

No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): Nicolás Zulaica

1. Se tiene la siguiente función $f(x) = e^{\frac{x}{5}} - x$, la cual posee dos raíces dentro del intervalo $x \in [0, 15]$.
 - (a) Se pide hallar una función $g(x)$ que cumpla con las condiciones de existencia y unicidad. Justificar para cada raíz si es posible como si no es posible.
 - (b) Hallar una sola de las dos raíces a través del método del **punto fijo**, utilizando como criterio de paro una diferencia menor a 0.05 entre dos iteraciones consecutivas.
 - (c) Una vez hallada la raíz y su cota de error cometida, expresar el resultado de la forma $\bar{x} \pm \Delta x$, utilizando la convención vista en clase.
2. De una función desconocida se obtuvieron los siguiente valores.

x	0	1	2	3	4	5
y	1.0000	2.7183	7.8991	20.086	54.598	148.41

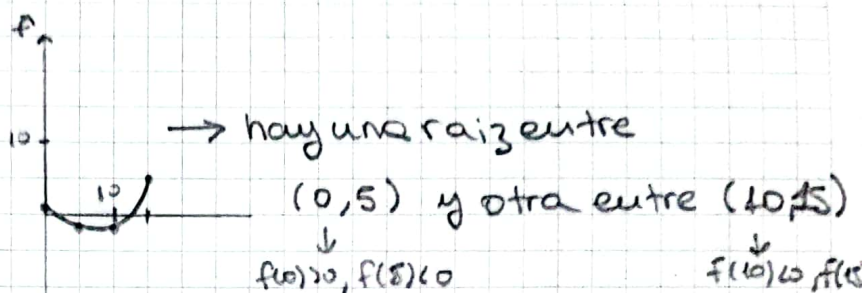
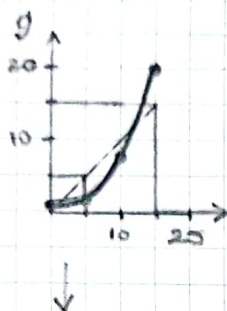
- (a) Plantee el modelo que crea correspondiente (que mejor ajuste los datos) y plantear el sistema $A^T A x = A^T b$.
 - (b) Una vez planteado el sistema $A^T A x = A^T b$, hallar el valor de los coeficientes x a través de la descomposición LU, sin utilizar pivoteo parcial.
 - (c) Estime el valor de la función en e .
3. Se quiere estimar a través de un polinomio interpolante el valor de la función en 4.3, sin estimar su error cometido, el polinomio debe ser al menos de orden 3. En caso de descartar información justificar.
Para ello se tienen los siguientes datos.

x	$f(x)$
0	4
2	9
3	3
4	2
5	1

1) $f(x) = e^{x/5} - x$

a) $g(x) = e^{x/5}$

→ ambas funciones son continuas



podemos ver que g se mantiene dentro del cuadrado
 → esa raíz es única,
 pero la función se escapa en algún x entre 10 y 15 por lo que no podemos asegurar nada

$g'(x) = \frac{1}{5} e^{x/5}$ → $g'(5) = 0,54366 < 1$
 máximo para la primer raíz

b) hallamos la 1ª raíz usando $x_0 = 2,5$

$\Delta x = 0,05$

$x_0 = 2,5$

$x_1 = 1,6487$

$x_2 = 1,3906$

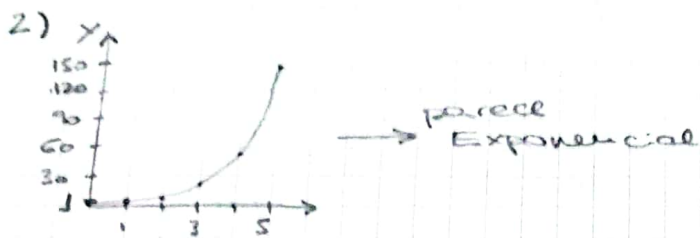
$x_3 = 1,3207$

$x_4 = 1,3023$

$\Delta x = 0,2$

$E \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| = 0,16 \rightarrow 0,2$

$x_p = 1,3 \pm 0,2$



a)

x	$\ln y$
0	0
1	1,0000
2	2,0668
3	3,0000
4	4,0000
5	5,0000

Exponencial

$$y = a e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \ln a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2,0668 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$A \quad x = b$

$$\begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \ln a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55,134 \\ 15,0668 \end{bmatrix}$$

$$A^T A \quad x = A^T b$$

$$b) \check{A} = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = 0,27273$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,27273 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 0 & 1,9091 \end{bmatrix}$$

$$LUx = \check{b}$$

$$\begin{cases} L y = \check{b} \\ U x = y \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,27273 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55,134 \\ 15,0558 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(55,134 \quad 3,0104 e^{-2})$$

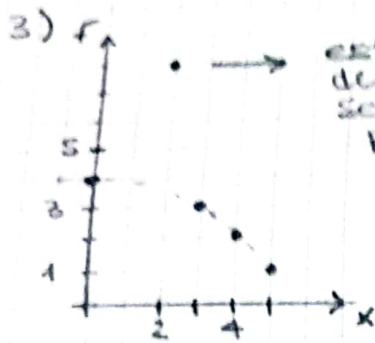
$$\begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 0 & 1,9091 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \ln a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55,134 \\ 3,0104 e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\ln a = 15,769 e^{-3} \rightarrow a = 1,0159$$

$$b = 0,99814$$

$$y = 1,0159 \cdot e^{0,99814 \cdot x}$$

$$c) y(e) = 15,317$$



este punto está por fuera del rango esperado y no pareciera seguir la tendencia, por lo que, es descartado

con 4 puntos, podemos conseguir un polinomio de orden 3 utilizando pol. de lagrange o newton

x	$f(x)$			
0	4			
3	3	-0,23333		
4	2	-1	-0,16667	
5	1	-1	0	-0,033333

$$p(x) = 1 - (x-5) + 0,033333 \cdot (x-5)(x-4)(x-3)$$

$$p(x) = 6 - x + 0,033333(x-5)(x-4)(x-3)$$

$$p(4,3) = 1,6909$$

- 1) a) Bien justificado, los gráficos una maravilla
b) Bien iterado
c) Fuiste uno de los únicos en usar la cota de punto fijo, bien
- 2) a) Bien planteado el modelo
b) bien LU
c) bien hecho
- 3) a) Buena decisión para descartar un punto

1. B
2. B
3. B

Nota final: 10.