1	2	3	4	5
B	B	B	B	B

10 (diez)

① $A' = A(2{,}128 - 0{,}0432\,A)$

$A_0 = 0{,}24\ cm^2$

a) $\begin{cases} A' = A(2{,}128 - 0{,}0432\,A) = f(t, A) \\ A(t=0) = 0{,}24\ cm^2 \end{cases}$

b) Por RK-Punto Medio:

$y_{i+1} = y_i + h k_2$

$k_1 = f(t_i, y_i)$

$k_2 = f(t_i + h/2,\ y_i + k_1 h/2)$

Empezando desde el día 0 y terminando en el 3, con 3 iteraciones del método tenemos un paso de $h = \frac{3-0}{3} = 1$

Luego, reemplazando, el sistema a resolver es:

$\begin{cases} A_{i+1} = A_i + k_2 \\ k_1 = A_i(2{,}128 - 0{,}0432\,A_i) \\ k_2 = (A_i + k_1 \cdot 0{,}5)(2{,}128 - 0{,}0432\,(A_i + k_1 \cdot 0{,}5)) \\ A_0 = 0{,}24 \end{cases}$ ✓

Resuelvo:

$i = 0$:

$k_1 = 0{,}24\,(2{,}128 - 0{,}0432 \cdot 0{,}24) = 0{,}5082$

$k_2 = 1{,}0409$

$A_1 = 1{,}2809$, $t = 1$ ✓

$i = 1$:

$k_1 = A_1(2{,}128 - 0{,}0432\,A_1) = 2{,}6549$

$k_2 = f(1{,}5,\ A_1 + k_1 \cdot 0{,}5) = 5{,}2567$

$A_2 = 6{,}5376$, $t = 2$ ✓

$i = 2$

$k_1 = f(2 ; A_2) = 12{,}0454$

$k_2 = f(2{,}5 ; A_2 + k_1 \cdot 0{,}5) = 19{,}9234$.

$A_3 = 24{,}4412$

Finalmente:

t, días	1	2	3
A(t)	1,2809	4,5374	24,4412

RTA.

veo que crece muy rápido pero tiene sentido por ser una colonia de bacterias.

NOTA

HOJA Nº

FECHA

② $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$h_i = \frac{b-a}{2^{i-1}} = \frac{2-1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{i-1}}$

Sí, es correcto!

Calculo los $R_{i,1}$:

EN EL ENUNCIADO DEL EXAMEN FALTA

entiendo que es un error.

• $R_{1,1} = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) =$

$= \frac{2-1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = 0,75$

• $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h_2 \sum_{k=1}^{1} f\left(1 + \frac{2k-1}{2} h_2\right)\right]$

$h_2 = \frac{1}{2^{2-1}} = 0,5$

$f\left(1 + \frac{2-1}{2} \cdot 0,5\right) = f(1,25) = 0,8$ ✓

$\Rightarrow R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[0,75 + 0,5 \cdot 0,8\right] = 0,575$

• $R_{3,1} = 0,5\left[R_{2,1} + h_3 \sum_{k=1}^{2} f\left(1 + \frac{2k-1}{2} h_3\right)\right]$

$h_3 = \frac{1}{2^{3-1}} = 0,25$

$f\left(1 + \frac{2-1}{2} \cdot 0,25\right) = 0,8889$

$f\left(1 + 2\cdot\frac{2-1}{2} \cdot 0,25\right) = 0,8$

$\Rightarrow R_{3,1} = 0,5\left[0,575 + 0,25\,(0,8889 + 0,8)\right]$

$= 0,4984$

luego:

$R_{1,1} = 0,75$

$R_{2,2} = 0,5167$

$R_{2,1} = 0,575$

$R_{3,3} = 0,4702$

$R_{3,2} = 0,4731$

$R_{3,1} = 0,4984$

NOTA

Finalmente, por Romberg:

$$\boxed{\ln(2) \simeq 0,4702} \quad \text{RTA}$$

Si calculo $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = 0,6931$ que no está tan lejos del resultado obtenido con el método numérico.

③ a) $g \in C^{m+1}[a,b]$, $g(p) = 0$, mult $(p) = m$

$\Leftrightarrow 0 = g(p) = g'(p) = g''(p) = \dots = g^{m-1}(p)$

ahora bien, $g^{m}(p) \neq 0$

luego, no podemos utilizar el método de NR "tradicional" pues el mismo contaba con la restricción de $f'(p) \neq 0$ (en nuestro caso, $g'(p) \neq 0$).

Sin embargo, se puede modificar el método de forma tal que podamos calcular una raíz múltiple como simple.

Para ello, definimos

$$\mu(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

Si $g(x) = (x-p)^m f(x)$

luego:

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m f(x)}{m(x-p)^{m-1} f(x) + (x-p)^m f'(x)} =$$

$$= (x-p) \frac{f(x)}{m f(x) + f'(x)(x-p)}$$

Debería mostrar que el límite para $x \to p$ es $\neq 0$

de donde p es 0 simple de μ pues:

$\mu(p) = 0$

$$\mu'(x) = 1 \cdot \frac{f(x)}{m f(x) + f'(x)(x-p)} + (x-p)\left(\frac{f(x)}{m f(x) + f'(x)(x-p)}\right)'$$

$$\mu'(p) = \frac{f(p)}{m f(p) + f'(p)(p-p)} = \frac{f(p)}{m f(p)} = \frac{1}{m} \neq 0.$$

luego, aplicamos el método de NR para $\mu(x)$ y vemos que:

$$h(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$$

que resulta en:

~~$h(x) = g/g'$~~

$$\mu^*(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

$$\mu'(x) = \frac{g'(x)\,g'(x) - g^*(x)\,g''(x)}{[g'(x)]^2}$$

$$\Rightarrow h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} \cdot \frac{[g'(x)]^2}{(g'(x))^2 - g^*(x)\,g''(x)}$$

$$= x - \frac{g^*(x)\,g'(x)}{(g'(x))^2 - g^*(x)\,g''(x)}$$

Luego, por NR:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{g(p_n)\,g'(p_n)}{[g'(p_n)]^2 - g^*(p_n)\,g''(p_n)}$$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$

$f''(x) = 6x - 10$

Luego

~~$f(x)\,f'(x) = (x^3$~~

$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n^3 - 5p_n^2 + 7p_n - 3)(3p_n^2 - 10p_n + 7)}{(3p_n^2 - 10p_n + 7)^2 - (p_n^3 - 5p_n^2 + 7p_n - 3)(6p_n - 10)}$$

$p_0 = 0{,}9$.

Reemplazo y obtengo:

$p_1 = 1{,}0023$ ✓

$p_2 = 1{,}0000$

✓

Finalmente, por NR para raíces múltiples:

$\boxed{p = 1}$ || ~~Rta~~ ✓

Si calculo $f(p=1) = 0$ ✓ $\rightarrow$ el resultado encontrado es correcto.

NOTA

HOJA Nº

FECHA

(4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = D - L - U$, donde

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y sabiendo que $T_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U$, calculo:

$T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

Busco AVAS: $\det(T_{GS} - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Luego: $-\lambda(-0{,}5-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \wedge \lambda = -0{,}5$ (doble)

Puesto que $\rho(T_{GS}) = \max\{|\lambda_i|\} = \max\{0, 0{,}5\}$

vemos: $\boxed{\rho(T_{GS}) = 0{,}5}$ || RDA

b) Como, además $b = (-1 \quad 4 \quad -5)^T$

y $C_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot b$

Resuelvo $\bar{x}_{k+1} = T_{GS}\,\bar{x}_k + C_{GS}$

$\Rightarrow \bar{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \bar{x}_k + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

donde tomo $\bar{x}_0 = \bar{0}$

Calculo y obtengo:

$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}875 \\ 1{,}875 \\ -1{,}125 \end{pmatrix}$ ||

NOTA

RDA.

$$e_{r(\bar{x}_0,\bar{x}_1)} = \frac{\|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\|}{\|\bar{x}_1\|} = \frac{2,9580}{2,9580} = 1$$

RTA.

$$e_{r(\bar{x}_1,\bar{x}_2)} = \frac{\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\|}{\|\bar{x}_2\|} = \frac{2,1937}{2,4101} = 0,8405$$

$$e_{r(\bar{x}_2,\bar{x}_3)} = \frac{\|\bar{x}_3 - \bar{x}_2\|}{\|\bar{x}_3\|} = \frac{0,7395}{2,3552} = 0,3140$$

utilizando la sol. obtenida, reemplazo en el sistema y obtengo:

$$A\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1,25 \\ 3,25 \\ -5 \end{pmatrix}$$ ≠ no hay diferencia

$$e_{abs(\bar{x}_3,b)} = \left\| \begin{pmatrix} -1,25 \\ 3,25 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 0,8$$

~~la norma~~ y vemos que la diferencia entre los componentes es relativamente chica, probablemente, con más iteraciones hubiéramos encontrado una aproximación más precisa.

NOTA

5) $u(C) = \dfrac{k_M C^2}{C_S + C^2}$, k_M y C_S → parámetros.

a) Llamo $x = C^2$, y/defino $k_M = a$, $C_S = b$ y defino ~~k_M/x_i~~

$$y(x) = \frac{a x}{b + x} \rightarrow \text{modelo racional}$$

Linealizo:

$$\left\{ \frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{ax} + \frac{x}{ax} = \frac{b}{ax} + \frac{1}{a} = \frac{b}{a}\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right\}$$

veamos que

$$\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ 1/y_3 \\ 1/y_4 \\ 1/y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x_1 & 1 \\ 1/x_2 & 1 \\ 1/x_3 & 1 \\ 1/x_5 & 1 \\ 1/x_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix}$$

donde $x_i = C_i^2$ por el reemplazo que hice primero.

Resuelvo por CM: $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1/x_1 & \cdots & 1/x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1/x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma 1/x_i^2 & \Sigma 1/x_i \\ \Sigma 1/x_i & 5 \end{pmatrix}$$

error de cuentas $\cancel{\begin{pmatrix} 4,2294 & 4,5447 \\ 4,5447 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 18,4484 & 4,2294 \\ 4,2294 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1/x_1 & \cdots & 1/x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/y_1 \\ \vdots \\ 1/y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma 1/x_i \, 1/y_i \\ \Sigma 1/y_i \end{pmatrix}$$

error de cuentas $\cancel{\begin{pmatrix} 2,5455 \\ 1,7584 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4,3993 \\ 1,7584 \end{pmatrix}$

Luego: $\cancel{\begin{pmatrix} 4,2294 & 4,5447 \\ 4,5447 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5455 \\ 1,7584 \end{pmatrix}}$

$\cancel{\rightarrow \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4564 \\ -0,0452 \end{pmatrix}}$

NOTA

veamos entonces que:

$$\frac{b}{a} = 0,4564 \Rightarrow b = -6,99999 \overset{4\ \text{dec.}}{=} -7,0000$$

$$\frac{1}{a} = -0,0652 \Rightarrow a = -15,3374$$

luego: $\begin{cases} k_M = -15,3374 \\ C_S = -7 \end{cases}$

de donde: $\tilde{u}(c) = \dfrac{-15,3374\, c^2}{-7 + c^2}$

b) ~~u (2 m/L~~

$u(2\, m/L) \simeq \tilde{u}(2) = 20,4499$

luego: $\begin{pmatrix} 18,4484 & 6,2294 \\ 6,2294 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,3993 \\ 1,7584 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = 0,2025 \Rightarrow b = 2,0348 = C_S$$

$$\frac{1}{a} = 0,09942 \Rightarrow a = 10,0583 = k_M$$

donde: $\tilde{u}(c) = \dfrac{10,0583\, c^2}{2,0368 + c^2}$

b) $u(2\, m/L) \simeq \tilde{u}(2\, m/L) = 6,6447$.

veamos que el valor encontrado se encuentra dentro del rango de los datos de entrada:

$$u(1,5) < \tilde{u}(2) < u(2,5)$$
$$5,3 < 6,7 < 7,6$$

NOTA