Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ingeniería

1er Cuatrimestre de 2022

Análisis numérico I (75.12-95.04-95.13)

Guía de trabajos prácticos 3
Aproximación - Interpolación

Profesora responsable: Magíster Ing. Miryam Sassano

Bibliografía

- Burden R.L., Faires J.D. *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericano 1985.
- Chapra S., Canale R.*Métodos Numéricos para Ingenieros*, Mac Graw Hill 1985
- Kincaid D., Cheney W. *Análisis Numérico: las matemáticas del cálculo científico*, Addison Wesley, 1994.
- Zill, D. G. (2007). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamericana
- Mathews, J. H., Fink, D. K., *Métodos Numéricos con Matlab*, Tercera Edición, Editorial Prentice Hall, 2000.
- Nakamura, S., *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab*, Prentice Hall, 1997

1. Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la formula de *Lagrange*:

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

2. Hallar los valores de $\sqrt{1,01}$ y $\sqrt{1,28}$ a partir de la siguiente tabla, por interpolación de *Lagrange y de Newton* con tres dígitos significativos.

x	$1,00$	$1,05$	$1,10$	$1,15$	$1,20$	$1,25$	$1,30$
$\sqrt{x}$	$1,00000$	$1,02470$	$1,04881$	$1,07238$	$1,09544$	$1,11803$	$1,14017$

3. Calcular $f(3)$ utilizando la formula de *Newton*, dada la siguiente tabla:

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	2	12	21

- Tomar los puntos 1,2 y 4 luego los puntos 2,4 y 5.
- Repetir a pero usando el polinomio de *Lagrange*.
- Aproximar por un polinomio de grado 3.

4. Calcular $f(0)$ utilizando la formula de *Newton*, dada la siguiente tabla:

x	$0,1$	$0,2$	$0,4$	$0,8$
$f(x)$	64987	62055	56074	43609

Notar que la formula de interpolación se utiliza para extrapolar.

5. Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la formula de *Newton*:

x	1	$1,25$	$1,50$	$1,75$	$2,00$
y	$5,10$	5.79	6.53	7.45	8.46

6. Hallar un polinomio Q de grado 3 tal que:
$Q(0) = 0$, $Q'(0) = 1$, $Q(1) = 3$, $Q'(1) = 6$.

7. Se conocen los siguientes datos acerca de la función $f(x)$:
$f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f'(0) = 0$ y $f'(2) = 4$.

- Hallar el polinomio interpolante que verifica esos datos mediante el método de *Hermite*.
- Hallar la función *Spline* de orden 2 que verifica esas condiciones.

8. Aproximar $f(x) = sen(e^x - 2)$ en $x = 0.9$ con los siguientes datos:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

9. Hallar el polinomio interpolante de grado 2 para $f(x) = \frac{1}{x}$ por medio de la formula de *Lagrange*, utilizando los nodos: $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$. Graficar la curva y su aproximación. Analizar los errores para $x = 0.5$ y $x = \frac{1}{3}$.

10. Un coche que viaja en una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos obtenidos se dan en la siguiente tabla. Utilice un polinomio de *Hermite* para predecir la posción del coche y su velocidad cuando $t = 10$ segundos.

Tiempo (seg)	0	3	5	8	13
Distancia (m)	0	$67,5$	$114,9$	$186,9$	$297,9$
Velocidad (m/s)	$22,5$	$23,1$	24	$22,2$	$21,6$

11. Se desea hallar una funcion polinómica para aproximar a la función $f(x) = e^x cos(x)$, en el intervalo $[0; 2]$

- Tabular $f(x)$ en los nodos $x = 0$, 0.5, 1 y 2 y hallar el polinomio interpolante por el metodo de *Newton*, trabajar con 5 dígitos. $\rightarrow P_{N_3}(x)$
- Agregar el nodo $x = 1.5$ para hallar una expresion aproximada para el error. Utilizarla para estimar el error en $x = 0.1$, 0.3, 1.2, y 1.7. Agregamos el nodo al final
- Comparar los errores estimados en el punto anterior con los valores correctos, calculados como diferencia entre el valor correcto de $f(x)$ y el obtenido por medio del polinomio interpolante. $\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(\xi)(x-0)(x-0,5)(x-1)(x-2) \rightarrow$ hay que derivar 5 veces

12. Se tiene la función $f(x) = e^x$, de la cual se proveen los siguientes valores:

x	0	0.5	1	2
$f(x)$	1	1,64872	2,71828	7,38906

- Estimar $f(0.25)$ utilizando interpolación de *Lagrange* con los nodos $x_0 = 0.0$ y $x_1 = 0.5$.
- Estimar $f(0.75)$ utilizando interpolación de *Lagrange* con los nodos $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1.0$.
- Estimar $f(0.25)$ y $f(0.75)$ utilizando interpolación de *Lagrange* con los nodos $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 2.0$.
- Estimar los errores de truncamiento de los cálculos realizados en los punto $a)$, $b)$ y $c)$ en base a la formula:

"peor caso": el módulo el valor más grande en módulo

$$f(x) = f^*(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n)$$

- Compararlos con los valores exactos calculados a partir de los valores reales de la función $f(0.25) = 1.28403$ y $f(0.75) = 2.11700$.
- Indicar qué aproximaciones resultaron más precisas y por qué.

13. Se desea hallar una función de interpolación polinómica para aproximar la función $sen^2(x)$ en el intervalo $[0; \pi]$

- Construir un polinomio de *Hermite* en los nodos: $0, \frac{\pi}{2}$ y π trabajar con cuatro decimales. Estimar el error cometido en la construcción del polinomio.
- Estimar el error cometido en 0.2, 0.5 y 1 utilizando el punto extra: $5\frac{\pi}{4}$ en la tabla de interpolación de *Hermite*.

14. Se desea interpolar una Spline cúbica para una función tabulada en 4 nodos. Explicar cuántas son las incógnitas y cuáles las ecuaciones que completan el planteo del problema.

15. Construya el trazador cubico libre con los siguientes datos:

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

x	$f(x)$
0.1	−0.62049958
0.2	−0.28398668
0.3	0.00660095
0.4	0.24842440

16. Los datos del ejercicio anterior se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los trazadores cúbicos construidos en el ejercicio anterior a fin de aproximar $f(x)$ y $f'(x)$. Calcule el error.

- $f(x) = x.ln(x)$, aproxime $f(8.4)$ y $f'(8.4)$.
- $f(x) = x.cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$, aproxime $f(0.25)$ y $f'(0.25)$.

17. Un trazador cubico sujeto S de la función f está definido en el intervalo $[1;3]$ por:

$$S = \begin{cases} S_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 & si \;\; 1 \leq x \leq 2 \\ S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & si \;\; 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (1)$$

Dadas $f^{'}(1) = f^{'}(3)$, encontrar a, b, c y d.

18. Un trazador cubico natural S está definido por:

$$S = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & si \;\; 1 \leq x \leq 2 \\ S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & si \;\; 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (2)$$

Si S interpola los datos $(1;1)$, $(2;1)$ y $(3;0)$ obtener: B, D, b y d.