed{\log(C) = \log(A) + B\log(t)}$ $\quad$ 3) $\log(t) = \log(A) + Bt$

(B)
$$\begin{cases} 0{,}4055 = \log(A) + B.0 \\ 0{,}6801 = \log(A) + B.1{,}0986 \\ 0{,}8078 = \log(A) + B.1{,}6094 \\ 0{,}9253 = \log(A) + B.2{,}0794 \\ 1{,}0049 = \log(A) + B.2{,}3979 \\ 1{,}2102 = \log(A) + B.3{,}2189 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1{,}0986 \\ 1 & 1{,}6094 \\ 1 & 2{,}0794 \\ 1 & 2{,}3979 \\ 1 & 3{,}2189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(A) \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4055 \\ 0{,}6801 \\ 0{,}8078 \\ 0{,}9253 \\ 1{,}0049 \\ 1{,}2102 \end{bmatrix}$$

aplicamos $A^T A \hat{x} = A^t b$

$$\begin{bmatrix} 6 & 10{,}4042 \\ 10{,}4042 & 24{,}2322363 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log(A) \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}0338 \\ 1927646249 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{bmatrix} \log(A) \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4054768684 \\ 0{,}2499893108 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}500017641 \\ 0{,}249989310 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{C(t) = 1{,}50002.t^{0{,}24999}}$$

(C) ~~usar~~

$C(t) = 1{,}50002.t^{0{,}24999}$, $C(18) = 3{,}0896026089 1$ mg/ml

notemos q el valor obtenido tiene coherencia, se encuentra acotado entre los valores 2,7317 y 3,3541 (para 11 y 25 minutos)