1. Una empresa tiene encargado el desarrollo de una nueva aleación para la industria automotriz y para ello tiene que hacer pruebas.
Departamento de calidad solicita que se saquen muestras a una temperatura de $230°C$.
La mesa de enfriamiento tiene una longitud de 200 metros y la velocidad con la que circula el producto es de $0.4 \pm 0.01 \frac{m}{s}$ **la ley de enfriamiento de Newton** $T(t) = C \cdot e^{-k \cdot t} + Ta$ modela la temperatura del producto en la mesa en función del tiempo.
Donde:

$k = 0.01$

$C = 1500$

$Ta = 25$

(a) Se pide hallar el tiempo t para el cual se encuentra la muestra a $230°C$ a través de un método de convergencia superior al lineal. El criterio de paro es una diferencia menor a $0.5s$ entre dos iteraciones consecutivas.

(b) Se pide hallar la posición x de la mesa donde tomar la muestra, expresando el resultado de la forma $\bar{x} \pm \Delta x$

a) $T(t) = 1500\, e^{-0{,}01\, t} + 25$

busco $t_0 \mid T(t_0) = 230 \Rightarrow 1500\, e^{-0{,}01\, t_0} + 25 = 230$

$\Rightarrow \underbrace{1500\, e^{-0{,}01 t_0} - 205}_{f(x)} = 0 \rightarrow$ busco raíz

uso NR :

• defino el intervalo

$f(0) = 1295$

$\left.\begin{array}{l} f(100) = 346{,}8192 \\ f(1000) = -204{,}9319 \end{array}\right\} \rightarrow$ raíz

uso 3 iteraciones de Bisección para buscar una buena raíz:

1°) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 100 \\ b_1 = 1000 \end{array}\right\} p_1 = 550$

$f(p_1) = -198{,}8698$

$\left.\begin{array}{l} a_2 = 100 \\ b_2 = 550 \end{array}\right\} p_2 = 325$

$f(p_2) = -146{,}8387$

$\left.\begin{array}{l} a_3 = 100 \\ b_3 = 325 \end{array}\right\} p_3 = 212{,}5$

$f(p_3) = -25{,}8505$

busco la raíz entre $[100; 1000]$

$f(100) \cdot f(1000) < 0 \Rightarrow$ por Bolzano hay raíz

como además $f \in C^2[100; 1000]$ uso NR con $p_0 = 212{,}5$ como semilla:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} \quad , \quad f'(x) = 1500\, e^{-0{,}01x} \cdot (-0{,}01) = -15\, e^{-0{,}01x}$$

resuelvo:

n	p_n	p_{n+1}	$\lvert p_n - p_{n+1} \rvert < 0{,}5$
0	212,5	198,0704	
1		199,0165	
2		199,0210	$4{,}5 \cdot 10^{-3} < 0{,}5$

Luego, t_0 según 3 iteraciones de NR es $\boxed{t_0 = 199{,}0210\ s}$

$t_0 = 199{,}0 \pm 5 \cdot 10^{-3}\ s$

b) $v = 0{,}4 \pm 0{,}01\ m/s$

$x(t) = 0{,}4t \rightarrow x(t) = v\,t$

$x(t_0) = 0{,}4 \cdot t_0 = 79{,}6084\ m$

$$\Delta x = \left| \frac{d\,x(t)}{dt} \right|_{t_0} \Delta v = 0{,}4 \quad 0{,}01 = 4 \cdot 10^{-3}$$

Luego $x = (79{,}6084 \pm 0{,}004)\ m$

$x(t_0) = 79{,}61\ m = \bar{x}$

$$\Delta x = \left| \frac{dx}{dt} \right| \Delta t + \left| \frac{dx}{dv} \right| \Delta v$$

$$= |v|\Delta t + |t|\,\Delta v$$

$$= 0{,}4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + t_0 \cdot 0{,}01$$

$\hookrightarrow 79{,}61$

$\Rightarrow x = \bar{x} + \Delta x$

2. Para lanzar un nuevo producto se realiza un estudio de análisis de fallas. Donde P representa la probabilidad de fallar y t el tiempo.

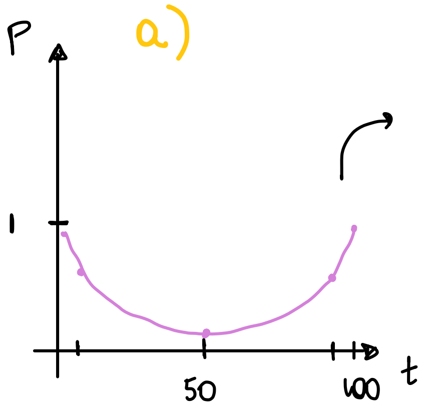
P [%]	0.9	0.6	0.05	0.6	0.9
t [horas]	1	10	50	90	100

(a) Plantee el modelo que crea correspondiente (que mejor ajuste los datos) y plantear el sistema $A^T Ax = A^T b$.

(b) Una vez planteado el sistema $A^T Ax = A^T b$, hallar el valor de los coeficientes x a través de la descomposición LU, sin utilizar pivoteo parcial.

Ø (c) Estime el valor de probabilidad de falla a las 20 horas.

a)



modelo cuadrático o polinomio de 2° orden

x_i	y_i
1	0,9
10	0,6
50	0,05
90	0,6
100	0,9

$n = 5$

$\Sigma x_i = 251$ $\qquad \Sigma y_i = 3,05$

$\Sigma x_i^2 = 20701$ $\qquad \Sigma x_i y_i = 153,4$

$\Sigma x_i^3 = 1855001$ $\qquad \Sigma x_i^2 y_i = 14045,9$

$\Sigma x_i^4 = 171870001$

planteando el sistema $A^T A \bar{x} = A^T b$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 5 & 251 & 20701 \\ 251 & 20701 & 1855001 \\ 20701 & 1855001 & 171870001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,05 \\ 153,4 \\ 14045,9 \end{pmatrix}$$

b) 1°) $f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$, $m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = 50,2$

$f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1$, $m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = 4140,2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 251 & 20701 \\ 0 & 8100,8 & 815810,8 \\ 0 & 815810,8 & 84163720,8 \end{pmatrix}$$

$2°)\ f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2 \ , \ m_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = 100,7074343$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 251 & 20701 \\ 0 & 8100,8 & 815810,8 \\ 0 & 0 & 4005506,624 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50,2 & 1 & 0 \\ 4140,2 & 100,7074343 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L\bar{y} = \begin{pmatrix} 3,05 \\ 153,4 \\ 14045,9 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} 3,05 \\ 0,29 \\ 1389,084843 \end{pmatrix}$$

$$U\bar{x} = y \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0,9256278673 \\ -0,03488891509 \\ 3,44793795 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

luego:

$$\boxed{\tilde{y}(x) = 0,9256 - 0,03489x + 3,448 \cdot 10^{-4} x^2}$$

c) $\boxed{\tilde{y}(20) = 0,34452}$

3. Se quiere estimar a través de un polinomio interpolante el valor de la función en 1.2 y su error cometido.
Para ello se tienen los siguientes datos.

x	$f_{(x)}$	$f'_{(x)}$	$f''_{(x)}$
0	0	1	2
1	2.2874	-	-
2	6.7188	3.6439	-

z_i	$f(z_i)$	$f'(z_i)$	$f''(z_i)$			
0	0					
0	0	1	2	-0,7126	0,3025	-0,3568
0	0	1	1,2874	-0,1077	-0,4111	
1	2,2874	2,2874	1,072	-0,9298		
2	6,7188	4,4314	-0,7875			
2	6,7188	3,6439				

Luego, por Hermite:

$$H_5(x) = 6{,}7188 + 3{,}6439\,(x-2) - 0{,}7875\,(x-2)^2 - 0{,}9298\,(x-2)^2(x-1) -$$

$$- 0{,}4111\,(x-2)^2(x-1)\,x - 0{,}3568\,(x-2)^2(x-1)\,x^2$$

de donde $\varepsilon = |H_5(x_0) - H_4(x_0)|$, $x_0 = 1{,}2$

$H_4(1{,}2) = 3{,}1175$

$\varepsilon(1{,}2) = 0{,}06577$

$\Rightarrow f(1{,}2) \simeq 3{,}12 \pm 7 \cdot 10^{-2}$

1. Se tiene la siguiente **función** $f(x) = e^{\frac{x}{5}} - x$, la cual posee dos raíces dentro del intervalo $x\epsilon[0.15]$.

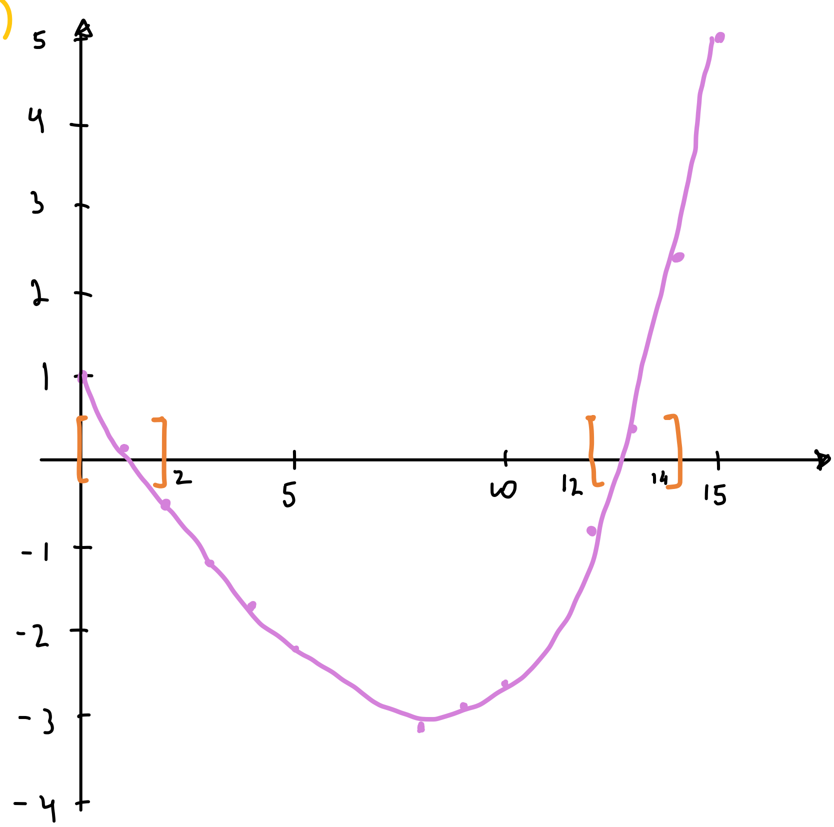
   (a) Se pide hallar una función $g(x)$ que cumpla con las condiciones de existencia y unicidad. Justificar para cada raíz si es posible como si no es posible.

   (b) Hallar una sola de las dos raíces a través del método del **punto fijo**, utilizando como criterio de paro una diferencia menor a 0.05 entre dos iteraciones consecutivas.

   (c) Una vez hallada la raíz y su cota de error cometida, expresar el resultado de la forma $\bar{x} \pm \Delta x$, utilizando la convención vista en clase.

$f(x) = e^{x/5} - x \quad , \quad x \in [0;15] \rightarrow 2$ raíces

a)



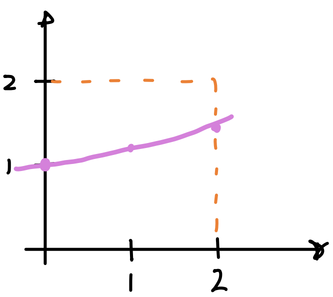
entre $[0;2]$ hay una raíz

entre $[12,14]$ hay una raíz

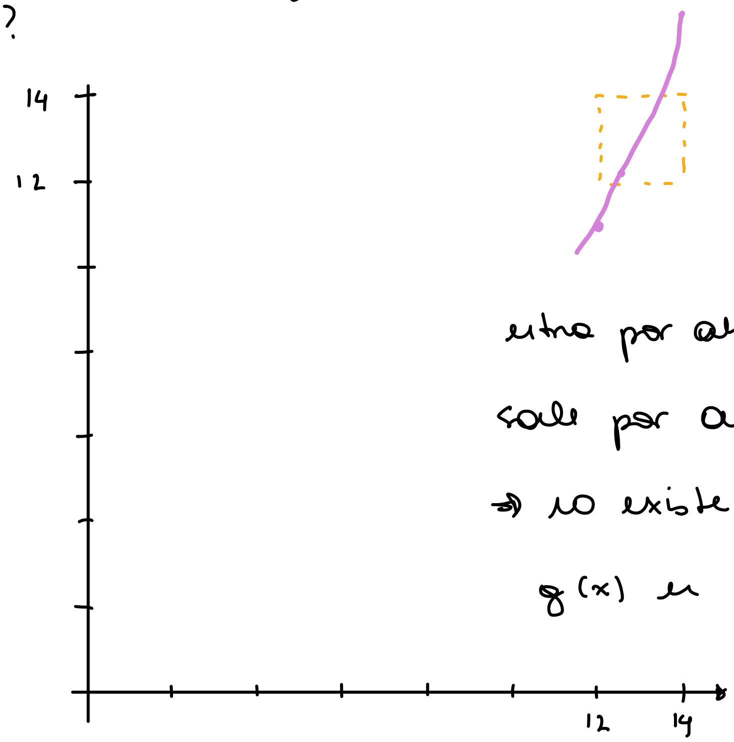
$f(x) = e^{x/5} - x = 0 \Rightarrow x = e^{x/5} = g(x)$

$g(x) \in$ admisible?

1) <u>EXISTENCIA</u>



entra por la izq y sale por la der $\Rightarrow$ existe PF $[0;2]$



entra por abajo y sale por arriba $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ no existe PF para $g(x)$ en $[12;14]$

2) UNICIDAD $\in (0;2)$

$g'(x) = \frac{1}{5} e^{x/5}$ → estrictamente creciente

veo cuánto vale la función en los extremos y esos serán los valores máximos y mínimos:

$$\left.\begin{array}{l} g'(0) = \frac{1}{5} > -1 \\ g'(2) = 0{,}2984 < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |g'(x)| < 1$$

Luego $g(x)$ es admisible en $[0;2]$ y tiene un único PF.

b) Busco la raíz en $[0;2]$:

P_n	P_{n+1}	$\lvert P_n - P_{n+1}\rvert$
1	1,2214	
1,2214	1,2747	
1,2747	1,2909	
1,2909	1,2946	0,0037

→ mayores para RTA

c) finalmente $\boxed{P = 1{,}295 \pm 0{,}004}$ RTA

2. De una función desconocida se obtuvieron los siguiente valores.

x	0	1	2	3	4	5
y	1.0000	2.7183	7.8991	20.086	54.598	148.41

(a) Plantee el modelo que crea correspondiente (que mejor ajuste los datos) y plantear el sistema $A^T A x = A^T b$.

(b) Una vez planteado el sistema $A^T A x = A^T b$, hallar el valor de los coeficientes x a través de la descomposición LU, sin utilizar pivoteo parcial.

(c) Estime el valor de la función en e.

a) por la velocidad con la que crecen los puntos, propongo modelo exponencial:

$$y = a e^{bx} \Rightarrow \ln y = bx + \ln a$$

planteo CM:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1,0000 \\ 2,7183 \\ 7,8991 \\ 20,086 \\ 54,598 \\ 148,41 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,067 \\ 55,133 \end{pmatrix}$$

b) $f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$, $m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = 2,5$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 0 & 17,5 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2,5 & 1 \end{pmatrix}$$

resuelvo: $L\bar{y} = \begin{pmatrix} 15,067 \\ 55,133 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} 15,067 \\ 17,466 \end{pmatrix}$

$$U\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 0,016024 \\ 0,99806 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,0162 \\ b = 0,99806 \end{cases}$$

c) $\tilde{y}(x) = 1,0162\, e^{0,99806\, x}$

$\tilde{y}(e) = 15,319$

3. Se quiere estimar a través de un polinomio interpolante el valor de la función en 4.3, sin estimar su error cometido, el polinomio debe ser al menos de orden 3. En caso de descartar información justificar.
Para ello se tienen los siguientes datos.

x	$f_{(x)}$
0	4
~~2~~	~~9~~
3	3
4	2
5	1

descarto $x = 0$ por su lejanía al punto pedido

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+3}]$
2	9			
		-6		
3	3		2,5	
		-1		-0,8333
4	2		0	
		-1		
5	1			

$$\Rightarrow P_N(x) = 9 - 6(x-2) + 2{,}5(x-2)(x-3) - 0{,}8333(x-2)(x-3)(x-4)$$

Luego: $\boxed{f(4{,}3) \approx P_N(4{,}3) = 1{,}9275}$ RTA

1. El período T de un péndulo está dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, siendo L la longitud del hilo y g la aceleración de la gravedad.
Se conoce:

$L = 20.000 \pm 0.003m$ 0,02

$g = 9.81m/s^2$ con $e_{r_g} = 2\,\%$ $= \frac{\Delta g}{\overline{g}} \Rightarrow \Delta g = 0{,}02 \cdot 9{,}81 = 0{,}1962$

$\pi = 3.1416 \pm 0.0001$

(a) Calcular el error absoluto del período (con su unidad correspondiente) y expresar al período en la forma $T = \overline{T} \pm \Delta T$

(b) Calcular el error relativo del período

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, $e_{abs} = T - \overline{T} \leq \Delta T$

Calculo $\overline{T} = 2\overline{\pi}\sqrt{\frac{\overline{L}}{\overline{g}}} = 2 \cdot 3{,}1416 \sqrt{\frac{20{,}000}{9{,}81} \frac{m}{m/s^2}} = 8{,}9714\ s^{-1}$

calculo ΔT :

$$\Delta T = \left|\frac{dT}{d\pi}\right|_{\overline{\pi}, \overline{L}, \overline{g}} \Delta\pi + \left|\frac{dT}{dL}\right|_{\overline{\pi}, \overline{L}, \overline{g}} \Delta L + \left|\frac{dT}{dg}\right|_{\overline{\pi}, \overline{L}, \overline{g}} \Delta g$$

$$= 2\sqrt{\frac{\overline{L}}{\overline{g}}}\,\Delta\pi + \frac{2\overline{\pi}}{\sqrt{\overline{g}}}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\overline{L}}}\,\Delta L + 2\overline{\pi}\sqrt{\overline{L}}\left|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\overline{g}^3}}\right|\Delta g$$

$$= \left(2{,}8557 \cdot 10^{-4} + 4{,}7286 \cdot 10^{-4} + 8{,}9714 \cdot 10^{-2}\right) s^{-1}$$

$$= 9{,}0472 \cdot 10^{-2}\ s^{-1}$$

mayoro · $\Delta T = 0{,}1\ s^{-1}$

luego : $\boxed{T = 8{,}9 \pm 0{,}1\ s^{-1}}$ // RTA

b) $\boxed{e_r = \frac{\Delta T}{T} = 0{,}011}$ // RTA

2. El volumen de agua de un tanque esférico de radio $R = 3$ está definida por la función $V(x) = \frac{\pi x^2(9-x)}{3}$. Se desea conocer el valor de x para el cuál el tanque esférico se encuentra al 70 %. Encuentre la función que modela el problema mencionado y halle la raíz por el método de Newton-Raphson, interrumpa el algoritmo cuando la diferencia absoluta entre iteraciones consecutivas sea menor a 0.01. Exprese el resultado $x = \overline{x} \pm \Delta x$.

AYUDA: Máximo volumen se alcanza en $V(2R)$

$$V(x) = \frac{\pi x^2 (9-x)}{3}$$

$$x_0 \,/\, V(x_0) = 0{,}7\, V(x_{total}) = 0{,}7\, V(2R)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi x_0^2 (9-x_0)}{3} = \frac{0{,}7\, \pi\, 4R^2 (9-2R)}{3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\pi x_0^2 (9-x_0)}{3} - \frac{0{,}7}{3} \pi\, 4R^2 (9-2R)}_{f(x_0)} = 0$$

Busco la raíz de $f(x_0)$ por NR $(f \in C^2 \mathbb{R})$:

$$f(x) = \frac{\pi}{3}\left[x^2(9-x) - 2{,}8\, R^2 (9-2R)\right]$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{3}\left[2x(9-x) + x^2(-1)\right] = \frac{\pi}{3}\left[18x - 2x^2 - x^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[18x - 3x^2\right] = \pi\left(6x - x^2\right)$$

luego: $$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

según el intervalo $[0 ; 2R]$, tomo la semilla en el punto intermedio: $p_0 = \frac{2R-0}{2} = R$

Calculo:

n	p_n	p_{n+1}	$\lvert p_{n+1} - p_n \rvert < 0{,}01$
0	3	3,8	
1	3,8	3,8204	
2	3,8204	3,8205	$1 \cdot 10^{-4} < 0{,}01$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3{,}8205 \pm 0{,}0001} \text{ RTA}$$

3. Dada la siguiente tabla de valores:

x	0	2	3	4	5
$f(x)$	1	9	27	81	243

(a) Hallar un polinomio interpolante de orden 3 para estimar $f(1)$. Si el polinomio no es único elija uno y justifique su elección.

(b) Estime $f(1)$ y estime el error cometido

a) Elijo el pol. interpolante de Newton para estimar $f(1)$:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i;x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+2}]$	$f[x_i;x_{i+3}]$	$f[x_i;x_{i+4}]$
0	1				
		4			
2	9		4,6667		
		18		3,3333	
3	27		18		1,7333
		54		12	
4	81		54		
		162			
5	243				

$$\Rightarrow P_{N4}(x) = 1 + 4x + 4,6667\, x(x-2) + 3,3333\, x(x-2)(x-3) +$$
$$+ 1,7333\, x(x-2)(x-3)(x-4)$$

El polinomio elegido $\underline{\text{NO}}$ es único → podría haberse calculado con otro orden de nodos, o bien quitando el último término. En este caso, se utilizará para el cálculo del error.

b) $\boxed{f(1) \simeq P_{N3}(1) = 6,9999}$ RTA → $f(0) < P_{N3}(1) < f(2)$

1 < 6,999 < 9

$\boxed{\varepsilon_{P_{N3}(1)} = |P_{N4}(1) - P_{N3}(1)| = 10,3998}$ RTA

(es altísimo, quizás NR no sea lo mejor o yo luego en error de cuentas)

4. Se observa que ciertos datos medidos tienen un comportamiento aproximadamente parabólico en un gráfico $x - y$.

(a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para determinar una ecuación que ajuste los datos. Los coeficientes del modelo que propone, ¿minimizan el error cuadrático total?

(b) Estime el valor de y para $x_0 = 1.8$

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	7.105	7.030	6.575	6.070	0.880

a) ajustando los datos según un modelo polinomial cuadrático, resuelvo por CM: $A A^T \bar{x} = A^T b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,5^2 \\ 1 & 1,0 & 1,0^2 \\ 1 & 1,5 & 1,5^2 \\ 1 & 2,0 & 2,0^2 \\ 1 & 4,0 & 4,0^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7,105 \\ 7,030 \\ 6,575 \\ 6,070 \\ 0,880 \end{pmatrix}$$

$n = 5$

$\sum x_i = 9$ $\qquad \sum y_i = 27,66$

$\sum x_i^2 = 23,5$ $\qquad \sum x_i y_i = 36,105$

$\sum x_i^3 = 76,5$ $\qquad \sum x_i^2 y_i = 61,96$

$\sum x_i^4 = 278,13$

luego, el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 23,5 \\ 9 & 23,5 & 76,5 \\ 23,5 & 76,5 & 278,13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,66 \\ 36,105 \\ 61,96 \end{pmatrix}$$

resolviendo con calculadora:

$a_0 = 6,9341$

$a_1 = 0,60030$

$a_2 = -0,52822$

finalmente: $\boxed{\tilde{y}(x) = 6,9341 + 0,6003x - 0,52822x^2}$ RTA

los coeficientes no minimizan el error cuadrático total pues no sabemos si el modelo es el que mejor ajusta los datos.

b) $\boxed{y(1,8) \simeq \tilde{y}(1,8) = 6,3032}$ RTA

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -49 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hallar x resolviendo el sistema mediante descomposición LU sin pivoteo parcial (sin intercambiar filas). Escriba todos los pasos intermedios. ¿Es exacto el resultado?

1°) $f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$, $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = -3$

$f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1$, $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 0$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2°) $f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2$, $m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = -1$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

Además:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y resuelvo. $L\bar{y} = b$, $U\bar{x} = y$

$$L\bar{y} = b \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$U\bar{x} = y \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}}$$ RTA

El resultado es exacto porque no hizo falta utilizar números racionales para el cálculo. En otro caso tendríamos errores de truncamiento y/o redondeo.