Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ingeniería

1er Cuatrimestre de 2022

Análisis numérico I (75.12-95.04-95.13)

Guía de trabajos prácticos 5
Sistemas de Ecuaciones Lineales

Profesora responsable: Magíster Ing. Miryam Sassano

Bibliografía

- Burden R.L., Faires J.D. *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericano 1985.
- Chapra S., Canale R.*Métodos Numéricos para Ingenieros*, Mac Graw Hill 1985
- Kincaid D., Cheney W. *Análisis Numérico: las matemáticas del cálculo científico*, Addison Wesley, 1994.
- Zill, D. G. (2007). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamericana
- Mathews, J. H., Fink, D. K., *Métodos Numéricos con Matlab*, Tercera Edición, Editorial Prentice Hall, 2000.
- Nakamura, S., *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab*, Prentice Hall, 1997

1. Resolver el sistema $A.x = b$ utilizando eliminación de Gauss sin pivoteo, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix}$$

2. Calcular la inversa de la matriz A resolviendo el sistema $Ax = I$, utilizando eliminación de Gauss, siendo I la matriz identidad y x la matriz inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Dada la siguiente descomposición LU de la matriz A:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

   - Resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$, siendo:

$$b = (1 \ \ -2 \ \ 7)^t$$

   - Obtener la matriz A y verificar la solución obtenida en item anterior.

4. Considerar la matriz A definida según:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \qquad 1 \leq i; j \leq 4$$

   Considerar el sistema $Ax = b$ donde:

$$b = (0.58333 \ \ 0.21667 \ \ 0.11666 \ \ 0.07381)^t$$

   Resolver el sistema utilizando eliminación de Gauss con pivoteo parcial operando con 5 decimales. Investigar las características de la matriz y obtener conclusiones.

5. Dada la matriz A del problema anterior y

$$b = (2.66666 \ \ 1.50000 \ \ 1.06666 \ \ 0.83334)^t$$

   Resolver $Ax = b$ aplicando la descomposición LU de A, trabajando con 5 decimales y redondeo. Obtener conclusiones.

6. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0.003153 & -15.28 \\ -0.009413 & 45.6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.98 \\ -44.75 \end{bmatrix}$$

   - Estimar el número de condición de la matriz de los coeficientes.
   - En base al resultado obtenido en el punto anterior, indicar si la siguiente afirmación es correcta y por qué:
     - El problema está mal condicionado.

7. Describir como se simplifica el algoritmo del método de eliminación de Gauss para el caso particular en que la matriz de coeficientes es simétrica definida positiva.

8. Dado el siguientes sistema de ecuaciones lineales donde la matriz A es no singular:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

- Establecer cuándo el método de Jacobi diverge.
- Demostrar que si el método de Jacobi converge, entonces el método de Gauss Seidel lo hace más rápido.

9. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0.01235 & -2.387 \\ 5.462 & 0.008406 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.37 \\ 10.85 \end{bmatrix}$$

- Resolverlo por el metodo de Jacobi. Efectuar las modificaciones necesarias para garantizar la convergencia. Trabajar con 5 decimales y redondeo.
- Explicar la convergencia o no de los algoritmos del punto a) en términos de la norma de la matriz de iteración.

10. Resolver el siguiente sistema utilizando el metodo de Gauss-Seidel, iterando hasta que la máxima diferencia entre dos valores sucesivos de x, y o z sea menor que 0.02. Indicar si esto último significa que la solución obtenida está en un intervalo de radio 0.02 alrededor de la solución exacta.

$$\begin{cases} 10x + 2y + 6z = 28 \\ x + 10y + 4z = 7 \\ 2x - 7y - 10z = -17 \end{cases}$$

11. Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} a + d = 2 \\ a + 4b - d = 4 \\ a + c = 2 \\ c + d = 2 \end{cases}$$

12. Considerar el sistema poco denso de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ -a + 2b - c = 1 \\ -b + 2c - d = 1 \\ -c + 2d = 1 \end{cases}$$

Mostrar que el sistema permanece poco denso cuando se lleva a la forma triangular utilizando el método de eliminación de Gauss. Hallar la solución por Gauss y luego por Gauss-Seidel.

13. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3.21x + 0.943y + 1.02z = 2.3 \\ 0.745x - 1.29z = 0.74 \\ 0.875x - 2.54y + 0.247z = 3.39 \end{cases}$$

- Efectuar las modificaciones necesarias para poder garantizar la convergencia utilizando el método de Gauss-Seidel.
- Resolverlo iterando hasta obtener una precisión de 3 dígitos significativos, sin exceder un máximo de 5 iteraciones.
- Determinar como influye un error absoluto de 0.01 en el primer coeficiente de la primera ecuación sobre los valores calculados de x, y y z.

14. Dado el sistema $A.x = b$, construir un algoritmo que halle el vector solución mediante el método de Gauss-Seidel.

15. Sea el siguiente sistema:

$$\left.\begin{cases} 5x + 4z = 1 \\ 3x + 6y = 1.20 \\ 9y + 10z = 0.8 \end{cases}\right\} \quad A = D - L - U$$

¿Qué método usaría para resolverlo y por qué?

- ¿Cuál es el sistema de ecuaciones y cuál el método iterativo? Justifique su respuesta.
- ¿Cuál es el criterio de parada y como está implementado?

T_J, T_{GS}, T_{ws} $\longrightarrow$ $\|T\|_\infty < 1$ uso el método que converge