1	2	3	4	5
M	R	M	$\varnothing$	M

Di Matteo Carolina 103963.

1

① $V(h) = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3} = \frac{\pi}{3}\left[h^2 3R - h^3\right]$

Me piden h_0 / $V(h_0) = 30$

Por Newton - Raphson: $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$

busco p tq $V(h_0) = 0 \Rightarrow \boxed{f(h) = \frac{\pi h^2 (3R-h)}{3} - 30}$

y buscar la raíz por NR de $f(h)$ sería buscar el h_0 que hace que el volumen del tanque equivalga a $30\ m^3$.

Tomo una semilla $p_0 = 1$ que no necesariamente es bueno. Calculo f'

$f'(h) = \frac{\pi}{3}\left[2h(9-h) - h^2\right]$

n/77/: $f'(h) = \frac{\pi}{3}(2h \cdot 3R - 3h^2)$

$= \frac{\pi}{3} h (6R - 3h) = \pi h (2R - h)$

luego: $\begin{cases} f(h) = \frac{\pi}{3}(h^2 3R - h^3) \\ f'(h) = \pi h (2R - h) \\ h_0 = 1 \end{cases}$ mal $h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)}$, $e_r = |h_{n+1} - h_n|$

$n = 0$: $h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)}$ ~~entonces~~

$f(h_0) = \frac{3{,}14}{3}(1^2 \cdot 3 \cdot 3 - 1^3) = 8{,}3734$

$f'(h_0) = 3{,}14 \cdot 1 (2 \cdot 3 - 1) = 15{,}7$

$\Rightarrow h_1 = 1 - \frac{8{,}3734}{15{,}7} = 0{,}46664 \Rightarrow e_r = 53{,}33\%$.

$n = 1$: $h_2 = h_1 - \frac{f(h_1)}{f'(h_1)} = \frac{-1{,}9450}{8{,}1080} + 1 = 0{,}76011$

$\Rightarrow e_r = 29{,}35\%$

NOTA

$\underline{n=3}$: $h_3 = 1 - \dfrac{f(h_3)}{f'(h_3)} = 1 - \dfrac{4,9829}{12,5063} = 0,601569$

Mal

$\Rightarrow \underline{\underline{e_r = 15,85\%}}$

finalmente, utilizando el método de NR, con 3 iteraciones y una semilla propuesta de 1m, concluimos que el tanque debe llenarse a una profundidad aproximada de $\underline{\underline{0,60\ m}}$. RTA

sólo una
la derivada

↳ El enunciado pedía trabajar con 2 decimales y me equivoqué y trabajé con "al menos 2 decimales". Si hubiera reducido la cantidad de decimales la aproximación sería más inexacta por problemas de redondeo.

$$X^{k+1} = X^k + Y^k$$

$$-JF^{-1}F = Y \Rightarrow JF\ Y = -F$$

Di Matteo, Carolina · 103943

HOJA N° 2

FECHA

No trabaje con inversas

② Newton para sistemas no lineales

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^{k} - JF(\bar{x}^{k})^{-1} F(\bar{x}^{k}) = \bar{x}^{k} - \bar{y}^{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array}\right\} \rightarrow \text{aproximación de la intersección}$$

Buscar la intersección de par de funciones pedidas es como ~~buscar~~ resolver el sistema igualado a 0. Entonces

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases} , \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \bar{x}^0 = \begin{pmatrix} 3,8 \\ 1,7 \end{pmatrix}$$

Veamos que

$$F(\bar{x}^k) = \begin{pmatrix} (x^k-4)^2 + (y^k-4)^2 - 5 \\ (x^k)^2 + (y^k)^2 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$JF(\bar{x}^k) = \begin{pmatrix} 2x^k - 8 & 2y^k - 8 \\ 2x^k & 2y^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Calculo:

$\underline{n=0}$:

$$\bar{y}^0 = \begin{pmatrix} 2.3,8 - 8 & 2.1,7 - 8 \\ 2.3,8 & 2.1,7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (3,8-4)^2 + (1,7-4)^2 - 5 \\ 3,8^2 + 1,7^2 - 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,21548 \\ -0,09048 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} 3,8 \\ 1,7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,21548 \\ -0,09048 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,58452 \\ 1,79048 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{"A"} \\ \rightarrow \text{"B"} \end{array}$$

$\underline{n=1}$:

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} 2A - 8 & 2B - 8 \\ 2A & 2B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (A-4)^2 + (B-4)^2 - 5 \\ (A)^2 + (B)^2 - 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,015218 \\ -0,015218 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^2 = \begin{pmatrix} 3,569301 \\ 1,805698 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{"A"} \\ \rightarrow \text{"B"} \end{array}$$

uso constantes en lugar de reemplazar con los números para no cometer un error de cuenta.

NOTA

→ me equivoqué en la calcu

Mal

$n=2: \quad y^2 = \begin{pmatrix} 0,00013 \\ -1,30992 \end{pmatrix}, \quad \cancel{x^3 = \begin{pmatrix} 3,58439 \\ 1,7906 \end{pmatrix}}$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 3,569172 \\ 3,115418 \end{pmatrix}$$

Mal

Finalmente, utilizando el método de Newton para sistemas no lineales la intersección de las circunferencias se encuentra aproximadamente en:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,569172 \\ 3,115418 \end{pmatrix}$$

RTA

NOTA

Di Matteo, Carolina 103963

HOJA Nº 3

FECHA

③ a)

$$\begin{cases} \frac{dx^2}{d^2t^2} = a(t) = 0{,}12\,t^2 + 0{,}6\,t \\ \frac{dx}{dt} = v(t) = 0{,}12 \cdot 2t + 0{,}6 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

Mal planteado

$$\frac{dx}{dt} = u$$

b) Por Runge-Kutta del Punto Medio:

$$x' = u$$
$$u' = 0.12t^2 + 0.6t$$

$k_1 = f(t_k, y_k)$

$k_2 = f(t_k + h/2,\ y_k + k_1 h/2)$

$y_{k+1} = y_k + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \xrightarrow[a_1=0,\ a_2=1]{} y_{k+1} = y_k + h k_2$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ u_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} k_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

k_1 — m_1

k_2 — m_2

defino: $f(t, x, v) = 0{,}12\,t^2 + 0{,}6\,t$

$g(t, x, v) = 0{,}24\,t + 0{,}6$

$h = \frac{1 \to 1\ \text{seg}}{2 \to 2\ \text{iter}} = 0{,}5$

debe hacer cambio de variables y resolver el sistema

$\underline{k=0}$:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_0, x_0) = f(0,0) = 0 \\ k_2 = f(t_0 + 0.25,\ x_0 + 0 \cdot 0.25) = f(0.25, 0) = 0{,}1575 \\ x_1 = x_0 + 0{,}5\,k_2 = 0{,}07875 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = g(t_0, v_0) = g(0,0) = 0{,}6 \\ k_2 = g(t_0 + 0.25,\ v_0 + 0{,}6 \cdot 0{,}25) = g(0.25, 0.15) = 0{,}66 \\ v_1 = v_0 + 0{,}5\,k_2 = 0{,}33 \end{cases}$$

$\underline{k=1}$:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_1, x_1) = f(0.5, 0.07875) = 0{,}33 \\ k_2 = f(t_1 + 0.25,\ x_1 + k_1 0.25) = f(0.75, 0.16125) = 0{,}5175 \\ x_2 = x_1 + 0{,}5\,k_2 = 0{,}3375 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = g(t_1, x_1) = g(0.5, 0.33) = 0{,}72 \\ k_2 = g(t_1 + 0.25,\ v_1 + k_1 0.25) = g(0.75, 0.51) = 0{,}78 \\ v_2 = v_1 + 0{,}5\,k_2 = 0{,}72 \end{cases}$$

luego, usando el método de Runge Kutta del punto medio, ~~utilizando~~ realizando dos iteraciones obtenemos que la posición y la velocidad del automóvil al cabo de 1s son aproximadamente:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3375 \\ 0{,}72 \end{pmatrix}$$

RTA

mal

NOTA

Matteo Conolino 103963

HOJA Nº 4

FECHA

$\log y$

x

$x - \log y$

$\log y = a x + b$

bx

$y = a\,10^{bx}$

$\log y = \log a + bx$

(5) ~~$x \log y \ldots = \log y$~~

Planteo el sistema $x - \log y = 0 \Rightarrow \log y = x$ mal

a) Por cuadrados Mínimos: $A^T A \hat{x} = A^T b$

donde $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1,0 & 1 \\ 1,5 & 1 \\ 2,0 & 1 \\ 4,0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \log(5,455) \\ \log(4,582) \\ \log(3,240) \\ \log(2,848) \\ \log(0,980) \end{pmatrix}$, $\hat{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Resuelvo:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,0 & 1,5 & 2,0 & 4,0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1,0 & 1 \\ 1,5 & 1 \\ 2,0 & 1 \\ 4,0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23,5 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,0 & 1,5 & 2,0 & 4,0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log(5,455) \\ \log(4,582) \\ \log(3,240) \\ \log(2,848) \\ \log(0,980) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4831 \\ 2,3728 \end{pmatrix}$$

Luego: $\begin{pmatrix} 23,5 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4831 \\ 2,3728 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2175 \\ 0,8641 \end{pmatrix}$$

y la recta que mejor aproxima los datos por cuadrados mínimos es:

$$\tilde{y} = 0,8641\, x - 0,2175$$

RTA

mal

b) $y(3,0) \simeq \tilde{y}(3,0) = 0,8641 \cdot 3,0 - 0,2175 = 2,3808$

Luego, por CM: $y(3,0) \simeq 2,3808$

NOTA