No exprese ningún cálculo en forma fraccionaria. El examen se aprueba con tres ejercicios correctamente resueltos en su totalidad. Salvo indicación contraria, use al menos 5 cifras de precisión (preferible usar memorias de la calculadora)

Apellido, nombre(s): ______________________________

1. El período T de un péndulo está dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, siendo L la longitud del hilo y g la aceleración de la gravedad.
   Se conoce:

   $L = 20.000 \pm 0.003m$

   $g = 9.81m/s^2$ con $e_{r_g} = 2\,\%$

   $\pi = 3.1416 \pm 0.0001$

   (a) Calcular el error absoluto del período (con su unidad correspondiente) y expresar al período en la forma $T = \overline{T} \pm \Delta T$

   (b) Calcular el error relativo del período

2. El volumen de agua de un tanque esférico de radio $R = 3$ está definida por la función $V(x) = \frac{\pi x^2(9-x)}{3}$. Se desea conocer el valor de x para el cuál el tanque esférico se encuentra al $70\,\%$. Encuentre la función que modela el problema mencionado y halle la raíz por el método de Newton-Raphson, interrumpa el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0.01. Exprese el resultado $x = \overline{x} \pm \Delta x$.

   AYUDA: Máximo volumen se alcanza en $V(2R)$

3. Dada la siguiente tabla de valores:

x	0	2	3	4	5
$f(x)$	1	9	27	81	243

   (a) Hallar un polinomio interpolante de orden 3 para estimar $f(1)$. Si el polinomio no es único elija uno y justifique su elección.

   (b) Estime $f(1)$ y estime el error cometido

4. Se observa que ciertos datos medidos tienen un comportamiento aproximadamente parabólico en un gráfico $x - y$.

   (a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para determinar una ecuación que ajuste los datos. Los coeficientes del modelo que propone, ¿minimizan el error cuadrático total?

   (b) Estime el valor de y para $x_0 = 1.8$

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	7.105	7.030	6.575	6.070	0.880

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -49 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Hallar x resolviendo el sistema mediante descomposición LU sin pivoteo parcial (sin intercambiar filas). Escriba todos los pasos intermedios. ¿Es exacto el resultado?

Zulaica
105774

1) B
2) B
3) B
4) B -
5) B -
9 (nueve)

1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\, L^{1/2}\, g^{-1/2}$

$$\Delta T = \Delta\pi\left|\frac{\partial T}{\partial \pi}\right| + \Delta L\left|\frac{\partial T}{\partial L}\right| + \Delta g\left|\frac{\partial T}{\partial g}\right|$$

$$\Delta T = \Delta\pi\left|\underbrace{2\sqrt{\frac{L}{g}}}_{T/\pi}\right| + \Delta L\left|\underbrace{\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\,\frac{1}{2}\,L^{-1/2}}_{T/2L}\right| + \Delta g\left|\underbrace{2\pi\sqrt{L}\left(-\frac{1}{2}\,g^{-3/2}\right)}_{T/(-2)\cdot g}\right|$$

$$\Delta T = T\left(\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta L}{2L} + \frac{\Delta g}{2g}\right)$$

$$\overline{T} = 2\cdot 3{,}1416\sqrt{\frac{20\,m}{9{,}81\,m}}\;s = 8{,}97142391\,s \quad (A)$$

$$\Delta T = \overline{T}\left(\frac{0{,}0001}{3{,}1416} + \frac{0{,}003}{40} + \frac{2\%}{2}\right) = 0{,}09067266452\,s \quad (B)$$

a) $T = (8{,}9 \pm 0{,}1)\;s$

b) $\varepsilon_T = \left|\frac{\Delta T}{T}\right| = 1{,}010683091\% < 2\%$

BIEN

NOTA

2) $R = 3 \rightarrow V(x) = \frac{\pi x^2 (9-x)}{3}$

Volumen Maximo $= V(2R) = 36\pi = 113,097$

$V_p = 70\%\ V_{max} = 79,16813487$ (A)

Deseamos conocer $V(x) = V_p \Rightarrow V(x) - V_p = 0$

Sea $f = V(x) - V_p$ queremos hallar su raiz,

sabemos que:

> La raiz se encuentra entre $x = 0$ y $x = 2R$

> La funcion sera monotonamente creciente en el intervalo, por lo que $f' \neq 0\ \forall x \in (0, 2R)$

Tomamos como punto inicial $x = R$ (medio de $(0, 2R)$)

Tolerancia $= 0,01$

Newton Raphson: $p_{n+1} = p_n - f(p_n)/f'(p_n)$

$f = \frac{\pi x^2 (9-x)}{3} - V_p$ $\quad f' = \frac{\pi}{3}(18x - 3x^2) \rightarrow \frac{f}{f'} = \frac{x^2(9-x) - V_p \frac{3}{\pi}}{18x - 3x^2}$

n	p_n	Δp
0	3,00000	
1	3,80000	0,8
2	3,82042	0,03
3	3,82046	0,00005

$p = 3,82046 \pm 0,00005$

BIEN

NOTA

Zulaica
105774

HOJA Nº 3 | 6

FECHA

3)

x	f(x)	1DD	2DD	3DD	4DD
0	1				
2	9	4			
3	27	18	4,66667		
4	81	54	18	3,33333	
5	243	162	54	12	1,73333

A

B

C

a)

$$p = 1 + 4x + 4{,}66667\, x(x-2) + 3{,}33333\, x(x-2)(x-3)$$

$$\text{error} = |1{,}73333\, x(x-2)(x-3)(x-4)|$$

El polinomio p es el unico polinomio de grado 3 que interpola los 4 puntos: $\{0,2,3,4\}$
Eligo separar el punto 5 para estimar el error ya que este es el más alejado a $x=1$, de modo que p estara mejor definido en ese punto.

$$p(1) = 1 + 4 - A + 2B = 7$$

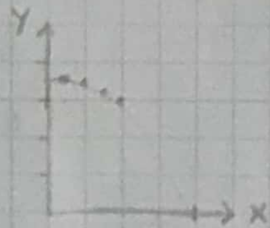
b)

$$\text{error}(1) = |6C| = 10{,}4$$

BIEN

NOTA

4) $y \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2$



x	0,5	1,0	1,5	2,0	4,0
y	7,105	7,030	6,575	6,070	0,880

$A x \approx b$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 & 1 \\ 1,0 & 1,0 & 1 \\ 2,25 & 1,5 & 1 \\ 4,0 & 2,0 & 1 \\ 16,0 & 4,0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7,105 \\ 7,030 \\ 6,575 \\ 6,070 \\ 0,880 \end{bmatrix}$$

$A^T A \check{x} = A^T b$

$$\begin{bmatrix} 278,125 & 76,5 & 23,5 \\ 76,5 & 23,5 & 9 \\ 23,5 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61,96 \\ 36,105 \\ 27,66 \end{bmatrix}$$

$a_2 = -0,5285773385$ (C)

$a_1 = 0,6019650655$ (B)

$a_0 = 6,932776373$ (A)

a) $\check{y} = 6,932776373 + 0,6019650655\, x - 0,5285773385\, x^2$

Esta solucion minimiza el error cuadratico para una parabola que ajusta los puntos dados

No, no minimiza el error cuadrático total porque no sabemos si es el modelo que mejor ajusta los datos.

b) $\check{y}(1,8) = A + B\, 1,8 + C\, 1,8^2 = 6,303722914$

BIEN -

NOTA

Zulaica
105777

HOJA N° 5|6

FECHA

5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{21} & u_{22} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$

$a_{11} = L_1 U^1 = u_{11} = 3$

$a_{12} = L_1 U^2 = u_{12} = 1$

$a_{13} = L_1 U^3 = u_{12} = 0$

$a_{21} = L_2 U^1 = (L_{21}\ 1\ 0)(3\ 0\ 0)^T = 3L_{21} \Rightarrow L_{21} = -3$

$a_{22} = L_2 U^2 = (-3\ 1\ 0)(1\ u_{22}\ 0)^T = -3 + u_{22} \Rightarrow u_{22} = -1$

$a_{23} = L_2 U^3 = (-3\ 1\ 0)(0\ u_{23}\ )^T = u_{23} = -1$

$a_{31} = L_3 U^1 = (L_{31}\ L_{32}\ 1)(3\ 0\ 0)^T = 3 \cdot L_{31} \Rightarrow L_{31} = 0$

$a_{32} = L_3 U^2 = (0\ L_{32}\ 1)(1\ -1\ 0)^T = \ L_{32} = -1$

$a_{33} = L_3 U^3 = (0\ -1\ 1)(0\ -1\ u_{33})^T = 1 + u_{33} \Rightarrow u_{33} = -1$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$Ax = b$

$L(Ux) = b \rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

NOTA

$$\begin{matrix} L & & Y & = & b \end{matrix}$$

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -49 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} U & & x & = & Y \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ -10 \end{pmatrix} \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

El resultado es exacto

(Al utilizar este metodo obtendremos el mismo resultado que al realizar la ecuación original, no es una aproximación ni un ajuste)

Es exacto por ser todos valores enteros, sino tendría error de redondeo y truncamiento y no sería exacto.

BIEN -

NOTA