HOJA Nº

FECHA

1) $A' = A(2,128 - 0,0432A)$

$A_0 = 0,24\ cm^2$

a) $\begin{cases} A' = A(2,128 - 0,0432A) = f(t, A) \\ A(t=0) = 0,24\ cm^2 \end{cases}$

b) Por RK-Punto Medio:

$y_{i+1} = y_i + h k_2$

$k_1 = f(t_i, y_i)$

$k_2 = f(t_i + h/2, y_i + k_1 h/2)$

Empezando desde el día 0 y terminando en el 3, con 3 iteraciones del método tenemos un paso de $h = \frac{3-0}{3} = 1$

Luego, reemplazando, el sistema a resolver es:

$\begin{cases} A_{i+1} = A_i + k_2 \\ k_1 = A_i(2,128 - 0,0432A_i) \\ k_2 = (A_i + k_1 . 0,5)(2,128 - 0,0432(A_i + k_1 . 0,5)) \\ A_0 = 0,24 \end{cases}$

Resuelvo:

$i = 0$:

$k_1 = 0,24(2,128 - 0,0432\ 0,24) = 0,5082$

$k_2 = 1,0409$

$A_1 = 1,2809$, $t = 1$

$i = 1$:

$k_1 = A_1(2,128 - 0,0432A_1) = 2,6549$

$k_2 = f(1,5, A_1 + k_1\ 0,5) = 5,2567$

$A_2 = 6,5376$, $t = 2$

NOTA

$\underline{i = 2}$

$k_1 = f(2 ; A_2) = 12{,}0454$

$k_2 = f(2{,}5 ; A_2 + k_1 \cdot 0{,}5) = 19{,}9234$

$A_3 = 24{,}4412$

Finalmente:

t, días	1	2	3
A(t)	1,2809	4,5374	24,4412

Rta

veo que crece muy rápido pero tiene sentido por ser una colonia de bacterias.

NOTA

HOJA Nº

FECHA

② $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

$h_i = \frac{b-a}{2^{i-1}} = \frac{2-1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{i-1}}$

Calculo los $R_{i,1}$:

EN EL ENUNCIADO DEL EXAMEN FALTA entiendo que es un error.

- $R_{1,1} = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b) \right) =$

$= \frac{2-1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) = 0,75$

- $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h_2 \sum_{k=1}^{1} f\left(1 + \frac{2k-1}{2} h_2 \right) \right]$

$h_2 = \frac{1}{2^{2-1}} = 0,5$

$f\left(1 + \frac{2-1}{2} \cdot 0,5 \right) = f(1,25) = 0,8$

$\Rightarrow R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[0,75 + 0,5 \cdot 0,8 \right] = 0,575$

- $R_{3,1} = 0,5 \left[R_{2,1} + h_3 \sum_{k=1}^{2} f\left(1 + \frac{2k-1}{2} h_3 \right) \right]$

$h_3 = \frac{1}{2^{3-1}} = 0,25$

$f\left(1 + \frac{2-1}{2} \cdot 0,25 \right) = 0,8889$

$f\left(1 + \frac{2 \cdot 2 - 1}{2} \cdot 0,25 \right) = 0,8$

$\Rightarrow R_{3,1} = 0,5 \left[0,575 + 0,25 \left(0,8889 + 0,8 \right) \right]$

$= 0,4984$

luego:

$$\begin{array}{lll}
R_{1,1} = 0,75 & & \\
 & R_{2,2} = 0,5167 & \\
R_{2,1} = 0,575 & & R_{3,3} = 0,4702 \\
 & R_{3,2} = 0,4731 & \\
R_{3,1} = 0,4984 & &
\end{array}$$

NOTA

Finalmente, por Romberg:

$$\boxed{\ln(2) \simeq 0,4702}$$ Rta.

Si calculo $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = 0,6931$ que no está tan lejos del resultado obtenido con el método numérico.

NOTA

(3) a) $g \in C^{m+1}[a,b]$, $g(p) = 0$, mult$(p) = m$

$\iff 0 = g(p) = g'(p) = g''(p) = \dots = g^{m-1}(p)$

ahora bien, $g^{m}(p) \neq 0$

luego, no podemos utilizar el método de NR "tradicional" pues el mismo contaba con la restricción de $f'(p) \neq 0$ (en nuestro caso, $g'(p) \neq 0$).

Sin embargo, se puede modificar el método de forma tal que podamos calcular una raíz múltiple como simple.

Para ello, definimos

$$\mu(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

~~aaaaa~~

Si $g(x) = (x-p)^m f(x)$

luego:

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m f(x)}{m(x-p)^{m-1} f(x) + (x-p)^m f'(x)} =$$

$$= (x-p) \frac{f(x)}{m f(x) + f'(x)(x-p)}$$

de donde $p \in 0$ simple de μ pues:

$\mu(p) = 0$

$$\mu'(x) = 1 \cdot \frac{f(x)}{m f(x) + f'(x)(x-p)} + (x-p)\left(\frac{f(x)}{m f(x) + f'(x)(x-p)}\right)'$$

$$\mu'(p) = \frac{f(p)}{m f(p) + f'(p)(p-p)} = \frac{f(p)}{m f(p)} = \frac{1}{m} \neq 0.$$

luego, aplicamos el método de NR para $\mu(x)$ y vemos que:

$$h(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$$

que resulta en:

~~h(x) = g/g'~~

$$\mu^*(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

$$\mu'(x) = \frac{g'(x)\,g'(x) - g^*(x)\,g''(x)}{[g'(x)]^2}$$

$$\Rightarrow h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} \cdot \frac{[g'(x)]^2}{(g'(x))^2 - g^*(x)\,g''(x)}$$

$$= x - \frac{g'(x)\,g'(x)}{(g'(x))^2 - g^*(x)\,g''(x)}$$

luego, por NR:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{g(p_n)\,g'(p_n)}{[g'(p_n)]^2 - g^*(p_n)\,g''(p_n)}$$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$

$f''(x) = 6x - 10$

luego

~~f(x) f'(x) = (x)~~

$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n^3 - 5p_n^2 + 7p_n - 3)(3p_n^2 - 10p_n + 7)}{(3p_n^2 - 10p_n + 7)^2 - (p_n^3 - 5p_n^2 + 7p_n - 3)(6p_n - 10)}$$

$p_0 = 0{,}9$.

Reemplazo y obtengo:

$p_1 = 1{,}0023$

$p_2 = 1{,}0000$

Finalmente, por NR para raíces múltiples:

$\boxed{p = 1}$ RTA.

Si calculo $f(p=1) = 0$ ✓ $\Rightarrow$ el resultado encontrado es correcto.

NOTA

(4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = D - L - U$, donde

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y sabiendo que $T_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U$, calculo:

$T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

Busco AVAS: $\det(T_{GS} - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Luego: $-\lambda(-0{,}5-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \wedge \lambda = -0{,}5$ (doble)

Puesto que $\rho(T_{GS}) = \max\{|\lambda_i|\} = \max\{0, 0{,}5\}$

vemos: $\boxed{\rho(T_{GS}) = 0{,}5}$ RTA.

b) Como, además $b = (-1 \quad 4 \quad -5)^T$

y $C_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot b$

Resuelvo $\bar{x}_{k+1} = T_{GS}\,\bar{x}_k + C_{GS}$

$\Rightarrow \bar{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \bar{x}_k + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

donde tomo $\bar{x}_0 = \bar{0}$

Calculo y obtengo:

$\boxed{\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}875 \\ 1{,}875 \\ -1{,}125 \end{pmatrix}}$

RTA.

$$e_{r(\bar{x}_0, \bar{x}_1)} = \frac{\|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\|}{\|\bar{x}_1\|} = \frac{2,9580}{2,9580} = 1$$

RTA.

$$e_{r(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \frac{\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\|}{\|\bar{x}_2\|} = \frac{2,1937}{2,4101} = 0,8405$$

$$e_{r(\bar{x}_2, \bar{x}_3)} = \frac{\|\bar{x}_3 - \bar{x}_2\|}{\|\bar{x}_3\|} = \frac{0,7395}{2,3552} = 0,3140$$

utilizando la sol. obtenida, reemplazo en el sistema y obtengo:

$$A\ \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1,25 \\ 3,25 \\ -5 \end{pmatrix} \neq b$$ no da exactamente

$$e_{abs(\bar{x}_3, b)} = \left\| \begin{pmatrix} -1,25 \\ 3,25 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = 0,8.$$

~~la norma~~ y vemos que la diferencia entre los componentes es relativamente chica, probablemente, con más iteraciones hubiéramos encontrado una aproximación más precisa.

NOTA

5) $u(C) = \dfrac{k_M C^2}{C_S + C^2}$, k_M y C_S → parámetros.

a) Llamo $x = C^2$, y/defino $k_M = a$, $C_S = b$ y defino ~~Y_i/X_i~~

$$y(x) = \frac{a x}{b + x} \rightarrow \text{modelo racional}$$

Linealizo:

$$\left\{ \frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{ax} + \frac{x}{ax} = \frac{b}{ax} + \frac{1}{a} = \frac{b}{a}\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right\}$$

Veamos que:

$$\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ 1/y_3 \\ 1/y_4 \\ 1/y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x_1 & 1 \\ 1/x_2 & 1 \\ 1/x_3 & 1 \\ 1/x_5 & 1 \\ 1/x_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix}$$

donde $\underline{x_i = C_i^2}$ por el reemplazo que hice primero.

Resuelvo por CM: $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1/x_1 & \dots & 1/x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1/x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma 1/x_i^2 & \Sigma 1/x_i \\ \Sigma 1/x_i & 5 \end{pmatrix}$$

Error de cuentas $= \cancel{\begin{pmatrix} 4,2294 & 4,5447 \\ 4,5447 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 18,4484 & 4,2294 \\ 4,2294 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1/x_1 & & 1/x_n \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/y_1 \\ \vdots \\ 1/y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma 1/x_i \, 1/y_i \\ \Sigma 1/y_i \end{pmatrix}$$

error de cuentas $= \cancel{\begin{pmatrix} 2,5455 \\ 1,7584 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4,3993 \\ 1,7584 \end{pmatrix}$

Luego: $\cancel{\begin{pmatrix} 4,2294 & 4,5447 \\ 4,5447 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5455 \\ 1,7584 \end{pmatrix}}$

$\cancel{\rightarrow \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4564 \\ -0,0452 \end{pmatrix}}$

veamos entonces que. $\rightarrow$ 4 dec.

$$\frac{b}{a} = 0,4564 \Rightarrow b = -6,99999 = -7,0000$$

$$\frac{1}{a} = -0,0652 \Rightarrow a = -15,3374$$

luego: $\begin{cases} K_M = -15,3374 \\ C_S = -7 \end{cases}$

de donde: $$\underline{\tilde{u}(c) = \frac{-15,3374\, c^2}{-7 + c^2}}$$

b) ~~u(2 m/L~~

$$u(2\,m/L) \simeq \tilde{u}(2) = 20,4499$$

luego: $$\begin{pmatrix} 18,4484 & 6,2294 \\ 6,2294 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/a \\ 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,3993 \\ 1,7584 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = 0,2025 \Rightarrow b = 2,0348 = C_S$$

$$\frac{1}{a} = 0,09942 \Rightarrow a = 10,0583 = K_M$$

donde: $$\underline{\tilde{u}(c) = \frac{10,0583\, c^2}{2,0368 + c^2}}$$

b) $\underline{u(2\,m/L) \simeq \tilde{u}(2\,m/L) = 6,6647}$.

veamos que el valor encontrado se encuentra dentro del rango de los datos de entrada:

$$u(1,5) < \tilde{u}(2) < u(2,5)$$

$$5,3 < 6,7 < 7,6$$