FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

[redacted]

7 (siete)

19-07-2017

Análisis Numérico I (75.12- 95.04-95.13) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: [redacted] Nombres : [redacted]

Padrón: [redacted]

1. ∅ a) Demostrar la siguiente afirmación: *Sea $g \in C^{m+1}[a,b]$, tiene un cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$, existe un método de convergencia cuadrática, para hallar esta raíz.*

B b) Usar cuatro iteraciones del método demostrado en a) para hallar la raíz múltiple de: $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$. Trababajar al menos con cuatro decimales y redondeo.

2. Usar tres iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales para obtener una aproximación de la solución del sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$ En el primer cuadrante tomando como valor inicial el vector $(0.5\ \ 1.5)^t$. Realizar un gráfico aproximado.

B 3. Se sabe que la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen(\frac{\pi}{4}\theta) = 0$, es un modelo del movimiento de un *péndulo simple de longitud L*. Sabiendo que: $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ y $L = 2m$. Aplicar el método de Euler en el intervalo $[0, 2]$ para aproximar $\theta(0.3)$, sabiendo que $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = -1$ y $h = 0.1$. Usar toda la presición de su calculadora.

B 4. B a) El censo de una población $P(t)$ de *Microtus arvalis*, ratón de campo, se refleja en la siguiente tabla:

$t(meses)$	0	2	6	10	12
$P(t)$	2	5	20	109	300

Plantear un modelo que refleje el crecimiento poblacional.

B b) Estimar la población para $t = 9$ y $t = 13$, usando cuadrados mínimos. Usar al menos dos decimales y redondeo. Indicar si se debe alertar a la comunidad sobre una epidemia, justifique su respuesta.

B 5. Según la ley de enfriamiento de *Newton*, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia de temperatura entre la sustancia y el aire. Sabemos que la temperatura del aire es de 30° C y la sustancia se ha enfriado desde 100° C a 70° C en 15 minutos. Esto indica que la constante de proporcionalidad para esta sustancia es: $k = -0.0373$.

B a) Plantear el problema anterior como un problema de valores inciales *PVI*.

B b) Estimar el tiempo necesario para que la sustancia alcance una temperatura menor a 95° C, usar el método de *Runge Kutta del punto medio* con $h = 0.5$.

N°1 [redacted]

Final Numerico

(1) El algoritmo para N-R raíces multiples es

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)\, f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)\, f''(x_i)} \\ x_0 \end{cases}$$

(b)

	1	-1	-3	5	-2
1		1	0	-3	2
	1	0	-3	2	0
1		1	1	-2	
	1	1	-2	0	
1		1	2		
	1	2	0		
-2		-2			
	1	0			

$\Rightarrow$ $x=1$ es la raíz multiple

$x=2$ raíz simple

$I = [0,9;\ 1,0]$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

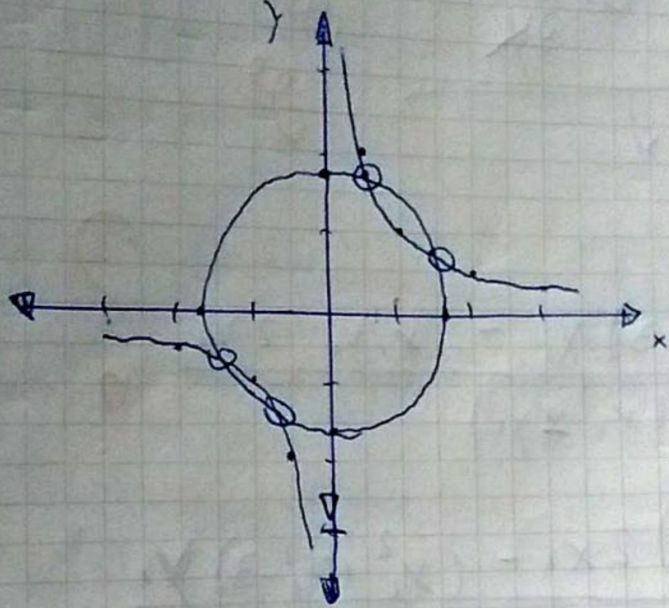
$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)\, f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i) \cdot f''(x_i)} \\ x_0 = 0,95 \end{cases}$$

i	x	x_{i+1}
0	0,95	0,999712753
1	0,999712733	$\boxed{1}$ Ya llegué a la raíz, en 2 iteraciones
2	1	

N°2

② $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x\,y=1 \end{cases}$ $x_0=(0,5\,;\,1,5)^t$



$\begin{cases} x^2+y^2-3=0 \\ x\,y-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} U = x^2+y^2-3 \\ V = xy-1 \end{cases}$ Obtengo U y V

Calculo Jacobiano

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial U}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial V}{\partial x} = y$ $\frac{\partial V}{\partial y} = x$

$J = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix}$

$\boxed{\det(J) = 2x^2 - 2y^2}$

La iteración para cada variable es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{U_i \frac{\partial V}{\partial y} - V_i \frac{\partial U}{\partial y}}{J}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{V_i \frac{\partial U_i}{\partial x} - U_i \frac{\partial V_i}{\partial y}}{J}$$

no es el método de Newton

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{(x_i^2 + y_i^2 - 3)\, y_i - x_i y_i \, 2y_i}{2(x_i^2 \pm y_i^2)} \\[2ex] y_{i+1} = y_i - \dfrac{(x_i y_i - 1)\, 2x_i - (x_i^2 + y_i^2 - 3)\, y_i}{2(x_i^2 \pm y_i^2)} \end{cases}$$

?

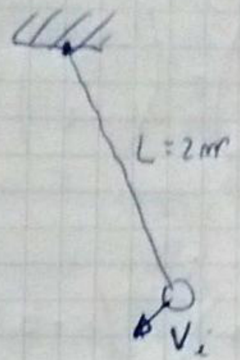
i	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}
~~0~~	~~0,5~~	~~1,5~~	~~1,4~~	~~1,4~~
~~1~~	~~1,4~~	~~1,4~~	~~1,66871891918~~	~~1,3664~~
~~2~~	~~1,4~~	~~1,3664~~	~~2,42~~	~~1,255405~~
~~2~~	~~1,66871891918~~	~~1,255405405~~	~~2,392626~~ ~~2,011595892~~	~~1,032~~
~~3~~				

i	x_i	y_i	x_{i+1}	y_{i+1}
0	0,5	1,5	-0,125	1,625
	0,125	1,625	0,008928571429	1,59
	0,008928571429	1,592997273	0,009742133276	1,7
	0,009742133276	1,734638		

→ No calculo los p
gráfico. Error de

③ El sistema es

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{g}{L}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = -1 \end{cases}$$



Se reescribe como

$$\begin{cases} \theta'' = -\frac{g}{L}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = f(t,\theta,\theta') \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = -1 \end{cases}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable.

$\theta' = u$

Resultando

$$\begin{cases} \theta' = u = \underline{F}(t,u) \\ u' = f(t,\theta,\theta') \\ \theta(0) = 0 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Se resuelve con Euler

$$\begin{pmatrix} \theta_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ u_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \underline{F}(t_i, u_i) \\ f(t_i, \theta_i, \theta_i') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ u_i \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} u_i \\ -\frac{g}{L}\cdot \operatorname{sen}(\end{pmatrix}$$

$$\text{①}\ (t=0{,}1)\quad \begin{pmatrix}\theta_1\\ v_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta_0\\ v_0\end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix} v_0 \\ -\frac{g}{L}\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_0\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{g}{L}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}0\right)\end{pmatrix} =$$

$$\text{②}\ (t=0{,}2)\quad \begin{pmatrix}\theta_2\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}1\\ -1\end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{g}{L}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot(-0{,}1)\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}2\\ -0{,}999328318\end{pmatrix}$$

$$\text{③}\quad \begin{pmatrix}\theta_3\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}2\\ -0{,}999328318\end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix}-0{,}999328318\\ -\frac{g}{L}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}(-0{,}2)\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}29993283\\ -0{,}997984936\end{pmatrix}$$

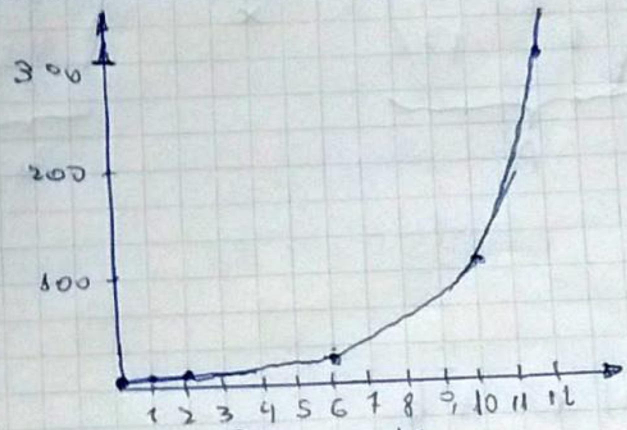
$$\Rightarrow \boxed{\theta(t=0{,}3) = -0{,}299932831}$$

Nº4

(4) Los crecimientos poblacionales de animales puede presentar varias evoluciones. Por lo general, bajo condiciones favorables y para periodos de tiempo no muy largos, esta evolución presenta un comportamiento exponencial. De acuerdo a los datos exhibidos en la tabla, se observa que la evolución, hasta los 12 meses presenta cierto caracter exponencial, confirmando que el crecimiento puede aproximarse con dicha funcion.

Por lo tanto, la evolución de la población se aproxima según

$\bar{P}(t) = a \cdot e^{bx}$



(b) Se procede a linealizar la expresion $P(t) = a\, e^{bx}$

$\bar{P} = a\, e^{bx}$

$\underbrace{\ln(\bar{P})}_{Y} = \underbrace{\ln(a)}_{a_0} + \underbrace{b}_{a_1} x$

t	P(t)	ln(P)
0	2	0,69314718
2	5	1,609437912
6	20	2,995732274
10	109	4,691347882
12	300	5,703782475

$$\hat{y}_1 = \theta_0 + \theta_1 x_1$$
$$\hat{y}_2 = \theta_0 + \theta_1 x_2$$
$$y_3 = \theta_0 + \theta_1 x_3$$
$$y_4 = \theta_0 + \theta_1 x_4$$
$$y_5 = \theta_0 + \theta_1 x_5$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$(A^T A)\, x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 284 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,69314718 \\ 1,609437912 \\ 2,99573 2274 \\ 4,691347882 \\ 5,703782475 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,609344772 \\ 136,552138 \end{pmatrix}$$

N°5

$$\begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 284 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,69344772 \\ 136,552138 \end{pmatrix}$$

$5a_0 + 30a_1 = 15,69344772$

$30a_0 + 284a_1 = 136,552138$

② - 6①

$104\, a_1 = 42,39145168$

$a_1 = 0,407610112$

$5a_0 + 30 \cdot (0,407610112) = 15,69344772$

$a_0 = 0,69302887$

$a_0 = \ln(a)$

$0,69302887 = \ln a$

$1,999763393 = a$

$a_1 = b$

$0,407610112 = b$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P}(t) = 1,999763393 \cdot e^{0,407610112\, x}}$$

$\hat{P}(9) = 78,37616616$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A los 9 meses, se estiman 78 ratones}}$

$\hat{P}(13) = 400,1983608$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A los 13 meses se estiman 400 ratones}}$

Predicción fuera de rango, es decir, por encima de los 12 meses, puede llegar a ser riesgoso si se estima P para un t muy lejos de los datos dados. Pero como t = 13 no se aparta mucho de t = 12 (último dato proporcionado por la tabla) se puede decir que es válido

P(13 meses) = 400, un valor elevado para un lapso de tiempo de crecimiento de un poco mas de un año. Si las condiciones se mantienen (espacio, recursos, etc), el modelo exponencial predice cada vez mas individuos de la especie. Por lo tanto, sí se puede considerar un riesgo, y sí se debe alertar a la comunidad

N°6

(5) $T_A = 30°C$

T = temperatura de la sustancia

$$\begin{cases} T' = k(T - T_A) = F(t,T) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Si usa $[t]$ = min y $[T]$ = °C

Las mismas unidades

Reemplazando,

$$\begin{cases} T' = -0{,}0373(T - 30) \\ T(0) = 100 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $T' = k(T - T_A)$

El valor de k se obtiene de la resolución analítica de la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$

$$\frac{dT}{(T - T_A)} = k\,dt$$

$$\ln(T - T_A)\Big|_{100}^{70} = k\,15$$

$$\ln\left(\frac{70-30}{100-30}\right) = k\,15$$

$$-0{,}0373 = k$$

Sol... ver... "k

(b) $T_{i+1} = T_i + h\,(a_1 k_1 + a_2 k_2)$

Punto medio

$a_2 = 1$

$a_1 = 0$

$T_{i+1} = T_i + h \cdot a_2 k_2$

$$\boxed{T_{i+1} = T_i + h \cdot k_2}$$

$$\begin{cases} k_1 = F(t_i, T_i) = -0{,}0373\,(T_i - 30) \\ k_2 = F\left(t + \frac{h}{2} ; T_i + \frac{h k_1}{2}\right) = -0{,}0373 \cdot \left[\left(T_i + \frac{h k_1}{2}\right) - 30\right] \end{cases}$$

i	t (min)	T_i (°C)	K_1	K_2	T_{i+1}
0	0	100	-2,611	-2,586652425	98,70667379
1	0,5	98,70667379	-2,562758932	-2,538861205	97,43724319
2	1	97,43724319	-2,515409171	-2,49195298	96,1912667
3	1,5	96,1912667	-2,468934248	-2,445911436	94,96831098
4	2	94,96831098			

La sustancia tarda, alcanza en t = 2 min, T = 94,96831098 °C
Es decir, tarda un poco menos de 2 minutos para alcanzar una temperatura menor a 95 °C