9 (nueve)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

07-12-2016 Análisis Numérico I (75.12- 95.04-95.13) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: [redacted] .... Nombres : [redacted] ....
Padrón: [redacted]

B 1. Determinar el punto de abscisa y ordenada positivas que resuelve el sistema: $\begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ -6x^2 + 33y^2 = 9 \end{cases}$ tomando como valor inicial el vector $(1.8\ 0.9)^t$ utilizando dos iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales. Trabajar al menos con dos decimales y redondeo. Graficar aproximadamente las dos curvas.

B 2. B a) Algunos analistas opinan que la población mundial se ajusta, desde 1960 (t en 0 equivale a 1960) a la función: $P(t) = \frac{36000}{1+ae^{-bt}}$. Se midieron los siguientes datos para estimar los valores de a y b:

Año	0	10	20	50
Cantidad x10^6	3000	3638	4395	7492

Estimar por cuadrados mínimos los valores de a y b.

B b) Calcular la población en 2012. ¿Cuándo se alcanzarán los 12000 millones de habitantes?

B 3. B a) Suponer que $\bar{x}$ es una aproximación a la solución del sistema $Ax = b$, que A es una matriz no singular y que r es el vector residual de $\bar{x}$. Demostrar que:

$\|x - \bar{x}\| \leq \|r\| \|A^{-1}\|$

$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \qquad b \neq 0 \ y \ r \neq 0$

B b) Dado el sistema: $\begin{cases} 3.9x_1 + 1.6x_2 = 7.1 \\ 6.8x_1 + 2.9x_2 = 12.6 \end{cases}$ Que tiene como solución única el vector $(1\ 2)^t$ tomar como aproximación $\bar{x} = (0.98\ 1.98)^t$ y aritmética de tres dígitos, estimar el número de condición de la matriz A. ¿La matriz está bien condicionada? Justificar la respuesta.

R 4. M a) Demostrar la propiedad que permite obtener una cota del número de iteraciones que se requieren para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^{-T} de la raíz de $f \in C[a, b]$ usando el método de la bisección.

R b) Con lo resuelto en a) estimar el número de iteraciones que se requieren para hallar la solución de: $x^3 sen(x) - x sen(x) - sen(x) = 0$ en el intervalo $[0.8, 1.9]$ con un error menor a 10^{-3}. Hallar una aproximación de dicha raiz usando 3 iteraciones del método de la bisección, usar al menos dos decimales y redondeo.

B 5. Si la velocidad de un fluido está descrita por $V(x, y, z) = (x^2, 2xy + x, z^2)$. Determinar, usando la regla de los trapecios compuesta con $N = 6$ la circulación a lo largo de la curva C. Sabiendo que la curva C es la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas, en el plano $z = 0$. Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos dos decimales y redondeo. ($F = \int_a^b V(\sigma(t))\sigma'(t)dt$, $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3 / \sigma(t) = (cos(t), sen(t), 0)$)

[redacted]

1) $\begin{cases} 6x^2-10y^2=14 \\ -6x^2+33y^2=9 \end{cases}$; $\overline{X}^0 = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,9 \end{pmatrix}$; 2 IT NEWTON

2 DECIMALES Y REDONDEO.

GRAFICAR.

$f(x,y) = 6x^2-10y^2-14$

$g(x,y) = -6x^2+33y^2-9$

<u>Newton</u>: $\begin{cases} J(\overline{F}(x)) \cdot y^{k} = -\overline{F}(x) \\ \overline{F}(x) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \end{cases}$ $\therefore \overline{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2-10y^2-14 \\ -6x^2+33y^2-9 \end{pmatrix}$

$$J(F(x)) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -20y \\ -12x & 66y \end{pmatrix}$$

<u>1° Iteración</u>:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 21,6 & -18 \\ -21,6 & 59,4 \end{pmatrix}}_{J\left(F\binom{1,8}{0,9}\right)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}_{y^0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2,66 \\ 1,71 \end{pmatrix}}_{-F\binom{1,8}{0,9}} \quad \begin{cases} \boxed{C_1 = 0,211} \\ \boxed{C_2 = 0,106} \end{cases} \quad \boxed{y^0 = \begin{pmatrix} 0,211 \\ 0,106 \end{pmatrix}}$$

$$x^1 = x^0 + y^0 = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,211 \\ 0,106 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2,011 \\ 1,006 \end{pmatrix} = \overline{X}^1}$$

<u>2° Iteración</u>

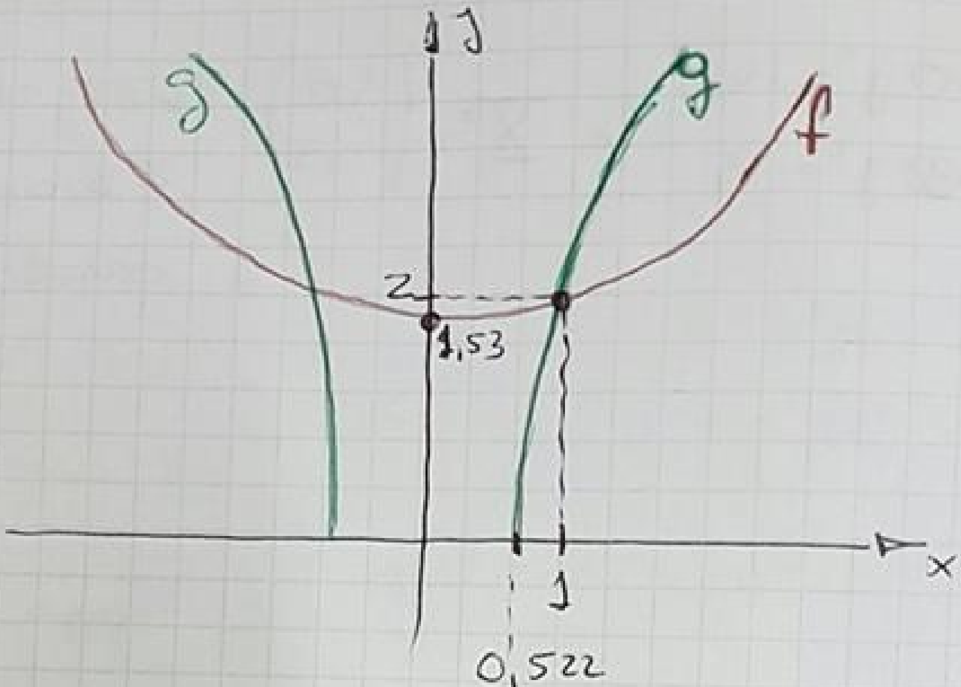
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 24,132 & -20,12 \\ -24,132 & 66,396 \end{pmatrix}}_{J\left(F\binom{2,011}{1,006}\right)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}}_{y^1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0,145 \\ -0,132 \end{pmatrix}}_{-F\binom{2,011}{1,006}} \quad \begin{cases} \boxed{C_3 = -0,011} \\ \boxed{C_4 = -0,006} \end{cases} \quad \boxed{y^1 = \begin{pmatrix} -0,011 \\ -0,006 \end{pmatrix}}$$

$$\overline{X}^2 = x^1 + y^1 = \begin{pmatrix} 2,011 \\ 1,006 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,011 \\ -0,006 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \overline{X}^2 \quad \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{y = 1} \end{cases}$$

$$x = \sqrt{\frac{14}{6} + \frac{10}{6}y^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{33}{6}y^2 - \frac{9}{6}}$$

Gráfico Aprox



[redacted]

2) $P_{(t)} = \dfrac{36000}{1+a\cdot e^{-bt}}$

AÑO	0	10	20	50
CANTIDAD $\times 10^6$	3000	3638	4395	7492

a) $\underbrace{\dfrac{36000}{P_{(t)}} - 1}_{y} = a\,e^{-bt}$ ⇒ Linealizo la función exponencial

$$\ln\left(\frac{36000}{P_{(t)}} - 1\right) = \ln(a) - b.t$$

∘ Planteo el sistema $A.x = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -10 \\ 1 & -20 \\ 1 & -50 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2,3979 \\ 2,1856 \\ 1,9728 \\ 1,3363 \end{pmatrix}}_{b}$$

Por C-M ⇒ $A^T.A.x = A^T.b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -20 & -50 \end{pmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -10 \\ 1 & -20 \\ 1 & -50 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -20 & -50 \end{pmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2,3929 \\ 2,1856 \\ 1,9728 \\ 1,3363 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -80 \\ -80 & 3000 \end{pmatrix}}_{A^T.A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(a) \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7,8926 \\ -128,127 \end{pmatrix}}_{A^T.b}$$

Del sistema matricial planteado, obtengo x.

∴ $\boxed{\ln(a) = 2,3978}$ ⇒ $\boxed{a = 10,999}$

$\boxed{b = 0,0212}$

∴ La expresión nos queda: $\boxed{P_{(t)} = \dfrac{36000}{1+10,999.e^{-0,0212.t}}}$

b) Calcular la población en 2012. Cuando se alcanzarán la ...

- En 2012, tomamos $\boxed{t=52}$

$$P_{(52)} = \frac{36000}{1+10{,}999 \cdot e^{-0{,}0212 \cdot (52)}} = \frac{36000}{4{,}6525} = \boxed{7738 \times 10^6 \text{ habitantes}}$$

$$12000 = \frac{36000}{1+10{,}999 \cdot e^{-0{,}0212t}} \Rightarrow 10{,}999\, e^{-0{,}0212t} = \frac{36000}{12000} - 1$$

$$e^{-0{,}0212t} = 0{,}18183$$

$$-0{,}0212t = \ln(0{,}18183)$$

$$t = \frac{\cancel{-}1{,}704657}{\cancel{-}0{,}0212}$$

$$\boxed{t = 80{,}41}$$

- Se alcanzarán los 12000 millones de habitantes en el año $\boxed{2040{,}41}$ ~ mes 4 del año 2040.

[redacted] [redacted]

3) b) $\begin{cases} 3{,}9\, x_1 + 1{,}6\, x_2 = 7{,}1 \\ 6{,}8\, x_1 + 2{,}9\, x_2 = 12{,}6 \end{cases}$; $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 1{,}98 \end{pmatrix}$

Aritmética de 3 dígitos $\rightarrow (t=3)$

Planteo el sistema $A . x = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3{,}9 & 1{,}6 \\ 6{,}8 & 2{,}9 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7{,}1 \\ 12{,}6 \end{pmatrix}}_{b}$$

$r = b - A . \tilde{x}$; $A . \tilde{y} = r$; $\tilde{x} + \tilde{y} = x$

$$K(A) = \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} . 10^t$$

$$r = \begin{pmatrix} 7{,}1 \\ 12{,}6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}9 & 1{,}6 \\ 6{,}8 & 2{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 1{,}98 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}11 \\ 0{,}194 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}11 \\ 0{,}194 \end{pmatrix}}_{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3{,}9 & 1{,}6 \\ 6{,}8 & 2{,}9 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\tilde{y}} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{c_1 = 0{,}02} \\ \boxed{c_2 = 0{,}02} \end{array} \right\} \boxed{\tilde{y} = \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}02 \end{pmatrix}}$$

$$K(A) = \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} . 10^t = \frac{0{,}02}{1{,}98} . 10^3 = \boxed{10{,}10}$$

Para que la matriz A esté bien condicionada, su $K(A) \sim 1$. $\therefore$ La matriz A, NO está bien condicionada.

a) A matriz no singular; r es el vector residual de $\tilde{x}$

Demostrar que
$$\begin{cases} \|x-\tilde{x}\| \leq \|r\| \, \|A^{-1}\| \\ \dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \cdot \dfrac{\|r\|}{\|b\|} \quad ; \quad b \neq 0 \; ; \; r \neq 0. \end{cases}$$

$r = A.\tilde{x} - b$

$r = A.\tilde{x} - A.x$

$r = A.(\tilde{x} - x)$

$A^{-1}.r = A^{-1}.A\,(\tilde{x} - x)$

$\|A^{-1}.r\| = \|\tilde{x} - x\|$

$$\boxed{\|A^{-1}\| . \|r\| \geq \|\tilde{x} - x\|}$$

Como $A.x = b \Rightarrow \|b\| = \|A.x\| \leq \|A\| \, \|x\|$

Entonces: $\dfrac{1}{\|b\|} \geq \dfrac{1}{\|A\| . \|x\|}$

Usando: $\dfrac{1}{\|A\| . \|x\|} . \|x - \tilde{x}\| \leq \dfrac{1}{\|b\|} \|r\| . \|A^{-1}\|$

$$\boxed{\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| . \|A^{-1}\| . \dfrac{\|r\|}{\|b\|}}$$

Siendo: $\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$ el error relativo

y $\|A\| . \|A^{-1}\| . \dfrac{\|r\|}{\|b\|}$ el error residual relativo

5) $V_{(x,y,z)} = (x^2; 2xy + x; z^2)$; Regla trapecios compuestos $N = 6$, la circulación a lo largo de la curva C.

$C \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$; $\pi \sim 3$; $F = \int_a^b V_{(\sigma(t))} \cdot \sigma'_{(t)} \, dt$.

$\sigma_{(t)} = (\overset{x}{\cos(t)}, \overset{y}{\operatorname{sen}(t)}; \overset{t}{0})$

$\sigma'_{(t)} = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t); 0)$

$V_{(\sigma(t))} = (\cos^2(t); 2 \cdot \cos(t) \cdot \operatorname{sen}(t) + \cos(t); 0)$

$\underline{V_{(\sigma(t))} \cdot \sigma'_{(t)}} = \cancel{-\cos^2(t) \cdot \operatorname{sen}(t)} + \cancel{2} \cdot \cos^2(t) \cdot \operatorname{sen}(t) + \cos^2(t) + \cancel{0}$

$= \boxed{\cos^2(t) \cdot (\operatorname{sen}(t) + 1)}$

$\therefore \boxed{F_{(t)} = \int_0^6 \cos^2(t) \cdot (\operatorname{sen}(t) + 1) \, dx}$

$\boxed{h} = \frac{b-a}{N} = \frac{6-0}{6} = \boxed{1}$

Regla de los trapecios compuesta:

$I: \int_a^b G_{(t)} \, dt \approx \frac{h}{2} \cdot \left[G_{(a)} + G_{(b)} + 2 \cdot \left(\sum_{i=a+h}^{b-h} G_{(x_i)} \right) \right]$

$G_{(0)} = \overset{1}{\cos^2(0)} \cdot (\operatorname{sen}(0) + 1) = 1 \cdot (0+1) = \boxed{1}$

$G_{(1)} = \overset{0,2919}{\cos^2(1)} \cdot (\operatorname{sen}(1) + 1) = 0,2919 \cdot (1,8415) = \boxed{0,5375}$

$G_{(2)} = \cos^2(2) \cdot (\operatorname{sen}(2) + 1) = 0,1732 \cdot (1,9093) = \boxed{0,3307}$

$G_{(3)} = \cos^2(3) \cdot (\operatorname{sen}(3) + 1) = 0,98 \cdot (1,1411) = \boxed{1,1183}$

$G_{(4)} = \cos^2(4) \cdot (\operatorname{sen}(4) + 1) = 0,4273 \cdot (0,2432) = \boxed{0,1039}$

$G_{(5)} = \cos^2(5) \cdot (\operatorname{sen}(5) + 1) = 0,0805 \cdot (0,0411) = \boxed{0,0033}$

$G_{(6)} = \cos^2(6) \cdot (\operatorname{sen}(6) + 1) = 0,9219 \cdot (0,7206) = \boxed{0,6643}$

$\therefore I: \frac{1}{2} \cdot [1 + 0,6643 + 2 \cdot (2,0937)] = \boxed{2,9259}$

Por trapecios compuestos, $I: \int_0^6 \cos^2(t) \cdot (\operatorname{sen}(t) + 1) \, dt \cong \boxed{2,9259}$

4) a_ Demostrar la propiedad que se requiere ...

Por el método de la bisección,

Siendo $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^{(n)}} < \varepsilon$

Esto no es lo que debe demostrar

$$\Longrightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n$$

Aplico Log a ambos lados $\Longrightarrow \operatorname{Log}\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) < \operatorname{Log}(2) \cdot n$

Despejando $\rightarrow$ $n > \operatorname{Log}\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) / \operatorname{Log}(2)$

$$\boxed{n > \frac{\operatorname{Log}(b-a) - \operatorname{Log}(\varepsilon)}{\operatorname{Log}(2)}}$$

Donde n es el nº de iteraciones que se deben realizar para obtener un error menor a ε.

b_ $x^3 \cdot \operatorname{sen}(x) - x \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen} x = 0$ en $[0,8 ; 1,9]$ con error menor a 10^{-3}.

$$n > \frac{\operatorname{Log}(1,9-0,8) - \operatorname{Log}(10^{-3})}{\operatorname{Log}(2)} = 10,1$$

$$\Longrightarrow \boxed{n \geq 11 \text{ iteraciones.}}$$

1° IT) $x_1 = \frac{0,8+1,9}{2} = \boxed{1,35 = x_1}$ Veo si está la raíz a izq o derecha.

$f(1,35) = \oplus$
$f(1,9) = \oplus$
$f(0,8) = \ominus$
La raíz está entre 0,8 y 1,35.

2° IT) $\frac{0,8+1,35}{2} = \boxed{1,075 = x_2}$ Verifico nuevamente $\rightarrow f_{(1,075)} = \ominus \cdot f_{(0,8)}$

$\Rightarrow$ raíz entre 1,075 y 1,35

3° ITERACIÓN.

$$\frac{1{,}075 + 1{,}35}{2} = \boxed{1{,}2125 = x_3}$$