9 (nueve)

Análisis Numérico — Parcial — 17-10-2019

No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con tres ejercicios correctamente resueltos en su totalidad. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras de precisión (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): [redacted]

B

1. La velocidad mínima con la que debe llegar un móvil al punto más alto de un *loop* (o rulo) de radio R para superarlo, se calcula como $v = \sqrt{Rg}$, siendo g la aceleración de la gravedad y determinada según: $g = (9.807 \pm 0.001) m/s^2$. Si se midió un radio de $0.5m$ con un error relativo porcentual igual al de la gravedad.
   (a) Estimar la velocidad mínima con su cota de error absoluto. Expresar $v = \overline{v} \pm \Delta v$.
   (b) Estimar el error relativo porcentual de la velocidad.

B

2. Se desea conocer una raíz r del polinomio $p(x) = x^4 - 2x^2 - x - 4$ que se sabe está en el intervalo $[-1.7, -1.6]$.
   (a) Indique qué cantidad n de iteraciones deberían realizarse según el método de la bisección para obtener una cota para el error absoluto que sea menor a 0.02.
   (b) Realice las n iteraciones del método de la bisección y, utilizando la última aproximación como semilla, aplique el método de Newton Rapshon hasta lograr una tolerancia de 1.10^{-4}. Exprese el resultado como $r = \overline{r} \pm \Delta r$.

B

3. Se observa que los datos de producción de plástico de un país en función de los últimos años tienen un comportamiento aproximadamente lineal en un gráfico $x - \log(y)$.
   (a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para determinar una ecuación que ajuste los datos.
   (b) Estime el valor de plástico producido a mediados del cuarto año ($x = 4.5$)

Año $= x$	1	2	3	4	5
Producción de plástico (tn)	5.162	38.229	282.380	2086.681	15418.150

R

4. Dada la siguiente tabla de valores:

		x_0	x_1	x_2	x_3
x	1.5	2	2.5	3	4
$f(x)$	0.41	0.69	0.92	1.10	1.39

   B (a) Hallar un polinomio interpolante de orden 3 para estimar $f(3.5)$. Si el polinomio no es único elija uno y justifique su elección.
   Ø (b) Estime $f(3.5)$ y estime el error cometido

B

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

resolver el sistema mediante descomposición LU sin pivoteo parcial. Escriba todos los pasos intermedios.

[redacted]

[redacted]

$$v = R^{1/2} \cdot g^{1/2}$$

1) $v = \sqrt{R g}$ g = gravedad $g = (9,807 \pm 0,001)\,\frac{m}{s^2}$

$r = 0,5\ m$ $E_{r\%}(\text{radio}) = E_{r\%}(g)$

$$\cancel{E_{r\%} = \frac{|v - \bar{v}|}{v} \cdot 100\%}$$

~~El error porcentual de g~~ $\cancel{= \frac{|9,808 - 9,806|}{9,807} = 0,020394\%}$

$$E_r(g) = \frac{0,001}{9,807} \cdot 100\% = \boxed{0,010197\%}$$

Si $E_r(r) = \frac{\Delta r}{0,5} \cdot 100\% = 0,010197\%$

$$\boxed{\Delta r = 5,0984\ 10^{-5}\ m}$$

$$\Delta v(R) = \left|\frac{\partial v(R,g)}{\partial R}\right| \cdot \Delta R + \left|\frac{\partial v(R)}{\partial g}\right| \cdot \Delta G$$

$$\Delta v = \left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{R}}\right) \cdot \Delta R + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{g}}\,\Delta g$$

$$\boxed{\Delta v = 2,2580 \cdot 10^{-4}\ \frac{m}{s}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{0,5\,m \cdot 9,807\,\frac{m}{s^2}} = 2,21438479\ \frac{m}{s}$$

$$\boxed{v = (2,21438479 \pm 0,00022580)\ \frac{m}{s}}$$

$$E_{r\%}(v) = \frac{2,258 \cdot 10^{-4}\ m/s}{2,21438479\ \frac{m}{s}} \cdot 100\% = \boxed{0,010197\%}$$

[redacted]

2) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x - 4$ en $[\underbrace{-1,7}_{a}, \underbrace{-1,6}_{b}]$

$n = \log_2(b-a) - \log_2(e)$ ↳ error absoluto.

↓ num iteraciones

$$n = \frac{\log(b-a)}{\log(2)} - \frac{\log(e)}{\log(2)} \Rightarrow n = 2,3219$$

$\boxed{n \approx 3}$ (a) ✓

(b)

n	p	$f(p)$
0	$-1,65$	$-0,38299375$
1	$-1,675$	$-0,0647183$
2	$-1,6875$	$+0,1013336$
3	$-1,68125$	$0,017723$
4	$\boxed{-1,678125}$	$-0,023643$

$f(-1,7) = \oplus$

$f(-1,6) = \ominus$

$-1,7 \quad -1,675 \quad -1,65 \quad -1,6$

$\boxed{E\ ab = \underline{5,92 \cdot 10^{-3}}}$

Ahora NR

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x^4 - 2x^2 - x - 4}{4x^3 - 4x - 1} \quad \text{con } x_i = -1,678125$$

n	x_i	
0	$-1,678125$	$-1,679917415$
1	$-1,67991741$5	$-1,679913798$
~~2~~	~~$-1,679913798$~~	~~$-1,679913798$~~

$\underline{E\ ab = 3,617 \cdot 10^{-6}}$

listo 2 a solución

$r = (-1,67999913798 \pm 0,000003617)$ ✓

$r = (-1,67999137 \pm 3,617 \cdot 10^{-6})$

[redacted]

3) compr lineal para $x - \log(y)$ } la ecuación que mejor se ajusta es $\boxed{y = a\,10^{bx}}$ ✓

$\cancel{x - \log(y)}$

$\cancel{\log a \cdot 10^{x}}$

$\cancel{10^{x} - 10^{\log(y)}}$

$\cancel{10^{x} - y}$

por log

$$\log(y) = \log(a \cdot 10^{bx})$$

por pro log

$$\log(y) = \log(a) + \log(10^{bx})$$

$$\log(y) = \log a + bx \cdot \underbrace{\log 10}_{1}$$

$$\log(y) = \log a + bx$$

$$b\,x + \log a = \log(y)$$

$$b \cdot 1 + \log a = \log(5{,}162)$$

$$b \cdot 2 + \log a = \log(38{,}229)$$

$$b \cdot 3 + \log a = \log(282{,}380$$

$$b \cdot 4 + \log a = \log(2086{,}681)$$

$$b \cdot 5 + \log a = \log(15418{,}150)$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ \log(a) \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \log(5;162) \\ \log(38{,}229) \\ \log(282{,}380) \\ \log(2086{,}681) \\ \log(15418{,}150) \end{pmatrix}}_{b}$$

sabemos que $A.\hat{x} = b$ y $A^T A.\hat{x} = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \log(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log(y_1) \\ \log(y_2) \\ \log(y_3) \\ \log(y_4) \\ \log(y_5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+4+9+16+25 & 1+2+3+4+5 \\ 1+2+3+4+5 & 1+1+1+1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \log(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ \log(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(y_1) + 2\log(y_2) + 3\log(y_3) + 4\log(y_4) + 5\log(y_5) \\ \log(y_1) + \log(y_2) + \log(y_3) + \log(y_4) + \log(y_5) \end{pmatrix}$$

$\boxed{b = 0{,}86875}$

$\log(a) = -0{,}15554$

$\hookrightarrow \boxed{a = 0{,}69897}$

Entonces $\boxed{y = 0{,}69897 \cdot 10^{0{,}86875 \cdot x}}$ (a)

(b) $y = 0{,}69897 \cdot 10^{0{,}86875 \cdot 4{,}5}$

$\boxed{y = 5673{,}271 \text{ ton en } 4{,}5 \text{ años}}$

[redacted]

4) $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_{i,k}$

orden 3
↳ 4 valores de x

$$L_{i,k}(x_i) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

como $f(3,5)$ se quiere averiguar, tomo $x_0 = 2$, $x_1 = 2,5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ porque 3,5 se halla en este intervalo.

$$L(x_0) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$\boxed{L(x_0) = -(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$$

$$L(x_1) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$\boxed{L(x_1) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{0,375}}$$

$$L(x_2) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{-0,5}$$

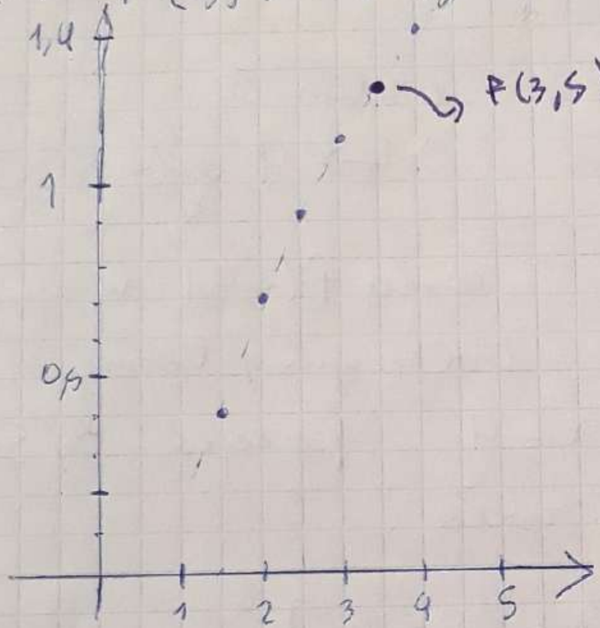
$$L(x_3) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3}$$

$$P(x) = f(x_0).L(x_0) + f(x_1) + L(x_1) + f(x_2).L(x_2 + f(x_3).L(x_3)$$

$$\boxed{P(x) = -0,69\,(x - 2,5)(x - 3)(x - 4) + \frac{0,92}{0,375}(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{1,10}{0,5}(x-2)(x-2,5)(x-4) + \frac{1,39}{3}(x-2)(x-2,5)(x-3)}$$ (a)

El polinomio no es único, podría haber tomado a $x = 1,5$ y no tomo $x = 2$ y formaría un nuevo polinomio de Lagrange.

(b) $f(3,5) \approx 1,25$ ✓



La aproximación fue bastante buena.

Error =

[redacted] Envia tus examenes a lawikifiuba@gmail.com

5) $Ax = b$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$

Sabemos que $A = L.U$

$LU.x = b$

$\boxed{Ux = y} \quad \boxed{L.y = b}$

Donde $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_{11} = 2 \\ u_{12} = 1 \\ u_{13} = 1 \end{array}\right\} U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$

Luego $l_{21} \cdot 2 + 0 + 0 = 3$

$\boxed{l_{21} = \frac{3}{2}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\frac{3}{2} \cdot 1 + u_{22} = 5 \Rightarrow \boxed{u_{22} = \frac{7}{2}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\frac{3}{2} + u_{23} = 2 \quad \boxed{u_{23} = \frac{1}{2}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$l_{31} \cdot 2 = -1 \quad \boxed{l_{31} = \frac{-1}{2}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad -\frac{1}{2} \cdot 1 + l_{32} \cdot \frac{7}{2} = -1$

$\boxed{l_{32} = -\frac{1}{7}}$

Por último

$$-\frac{1}{2}\cdot 1 + \left(-\frac{1}{7}\cdot \frac{1}{2}\right) + u_{33} = 5$$

$$\boxed{u_{33} = \frac{39}{7}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/7 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 39/7 \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y_1 = 4}$$

$$\frac{3}{2}\cdot 4 + y_2 = 9$$

$$\boxed{y_2 = 3}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{7}\cdot 3 + y_3 = -8$$

$$\boxed{y_3 = -\frac{39}{7}}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \frac{39}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -\frac{39}{7} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_3 = -1}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 3$$

$$\boxed{x_2 = 1}$$

$$2\cdot x_1 + \cancel{1} - \cancel{1} = 4$$

$$\boxed{x_1 = 2}$$

Entonces

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$