No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con dos ejercicios correctamente resueltos en su totalidad y un ejercicio planteado. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras significativas (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): Di Matteo, Carolina

1. Halle la primera raíz positiva de la ecuación $x = 2cos(x)$, a través del método de punto fijo.
   - Encuentre explícitamente un intervalo de interés.
   - Estudie las propiedades de convergencia del método propuesto.
   - Encuentre el cero buscado con una diferencia entre dos iteraciones sucesivas de $1 \cdot 10^{-7}$.
   - Represente la respuesta final respetando la convención del curso $x = \bar{x} \pm \Delta x$
2. De una función desconocida se obtuvieron los siguiente valores.

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	7.105	7.030	6.575	6.070	0.880

   (a) Plantee el modelo que crea correspondiente (que mejor ajuste los datos).
   (b) Plantee el sistema $A^T Ax = A^T b$.
   (c) Resolver utilizando la estrategia de descomposición[1] y expresar el modelo planteado con los valores hallados.
   (d) Estime el valor de la función en 1.8.
3. Estime a través de un polinomio de interpolación de orden mínimo 3, los valores con su cota de error correspondiente de $f(1,01)$ y $f(1,28)$ a partir de la siguiente tabla:

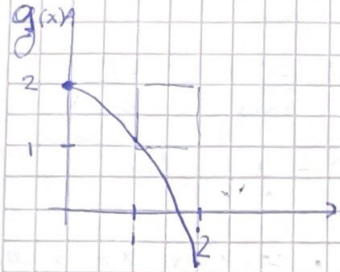
x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
$f(x)$	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

$\downarrow$ 1,01 $\qquad\qquad$ $\downarrow$ 1,28

[1]puede ser tanto LU o Cholesky, sin pivoteo parcial

		HOJA Nº
		FECHA

① Veamos cómo se comporta $f(x)$:



por ser función trigonométrica, sabemos que oscilará hasta el infinito con el mismo comportamiento, lo que implica que tendrá infinitas raíces positivas.

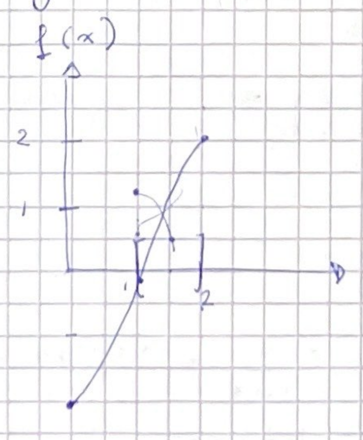
Ahora bien, como sólo me piden que busque la primera, tomaré como intervalo de estudio $[1, 2]$ ya que en el mismo se produce un cambio de signo y por Bolzano podemos decir que hay una raíz allí:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1{,}08 \\ f(2) = -0{,}832 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{cambio de signo}$$

$f(x) = 2\cos x$

$g(x) = x - f(x)$

$g \in$ admisible? $\rightarrow$ $g(x) = 2\cos x$.



$$x = 2\cos x$$

$$0 = \underbrace{2\cos x - x}_{f(x)}$$

$$f(x) = -2\cos x + x$$

$$g(x) = x - f(x)$$

$$= x + 2\cos x - x$$

$$= \cancel{2x} - 2\cos x.$$

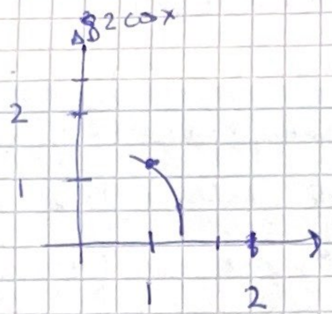
$$= \cancel{x} - 2\cos x$$

NOTA

$f(x) = 2\cos x - x \to [1, 2]$

$g(x) = 2\cos x$.

EXIST



$x = 2\cos x$

$\frac{x}{2} = \cos x$

$\cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = x$

$x - \psi f(x)$

$x = \psi(x)\,(2\cos x - x)$

$x = \frac{\cos x}{\sin x}(2\cos x - x)$

$x = 2\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}$

$x = \cos x - \frac{x}{2}$

$x\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \cos x \Rightarrow x = \frac{3}{2}\cos x$

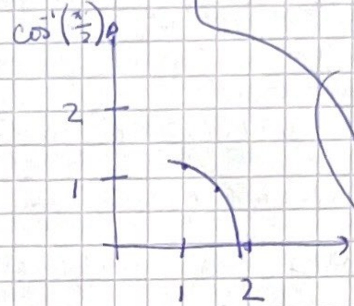
$x = 2\cos x - x$

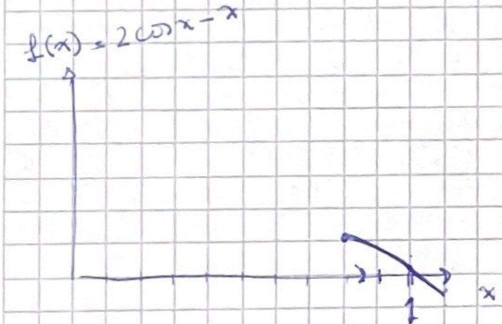
$2x = 2\cos x$

$x = \cos x$.

$x = 8\cos x - 4x$

$x = \frac{8}{5}\cos x$





$[1; 1{,}1] \in$ Raíz.

$x = 2\cos x$

$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = x$

$f(x) = 2\cos x - x = 0 \Rightarrow 2\cos x = x$

$\cos x = \frac{x}{2}$

$x = \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$g(x) = x - \psi(x)\,f(x)$

$x - \psi(x)\,[2\cos x - x]$.

$x = 2 - \frac{x}{\cos x} \Rightarrow -x + 2 = \frac{x}{\cos x} \Rightarrow x = \cos x\,(2 - x)$

$x = 2\cos^2(x) - \cos x$

$x = \psi(x)\,[2\cos x - x]$

$x = 2\,\mathrm{tg}^{-1}(x) - \frac{x}{\sin x}$

NOTA

$x + \frac{x}{\sin x} = 2\,\mathrm{tg}^{-1}(x) \Rightarrow x(1 + \sin^{-1}(x)) = 2\,\mathrm{tg}^{-1} x$

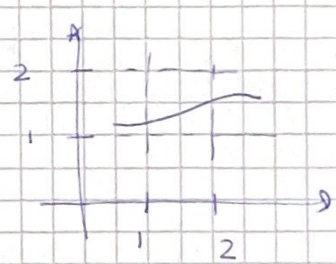
$x = [2\cos/\sin]\,/\,[1 + \sin^{-1}]$

No puedo encontrar una g admisible

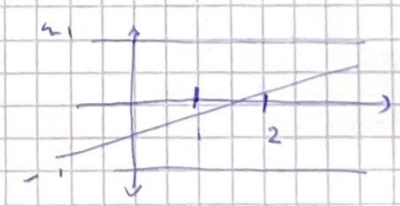
tal que $g(x) = x - \varphi(x) f(x)$

pero sí lo hacemos chequeamos:

EXISTENCIA: que $g(x)$ "entre por la izq" y "salga por la derecha" del intervalo, ej:



UNICIDAD: que la derivada esté acotada en el intervalo entre -1 y 1: $|g'(x)| < 1$; ej:



Luego, la raíz se encuentra como: $p_{n+1} = g(p_n)$ y me detengo cuando $|p_{n+1} - p_n| < 10^{-7}$

Di Matteo, Carolina 103963

HOJA N°

FECHA

②

a) por la distribución de puntos parecería ser una parábola "dada vuelta" ⇒ propongo un modelo parabólico (polinomio de segundo orden).

b) por modelo polinomial: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Luego:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5^2 \\ 1 & 1{,}0 & 1{,}0^2 \\ 1 & 1{,}5 & 1{,}5^2 \\ 1 & 2{,}0 & 2{,}0^2 \\ 1 & 4{,}0 & 4{,}0^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7{,}405 \\ 7{,}030 \\ 6{,}575 \\ 4{,}070 \\ 0{,}880 \end{pmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

resolviendo por CM, $A^T A x = A^T A$ resulta:

$n = 5$

$\Sigma x_i = 9$ $\qquad$ $\Sigma y_i = 27{,}44$

$\Sigma x_i^2 = 23{,}5$ $\qquad$ $\Sigma x_i y_i = 34{,}405$

$\Sigma x_i^3 = 74{,}5$ $\qquad$ $\Sigma x_i^2 y_i = 41{,}94$

$\Sigma x_i^4 = 278{,}13$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 23{,}5 \\ 9 & 23{,}5 & 74{,}5 \\ 23{,}5 & 74{,}5 & 278{,}13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27{,}44 \\ 34{,}405 \\ 41{,}94 \end{pmatrix}$$ RTA

c) Resuelvo con descomposición LU:

1°) $f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1 \, , \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1{,}8$

$f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1 \, , \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 4{,}7$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 23{,}5 \\ 0 & 7{,}3 & 34{,}2 \\ 0 & 34{,}2 & 167{,}48 \end{pmatrix}$$

NOTA

2°) $f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2$, $m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 4{,}684931507$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 23{,}5 \\ 0 & 7{,}3 & 34{,}2 \\ 0 & 0 & 7{,}4553 \end{pmatrix} = U$$

y además $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1{,}8 & 1 & 0 \\ 4{,}7 & 4{,}684931507 & 1 \end{pmatrix}$

y resuelvo los sistema $L\bar{y} = b$ ∧ $U\bar{x} = y$

luego (con calculadora):

$$L\bar{y} = b \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} 27{,}44 \\ -13{,}483 \\ -3{,}9381 \end{pmatrix}$$

$$U\bar{x} = y \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 6{,}9341 \\ 0{,}60033 \\ -0{,}52823 \end{pmatrix}$$

finalmente:

$\boxed{\tilde{y}(x) = 6{,}9341 + 0{,}60033\,x - 0{,}52823\,x^2}$ RTA

a) $\boxed{y(1{,}8) \simeq \tilde{y}(1{,}8) = 6{,}3032}$ RTA.

$y(1{,}5) \cancel{>} \tilde{y}(1{,}8) > y(2)$

$6{,}575 > 6{,}3032 > 6{,}070$ → resultado que tiene sentido por haber planteado un modelo parabólico con curvatura apuntando hacia el $-\infty$ del eje "y".

NOTA

Di Matteo, Carolina 103943

HOJA N°	
FECHA	

③ Calculo un polinomio de Newton de orden 5 y cambio de lugar el nodo 1,15 para utilizarlo para el cálculo del error:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i ; x_{i+1}]$	$f[x_i ; x_{i+2}]$	$f[x_i ; x_{i+3}]$	$f[x_i ; x_{i+4}]$
1,00	1,00000				
		0,494			
1,05	1,02470		-0,118		
		0,4822		0,04	
1,10	1,04881		-0,106		-0,0534
		0,4443		0,04445	
1,20	1,09544		-0,09447		-0,0532
		0,4518		0,03335	
1,25	1,11803		-0,09		-0,147
		0,4428		0,024	
1,30	1,14017		-0,0913		
		0,45193			
1,15	1,07238				

$f[x_i ; x_{i+5}]$	$f[x_i ; x_{i+4}]$
$4,4447e^{-4}$	
	-4,25778
-0,938	

Aclaración: uso los primeros 5 términos de la tabla para calcular un P_N que me permite aproximar los puntos pedidos, y el último término para calcular el error cometido.

$$P_N(x) = 1 + 0,494(x-1) - 0,118(x-1)(x-1,05) + 0,04(x-1)(x-1,05)(x-1,10) - 0,0534(x-1)(x-1,05)(x-1,10)(x-1,20) + 4,4447e^{-4}(x-1)(x-1,05)(x-1,10)(x-1,20)(x-1,25)$$

$$\varepsilon_N(x) = \left| -4,25778(x-1)(x-1,05)(x-1,10)(x-1,20)(x-1,25)(x-1,30) \right|$$

luego:

$$f(1,01) \approx P_N(1,01) = 1,00499 \quad , \quad \varepsilon_N(1,01) = 3e^{-4}$$

$$f(1,28) \approx P_N(1,28) = 1,13137 \quad , \quad \varepsilon_N(1,28) = 4e^{-4}$$

NOTA (atrás las expresiones)

Finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} f(1{,}01) &\simeq 1{,}00499 \pm 3\cdot 10^{-4} \\ f(1{,}28) &\simeq 1{,}13137 \pm 4\cdot 10^{-4} \end{aligned}}$$ RTA.

$f(1) < \tilde{f}(1{,}01) < f(1{,}05)$

$1 < 1{,}00499 < 1{,}02470$

$f(1{,}25) < \tilde{f}(1{,}28) < f(1{,}30)$

$1{,}11803 < 1{,}13137 < 1{,}14017$

ambas aproximaciones tienen sentido.

NOTA