VIDEOS

TEORÍA DE ERRORES

Fuentes

★ REDONDEO $\left(\sqrt{\pi}\right)^2 \neq \pi$ por el redondeo de la compu

★ INHERENTE error del ser humano

★ TRUNCAMIENTO discretización o aproximación (cuando descartamos términos)

Errores

• ABSOLUTO $\boxed{e_{ax} = x - \bar{x}}$

cota : $\boxed{|e_{ax}| \leq \Delta x}$

• RELATIVO $\boxed{e_{rx} = \frac{x - \bar{x}}{x}}$

cota : $\boxed{|e_{rx}| = \frac{\Delta x}{\bar{x}}}$

Convención

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \bar{x} \pm \Delta x \\ \Delta x &= 0.d_1 \cdot 10^{-t} \end{aligned}}$$

↳ sin importar la cota de error, la mayoramos a 1 dígito

Ejemplo :

① $\bar{x} = 123.45678$

$\Delta x = 0.0033 < 0.004$ (mayoramos)

$\underbrace{123\ 457}_{\text{6 cifras significativas}} \pm 0.004$

↳ dejo en el número sólo 3 dígitos decimales

② idem ① con $\Delta x = 0.0059$

$\Rightarrow \Delta x < 0.006$

$\Rightarrow x = 123.457 \pm 0.006$

③ $\bar{x} = 123.123$, $\Delta x = 0.005$ (ya está mayorado)

$\Rightarrow x = 123\ 123 \pm 0.005$

④ $\bar{x} = 188.141$

$\Delta x = 2.18 < 3$ $\Rightarrow x = 188 \pm 3$

⑤ $\bar{x} = 211117$

$\Delta x = 611 < 700$ (1 sólo dígito $\neq 0$) $\Rightarrow x = 211100 \pm 700$

Propagación

$z = f(x, y, z, \dots, q)$

perturbaciones

$\Delta z = |f(x, y, t, \dots) \pm f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots)$

hacemos una aprox. lineal: aproximación Taylor

$$|\Delta z| \leq \left|\frac{dz}{dx}\right| \Delta x + \left|\frac{dz}{dy}\right| \Delta y + \dots$$

luego: $\boxed{\Delta z = \sum_{i=0}^{\infty} \left|\frac{df}{dx_i}\right|_{\bar{x}_i} \cdot \Delta x_i}$, $\underbrace{\Delta z \neq 0}$

↳ nunca nos va a pasar

Ejercicios (guía)

⑥ $w = \frac{x y^2}{z}$ error absoluto, w, cuál es la variable que más error aporta

$w = \bar{w} \pm \Delta w$

$x = 2.0 \pm 0.1$

$y = 3.0 \pm 0.2$

$z = 1.0 \pm 0.1$

$$\bar{w} = \frac{\bar{x} + \bar{y}^2}{\bar{z}} = \frac{2.0 \cdot 3.0^2}{1.0} = 18.0$$

error abs

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{dw}{dx_i}\right| \cdot \Delta x_i = \left|\frac{dw}{dx}\right|_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \Delta x + \left|\frac{dw}{dy}\right|_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \Delta y + \left|\frac{dw}{dz}\right|_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \Delta z$$

$$= \left|\frac{\bar{y}^2}{\bar{z}}\right| \Delta x + \left|\frac{2\bar{x}\bar{y}}{\bar{z}}\right| \Delta y + \left|-\frac{\bar{x}\bar{y}^2}{\bar{z}^2}\right| \Delta z$$

$= 9{,}0 \quad 0{,}1 + 12{,}0 \cdot 0{,}2 + 18{,}0 \cdot 0{,}1 = 5{,}1$

↳ lo que más aporta al error

$\Rightarrow w = 18{,}0 \pm 5{,}1$

Representación de Punto Flotante

Números de Máquina

$$\mathcal{F} = \{ m : m = \underset{\text{signo}}{(-1)^{s}} \cdot \underset{\text{mantisa}}{c} \cdot 2^{q} \}$$

q → cuánto está corrido la coma

$s \in \{0,1\}$, $c = 1.\underbrace{b_1 b_2 b_3 \dots b_p}_{b_i \in \{0,1\}}$, $\underbrace{E_{min} \leq q \leq E_{max}}$

$-126 \leq q \leq 127$

ó

$-1022 \leq q \leq 1023$

- No se puede representar el 0 → cuanto más cerca estoy del 0, más valores puedo representar.
- Hay valores que no se pueden representar, por lo cual la computadora tiene que tomar decisiones y a veces los resultados no son los que esperamos.

Formatos

16 b:

1	s
10	c
5	q

Tipo	signo	mantisa	exponente	total	Emin	Emax	Bits prec	díg sign
Half	1	10	5	16	-14	+15	11	3.3
Single	1	23	8	32	-126	+127	24	7.2
Double	1	52	11	64	-1022	+1023	53	15.9

$3{,}3$ díg. sign. $= \log_{10}(2^{p}) = \log_{10}(2^{10})$

p → precisión

Aritmética de Punto Flotante

Cada operación trabaja al doble de precisión y se almacena el resultado redondeándolo a un número de máquina.

Ejemplo:

$$x^2 + 10^8 x + 1 \rightarrow x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x_1 = -0{,}00000001 \quad \wedge \quad x_2 = -100000000$$

$b >> a \wedge b >> c$

Cuando operamos con números muy distantes la calculadora toma al más chico como despreciable y falla

La calculadora debería verificar si el divisor es mucho más grande que el dividendo para evaluar bajo qué algoritmo realizar el cálculo.

EJERCICIO PARCIAL

- El calor que recibe un cuerpo cuando pasa del estado sólido al estado líquido se calcula como:

$$Q = m * L$$

Siendo m la masa de sustancia que cambia de estado y L el calor latente de fusión. Si se sabe que el calor necesario para fundir una masa m de aluminio es 500 J con un error relativo porcentual del 2 % y el calor latente de fusión del aluminio es:

$$L = (3.97 * 10^5 \pm 0.01 * 10^5)\text{J/kg}$$

- (a) Estimar la masa de aluminio fundida con su cota de error absoluto. Expresar m = $\bar{m} \pm \Delta$m.
- (b) Estimar el error relativo porcentual de la masa.

a) $Q = 500\,J$, $e_{rQ} = 2\%$

$$e_{rQ} = \frac{Q - \bar{Q}}{Q} \cdot 100 = \frac{e_{abs\,Q}}{Q} \cdot 100 \Rightarrow e_{abs\,Q} = 0{,}02 \cdot 500\,J = 10\,J$$

$$\Rightarrow Q = (500 \pm 10)\,J$$

$$\Delta m = \Sigma\left(\left|\frac{dm}{dx_i}\right|_{\bar{m} = \frac{\bar{Q}}{\bar{L}}} \Delta x_i\right) = \left|\frac{1}{\bar{L}}\right| \Delta Q + \left|-\frac{\bar{Q}}{\bar{L}^2}\right| \Delta L$$

$$= \left|\frac{1}{3{,}97 \cdot 10^5}\right| \cdot 10 + \left|\frac{-500}{(3{,}97 \cdot 10^5)^2}\right| \cdot (0{,}001 \cdot 10^5) = 0{,}0000284\,kg$$

$$\bar{m} = \frac{\bar{Q}}{\bar{L}} = \frac{500\,J}{3{,}97 \cdot 10^5\,J/kg} = 0{,}001259\,4\ldots kg$$

$$m = (0{,}0012594\ldots \pm \underbrace{0{,}0000284\ldots}_{0{,}00003})\,kg$$

$0{,}00003 \rightarrow$ mayoramos pero NO por el 8, sino para dar una buena cota

$0,00003 \rightarrow$ 5 cifras significativas y dejamos $\bar{m}$ como tal:

$$\boxed{m = (0,00126 \pm 0,00003)\ kg}$$ RTA

para los cálculos usamos la mayor cantidad de decimales que podemos

b) $$e_{rm} = \frac{m - \bar{m}}{\bar{m}} \cdot 100 = \frac{e_{abs\,m}}{\bar{m}} \cdot 100 = \frac{0,00002836\ldots}{0,001259445\ldots} \cdot 100$$

$$\Rightarrow e_{rm} = 2,4\ \%$$