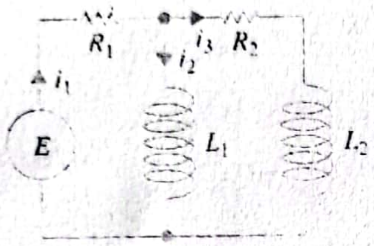
FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

13-12-2023 Análisis Numérico I (75.12- 95.04) Integrador

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS CORRECTAMENTE RESUELTOS

Apellido: TeIRA Nombres : IÑAKI
Padrón: 108803

1. El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura



es: $\begin{cases} \frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_1}i_2(t) - \frac{R_1}{L_1}i_3(t) + \frac{E(t)}{L_1} \\ \frac{di_3(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_2}i_2(t) - \frac{(R_1+R_2)}{L_2}i_3(t) + \frac{E(t)}{L_2} \end{cases}$ Utilizar tres iteraciones del *método de Euler* para estimar la intensidad de la corriente $i_2(0.3)$ e $i_3(0.3)$. Sabiendo que: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L_1 = 1h$, $L_2 = 1h$, $E(t) = 60V$. $i_2(0) = i_3(0) = 0$.

2. Una masa que pesa 16 libras se une a un resorte de 5 pies de largo, en equilibrio el resorte mide 8.2 pies. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 pies arriba de la posicion de equilibrio. Si se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea, la ecuación diferencial que caracteriza a este fenómeno es:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 10x(t) = 0$. El tiempo está medido en segundos.

   a) Plantear el problema de valores iniciales.

   b) Aplicar tres iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio para estimar la la posición $x(t)$ al cabo de 1.5 segundos.

3. Se quiere construir un tejado ondulado de aluminio usando una máquina que comprime una plancha plana inicial y la transforma en una plancha cuya sección transversal tiene la forma de la función $g(x) = sin(x)$.Se sabe que la longitud transversal del tejado ondulado es de 20 metros. Aproximar mediante el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$ la longitud L de la plancha plana inicial usar una particion de $n = 10$. ($L = \int_a^b ||\sigma'(t)||dt$.
$\sigma : [a, b] \longrightarrow R^2 / \sigma(t) = (x(t), y(t))$)

4. Sea el sistema $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 \\ 0.99 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = (-0.01, -0.01)^t$. Se obtiene con aritmética de 3 dígitos una aproximación $\tilde{x} = (0.981, -0.981)^t$.

   a) Estimar el número de condición de la matriz.

   b) Obtener una mejor aproximación de la solución haciendo un paso de refinamiento iterativo.

5. Hallar una aproximación de la solución del primer cuadrante del sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 + 2xy \\ x^2 + 2xy + y^2 = 169 \end{cases}$ Usar dos iteraciones del *método de Newton* para sistemas no lineales.
Tomar como semilla $\vec{x}^0 = (8.5 \;\; 3.5)^t$.

1) Se tiene un PVI de 1° orden, de 2 ecuaciones.

Reemplazando los valores de R, L y E(t):

$$\begin{cases} i_2'(t) = -2i_2(t) - 2i_3(t) + 60 \\ i_3'(t) = -2i_2(t) - 5i_3(t) + 60 \\ i_2(0) = 0 \\ i_3(0) = 0 \end{cases}$$

- Y Euler propone la sucesión: con $y'(t) = f(t,y)$.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \\ y_0 = \cancel{y_0}\ \alpha \end{cases}$$

- Luego en este caso:

- Como en 3 iteraciones quiero $t = 0{,}3\,s$ $\longrightarrow$ $\left[h = \frac{0{,}3\,s}{3} = 0{,}1\,s \right]$

Y Euler resulta: (i^2 denota $i_2(t)$, i^3 denota $i_3(t)$)

$$\left[\begin{cases} i_{n+1}^2 = i_n^2 + h \cdot (-2i_n^2 - 2i_n^3 + 60) \\ i_{n+1}^3 = i_n^3 + h \cdot (-2i_n^2 - 5i_n^3 + 60) \\ i_0^3 = 0 \\ i_0^2 = 0 \end{cases}\right]$$

(El supraíndice NO es una potencia)

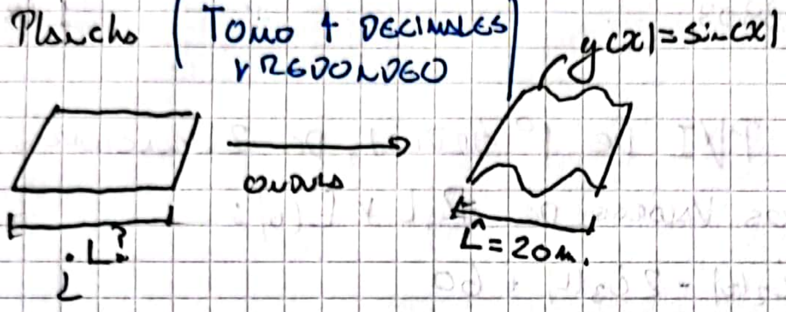
- Luego itero:

$$\begin{cases} i_0^3 = 0 \\ i_0^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_1^2 = 6 \\ i_1^3 = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_2^2 = 9{,}6 \\ i_2^3 = 7{,}8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_3^2 = 12{,}12 \\ i_3^3 = 7{,}98 \end{cases}$$

- Luego resultan:

$$\left[\begin{array}{l} i_2(t = 0{,}3s) \simeq 12{,}12\,A \\ i_3(t = 0{,}3\,s) \simeq 7{,}98\,A \end{array}\right]$$

3) Plancha [Tomo 4 decimales y redondeo]



Busco L mediante Simpson 1/3 con $n=10$.] n par ✓

- Del enunciado:

$$L = \int_0^{20} \|g(x)\|\, dx = \int_0^{20} \sqrt{\sin^2(x)}\, dx = \int_0^{20} |\sin(x)|\, dx$$

- Y Simpson 1/3 me dice:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k}) \right]$$

$N=10.$

- Luego en esto caso: $\left[f(x) = |\sin(x)|,\ a=0,\ b=20,\ h = \frac{b-a}{n} = 2 \right]$

- Calculo los puntos:

i	x_i	$f(x_i) = \|\sin(x_i)\|$
0	0	0
1	2	0,9093
2	4	0,7568
3	6	0,2794
4	8	0,9893
5	10	0,5440
6	12	0,5366
7	14	0,9906
8	16	0,2879
9	18	0,7510
10	20	0,9129

Luego:

$$L = \frac{2}{3} \cdot \left[f(0) + f(20) + 4 \cdot \left(f(2) + f(6) + f(10) + f(14) + f(18) \right) + 2 \cdot \left(f(4) + f(8) + f(12) + f(16) \right) \right]$$

$$\leadsto * \left[L = 13{,}3009\, m \right] *$$

4) $A \cdot x = b \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -0{,}01 \\ -0{,}01 \end{pmatrix}$ (Tomo 4 decimales y redondeo)

Se obtiene con aritmética de $t=3$ dígitos: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0{,}981 \\ -0{,}981 \end{pmatrix}$

a) $K(A)$

Se puede estimar $K(A)$ como:

$$\left[K(A) \cong 10^{\overset{\text{dígitos}}{t}} \cdot \frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} r = b - A \cdot \tilde{x} \\ A \cdot \tilde{y} = r \end{matrix} \right]$$

Tomando norma infinito.

Luego:
$$r = \begin{pmatrix} -0{,}01 \\ -0{,}01 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}981 \\ -0{,}981 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}00019 \\ -0{,}00019 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}00019 \\ -0{,}00019 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(sist. ecs. 2x2)}]{\text{calculadora}} \left[\hat{y} = \begin{pmatrix} 0{,}019 \\ -0{,}019 \end{pmatrix} \right]$$

Luego: $\|\hat{x}\| = 0{,}981$, $\|\tilde{y}\| = 0{,}019$ $\longrightarrow$ $\left[K(A) \cong 10^3 \dfrac{0{,}019}{0{,}981} = 19{,}3680 \right]$ *

b) Luego 1 paso de refinamiento:

$$\hat{x}^{(2)} = \hat{x}^{(1)} + \hat{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}981 \\ -0{,}981 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}019 \\ -0{,}019 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego ahora $\left[\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$ ← En este caso esa es la sol. exacta!

5) $\begin{cases} x^2+y^2=25+2xy \\ x^2+2xy+y^2=169 \end{cases}$ NEWTON CON $\bar{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}8,5\\3,5\end{pmatrix}$

(TOMO 4 DECIMALES Y REDONDEO)

$$\rightarrow \begin{cases} f_1(x,y)=x^2+y^2-25-2xy=0 \\ f_2(x,y)=x^2+2xy+y^2-169=0 \end{cases} \rightarrow \left[\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\f_2(x,y)\end{pmatrix}\right.$$

- Luego Newton propone:

$$\left[\bar{x}^{(n+1)}=\bar{x}^{(n)}-J^{-1}\left(\vec{F}(\bar{x}^{(n)})\right)\cdot\vec{F}(\bar{x}^{(n)})\right.$$

- Luego $\left[J(\vec{F})=\begin{pmatrix}2x-2y & 2y-2x\\ 2x+2y & 2y+2x\end{pmatrix}\right.$

• 1° Iteración:

$$\vec{F}(\bar{x}^{(0)})=\begin{pmatrix}0\\-25\end{pmatrix},\quad J(\vec{F})=\begin{pmatrix}10 & -10\\ 24 & 24\end{pmatrix}\xrightarrow{\cancel{\text{CALCULADORA}}}\cancel{J^{-1}=\begin{pmatrix}0,05\\ -0,05\end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow[\text{CALCULADORA}]{} J^{-1}=\begin{pmatrix}0,05 & 0,0208\\ -0,05 & 0,0208\end{pmatrix}$$

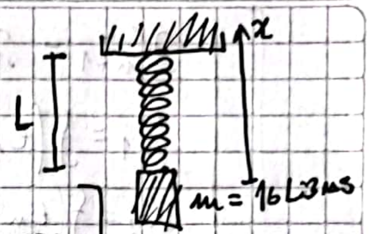
$$\text{Luego}\quad \bar{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}8,5\\3,5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,05 & 0,0208\\ -0,05 & 0,0208\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9,02\\4,02\end{pmatrix}$$

• 2° Iteración:

$$\vec{F}(\bar{x}^{(1)})=\begin{pmatrix}0\\1,0416\end{pmatrix},\quad J(\vec{F})=\begin{pmatrix}10 & -10\\ 26,08 & 26,08\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{CALCULADORA}} J^{-1}(\vec{F})=\begin{pmatrix}0,05 & 0,01917\\ -0,05 & 0,01917\end{pmatrix}$$

$$\text{Luego}\quad \bar{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}9,02\\4,02\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,05 & 0,01917\\ -0,05 & 0,01917\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1,0416\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}9,0000\\4,0000\end{pmatrix}}\ *$$

2) $\dfrac{d^2 x(t)}{dx^2} + 2\dfrac{dx(t)}{dt} + 10x(t) = 0$



En Equilibrio L = 8,2 pies, [Tomo $x=0$ como el punto de equilibrio]

En $t=0$: $\left[\begin{array}{l} x(t=0) = -2 \\ x'(t=0) = 0 \end{array}\right]$ ← Ya que está 2 pies encima del punto de equilibrio y parte del reposo

a) El PVI resulta:

$$*\left[\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 0 \\ x(t=0) = -2 \\ x'(t=0) = 0 \end{cases}\right]*$$

b) R-K de O2, Punto medio.

3 iteraciones para $t = 1,5\,s$ ⟶ $\left[h = \dfrac{1,5\,s}{3} = 0,5\,s\right]$

• Hago un cambio de variable y llamo $[u(t) = x'(t)]$ ⟶ $[u'(t) = x''(t)]$

-Luego:

Obtengo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x,u) = u(t) \\ u'(t) = g(t,x,u) = -2u(t) - 10x(t) \\ x(0) = -2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

- Si discretizo, mediante RK de pto. medio: $[h=0{,}5]$

$$\left[\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\cdot k_2 \\ k_1 = f(t_n, x_n, u_n) = u_n \\ k_2 = f\left(t_n+\frac{h}{2}, x_n+\frac{hk_1}{2}, u_n+\frac{hq_1}{2}\right) = u_n + \frac{h q_1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + h\cdot q_2 \\ q_1 = g(t_n, x_n, u_n) = -2u_n - 10x_n \\ q_2 = g\left(t_n+\frac{h}{2}, x_n+\frac{hk_1}{2}, u_n+\frac{hq_1}{2}\right) = -2\left(u_n+\frac{hq_1}{2}\right) - 10\left(x_n+\frac{hk_1}{2}\right) \\ x_0 = -2 \\ u_0 = 0 \end{cases}\right]$$

Con $\left[\begin{array}{l} t_i := h\cdot i \\ x_i \simeq x(t_i) \\ u_i \simeq x'(t_i) \end{array}\right]$

Itero:

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ u_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_{1,1} = 0 \\ q_{1,1} = 20 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_{2,1} = 5 \\ q_{2,1} = 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}5 \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} k_{1,2} = 5 \\ q_{1,2} = -15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_{2,2} = 1{,}25 \\ q_{2,2} = -20 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = 1{,}125 \\ u_2 = -5 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} k_{1,3} = -5 \\ q_{1,3} = -1{,}25 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_{2,3} = -5{,}3125 \\ q_{2,3} = 2{,}5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = -1{,}53125 \\ u_3 = -3{,}75 \end{cases}$$

- Luego, finalmente:

$$* \left[\begin{array}{l} x(t=1{,}5s) \simeq x_3 = -1{,}53125 \\ x'(t=1{,}5s) \simeq u_3 = -3{,}75 \end{array}\right] *$$