➪ FINALES

HOJA N°

FECHA

Final 2019

① Hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la circunferencia $x^2-2x+y^2=0$ y la hipérbola $xy=1$
Utilizar tres iteraciones del método Newton p/ sistemas no lineales
Usar como semilla $x^{(0)}=(1.9\ \ 0.4)^t$
Trabajar con al menos 3 decimales y redondeo
b) Graficar ambas curvas y la solución.

Defino $F(x,y)$,

- $F(x,y)=(\underbrace{x^2-2x+y^2}_{f1},\ \underbrace{xy-1}_{f2})$

calculo su Jacobiano,

- $JF(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f1}{\partial x} & \frac{\partial f1}{\partial y}\\ \frac{\partial f2}{\partial x} & \frac{\partial f2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-2 & 2y\\ y & x\end{pmatrix}$

- semilla: $x_0=\begin{pmatrix}1,9\\0,4\end{pmatrix}$

MÉTODO DE NEWTON (Sist. No Lineales)

$$x^{(n)}=x^{(n-1)}+y^{(n-1)},\quad n\geq 1$$

* $y^{(n-1)}$ tal que

$$JF(x^{n-1}).y^{(n-1)}=-F(x^{(n-1)})^t$$

→ cada iteración se calcula como:

$n=1$: $x^1=x^0+y^0$

- $JF(x_0)\,y^0=-F(x^0)^t$

$$\begin{pmatrix}1,8 & 0,8\\0,4 & 1,9\end{pmatrix}\cdot y^0=-\begin{pmatrix}-0,03\\-0,24\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}1,8y_1^0+0,8y_2^0=0,03\\0,4y_1^0+1,9y_2^0=0,24\end{cases}\rightarrow y^0=\begin{pmatrix}-0,044\\0,135\end{pmatrix}$$

$$x^1=x^0+y^0=\begin{pmatrix}1,856\\0,535\end{pmatrix}$$

$n=2$: $x^2=x^1+y^1$

- $JF(x_1)\cdot y^1=-F(x^1)^t$

$$\begin{pmatrix}1,712 & 1,07\\0,535 & 1,856\end{pmatrix}\cdot y^1=-\begin{pmatrix}0,019\\-0,007\end{pmatrix}\rightarrow y^1=\begin{pmatrix}-0,016\\0,009\end{pmatrix}$$

$$x^2=x^1+y^1=\begin{pmatrix}1,84\\0,544\end{pmatrix}$$

$n=3$: $x^3=x^2+y^2$

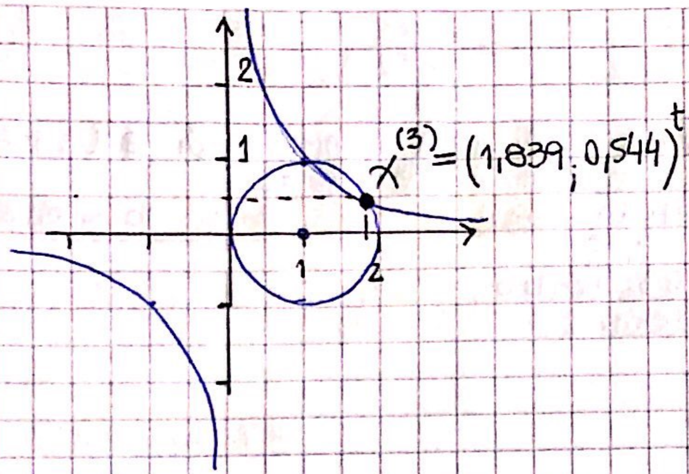
$JF(x^2).\,y^2=-F(x^2)^t$

$$\begin{pmatrix}1,68 & 1,088\\0,544 & 1,84\end{pmatrix}y^2=-\begin{pmatrix}0,00134\\0,00096\end{pmatrix}\rightarrow y^2=\begin{pmatrix}-0,000715\\-0,000312\end{pmatrix}\rightarrow$$

Intersección ↓

$$\boxed{x^3=\begin{pmatrix}1,839\\0,544\end{pmatrix}}$$

b)



$\begin{cases} \underline{\text{circunf}}: (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ \underline{\text{hipérbola}}: xy = 1 \end{cases}$

hipérbola

(2) En un contenedor se transportan refrigeradores y cocinas industriales. Cada cocina pesa 1 ton y c/refrigerador 2 ton. c/cocina ocupa 1,1 y c/ref 2 m3. En total, entre cocinas y refrigeradores se registró 10 ton y 10,4 m3

a) Obtener usando Gauss-Seidel una aprox de la cantidad de cocinas y refrig. que se transportaron. Trabajar c/aritmética de 3 dígitos

b) Indicar si el sist. está bien condicionado.

· Defino X, Y:

X: cantidad de cocinas
Y: ✓ ✓ refrigeradores

$$\begin{cases} X + 2Y = 10 & [\text{ton}] \to \text{peso} \\ 1{,}1X + 2Y = 10{,}4 & [m^3] \to \text{volumen} \end{cases}$$

Sistema $AX = b$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10{,}4 \end{pmatrix}$

* Para poder usar el Método de Gauss-Seidel escribo A como:

$A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1{,}1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Defino: $\begin{cases} T = (D-L)^{-1} \cdot U \\ C = (D-L)^{-1} \cdot b \end{cases}$

* Las iteraciones se calculan como: $\boxed{X^{(n)} = TX^{(n-1)} + C}$

Calculo T y C:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$$

HOJA N°

FECHA

· Elijo semilla: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

· Realizo iteraciones:

$\underline{n=1} \rightarrow x^1 = T x^0 + C$

b) Bien condicionado ?

③ En un pequeño bosque la población de venados $P(t)$ inicialmente c/ 25 indiv. satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = 0{,}0225 \cdot P(t) - 0{,}0003 \cdot P(t)^2 = f(P,t) \\ P(0) = 25 = P_0 = P(t_0) \end{cases}$$

orden 2

[tiempo] = meses

a) Utilizar 3 iteraciones del método Runge-Kutta del punto medio p/ aprox la solución en 6 meses. Trabajar al menos c/ 3 cifras dec. y redondeo.

b) ¿Qué porcentaje de la población se incrementó en ese tiempo?

Método Runge-Kutta del punto Medio:

$$\begin{cases} f(P,t) \\ P_0 = 25 \\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{6}{3} = 2 \\ n = \text{N° de particiones} \end{cases}$$

* Iteraciones:

- $P_{n+1} = P_n + hK_2$
- $K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{K_1 h}{2})$
- $K_1 = f(P_n, t_n)$
- $y(a) = y_0$

- $k_1 = f(P_0, t_0) = f(0; 25) = 0{,}375$
- $k_2 = f(1; 25{,}375) = 0{,}378$

0 2 4 6

t_0 t_1 t_2 t_3

$n=0$: $P_1 = P_0 + h k_2$
$P_1 = 25{,}756$

$n=1$: $P_2 = P_1 + h k_2$
$P_2 = 26{,}522$

- $k_1 = f(t_1, P_1)$
- $k_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, P_1 + \frac{hk_1}{2}) = f(3, 22{,}1365) = 0{,}383$

$n=2$: $P_3 = P_2 + h k_2$
$P_3 = 27{,}298$

- $k_1 = f(t_2, P_2) = f(4, 26{,}522) = 0{,}386$
- $k_2 = f(t_2 + \frac{h}{2}; P_2 + \frac{hk_1}{2}) = f(5, 26{,}908) = 0{,}388$

∴ A los 6 meses voy a tener $\boxed{28}$ venados.

b) incremento = 28 − 25 = 3 →
25 — 100%
3 — 12%

NOTA

HOJA N°

FECHA

④ EL balance de calor en estado estacionario se representa como $\frac{d^2T}{dx^2} + 0{,}01\,(Ta - T) = 0$ p/ una barra de longitud L

Sabiendo que $Ta = 20$,

a) Desarrolle el método de diferencias finitas p/ un problema de valores en la frontera.

b) Sabiendo que la barra tiene una longitud de 10 m con $T(0) = 40$ y $T(L) = 200$. Usar lo desarrollado en ⓐ p/ evaluar la T° en los puntos intermedios de la barra con $N = 5$.

Método: Aprox. por Diferencias Finitas → Resumen.

b) 0 2 4 6 8 10 [m]   N: ※ particiones = 5

$t_0\ t_1\ t_2\ t_3\ t_4\ t_5$

$$\begin{cases} T'' + 0{,}01\,(20 - T) = 0 \rightarrow T'' + 0{,}2 - 0{,}01T = 0 \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T'' + P(x)\,T' + Q(x).T = f(x) \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$$

- $P(x) = 0$
- $Q(x) = -0{,}01$
- $f(x) = -0{,}2$

$h = \frac{L}{N} = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow h$: paso

Planteo el método de diferencias finitas:

$$\begin{cases} T_{n+1}\left(1 + \frac{h}{2}\,.\,P(x)\right) + T_n\left(h^2 Q(x) - 2\right) + T_{n-1}\left(1 - \frac{h\,P(x)}{2}\right) = h^2 f(x) \\ T_0 = 40 \\ T_5 = 200 \end{cases}$$

T_5: 5 → N

- Cuando $n = 1 \rightarrow T_2 + T_1(-2{,}04) + T_0 = -0{,}8$
- $n = 2 \rightarrow T_3 + T_2(-2{,}04) + T_1 = -0{,}8$
- $n = 3 \rightarrow T_4 + T_3(-2{,}04) + T_2 = -0{,}8$
- $n = 4 \rightarrow T_5 + T_4(-2{,}04) + T_3 = -0{,}8$

Resolviendo el sistema queda:

$T_1 = 65{,}174 = T(2m)$

$T_2 = 92{,}875 = T(4m)$

$T_3 = 123{,}491 = T(6m)$

$T_4 = 158{,}966 = T(8m)$

NOTA

(5) Dados los siguientes valores medidos de una det. función, calcular el valor aproximado de la derivada en $x=1$ usando el método de extrapolación de Richardson:

$$\begin{cases} R^{(k)}(h) = \dfrac{4^k R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1} \\ R^{(0)}(h) = R(h) \end{cases}$$

x	0,0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$	1,0000	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183	3,4903	4,4817	5,7546	7,3891

$R(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ → con $h=1$ → $R(h=1) =$

$R^{(0)}(h) = R^{(1)}(h)$

① Hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la
$\begin{cases} \text{circunferencia } x^2-2x+y^2=0 \text{ y la} \\ \text{hipérbola } xy=1 \end{cases}$
Utilizar 3 iteraciones del método de Newton p/ sistemas no lineales

* Usar como semilla $x^{(0)}=(1{,}9 \quad 0{,}4)^t$
Trabajar con 3 decimales y redondeo

b) Graficar ambas curvas y la solución obtenida.

a) Defino $F(x)$:

$$F(x,y)=(x^2-2x+y^2,\ xy-1)$$

su matriz jacobiana es $JF(x,y)=\begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$

* cada iteración se calcula como: $\begin{cases} x^{(n+1)}=x^{(n)}+y^{(n)} \\ y^{(n)} \text{ tal que } JF(x^{(n)}).\,y^{(n)}=-F(x^{(n)}) \end{cases}$

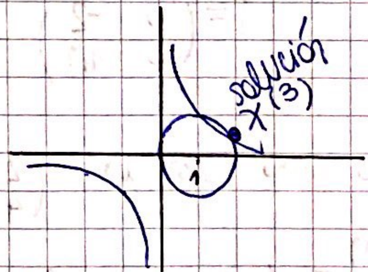
↳ Realizo las iteraciones:

$n=0 \to \quad x^0=(1{,}9 \quad 0{,}4)^t$

$$\begin{cases} x^1=(1{,}9 \quad 0{,}4)^t+y^0 \\ \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} \to y^{(0)}=\begin{pmatrix} -0{,}044 \\ 0{,}135 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$x^{(1)}=\begin{pmatrix} 1{,}856 \\ 0{,}535 \end{pmatrix}$

AUX
$(x^2-2x)+y^2=0$
$(x-1)^2+y^2=1$



$n=1 \to \quad x^1=(1{,}856 \quad 0{,}535)^t$

$$\begin{cases} x^2=x^1+y^1 \\ y^1 / \ JF(x^1)\cdot y^1=-F(x^1) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}712 & 1{,}07 \\ 0{,}535 & 1{,}856 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}019 \\ 0{,}007 \end{pmatrix} \to y^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}530 \end{pmatrix}$$

$x^2=(1{,}856 \quad 1{,}065)^t$

$n=2 \to \begin{cases} x^3=x^2+y^2 \\ y^2 / \ JF(x^2).\,y^2=-F(x^2) \end{cases} \to y^{(2)}=\begin{pmatrix} 0{,}519 \\ -0{,}824 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1{,}712 & 2{,}13 \\ 1{,}065 & 1{,}856 \end{pmatrix}\cdot y^{(2)}=-\begin{pmatrix} 0{,}867 \\ 0{,}977 \end{pmatrix}$$

∴ Solución:

$\to \boxed{x^{(3)}=\begin{pmatrix} 1{,}337 \\ 0{,}223 \end{pmatrix}}$

hay error de cuentas

② En un contenedor se transportan cocinas y refrigeradores industriales.
c/ cocina pesa 1 ton y ocupa 1,1 m^3 y c/ refrig. 2 ton, 2 m^3.
En total entre ambos se registró un peso de 10 ton y espacio de 10,4 m^3.

a) Obtener usando 3 iteraciones y el método de Gauss - Seidel una aprox de la cantidad de cocinas y refrigeradores que se transportaron. (Trabajar c/ 3 dígitos).

b) Indicar si el sistema está bien condicionado.

Defino X : ※ cocinas
Y : ※ refrigeradores

sistema $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 1{,}1x + 2y = 10{,}4 \end{cases}$ de la forma $AX = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10{,}4 \end{pmatrix}$$

⇨ Para usar el método de Gauss - Seidel escribo a A como:

$A = D - L - U$, donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1{,}1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Defino $T = (D-L)^{-1} U$, $C = (D-L)^{-1} b$

* Calculo iteraciones c/ $x^{(n)} = Tx^{(n-1)} + C$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 10 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$$

* Elijo como semilla $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = x^{(0)}$ y realizo

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 4{,}21 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}58 \\ 4{,}331 \end{pmatrix} \to \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1{,}58 \\ 4{,}331 \end{pmatrix}$$

∴ Entonces hay 2 cocinas y 4 refrigeradores. ※ o hay 5?

→ para indicar si está bien condicionado:

Estimo el número de condición,
uso $\bar{r} = A\bar{x} - b$

Resuelvo el sistema $A\bar{y} = r$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \bar{y} = \underbrace{A\bar{x} - b}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}58 \\ 4{,}331 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 19{,}4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0{,}242 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{y} = \begin{pmatrix} -2{,}42 \\ 1{,}331 \end{pmatrix}$$

fórmula?

Estimo el nro. de condición de A:

$$k(A) \cong 10^3 \cdot \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\bar{x}\|_\infty} = 10^3 \cdot \frac{2{,}42}{4{,}331} = 558{,}76$$

∴ La matriz no está bien condicionada ya que $k(A) > 1$

(3) En un bosque la población de venados $P(t)$ inicialmente con 25 individuos satisface la ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t)}{dt} = 0{,}0225 \cdot P(t) - 0{,}0003 \cdot P(t)^2 \\ P(0) = 25 \end{cases}$$, tiempo medido en meses.

a) Utilizar 3 iteraciones del método Runge-Kutta del punto medio p/ aproximar la solución en 6 meses.
Trabajar c/ 3 cifras y redondeo

b) ¿Qué % de la población se incrementó en ese tiempo?

$$\begin{cases} P' = 0{,}0225\,P - 0{,}0003\,P^2 = f(P,t) \\ P_0 = 25 \end{cases}$$

paso ← $h = 2$
$t_0 = 0$

* calculo iteraciones:

método R-K
$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + h \cdot k_2 \\ k_2 = f\left(P_n + \dfrac{h k_1}{2}, t_n + \dfrac{h}{2}\right) \end{cases} , \quad k_1 = f(P_n, t_n)$$

$P_1 = 25{,}756$ ($t_1 = 2$)
$P_2 = 26{,}518$ ($t_2 = 4$)
$P_3 = 27{,}292$ ($t_3 = 6$) ⟶ solución aproximada en 6 meses: $\boxed{28 \text{ venados}}$

b) calculo porcentaje: $28 - 25 = 3 \times 100 / 25 = \boxed{12\%}$ → incremento.

④ balance de calor: $\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} + 0{,}01\,(T_0 - T) = 0 \\ T_0 = 20 \end{cases}$ p/ una barra de longitud L

a) Desarrollar el método de diferencias finitas p/ un problema de valores en la frontera.

b) Sabiendo que la barra tiene una longitud de 10 m con $T(0)=40$ y $T(L)=200$ usar lo desarrollado en (a) p/ evaluar la T° en los puntos intermedios de la barra con $N=5$

sistema: $\begin{cases} T'' - 0{,}01\,T = -0{,}01\,T_0 \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$

o bien, $\begin{cases} T'' + \cancel{P(x)}^{0}\cdot T' + Q(x)\,T = f(x) \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$

donde, $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = -0{,}01 \\ f(x) = -0{,}01\,T_0 \end{cases}$ y $h = \dfrac{L}{N} = \dfrac{10}{5} = 2$

* Sist. de ec. del método de diferencias finitas: $T_{n+1} + \left(-2 + \dfrac{L^2}{25}\cdot(-0{,}01)\right)\cdot T_n + T_{n-1} = \dfrac{L^2}{25}(-0{,}01)T_0$

con $T_0 = 40$ y $T_5 = 200$

(1) $T_2 - (2{,}04)\,T_1 + 40 = -0{,}8$

(2) $T_3 - (2{,}04)\,T_2 + T_1 = -0{,}8$

(3) $T_4 - (2{,}04)\,T_3 + T_2 = -0{,}8$

(4) $200 - (2{,}04)\,T_4 + T_3 = -0{,}8$

↳ Resuelvo el sistema.

5) Calcular el valor aproximado de la derivada en $x=1$ usando el método de extrapolación de Richardson

$$\begin{cases} R^{(k)}(h) = \dfrac{4^k \cdot R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1} \\ R^{(0)}(h) = R(h) \end{cases}$$

x	0,0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,50	1,75	2,00
f(x)	1,0000	1,2840	1,6487	2,1170	2,7183	3,4903	4,4817	5,7546	7,3891

calculo $R(h)$, $R(h/2)$, $R(h/4)$ con $h=1$

$x=1$

- $R(h) = \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \dfrac{f(2)-f(0)}{2h} = \dfrac{7,3891 - 1,0000}{2} = 3,19455$

- $R(h/2) = \dfrac{f(1,5) - f(0,5)}{1} = 4,4817 - 1,6487 = 2,833$

- $R(h/4) = \dfrac{f(1,75) - f(0,25)}{1 \times 0,5} = \dfrac{5,7546 - 1,2840}{0,5} = 2,7466$

Ahora calculo con $R^1(h)$ y $R^1(h/2)$

$$R^1(h) = \frac{4 \cdot 2,833 - 3,19455}{4-1} = 2,7125$$

$$R^1(h/2) = \frac{4 \cdot 2,7466 - 2,833}{3} = 2,7178$$

y por último $R^2(h) = \dfrac{4^2 \cdot 2,7178 - 2,7125}{4^2 - 1} = 2,7182$

$\therefore$ $\boxed{f'(1) = 2,7182}$

(*) buscar Método de Extrapolación de Richardson

FINAL 28/2/18

4

① Demostrar que la siguiente afirmación:
Sea $g \in C^{m+1}[a,b]$ tiene un cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$ existe un método para hallar esta raíz, como raíz simple de una función adecuada

b) Usar 3 iteraciones del método demostrado en ⓐ p/ hallar la raíz múltiple de: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
Trabajar al menos con 4 decimales y redondeo
Tomar como semilla $p_0 = 0.5$

② La difusión de una epidemia es modelada por la ecuación logística:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k.x(t).(m - x(t)) \quad \text{donde } k>0 \quad \begin{cases} m: \text{población total del pueblo} \\ x(t): \text{infectados pasados } t \text{ días.} \end{cases}$$

La población de un pueblo es de 200 habs.

$t=0$ 20 infectados → $x(t=0)=20$.

$k = 8{,}1 \cdot 10^{-4}$

* Usar 5 iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio p/ estimar el % de la población infectada al cabo de 10 días. → $x(t=10)=?$

ecuación $\quad x'(t) = -k.x(t)^2 + km.x(t)$

$x'(t) = 8{,}1 \times 10^{-4}(-x^2(t) + 200\,x(t))$

[días] 0 2 4 6 8 10

t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5

$h = \frac{b-a}{N} = \frac{10-0}{5} = 2$

R-K: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h.\,k_2 \\ x(a) = x_0 \end{cases}$ donde $\begin{array}{l} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2}) \end{array}$

$f(t_n, x_n)$ → indep → dep

para $n=0$ → $t=0 \quad x(t=0)=20$

$x_1 = x_0 + 2k_2$

$x_1 = 26{,}57405 \approx 27$

$\begin{cases} k_1 = f(t_0, x_0) = f(0,20) = 2{,}916 \\ k_2 = f(1, 20+k_1) = f(1, 22.916) = 3{,}287 \end{cases}$

$x'(t) = 0{,}162x - 8{,}1 \cdot 10^{4} x^2 = f(t,x)$

para $n=1$ → $x_2 = x_1 + 2k_2$

$x_2 = 35{,}4274 \approx 36$

$\begin{cases} k_1 = f(2,27) = 3{,}7330 \\ k_2 = f(3, 27+3{,}733) = 4{,}2137 \end{cases}$

para $n=2$ → $x_3 = x_2 + 2k_2$

$x_3 = 46{,}519 \approx 47$

$\begin{cases} k_1 = f(4,36) = 4{,}78224 \\ k_2 = f(5, 36+k_1) = 5{,}2595 \end{cases}$

para $n=3$ → $x_4 = x_3 + 2k_2$

$x_4 = 59{,}5947 \approx 60$

$\begin{cases} k_1 = f(6,47) = 5{,}8274 \\ k_2 = f(7, 52{,}8247) = 6{,}2973 \end{cases}$

para $n=4$ → $x_5 = x_4 + 2k_2$

$x_5 = 74{,}4148 \approx 74$

$\begin{cases} k_1 = f(8,60) = 6{,}804 \\ k_2 = f(9, 66{,}804) = 7{,}2074 \end{cases}$

$x_5 = 74$ personas infectadas

∴ $\boxed{37\,\%}$ de la población está infectada.

húsares

(3) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{cases} x' = -y + 3z \\ y' = 2x + y + 3z \\ z' = -2x - y + 5z \end{cases}$

$x(0)=1 \quad y \; y(0)=1 \quad , z(0)=1$

Aplicar 2 iteraciones del método de EULER para estimar $x(0.2)$, $y(0.2)$ y $z(0.2)$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{0{,}2-0}{2} = 0{,}1$$

⇨ Método de EULER $\quad y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$, $\quad y' = f(t_i, y_i)$

Aplicado al sistema ↓

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \overset{h}{0{,}1} \times \overbrace{\begin{pmatrix} -y_i + 3z_i \\ 2x_i + y_i + 3z_i \\ -2x_i - y_i + 5z_i \end{pmatrix}}^{f(t_i, y_i)} , \quad \begin{aligned} x(0)&=1 \\ y(0)&=1 \\ z(0)&=1 \end{aligned}$$

$\underline{i=0}$ $$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \times \begin{pmatrix} -y_0 + 3z_0 \\ -2x_0 + y_0 + 3z_0 \\ -2x_0 - y_0 + 5z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \times \underbrace{\begin{pmatrix} -1+3 \\ -2+1+3 \\ -2-1+5 \end{pmatrix}}_{(2\,2\,2)^t} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\underline{i=1}$ $$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \times \begin{pmatrix} -y_1 + 3z_1 \\ -2x_1 + y_1 + 3z_1 \\ -2x_1 - y_1 + 5z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} + 0{,}1 \times \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 2{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}44 \\ 1{,}44 \\ 1{,}44 \end{pmatrix} \checkmark$$

(4) a) Hallar una aproximación de la solución real p/ la intersección entre la circunf $x^2 - 2x + y^2 = 0$ y la hiperbola $xy = 1$

Usar 3 it. del método de Newton p/ sist No lineales

semilla: $x(0) = (1{,}9 \;\; 0{,}4)^t$

Trabajar c/ 3 decimales y redondeo. y graf.

Método de Newton p/ sist. No Lineales

$JF(x^{k-1}) \cdot y^{(k-1)} = -F(x^{k-1})$

$x^k = x^{k-1} + y^{k-1}$

Defino $\bar{F}(x,y) = (x^2 - 2x + y^2, \; xy - 1)$

$$JF = \begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$\underline{k=1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 1{,}9 - 2 & 2 \cdot 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} -4{,}355 \times 10^{-2} \\ 0{,}1355 \end{pmatrix} \rightarrow x^1 = x^0 + y^0 = \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

$\underline{k=2}$

⋮

$\underline{k=3}$

$$x^3 = x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} 1{,}839 \\ 0{,}544 \end{pmatrix}$$

5 $\boxed{T = C \cdot x^{\alpha}}$ → es una función potencial

$(x, T) \to (58, 88)\ (108, 225)\ (150, 365)\ (228, 687)$

▧ mínimos : $C = ?$, $\alpha = ?$

$T = C \cdot x^{\alpha}$ ↓ linealizo la función

$\ln(T) = \ln(C) + \alpha \ln(x)$

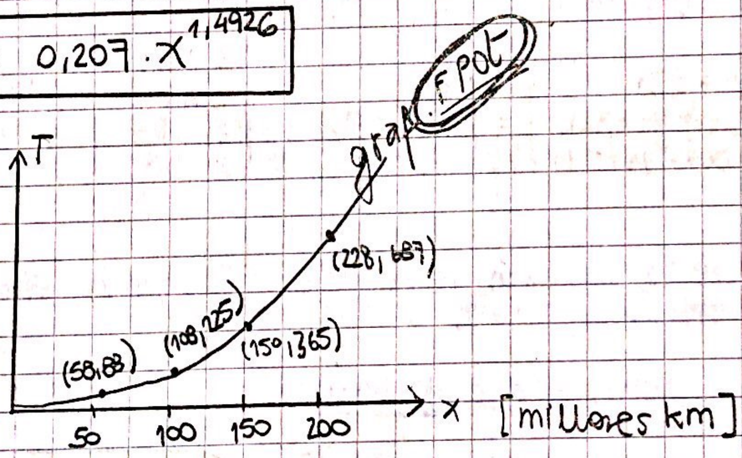
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \ln(T_1) \\ \ln(T_2) \\ \ln(T_3) \\ \ln(T_4) \end{pmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(x_1) & 1 \\ \ln(x_2) & 1 \\ \ln(x_3) & 1 \\ \ln(x_4) & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \ln(C) \end{pmatrix}}_{x}$$

por ▧ min: $A^T A \cdot \hat{x} = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 92{,}994 & 19{,}182 \\ 19{,}182 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \ln(C) \end{pmatrix}}_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 108{,}567 \\ 22{,}326 \end{pmatrix} \to \hat{x} = \begin{pmatrix} 1{,}4926 \\ 1{,}5764 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \alpha \\ = \ln(C) \end{matrix}$$

Entonces $\alpha = 1{,}4926$
$C = 0{,}207$

$\therefore$ $\boxed{T = 0{,}207 \cdot x^{1{,}4926}}$



FINAL 26/7/2017

1) a) Suponer que $\hat{x}$ es una aprox. a la solución del sistema $Ax=b$, A matriz no singular y r vector residual de $\hat{x}$.
Demostrar que

$$\|x-\hat{x}\| \leq \|r\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Demost REFINAMIENTO ITERATIVO

- r vector residual de $\hat{x}$

$r = b - A\hat{x}$
$r = Ax - A\hat{x}$
$r = A(x-\hat{x})$, como A es no singular, $\exists A^{-1}$
$A^{-1}r = x - \hat{x}$
$\|A^{-1}r\| = \|x-\hat{x}\|$

$$\|A^{-1}\| \cdot \|r\| \geq \underbrace{\|A^{-1}r\|}_{\|x-\hat{x}\|} \rightarrow \|A^{-1}\| \cdot \|r\| \geq \|x-\hat{x}\| \quad (1)$$

- $Ax = b$
$\|Ax\| = \|b\|$
$\|A\| \cdot \|x\| \geq \|b\|$, $b \neq 0$ y $\|x\| \neq 0$

$$\frac{1}{\|b\|} \geq \frac{1}{\|A\| \cdot \|x\|} \quad (1)$$

$$\frac{\|A^{-1}\| \cdot \|r\|}{\|b\|} \geq \frac{\|x-\hat{x}\|}{\|A\| \cdot \|x\|}$$

Error Relativo

$$\frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|r\|}{b} \quad (2)$$

Error Residual Relativo

b) Dado el sistema: $\begin{cases} 39x_1 + 16x_2 = 71 \\ 0,68x_1 + 0,29x_2 = 1,26 \end{cases}$

Tomar como aproximación $\hat{x} = (0,98 \quad 1,98)^t$ y aritmética de 3 dígitos, p/ estimar el nro. de condición de la matriz A. Realizar un paso de refinamiento iterativo p/ mejorar la aprox.

$k(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \rightarrow$ Nro de condición de la matriz

$$k(A) = \frac{\|\hat{y}\|}{\|\hat{x}\|} \cdot 10^t$$

$\begin{cases} A\hat{y} = r \\ r = b - A\hat{x} \end{cases}$ en donde $A = \begin{pmatrix} 39 & 16 \\ 0,68 & 0,29 \end{pmatrix}$ $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0,98 \\ 1,98 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 71 \\ 1,26 \end{pmatrix}$

- $r = b - A\hat{x} = \begin{pmatrix} 71 \\ 1,26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 69,9 \\ 1,2406 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,0194 \end{pmatrix}$

- $A\hat{y} = r \rightarrow \begin{pmatrix} 39 & 16 \\ 0,68 & 0,29 \end{pmatrix} \cdot \hat{y} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,0194 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{y} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{pmatrix}$

$\|\hat{y}\|_\infty = 0{,}02$

$\|\hat{x}\|_\infty = 1{,}98$

→ aritmética de 3 dígitos : $\boxed{t=3}$

$k(A) = \dfrac{\|\hat{y}\|_\infty}{\|\hat{x}\|_\infty} \cdot 10^t = \dfrac{0{,}02}{1{,}98} \times 10^3 = 10{,}101 \gg 1$ → NO está bien condicionada.

* Paso de Refinamiento iterativo: $\hat{x}^{n+1} = \hat{x}^n + \hat{y}^n$

$\hat{x}^1 = \hat{x}^0 + \hat{y}^0 = \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 1{,}98 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$ ✓

(2) La ley de radiación de... es proporcional a $M^4 - T^4$, sea $K = 40^{-4}$ cte. de prop suponiendo $M(t) = 70°F$ cte.

a) Si $T(0) = 100°F$ plantear el problema, como un problema de valores iniciales para $0 \leq t \leq 2$. Mostrar que tiene solución única.

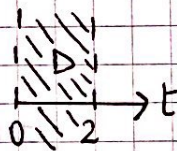
b) Usar el método de Runge-Kutta del pto. medio p/ aprox la temperatura en el instante $t = 0{,}2$ usar $h = 0{,}1$.

(a) $\dfrac{dT}{dt} = (M^4 - T^4)K$

$f(t_1, y_1) = (70^4 - T(t=0)^4)\underbrace{K}_{40^{-4}}$

$$\begin{cases} T' = (M^4 - T^4)K \\ T(0) = 100, \quad 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

planteo entonces un $D = \{T \in \mathbb{R} / 0 \leq t \leq 2\}$ ⇒ D es <u>convexo</u>



∴ Al ser un D convexo, para que tenga solución única, debe existir $L \in D$ /

$f(t) = (M^4 - T(t)^4)K$, $|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$

$|(M^4 - T^4(t_1))K - (M^4 - T^4(t_2))K| \leq L\,|y_1 - y_2|$

$|\cancel{KM^4} - KT^4(t_1) - \cancel{KM^4} + T^4(t_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$

$K\,|\underbrace{-T^4(0)}_{-100^4} + T^4(t_2)| \leq L$

b) Runge Kutta : $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + k_2 h \\ \frac{dx}{dt} = (M^4 - x^4)k = f(t,x) \\ x(0) = 100 = x_0 \end{cases}$ $\quad k_1 = f(t_i, x_i)$ $\quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} k_1\right)$

• $x_1(t=0{,}1) = \underbrace{x_0}_{100} + 0{,}1 \times \underbrace{k_{20}}_{9{,}379}$ $\quad k_{10} = f(0,0) = -29{,}684$ $\quad k_{20} = f(0{,}05, -1{,}4842) = 9{,}379$

$x_1 = 99{,}852$

• $x_2(t=0{,}2) = \underbrace{x_1}_{99{,}852} + 0{,}1 \times \underbrace{k_{2_1}}_{-27{,}212}$ $\quad k_{1_1} = f(0{,}1, 99{,}852) = -29{,}453$ $\quad k_{2_1} = f(0{,}15, 98{,}379) = -27{,}212$

$\boxed{x_2(t=0{,}2) = 97{,}1308}$

3) Problema de valores iniciales: $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE(t)}{dt}$

$I(t=0{,}3) = ?$ / $I(t=0) = 0$, $\frac{dI}{dt}(t=0) = 0$

* Sabiendo que $L=1$, $R=1$, $C=0{,}5$ y $E(t) = t^2 \rightarrow \frac{dE}{dt}(t) = 2t$
Usar el método de Euler p/ calcular el valor pedido
calcular h p/ realizar 3 iteraciones
Usar al menos 2 decimales y redondeo.

$\begin{cases} LI'' + RI' + \frac{I}{C} = 2t \\ I(0) = 0 \\ I'(0) = 0 \end{cases}$

Realizo un cambio de variables: $U = I'$
$I'' = U' = \frac{2t - I/C - RU}{L}$ y paso de 2do a 1er orden

Planteo nuevamente el PVI:

$\begin{cases} U' = \frac{2t - 2I - U \cdot 1}{1} = 2t - 2I - U \\ I' = U \\ U(0) = 0 \\ I(0) = 0 \end{cases}$

Resuelvo con Euler: $\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ I_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i \\ I_i \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} f(U, \overset{0}{I(0)}) \\ U_i \end{pmatrix}$ con $f(U, I(0)) = U'$

• Quiero llegar a $t=0{,}3$ desde $t=0$ con 3 iteraciones $\rightarrow h = 0{,}1$

$\begin{pmatrix} U_1(t=0{,}1) \\ I_1(t=0{,}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ I_0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} \cancel{2 \cdot 0} - \cancel{2I_0} - \cancel{U_0} \\ \cancel{U_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} U_2(t=0{,}2) \\ I_2(t=0{,}2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 0{,}1 - \cancel{2I_1} - \cancel{U_1} \\ \cancel{U_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} U_3(t=0{,}3) \\ I_3(t=0{,}3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ \cancel{I_2} \end{pmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 0{,}2 - 2\cancel{I_2} - U_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}004 \\ 0{,}002 \end{pmatrix} \rightarrow I(t=0{,}3) = 0{,}002\,A$

(4) Determinar la intersección entre la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ y la hipérbola $xy=\frac{1}{2}$ en el 1er. cuadrante. Tomando como V.I. el vector $(1{,}94 \quad 0{,}26)^t$. Utilizar 2 it. del método de Newton p/ sist. NO lineales. Usando 4 decimales y redondeo.

sist: $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2-1=0 \\ xy-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$

Defino como $F(x,y)=\left(\frac{x^2}{4}+y^2-1,\ xy-\frac{1}{2}\right)$

su jacobiano: $JF(x,y)=\begin{pmatrix} x/2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$

- semilla: $\begin{pmatrix}1{,}94\\0{,}26\end{pmatrix}=X_0$
- según el <u>Método de Newton</u>: $\begin{cases} X^n=X^{n-1}+y^{n-1} \\ JF(X^{n-1})\cdot y^{n-1}=-F(X^{n-1}) \end{cases}$

$n=1$: $\begin{cases} JF(X_0)y^0=-F(X^0)^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1{,}94/2 & 2\cdot 0{,}26 \\ 0{,}26 & 1{,}94\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1^0\\y_2^0\end{pmatrix}=-\underbrace{F(1{,}94 \quad 0{,}26)^t}_{-\begin{pmatrix}0{,}0085\\0{,}0044\end{pmatrix}} \rightarrow y^0=\begin{pmatrix}-0{,}0081\\-0{,}0012\end{pmatrix} \\ X^1=X^0+y^0 \\ X^1=\begin{pmatrix}1{,}9319\\0{,}2588\end{pmatrix}\end{cases}$

$n=2$: $\begin{cases} JF(X_1)\cdot y^1=-F(X_1)^t \rightarrow y^1=\begin{pmatrix}4{,}8346\times10^{-5}\\-1{,}9044\times10^{-5}\end{pmatrix} \\ X^2=X^1+y^1=\begin{pmatrix}1{,}9319\\0{,}2588\end{pmatrix} \checkmark\end{cases}$

(5) Si la velocidad de un fluido está descripta por $V(x,y,z)=(y^2, zx, z)$ determinar usando la <u>Regla de los Trapecios compuesta</u> con $N=6$ la circulación a lo largo de la curva C. sabiendo que la curva C es la circunf. unitaria con centro en el origen de coordenadas en el plano $z=0$. Usar $\pi\approx3$ y al menos 2 decimales y redondeo.

$F=\int_a^b \underbrace{V(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)}_{-sen^3(t)}dt \quad , \quad \sigma:[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}^3 / \sigma(t)=(\cos(t), sen(t), 0))$

- $V(\sigma(t))=(sen^2(t), 0, 0)$
- $\sigma'(t)=(-sen(t), \cos(t), 0)$

$V(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)=\underbrace{-sen^3(t)}_{f(t)}$

$F=\int_0^{2\pi^{3}} -sen^3(t)dt$

$=\int_0^6 -sen^3(t)\,dt$

$\downarrow$

$\pi=3$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

Si $a=0$, $b=6$ y $N=6 \rightarrow h=1$

$-sen(1)^3-sen(2)^3-sen(3)^3-sen(4)^3-sen(5)^3$

<u>Regla de los Trapecios compuesta</u>: $\int_0^6 -sen^3(t)dt=\frac{1}{2}\cdot\left[\cancel{-sen^3(0)}-\underbrace{sen^3(6)}_{0{,}0218}+2\sum_{i=1}^{5}(-sen^3(t_i))\right]$

$=\boxed{-0{,}024}$

FINAL 19/7/17

1. a) Demostrar: Sea $g \in C^{n+1}[a,b]$, tiene un cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$. Existe un método de convergencia cuadrática p/ hallar esta raíz.

b) Usar 4 iteraciones del método demostrado p/ hallar la raíz múltiple de $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
Trabajar con 4 decimales y redondeo.

Demost: Método de Newton Raphson

✓ Tiene convergencia cuadrática: $f'(\bar{x}) \neq 0$ y $f'(\bar{x})$ ∈ cont.

✓ Para su deducción nos basamos en el Polinomio de Taylor

· Dado que $g \in C^{n+1}$, tiene derivadas $(n+1)$ continuas

· Una aproximación de p/ $g'(\bar{x}) \neq 0$ y $|p-\bar{x}|$ es "pequeño" y $g(p)=0 \rightarrow$ p es raíz

$\bar{x}$ es la aproximación

$$g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x}).(x-\bar{x}) + \frac{g''(\xi).(x-\bar{x})^2}{2}, \quad \xi \in (x, \bar{x})$$

$p = x$

$$g(p) = 0 = g(\bar{x}) + g'(\bar{x}).(p-\bar{x}) + \cancel{\frac{g''(\xi)(p-\bar{x})^2}{2}}$$ → se desprecia p/ los otros términos

$$0 = g(\bar{x}) + g'(\bar{x}).(p-\bar{x})$$

$$\boxed{\bar{x} - \frac{g(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = p}$$

NR $\begin{cases} p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, & n \geq 1 \\ p_0 = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$

b) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

	1	-1	-3	5	-2
1		1	0	-3	2
	1	0	-3	2	$\boxed{0}$

→ x = 1 es raíz $f(x) = (x^3 - 3x + 2)(x-1)$ → 1 es raíz

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$

→ x = 1 es raíz $f(x) = (x^2 + x - 2)(x-1)^2$ → 1 es raíz

	1	1	-2
1		1	2
	1	2	$\boxed{0}$

→ x = 1 es raíz $f(x) = (x+2)(x-1)^3$

	1	2
-2		-2
	1	$\boxed{0}$

→ -2 es raíz

(2) Usar 3 iteraciones del método Newton ..... p/ sist. No lineales p/ obtener una aproximación de la solución del sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ xy=1 \end{cases}$
En el primer cuadrante tomando como valor inicial el vector $(0{,}5 \quad 1{,}5)^t$
Realizar un gráfico aprox.

$$\bar{F}(x,y) = (x^2+y^2-3,\ xy-1)$$

$$J\bar{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Método de Newton: $\begin{cases} x^n = x^{n-1} + y^{n-1} \\ JF(x^{n-1}) \cdot y^{n-1} = -F(x^{n-1})^t \end{cases}$

$n=1 \rightarrow x^1 = x^0 + y^0$

$JF(x^0) \cdot y^0 = -F(x^0) \rightarrow y^0 = \begin{pmatrix} 0{,}125 \\ 0{,}125 \end{pmatrix}$

$x^1 = \begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 1{,}625 \end{pmatrix}$

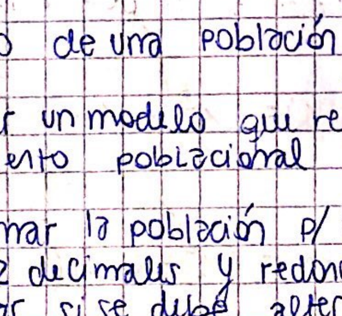
$n=2 \rightarrow x^2 = x^1 + y^1 \qquad \rightarrow x^2 = \begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 1{,}625 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6{,}94 \times 10^{-3} \\ -6{,}94 \times 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}618 \\ 1{,}618 \end{pmatrix}$

$JF(x^1) \cdot y^1 = -F(x^1)^t$

$n=3 \rightarrow x^3 = x^2 + y^2 \qquad \rightarrow x^3 = \begin{pmatrix} 0{,}618 \\ 1{,}618 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}399 \times 10^{-5} \\ 3{,}399 \times 10^{-5} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}618 \\ 1{,}618 \end{pmatrix}}$

$JF(x^2) \cdot y^2 = -F(x^2)^t$

pto



(3) Censo de una población

t	0	2	6	10	12
P(t)	2	5	20	109	300

a) Plantear un modelo que rep. crecimiento poblacional

b) Estimar la población p/ t=9 y t=13 usando mínimos
usar 2 decimales y redondeo
e indicar si se debe alertar a la comunidad sobre una epidemia.

(a) crecimiento poblacional → se modela como Exponencial para condiciones favorables y períodos de tiempo no muy largos

$P(t) = a \cdot e^{bt}$

[y se puede comprobar esto en la tabla].

NOTA

b) Linealizo la expresión $P(t) = ae^{bt}$

$$\ln(P) = \ln(a) + bt$$

$\ln(2) = \ln(a) + b.0$
$\ln(5) = \ln(a) + b.2$
$\ln(20) = \ln(a) + b.6$
$\ln(109) = \ln(a) + b.10$
$\ln(300) = \ln(a) + b.12$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(2) \\ \ln(5) \\ \ln(20) \\ \ln(109) \\ \ln(300) \end{pmatrix}}_{b}$$

por cuadrados mínimos

$$A^tA\,x = A^tb$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 284 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,69 \\ 136,55 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} \ln(a) = 0,69126928 \rightarrow a = 2 \\ b = 0,41 \end{cases}$

Entonces, $\boxed{P(t) = 2 \times e^{0,41t}}$

$\cdot\ P(t=9) = 80,09 \rightarrow$ A los 9 meses, hay 80 ratones.

$\cdot\ P(t=13) = 412,88 \rightarrow$ ✓ ✓ 13 ✓ , ✓ 413 ✓ .

En caso de que transcurra mucho tiempo, las condiciones de la población, como lugar, recursos, ... pueden haber cambiado. Pero, en caso de que se mantengan aún así, cuando transcurre mucho tiempo el modelo exponencial decrece, por lo tanto la población y si se puede considerar un riesgo, siendo conveniente alertar a la comunidad.

④ Se sabe que la ec. dif. NO lineal de 2do. orden $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0$ es un modelo del movimiento de un péndulo simple
Sabiendo que $g = 9,8\ \frac{m}{s^2}$ y $L = 2m$
Aplicar el método de Euler en el intervalo $[0,2]$ p/ aproximar $\theta(0,3)$ sabiendo que $\theta(0) = 0$ y $\theta'(0) = -1$, $h = 0,1$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{9,8}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) \rightarrow \theta'' + \frac{9,8}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right)$$

sistema: $\begin{cases} \theta'' + \frac{g}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0 \rightarrow f(t,\theta,\theta') \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(0) = -1 \end{cases}$

Realizo un cambio de variables: $\begin{cases} \theta' = u \rightarrow f(t,u) \\ \theta'' = u' \rightarrow f(t,\theta,\theta') \end{cases}$

$\begin{cases} u' + \frac{9{,}8}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}u\right) = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ u(0) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u' = -\frac{9{,}8}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}u\right) \\ u' = \theta'' \end{array}$

Resuelvo con Euler,

$$\begin{pmatrix} \theta_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_i \\ u_i \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} u_i \\ -\frac{9{,}8}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_i\right) \end{pmatrix}$$

t=0,1

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_0 \\ u_0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} + 0{,}1 \begin{pmatrix} u_0 \\ -\frac{9{,}8}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

t=2

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{9{,}8}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ -0{,}962 \end{pmatrix}$$

t=3

$$\begin{pmatrix} \theta_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ u_2 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{9{,}8}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\theta_2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2962 \\ -0{,}8853 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\theta(t=0{,}3) = -0{,}2962\,m} \checkmark$$

(5) Según la Ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia de temperatura entre la sustancia y el aire. Sabiendo que la temperatura del aire es de 30°C y la sustancia se ha enfriado desde 100°C a 70°C en 15 minutos. Lo que indica que $k = -0{,}0373$

a) Plantear PVI

b) Estimar el tiempo necesario p/que la sustancia anterior alcance una temperatura menor a 95°C usando Runge Kutta del pto. medio con $h = 0{,}5$.

NOTA

T: "Temperatura de la sustancia".

$$\begin{cases} T' = k(T - T_a) = f(t, T) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$[t] = \text{min}$
$[T] = °C$

PVI:

$$\boxed{\begin{cases} T' = -0{,}0373\,(T-30) \\ T(0) = 100 \end{cases}}$$

$\longrightarrow$ $T' = k(T - T_a)$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

$$\frac{dT}{T - T_a} = k\,dt$$

$$\int_{100}^{70} \frac{dT}{T - T_a} = k \int_0^{15} dt$$

$$\ln(\underbrace{T - T_a}_{30})\Big|_{100}^{70} = k\,15 \rightarrow k = -0{,}0373$$

b) Estimo tiempo necesario para que alcance una T° menor a 95°C

Runge Kutta pto. med , $h = 0{,}5$

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + k_2 h \\ \end{cases}$$

$$\frac{dT}{dt} = f(t, T) = \underbrace{k}_{-0{,}0373}(T - 30)$$

$k_1 = f(t_i, T_i)$
$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{h}{2} k_1\right)$

i	t [min]	Ti [°C]	k1	k2	Ti+1 [°C]
0	0	100	-2,611	-2,5867	98,7067
1	0,5	98,7067	-2,5628	-2,5871	98,7064
2	1	98,7064	-2,5627	-2,5389	97,4370
3	1,5	97,437	-2,5154	-2,5875	96,1433
4	2	96,1433	-2,4671	-2,588	94,8493
5	2,5	94,8493			

∴ La sustancia alcanza una T° < 95 °C en 2,5 min, es decir, que tarda un poco menos de 2 min y 30 seg. ✓