Padrón: ....

1. a) Hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la circunferencia $x^2 - 2x + y^2 = 0$ y la hipérbola $xy = 1$. Utilizar tres iteraciones del método de *Newton* para sistemas no lineales. Usar como semilla $x^{(0)} = (1.9 \;\; 0.4)^t$. Trabajar con al menos tres decimales y redondeo.

   b) Graficar ambas curvas y la solución obtenida.

2. En un contenedor se transportan refrigeradores y cocinas industriales. Cada cocina pesa 1 tonelada y cada refrigerador 2 toneladas. Por otro lado una cocina ocupa $1.1m^3$ y cada refrigerador $2m^3$. En total entre cocinas y refrigeradores se registró un peso de 10 toneladas, ocupando un espacio de $10.4m^3$.

   a) Obtener, usando tres iteraciones del método de Gauss-Seidel, una aproximación de la cantidad de cocinas y refrigeradores que se transportaron. Trabajar con aritmética de tres dígitos.

   b) Indicar si el sistema está bien condicionado.

3. Suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$, inicialmente con 25 individuos, satisface la ecuación logística;

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = 0.0225P(t) - 0.0003P(t)^2 \\ P(0) = 25 \quad \text{el tiempo está medido en meses} \end{cases}$$

   a) Utilizar tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio para aproximar la solución en 6 meses. Trabajar al menos con tres cifras decimales y redondeo.

   b) ¿Qué porcentaje de la población se incrementó en ese tiempo?

4. El balance de calor en estado estacionario se representa como: $\frac{d^2T}{dx^2} + 0.01(T_a - T) = 0$, para una barra de longitud L. Sabiendo que $T_a = 20$.

   a) Desarrolle el método de diferencias finitas para un problema de valores en la frontera.

   b) Sabiendo que la barra tiene una longitud de $10m$ con $T(0) = 40$ y $T(L) = 200$. Usar lo desarrollado en a) para evaluar ~~el calor~~ la temperatura en los puntos intermedios de la barra con $N = 5$.

5. Dada la siguiente tabla correspondiente a valores medidos de una determinada función calcular el valor aproximado de la derivada en $x = 1$ usando el método de *extrapolación de Richardson*. ($R^{(k)}(h) = \frac{4^k R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1}$, $R^{(0)}(h) = R(h)$)

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x)$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891

2) a) Defino $F(x)$:

$$F(x,y) = (x^2 - 2x + y^2,\ xy - 1)$$

Su matriz Jacobiana es:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Cada iteración se calcula como:

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + Y^{(n)}$$

$$Y^{(n)} \text{ tal que } JF(X^{(n)}) \cdot Y^{(n)} = -F(X^{(n)})$$

(es un sistema de ecuaciones)

Realizo las iteraciones: $\left(X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \right)$

n=1

$$X^{(1)} = X^{(0)} + Y^{(0)}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 1{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$$

$$Y^{(0)} = \begin{pmatrix} -0{,}0435 \\ 0{,}1355 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1{,}8565 \\ 0{,}5355 \end{pmatrix}$$

sigue

n=2

$\boxed{\text{NO}}$

$$\begin{pmatrix} 1{,}713 & 1{,}071 \\ 0{,}5355 & 1{,}8565 \end{pmatrix} Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}1964 \\ 0{,}006 \end{pmatrix}$$

$$Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}0314 \\ 0{,}2697 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}8879 \\ 0{,}5342 \end{pmatrix}$$

n=3

$$\begin{pmatrix} -0{,}9316 & 1{,}0684 \\ 0{,}5342 & 1{,}8879 \end{pmatrix} Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}4977 \\ 0{,}7146 \end{pmatrix}$$

$$Y^{(2)} = \begin{pmatrix} -0{,}0757 \\ 0{,}3999 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}8122 \\ 0{,}9349 \end{pmatrix}$$

Notas:

$\underline{n=2}$

$$\begin{pmatrix} 1{,}713 & 1{,}071 \\ 0{,}5355 & 1{,}8565 \end{pmatrix} y^{(1)} = \begin{pmatrix} -0{,}0204 \\ 0{,}0058 \end{pmatrix}$$

-0.0147

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} \cancel{0{,}0121} \\ \cancel{-0{,}0004} \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}8686 \\ 0{,}5351 \end{pmatrix}$$

0.041

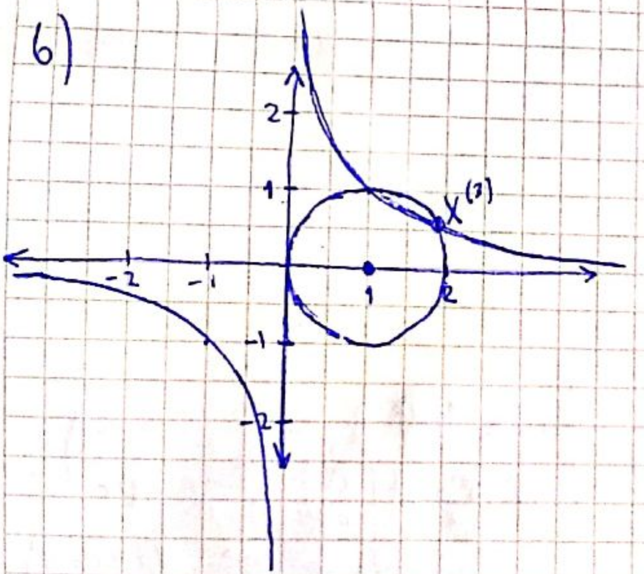
arrastra error

$\underline{n=3}$

$$\begin{pmatrix} 1{,}7372 & 1{,}0702 \\ 0{,}5351 & 1{,}8686 \end{pmatrix} y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}0408 \\ 0{,}0001 \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}0285 \\ -0{,}0008 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}8971 \\ 0{,}5343 \end{pmatrix}$$

6)



$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

2) Defino x como la cantidad de cocinas e y como la cantidad de refrigeradores entonces:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 1{,}1x + 2y = 10{,}4 \end{cases}$$

Tenemos un sistema $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10{,}4 \end{pmatrix}$$

Para usar el método de Gauss-Seidel escribo A como:

$$A = D - L - U$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1{,}1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Defino $T = (D-L)^{-1} U$, $C = (D-L)^{-1} b$

Entonces las iteraciones se calculan como

$$X^{(n)} = T X^{(n-1)} + C$$

Calculo T y C

$$T = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 10{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$$

Notas:

Elijo semilla $X^{(0)}$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Realizo las iteraciones

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4,1 \end{pmatrix}$$

son [illegible] y cuál sería la respuesta

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 4,21 \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,58 \\ 4,331 \end{pmatrix}$$

Entonces tengo

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1,58 \\ 4,331 \end{pmatrix}$$

b) Para estimar el numero de condición uso:

$$r = A\bar{x} - b$$

Resuelvo el sistema

$$A\tilde{y} = r$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{pmatrix} \tilde{y} = A\bar{x} - b = \begin{pmatrix} 0,242 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} -2,42 \\ 1,331 \end{pmatrix}$$

Estimo el numero de condición de A:

$$K(A) \cong 10^{3} \cdot \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\bar{x}\|_\infty} = 10^3 \, \frac{2,42}{4,331} = 558,762$$

Vemos que la matriz NO está bien condicionada porque $K(A) > 1$

3) a) $\begin{cases} P' = 0{,}0225P - 0{,}0003P^2 \\ P(0) = 25 \end{cases}$

Para usar el método de Runge-Kutta de Punto Medio tenemos:

$$f(P,t) = 0{,}0225P - 0{,}0003P^2$$

$P_0 = 25$

$h = 2$

$t_0 = 0$

Realizamos las iteraciones:

$$P_{n+1} = P_n + hK_2 \quad , \quad K_2 = f\left(P_n + \frac{hK_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right), \quad K_1 = f(P_n, t_n)$$

$P_1 = 25{,}7536 \quad (t_1 = 2)$

$P_2 = 26{,}5178 \quad (t_2 = 4)$

$P_3 = 27{,}2921 \quad (t_3 = 6)$.

¿cuantos venados?

b) Calculamos el porcentaje

$$\frac{27{,}2921}{25} = 1{,}0917$$

mal

Es decir, el incremento fué del 9,17%

Notas:

4) b)

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} T'' - 0{,}01T = -0{,}01\,T_a \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} T'' + P(x)\cdot T' + Q(x)T = f(x) \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$$

Con $P(x) = 0$, $Q(x) = -0{,}01$, $f(x) = -0{,}01\,T_a$

y tenemos que $h = \frac{L}{N} = \frac{L}{5} = 2m$

Entonces nos queda el sistema de ecuaciones del método de diferencias finitas como:

$$T_{n+1} + \left(-2 + \frac{L^2}{25}\cdot(-0{,}01)\right)T_n + T_{n-1} = \frac{L^2}{25}\cdot(-0{,}01)\,T_a$$

Con $T_0 = 40$ y $T_5 = 200$

$$T_2 - (\ 2{,}04\ )T_1 + 40 = -0{,}8 \quad (1)$$

$$T_3 - (\ 2{,}04\ )T_2 + T_1 = -0{,}8 \quad (2)$$

$$T_4 - (\ 2{,}04\ )T_3 + T_2 = -0{,}8 \quad (3)$$

$$200 - (\ 2{,}04\ )T_4 + T_3 = -0{,}8 \quad (4)$$

Por (1):

$$T_2 = 2{,}04T_1 - 40{,}08$$

Reemplazo en (3) y (2)

(2) $T_3 - 2{,}04\,(2{,}04T_1 - 40{,}08) + T_1 = -0{,}8$

$T_3 - 3{,}1616\,T_1 = -82{,}5632$ (5)

(3) $T_4 - 2{,}04T_3 + 2{,}04T_1 - 40{,}08 = -0{,}8$ (6)

Entonces con (4), (5), (6) me queda un sistema de 3x3 para T_1, T_3, T_4

$$\begin{cases} -2{,}04\,T_4 + T_3 = -200{,}8 \\ T_3 - 3{,}1616\,T_1 = -82{,}5632 \\ T_4 - 2{,}04\,T_3 + 2{,}04\,T_1 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2{,}04 \\ -3{,}1616 & 1 & 0 \\ 2{,}04 & -2{,}04 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200{,}8 \\ -82{,}5632 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Me queda:

$T_1 = 65{,}1739 \simeq T(2m)$

$T_3 = 123{,}4905 \simeq T(6m)$

$T_4 = 158{,}9659 \simeq T(8m)$

$T_2 = 2{,}04T_1 - 40{,}08 = 92{,}8748 \simeq T(4m)$

Notas:

5) Calculo $R(h)$, $R(h/2)$, $R(h/4)$ con $h=1$

$$R(h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{7{,}3891-1{,}0000}{2} = 3{,}19455$$

$$R(h/2) = \frac{4{,}4817-1{,}6487}{1} = 2{,}833$$

$$R(h/4) = \frac{3{,}4903-2{,}1170}{1\cdot 0{,}5} = 2{,}7466$$

Ahora calculo $R^1(h)$, $R^1(h/2)$

$$R^1(h) = \frac{4\cdot 2{,}833-3{,}19455}{4-1} = 2{,}7125$$

$$R^1(h/2) = \frac{4\cdot 2{,}7466-2{,}833}{3} = 2{,}7178$$

Y por último $R^2(h)$

$$R^2(h) = \frac{4^2\cdot 2{,}7178-2{,}7125}{4^2-1} = 2{,}7182$$

Entonces:

$$\boxed{f'(1) \simeq 2{,}7182}$$