No exprese ningún cálculo en forma ... correctamente resueltos en su totalidad. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras de precisión (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): Bertolini, Luana Daniela.

6

1. El período T de un péndulo está dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, siendo L la longitud del hilo y g la aceleración de la gravedad. Se mide $L = (1.000 \pm 0.001)m$ y se determinó $g = 9.81m/s^2$ con un error relativo porcentual del $2\,\%$ y se considera $\pi = 3.1416 \pm 0.00005$
   (a) Calcular el error absoluto del período (con su unidad correspondiente) y expresar al período en la forma $T = \overline{T} \pm \Delta T$
   (b) Calcular el error relativo del período

R

2. Se desea conocer una raíz r del polinomio $p(x) = 4x^4 - x^2 + x - 3$ que se sabe está en el intervalo $[0, 1]$. A partir de las semillas $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 0.75$ encuentre la raíz por el método de la secante. Interrumpa el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones sea menor a 0.03. Exprese el resultado $r = \overline{r} \pm \Delta r$.

B

3. Se desea aproximar la función $f(x) = 2^x$ mediante un trazador cúbico natural (no ligado) de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 & x_1 < x \leq x_2 \end{cases}$$

Tomando los puntos $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 3)$ determine los coeficientes y calcule $S(2)$.
AYUDA: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$

4. Se observa que ciertos datos medidos tienen un comportamiento aproximadamente lineal en un gráfico $x - \log(y)$.
   (a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para determinar una ecuación que ajuste los datos. Los coeficientes del modelo que propone, ¿minimizan el error cuadrático total?
   (b) Estime el valor de y para $x_0 = 1.8$

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	5.655	4.582	3.44	2.768	0.980

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1.25 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2.25 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que A es simétrica definida positiva, resolver el sistema mediante descomposición de Cholesky. Escriba todos los pasos intermedios

Recuerde:

$$L_{i,i} = \sqrt{A_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}^2} \qquad L_{j,i} = \frac{A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{j,k}L_{i,k}}{L_{i,i}} \quad \textit{para } j > i$$

NOTA: sumatorias con límite superior nulo se definen nulas, i.e. $\sum_{k=1}^{0} x_k = 0$

Bertolini, Lucas Daniel ① 99264

① $t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$L = (1.000 \pm 0{,}001)\ m$

$g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

$e_r = \frac{e_a}{\bar{g}} \cdot 100$

er (porcentual) = 2%

$\pi = 3.1416 \pm 0.00005$

a) ~~...~~

~~...~~

~~...~~

~~...~~

⟶ busco el error absoluto de $\bar{g}$

$e_r = 2 = \frac{e_a}{\bar{g}} \cdot 100$

$\frac{2}{100} \cdot 9{,}81 = 0{,}1962$ ⟶ paso a convención B.

$0{,}5 > 0{,}1962$

$\Rightarrow g = 9 \pm 0{,}5$

10 en todo caso

$\bar{T} = 2\bar{\pi}\sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{g}}} = 2 \cdot 3{,}1416\sqrt{\frac{1{,}00}{9{,}81}} = 2{,}006071372\ s$

$$\Delta t = \left|\frac{\partial t}{\partial \pi}\right|_{\bar{\pi},\bar{L},\bar{g}} \Delta\pi + \left|\frac{\partial t}{\partial L}\right|_{\bar{\pi},\bar{L},\bar{g}} \Delta L + \left|\frac{\partial t}{\partial g}\right|_{\bar{g},\bar{\pi},\bar{L}} \Delta g$$

$$\Delta T = \left|2\sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{g}}}\right|\Delta\pi + \left|\frac{2\bar{\pi}}{2\sqrt{\bar{L}}} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\right|\Delta L + \left|2\bar{\pi}\sqrt{\bar{L}}\left(-\frac{1}{2}\right)\bar{g}^{3/2}\right|\Delta g.$$

$$\Delta t = \left|2\sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{g}}}\right|\Delta\pi + \left|\frac{\bar{\pi}}{\sqrt{\bar{L}}\sqrt{\bar{g}}}\right|\Delta L + \left|\bar{\pi}\sqrt{\bar{L}}\ (\bar{g})^{-3/2}\right|\Delta g.$$

NOTA

2. $\sqrt{\frac{1.000}{9.81}} \cdot 0{,}00005 + \frac{3{,}1416}{\sqrt{1.000 \cdot 9{,}81}}\ 0{,}001 + 3{,}1416\ \sqrt{1.000}\ (9{,}81)^{3/2}\ \underset{e_g}{\bigcirc} = 0{,}1032\ s.$

$\Rightarrow$ corrección (A), $\boxed{t = (2{,}0 \pm 0{,}2)\,s}$.

b) $e_r = \frac{ea}{\bar{t}} = 0{,}051484 \xrightarrow[\text{porcentual}]{} \boxed{5{,}15\% = e_{r\ \text{porcentual}}}$.

Órmosto error)

Bertolini, Luana Daniela
99264

(2) $P(x) = 4x^4 - x^2 + x - 3 \qquad x \in [0,1]$

$x_0 = 0.5$

método de la secante

$x_1 = 0.75$

$P(x_0) = -2.5$

$P(x_1) = -1.54688$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})\,(x_{n-1} - x_{n-2})}{(P(x_{n-1}) - P(x_{n-2}))} \quad \forall n \geq 2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)\,(x_1 - x_0)}{P(x_1) - P(x_0)} = 0.75 - \frac{-1.54688\,(0.75 - 0.5)}{(-1.54688 + 2.5)} = 1.15574$$

$P(x_2) = 3.95678$

$e_a = |x_2 - x_1| = 0.40574 > 0.03 \rightarrow$ sigo

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)\,(x_2 - x_1)}{P(x_2) - P(x_1)} = 1.15574 - \frac{3.95678\,(1.15574 - 0.75)}{(3.95678 + 1.54688)} = 0.86404$$

$P(x_3) = -0.65309$

$e_a = |x_3 - x_2| = 1.00883 > 0.03 \rightarrow$ sigo

$$x_4 = x_3 - \frac{P(x_3)(x_3 - x_2)}{P(x_3) - P(x_2)} = 0.86404 - \frac{-0.65309\,(0.86404 - 1.15574)}{(-0.65309 - 3.95678)} = 0.90537$$

$P(x_4) = -0.22673$

$e_a = |x_4 - x_3| = 0.04133 > 0.03 \rightarrow$ sigo

$$x_5 = x_4 - \frac{P(x_4)\,(x_4 - x_3)}{P(x_4) - P(x_3)} = 0.90537 - \frac{-0.22673\,(0.90537 - 0.86404)}{(-0.22673 + 0.65309)} = 0.92966$$

$e_a = |x_6 - x_4| = 0.02429 < 0.03 \Rightarrow$ llegué

Según convención A

$e_a = 0.03.$

$\Rightarrow \boxed{x_s = 0.93 \pm 0.03.}$

Bertolini, Luana Daniela
99264

3)

x	$f(x)=2^x$
0	1
1	2
3	8

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3 & 0<x<1 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3 & 1<x<3 \end{cases}$$

Planteo las condiciones =

1) $S_0(0) = f(0) = \boxed{a_0 = 1}$

$S_1(1) = f(1) = \boxed{a_1 = 2}$

$S_1(3) = f(3) = a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 8.$ (I)

$2 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 8.$

2) $S_0(1) = S_1(1) = 2$

$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 2$

$1 + b_0 + c_0 + d_0 = 2 \longrightarrow b_0 + c_0 + d_0 = 1.$ (II)

3) $S_0'(1) = S_1'(1)$

$b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$ (III)

4) $S_0''(1) = S_1''(1)$

$2c_0 + 6d_0 = 2c_1$ (IV)

5) S es spline natural $\Rightarrow$ $S_0''(0) = 0$

$2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ (V)

$S_1''(3) = 0$

$2c_1 + 6d_1 \cdot 2 = 0$

$d_1 = -\frac{2c_1}{12} = -\frac{1}{6}c_1$ (VI)

Si $\boxed{c_1 = 1}$ y $\boxed{c_0 = 0}$ $\Rightarrow$

de (IV) $\boxed{d_1 = -1/6}$ = . y (IV) $\boxed{d_0 = 1/3}$. $\boxed{d_0 = 0{,}33333}$

$\boxed{d_1 = -0{,}16667}$

de (II)

$b_0 + 0 + 1/3 = 1$

$\boxed{b_0 = 2/3} = 0{,}66667$

de (III)

$2/3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1/3 = \boxed{b_1 = 5/3} = 1{,}66667$

Corroboro con (I) que llegué bien porque al tener de dato c_1 me sobró una ecuación

$2 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 8$

$2 + 2 \cdot \frac{5}{3} + 4 - 8 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{8 = 8}$ ✓

(aproximo por 5 decimales)

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 0{,}66667\,x + 0{,}33333\,x^3 & 0 < x < 1 \\ S_1(x) = 2 + 1{,}66667(x-1) + (x-1)^2 - 0{,}16667\,(x-1)^3 & 1 < x < 3 \end{cases}$$

$S(2) = S_1(2) = 2 + 1{,}66667(2-1) + (2-1)^2 - 0{,}16667(2-1)^3$

$\boxed{S_1(2) = 4{,}5 = S(2)}$

Bertolini, Luana Daniela 99264

1) Si la gráfica es x-$\log(y)$ es lineal quiere decir que la función original es

$\Rightarrow y = a\,10^{bx}$

$\log(y) = \log(a\,10^{bx})$

$\log(y) = \log(a) + bx \longrightarrow$ relación $\log(y)$ - x lineal.

$y_1 = a_1 + bx$.

x	y	$\log y = y_1$
0.5	5.655	0.75243
1.0	4.582	0.66106
1.5	3.44	0.53656
2.0	2.766	0.44217
4.0	0.980	$-8.77392 \cdot 10^{-3}$

$$\begin{cases} 0.75243 = a_1 + b\,0.5 \\ 0.66106 = a_1 + b\,1.0 \\ 0.53656 = a_1 + b\,1.5 \\ 0.44217 = a_1 + b\,2.0 \\ -8.77392 \cdot 10^{-3} = a_1 + b \cdot 4.0 \end{cases}$$

$Ax = b \longrightarrow A^t A \tilde{x} = A^t b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1.0 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 2.0 \\ 1 & 4.0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0.75243 \\ 0.66106 \\ 0.53656 \\ 0.44217 \\ -8.77392 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.0 & 1.5 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1.0 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 2.0 \\ 1 & 4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 23,5 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1.0 & 1.5 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75243 \\ 0.66106 \\ 0.53656 \\ 0.44217 \\ -8.77392 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,38345 \\ 2,69136 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 23.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.38345 \\ 2.69136 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 5\tilde{a}_1 + 9\tilde{b}_1 = 2.38345 \\ 9\tilde{a}_1 + 23.5\tilde{b}_1 = 2.69136 \end{cases}$$

$$\tilde{a}_1 = 0.87093$$

$$\tilde{b}_1 = -0{,}21902$$

$$y \quad \tilde{a}_1 = \log(\tilde{a}) \rightarrow 10^{0.87093} = \tilde{a} = 7{,}42899$$

$$\Rightarrow \quad y = 7{,}42899 \; 10^{-0{,}21902\,x}$$

b) $y = 7{,}42899\,10^{-0{,}21902 \cdot 1{,}8} = \boxed{2{,}99705}$

Bertolini, Luana Daniela
99264

(5) Cholesky propone:

$$A = LL^t \Rightarrow Ax = b$$

$\Updownarrow$

A es definida positiva.

$$L(L^t x) = b$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$ este es el sistema a resolver.

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$$

$$L_{11} = \sqrt{a_{11} - \sum_{k=1}^{0} L_{1k}^2} = \sqrt{a_{11}} = 1$$

$$L_{21} = \frac{a_{21} - \sum_{k=1}^{0} L_{2k} L_{1k}}{L_{11}} = \frac{a_{21}}{L_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$L_{31} = \frac{a_{31} - \sum_{k=1}^{0} L_{3k} L_{1k}}{L_{11}} = \frac{a_{31}}{L_{11}} = 0$$

$$L_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{1} L_{2k}^2} = \sqrt{a_{22} - L_{21}^2} = \sqrt{2-1} = 1.$$

$$L_{32} = \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^{1} L_{3k} L_{2k}}{L_{22}} = \frac{a_{32} - L_{31} L_{21}}{L_{22}} = \frac{a_{32}}{L_{22}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$L_{31} = 0$

$$L_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^{2} L_{3k}^2} = \sqrt{a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} = \sqrt{1.25 - 0^2 - (-1)^2} = 0.5.$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}$$ y resuelvo el sistema

$$\begin{cases} L^t x = y \\ L y = b \end{cases}$$

$L y = b$ ⅂

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2.25 \end{pmatrix}. \quad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_1 + y_2 = 4 \\ y_1 - y_2 + 0.5 y_3 = -2.25. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_2 &= 2 \\ y_3 &= -0.5. \end{aligned}$$

$L^t x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0{,}5\, x_3 = -0{,}5 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$