finales resueltos:

07.12.16
03.07.19
26.07.17
19.07.17
20.02.20
09.09.20
18.12.19
16.09.20
13.02.19

faltan

23.07.14 → es de Tarela   23.09.20
23.12.15 Hacer: 1;4;5
08.07.17 Hacer: 2;5
18.07.12 → Tarela
28.02.18 → no hace falta
22.02.12 → ver demostración
18.12.13 → no hace falta
30.07.14 → Tarela; ver

7.12.16

1

6 1. Determinar el punto de abscisa y ordenada positivas que resuelve el sistema: $\begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ -6x^2 + 33y^2 = 9 \end{cases}$ tomando como valor inicial el vector $(1.8\ 0.9)^t$ utilizando dos iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales. Trabajar al menos con dos decimales y redondeo. Graficar aproximadamente las dos curvas.

tema: sistemas no lineales: Newton-Raphson.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 6x^2 - 10y^2 - 14 \\ f_2(x,y) = -6x^2 + 33y^2 - 9 \end{cases} \rightarrow \text{sistema: } \begin{cases} 6x^2 - 10y^2 - 14 = 0 \\ -6x^2 + 33y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Newton-Raphson n-dim: $G(\bar{x}) = \bar{x} - A^{-1}(\bar{x})\, F(\bar{x})$

A es la matriz jacobiana:
(A debe ser no singular si quiero asegurar cv cuadrática)

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x & -20y \\ -12x & 66y \end{bmatrix} = A(\bar{x})$$

$\det(A) = 12 \cdot 66\, xy - 12 \cdot 20\, xy = xy \cdot 12 \cdot 46 \rightarrow 0$ si $x = 0 \vee y = 0$

$\rightarrow$ como pide x e y positivas $\Rightarrow$ todo bien ; $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$

$G(x) = x - J^{-1}(\bar{x}) F(\bar{x})$

$x(k) = x(k-1) - J^{-1}(x)_{k-1}\, F(\bar{x})_{k-1}$

$J(k-1)\, x(k) = J(k-1)\, x(k-1) - F(k-1)$

$J(k-1) \cdot \underbrace{(x(k) - x(k-1))}_{y(k-1)} = -F(x(k-1))$

sistema:

$$\begin{cases} J(k-1)\, y(k-1) = -F(x(k-1)) \\ x(k) = x(k-1) + y(k-1) \end{cases}$$

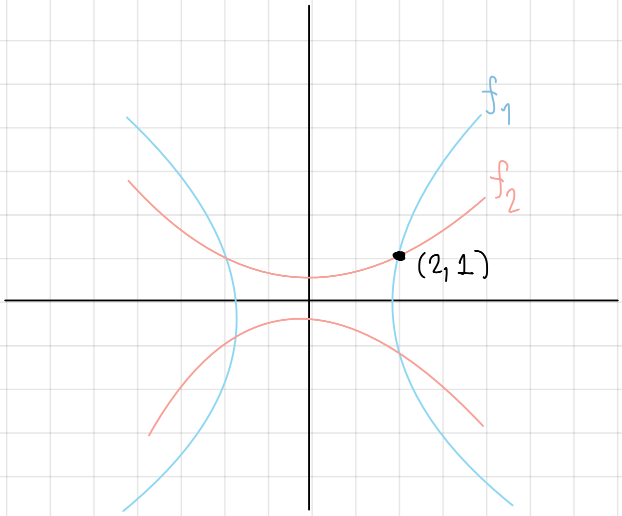
iteración 1: $J(x_0) \cdot y_0 = -F(x_0)$ $\quad \begin{bmatrix} 21{,}6 & -18 \\ -21{,}6 & 59{,}4 \end{bmatrix} y_0 = -\begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_0) \\ f_2(\bar{x}_0) \end{bmatrix}$

$y_0 = \begin{bmatrix} 0.211 \\ 0.106 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_0 + y_0 = \begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.211 \\ 0.106 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}011 \\ 1{,}006 \end{bmatrix}$

iteración 2: $\begin{bmatrix} 24{,}132 & -20{,}12 \\ -24{,}132 & 66{,}396 \end{bmatrix} y_1 = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_1) \\ f_2(\bar{x}_1) \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} -0{,}011 \\ -0{,}006 \end{bmatrix}$

$\bar{x}_2 = \bar{y}_1 + \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

hipérbolas: $\begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = 14 \\ 33y^2 - 6x^2 = 9 \end{cases}$



(2)

2. B a) Algunos analistas opinan que la población mundial se ajusta, desde 1960 (t en 0 equivale a 1960) a la función: $P(t) = \frac{36000}{1+ae^{-bt}}$. Se midieron los siguientes datos para estimar los valores de a y b:

Año	0	10	20	50
Cantidad x10^6	3000	3638	4395	7492

Estimar por cuadrados mínimos los valores de a y b.

B b) Calcular la población en 2012. ¿Cuándo se alcanzarán los 12000 millones de habitantes?

tema: cuadrados mínimos

$$P(t) = \frac{36000}{1+ae^{-bt}} \Rightarrow \cancel{1+}\, ae^{-bt} = \underbrace{\frac{36000}{P(t)} - 1}_{y(t)}$$

t	0	10	20	50	
$P(t)$	3000	3638	4395	7492	$\times 10^6$
$y(t)$	11	8,9	7,19	3,81	
$\ln(y)$	2,39	2,19	1,97	1,34	

$$ae^{-bt} = y(t)$$

$$\underbrace{\ln(a)}_{\alpha} \underbrace{-b}_{\beta}t = \ln(y(t))$$

planteo el sistema $Ax = b$ donde $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ $\quad \alpha = \ln(a)$, $\beta = -b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \\ 1 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,39 \\ 2,19 \\ 1,97 \\ 1,34 \end{bmatrix}$$

C.M: $A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 80 \\ 80 & 3000 \end{bmatrix} \Rightarrow A^TA\,x = A^Tb \qquad A^Tb = \begin{bmatrix} 7,89 \\ 128,3 \end{bmatrix}$

resuelvo e/x: $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,39 \\ -0,021 \end{bmatrix}$ $\qquad a = e^{\alpha} = 10,9$, $\quad b = -\beta = 0,021$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{36000}{1+10,9e^{-0,021t}}$$

(b) $t = 2012 - 1960 = 52 \Rightarrow P(52) = 7730 \times 10^6$

$t \,/\, P(t) = 12000 \Rightarrow t = 80,7$

③ a) Suponer que $\bar{x}$ es una aproximación a la solución del sistema $Ax = b$, que A es una matriz no singular y que r es el vector residual de $\bar{x}$. Demostrar que:

$\|x - \bar{x}\| \leq \|r\| \|A^{-1}\|$

$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$ $\quad b \neq 0$ y $r \neq 0$

b) Dado el sistema: $\begin{cases} 3.9x_1 + 1.6x_2 = 7.1 \\ 6.8x_1 + 2.9x_2 = 12.6 \end{cases}$ Que tiene como solución única el vector $(1\ 2)^t$ tomar como aproximación $\bar{x} = (0.98\ 1.98)^t$ y aritmética de tres dígitos, estimar el número de condición de la matriz A. ¿La matriz está bien condicionada? Justificar la respuesta.

A es no singular; r vector residuo

A condicionamiento

$r = A\tilde{x} - b \Rightarrow \bar{r} = A\tilde{x} - Ax = A(\bar{x} - x)$

multiplico A^{-1} ambos lados $A^{-1} r = \underbrace{A^{-1} A}_{I} (\tilde{x} - x)$

tomo modulo: $\|A^{-1} \cdot r\| = \|\bar{x} - x\|$

$\Rightarrow \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|r\|}_{\text{chequear material}} \geq \|\bar{x} - x\|$

$Ax = b$

$\|A \cdot x\| = \|b\| \Rightarrow \|A\| \|x\| \geq \|b\|$

$$\frac{1}{\|A\| \|x\|} \leq \frac{1}{\|b\|}$$

$$\frac{1}{\|A\| \|x\|} \cdot \|\tilde{x} - x\| \leq \frac{1}{\|b\|} \cdot \|\tilde{x} - x\| \leq \frac{1}{\|b\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|r\|}{\|b\|} \cdot \|A^{-1}\| \|A\|$$

ⓑ $\begin{cases} 3{,}9x_1 + 1{,}6x_2 = 7{,}1 \\ 6{,}8x_1 + 2{,}9x_2 = 12{,}6 \end{cases}$ $\quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0{,}98 \\ 1{,}98 \end{bmatrix}$

aritmética de 3 dígitos $\Rightarrow t = 3$

$Ax = b \quad \begin{bmatrix} 3{,}9 & 1{,}6 \\ 6{,}8 & 2{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}1 \\ 12{,}6 \end{bmatrix}$ $\quad r = b - A\tilde{x}$

$r = Ax - A\tilde{x} = A\underbrace{(x - \tilde{x})}_{\tilde{y}}$

$A\tilde{y} = r \quad$ y $\quad \tilde{x} + \tilde{y} = x$

$$K(A) = \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} \cdot 10^t$$

$$r = \begin{bmatrix} 7,1 \\ 12,6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,9 & 1,6 \\ 6,8 & 2,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,98 \\ 1,98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,11 \\ 0,194 \end{bmatrix}$$

y $r = A\tilde{y} \Rightarrow \tilde{y} = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{bmatrix}$ y $\tilde{y} = x - \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.98 \\ 1,98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{bmatrix}$

(v) $\kappa(a) = \dfrac{0,02}{1,98} \cdot 10^3 = 10,10$

$\kappa(a)$ está bien cond. si $\kappa(a) \sim 1 \Rightarrow$ no está bien condicionada

(4)

a) Demostrar la propiedad que permite obtener una cota del número de iteraciones que se requieren para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^{-T} de la raíz de $f \in C[a,b]$ usando el método de la bisección.

b) Con lo resuelto en a) estimar el número de iteraciones que se requieren para hallar la solución de: $x^3 sen(x) - x sen(x) - sen(x) = 0$ en el intervalo $[0.8, 1.9]$ con un error menor a 10^{-3}. Hallar una aproximación de dicha raiz usando 3 iteraciones del método de la bisección, usar al menos dos decimales y redondeo.

bisección

para $\forall\, n \geq 1$ tengo $b_n - a_n = \underbrace{\dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot (b-a)}$

la distancia de la it i es $\frac{1}{2}$ de la $i-1$

$b_i - a_i = \frac{1}{2}(b_{i-1} - a_{i-1})$

$b_i - a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(b_{i-2} - a_{i-2})\right) \ldots b_n - a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot (b-a)$

$\Rightarrow$ la dist entre p_n y p será menor a $\frac{1}{2}(b_n - a_n)$ pq $p \in (a_n; b_n)$

$\Rightarrow |p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \dfrac{b-a}{2^n}$ $\Rightarrow |p_n - p| \leq \dfrac{b-a}{2^n} < \underbrace{\varepsilon}_{10^{-T}} \Rightarrow \dfrac{b-a}{2^n} \leq 10^{-T}$

$\dfrac{b-a}{10^{-T}} \leq 2^n$

$$\boxed{n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{10^{-T}}\right)}$$

revisar esto, es $\geq$

(b) $n \leq \log_2\left(\dfrac{1,1}{10^{-3}}\right) = 10,1$

$f(x) = x^3 \sin(x) - x\sin(x) - \sin(x)$

$\left.\begin{array}{l} f(0.8) = -0,924 \\ f(1.9) = 3,746 \end{array}\right\} \Rightarrow$ hay cambio de signo ✓

a	b	p	
⊖ 0.8	1.9 ⊕	1,35 ⊕	1
⊖ 0.8	1.35 ⊕	⊖ 1.075	2
⊖ 1,075	1,35 ⊕	1,2125 ⊖	3

5

5. Si la velocidad de un fluido está descrita por $V(x,y,z) = (x^2, 2xy + x, z^2)$. Determinar, usando la regla de los trapecios compuesta con $N = 6$ la circulación a lo largo de la curva C. Sabiendo que la curva C es la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas, en el plano $z = 0$. Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos dos decimales y redondeo. ($F = \int_a^b V(\sigma(t))\sigma'(t)dt$, $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 / \sigma(t) = (cos(t), sen(t), 0)$)

tema: integración
regla de los trapecios

$N = 6$

$\pi \approx 3$

$V(x,y,z) = (x^2, \ 2xy + x, \ z^2)$

$N = 6$; curva C : • circunf unitaria
centrada en $x=0, y=0$
• sobre el plano $z = 0$

$N = 6 \Rightarrow$ el paso es $h = \dfrac{b-a}{N} \simeq \dfrac{6-0}{6} = 1$

$$\int_a^b V(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt = \int_a^b (\cos^2(t), \ 2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t) + \cos(t), \ 0)\cdot(-\sin(t), \cos(t))\,dt$$

$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$

$$= \int_a^b (-\cos^2(t)\cdot\sin(t) + 2\cos^2(t)\cdot\sin(t) + \cos^2(t))\,dt$$

$$= \int_0^6 \underbrace{(\cos^2(t)\cdot\sin(t) + \cos^2(t))}_{f(t)}\,dt \simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right]$$

división de intervalos $= \underset{1}{[\overset{x_0}{0}, \overset{x_1}{1}]} ; \underset{2}{[\overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{2}]} ; \underset{3}{[\overset{x_2}{2}, \overset{x_3}{3}]} ; \underset{4}{[\overset{x_3}{3}, \overset{x_4}{4}]} ; \underset{5}{[\overset{x_4}{4}, \overset{x_5}{5}]} ; \underset{6}{[\overset{x_5}{5} ; \overset{x_6}{6}]}$

$f(x_0) = 1$; $f(x_1) = 0{,}5375$; $f(x_2) = 0{,}3307$; $f(x_3) = 1{,}1135$
$f(x_4) = 0{,}1095$; $f(x_5) = 0{,}0033$; $f(6) = 0{,}6643$

$\simeq \dfrac{h}{2}\left(1 + 0.6643 + 2\cdot(2{,}0938)\right) = 2{,}86$

¿está bien?

03.07.19

1. a) Hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la circunferencia $x^2 - 2x + y^2 = 0$ y la hipérbola $xy = 1$. Utilizar tres iteraciones del método de *Newton* para sistemas no lineales. Usar como semilla $x^{(0)} = (1.9 \;\; 0.4)^t$. Trabajar con al menos tres decimales y redondeo.

b) Graficar ambas curvas y la solución obtenida.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ f_2(x,y) = xy - 1 = 0 \end{cases} \qquad F(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$$

Newton-Rapson no lineal

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-2 & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

$$x(k) = x(k-1) - J^{-1}(x(k-1))\,F(x_{k-1})$$

$$J(x_{k-1})\,(x(k) - x(k-1)) = -F(x(k-1))$$

$$\begin{cases} J(x_{k-1})\,y_{k-1} = -F(x_{k-1}) \\ x(k) = x(k-1) + y(k-1) \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

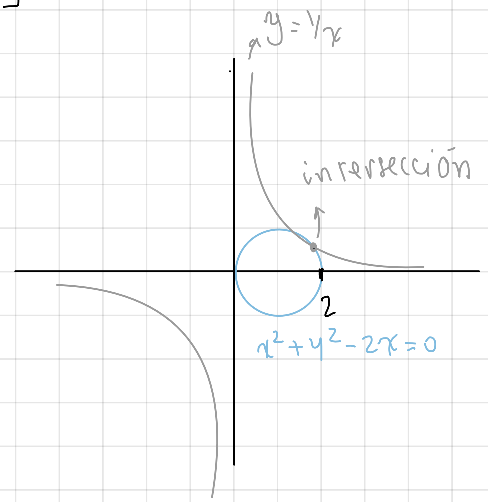
iteración 1: $J(1{,}9 \,;\, 0.4)\,y_0 = -F(1{,}9 \,;\, 0{,}4)$

$$y_0 = \begin{bmatrix} -0.0435 \\ 0.13548 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_0 + y_0 = \begin{bmatrix} 1{,}8564 \\ 0{,}53548 \end{bmatrix}$$

iteración 2: $y_1 = \begin{bmatrix} -0{,}013935 \\ 0{,}006039 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1{,}8425 \\ 5{,}4152 \end{bmatrix}$

iteración 3: $y_2 = \begin{bmatrix} -0{,}00247 \\ -0{,}01695 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 1{,}8401 \\ 0{,}5432 \end{bmatrix}$

b) $y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad x^2 - 2x + y^2 = 0$



2

2. En un contenedor se transportan refrigeradores y cocinas industriales. Cada cocina pesa 1 tonelada y cada refrigerador 2 toneladas. Por otro lado una cocina ocupa $1.1m^3$ y cada refrigerador $2m^3$. En total entre cocinas y refrigeradores se registró un peso de 10 toneladas, ocupando un espacio de $10.4m^3$.

a) Obtener, usando tres iteraciones del método de Gauss-Seidel, una aproximación de la cantidad de cocinas y refrigeradores que se transportaron. Trabajar con aritmética de tres dígitos.

b) Indicar si el sistema está bien condicionado.

tema: sistemas lineales
Gauss-Seidel

a) x = # de cocinas
y = # de refris

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y = 10 \\ 1{,}1\, x + 2 \cdot y = 10{,}4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10{,}4 \end{bmatrix}$$

no es EDD A $\Rightarrow$ no cv para cualquier semilla

$$x = 10 - 2y$$
$$y = \frac{10{,}4 - 1{,}1x}{2} = 5{,}2 - 0{,}55x$$

uso la iteración anterior

$$\Rightarrow x(k) = 10 - 2\, y(k-1)$$
$$y(k) = 5{,}2 - 0{,}55\, x(k)$$

como ya calculé $x^{(k)}$ uso $x(k)$ en vez de $x(k-1)$

semilla $x_0 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.25 \end{bmatrix}$

it 1
$x(1) = 3{,}5$
$y(1) = 3{,}825$

it 2
$x(2) = 2{,}35$
$y(2) = 3{,}27$

it 3
$x(3) = 3{,}46$
$y(3) = 3{,}297$

respuesta $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

buscar: aritmética de 3 dígitos

b) $$\kappa(a) \geq \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} \cdot 10^t \quad = \cancel{3}$$

$$r = A\tilde{x} - b = \begin{bmatrix} 0{,}054 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A\tilde{y} = r \Rightarrow \tilde{y} = \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ -0{,}297 \end{bmatrix}$$

$\|\tilde{y}\|_\infty = 0{,}54$; $\|\tilde{x}\|_\infty = 3{,}46$

$$\kappa(a) \geq \frac{0.54}{3{,}46} \cdot 10^3 = 156 \gg 1 \Rightarrow \text{mal condicionada}$$

3. Suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$, inicialmente con 25 individuos, satisface la ecuación logística;

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = \underbrace{0.0225P(t) - 0.0003P(t)^2}_{f(t,y)} \\ P(0) = 25 \quad \text{el tiempo está medido en meses} \end{cases}$$

B a) Utilizar tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio para aproximar la solución en 6 meses. Trabajar al menos con tres cifras decimales y redondeo.

M b) ¿Qué porcentaje de la población se incrementó en ese tiempo?

tema: ecuaciones diferenciales
Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(t_i, y_i, h) \cdot h$$

$$\varphi(t_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots a_n k_n$$

$k_1 = f(t_i, y_i)$; $k_2 = f(t_i + p_1 h ; y_i + q_{11} \cdot k_1 \cdot h)$

$\Rightarrow$ metodo del punto medio $\Rightarrow a_2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i + h/2, y_i + \frac{hk_1}{2}) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i) = 0.0225\, y(t) - 0.0003\, y^2(t)$$

$$k_2 = 0.0225(y_i + \frac{h}{2}k_1) - 0.0003\,(y_i + \frac{h}{2}k_1)^2(t)$$

6 meses
3 iteraciones $\Big\}\ h = \frac{6}{3} = 2$

iteración 1: $k_1 = f(0,25) = 0.375$ $\quad y_1 = 25 + 2 \cdot k_2 = 25{,}756$
$k_2 = 0.37777$

iteración 2: $k_1 = 0.3805$ $\quad y_2 = y_1 + 2k_2 = 26{,}522$
$k_2 = 0.3831$

iteración 3: $k_1 = 0.3857$ $\quad y_3 = y_2 + 2k_2 = 27{,}298$ $\Rightarrow$ 27 venados.
$k_2 = 0.3882$

b) 25 $\rightarrow$ 100%
27 $\rightarrow x = 108$ %. $\Big\} \rightarrow$ se incremento en un 8%. $\Big\}$ ¿esto es así?

4

4. El balance de calor en estado estacionario se representa como: $\frac{d^2T}{dx^2} + 0.01(T_a - T) = 0$, para una barra de longitud L. Sabiendo que $T_a = 20$.

a) Desarrolle el método de diferencias finitas para un problema de valores en la frontera.

b) Sabiendo que la barra tiene una longitud de $10m$ con $T(0) = 40$ y $T(L) = 200$. Usar lo desarrollado en a) para evaluar ~~el calor~~ la temperatura en los puntos intermedios de la barra con $N = 5$.

tema: ecs. diferenciales
problema de valores frontera
+

$$\begin{cases} T'' - 0.01T = -0.01 \cdot 20 \\ T(0) = 40 \\ T(L) = 200 \end{cases}$$

$L = 10$; $N = 5 \Rightarrow h = 2m$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} \quad ; \quad y'(x) \simeq \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

puntos de la malla: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 6$; $x_4 = 8$;

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 0.01\, y_i = -0.2$$

$$\frac{1}{4} y_{i+1} - \left(0.01 + \frac{2}{4}\right) y_i + \frac{1}{4} y_{i-1} = -0.2$$

$\Rightarrow$ sistema de ecuaciones $y_0 = 40$; $y_5 = 200$

$$\begin{cases} 0.25\, y_2 - 0.501\, y_1 + 0.25\, y_0 = -0.2 \\ 0.25\, y_3 - 0.501\, y_2 + 0.25\, y_1 = -0.2 \\ 0.25\, y_4 - 0.501\, y_3 + 0.25\, y_2 = -0.2 \\ 0.25\, y_5 - 0.501\, y_4 + 0.25\, y_3 = -0.2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0.25\, y_2 - 0.501\, y_1 &= -0.2 - 0.25(40) = -9.8 \\ 0.25\, y_3 - 0.501\, y_2 + 0.25\, y_1 &= -0.2 \\ 0.25\, y_4 - 0.501\, y_3 + 0.25\, y_2 &= -0.2 \\ -0.501\, y_4 + 0.25\, y_3 &= -0.2 - 0.25(200) = -49.8 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & -0.501 \\ 0 & 0.25 & -0.501 & 0.25 \\ 0.25 & -0.501 & 0.25 & 0 \\ -0.501 & 0.25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.8 \\ -0.2 \\ -0.2 \\ -49.8 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} T(8) &= 167{,}9 \\ T(6) &= 135{,}3 \\ T(4) &= 103{,}4 \\ T(2) &= 71{,}17 \end{aligned}\right\}$$ error de cuentas

5

5. Dada la siguiente tabla correspondiente a valores medidos de una determinada función calcular el valor aproximado de la derivada en $x = 1$ usando el método de *extrapolación de Richardson*. ($R^{(k)}(h) = \frac{4^k R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1}$, $R^{(0)}(h) = R(h)$)

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x)$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891

tema: diferenciación
extrapolación Richardson

$$R(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

tengo 4 muestras entre 0 y 1: paso mínimo $\underbrace{h = 1/4}$

$\Rightarrow$ paso inicial $h = 1$ ↳ orden $k = 2$

$$R(h) = \frac{f(1+1) - f(1-1)}{2} = \frac{7.3891 - 1}{2} = 3,19455$$

$$R(h/2) = \frac{f(1+0.5) - f(1-0.5)}{2 \cdot 1/2} = \frac{4.4817 - 1.6487}{1} = 2.833$$

$$R(h/4) = \frac{f(1+0.25) - f(1-0.25)}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{3.4903 - 2.1170}{0.5} = 2,7466$$

$$R^{(1)}(h) = \frac{4 \cdot R^{(0)}(h/2) - R^{(0)}(h)}{4-1} = \frac{4 \cdot 2.833 - 3.19455}{3} = 2,7125$$

$$R^{(1)}(h/2) = \frac{4 \cdot R^{(0)}(h/4) - R^{(0)}(h/2)}{3} = \frac{4 \cdot 2,7466 - 2,833}{3} = 2,7178$$

$$R^{(2)}(h) = \frac{4^2 \cdot R^{(1)}(h/2) - R^{(1)}(h)}{4^2 - 1} = \frac{16 \cdot (2,7178) - 2,7125}{15} = 2,7182$$

$\Rightarrow \boxed{f'(1) = 2,7182}$

26.07.17

1 a) Suponer que $\tilde{x}$ es una aproximación a la solución del sistema $Ax = b$, que A es una matriz no singular y que r es el vector residual de $\tilde{x}$. Demostrar que:

$\|x - \tilde{x}\| \leq \|r\| \|A^{-1}\|$

$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}$ $\quad b \neq 0$ y $r \neq 0$

b) Dado el sistema: $\begin{cases} 39x_1 + 16x_2 = 71 \\ 0.68x_1 + 0.29x_2 = 1.26 \end{cases}$ Tomar como aproximación $\tilde{x} = (0.98\ 1.98)^t$ y aritmética de tres dígitos, para estimar el número de condición de la matriz A. Realizar un paso de refinamiento iterativo para mejorar la aproximación.

→ al reves $r = b - A\tilde{x}$

(a) $r = A\tilde{x} - b = A\tilde{x} - Ax = A(\tilde{x} - x)$

multiplica a izq por $\underbrace{A^{-1}}_{\text{A es no singular}}$: $A^{-1} r = \underbrace{A^{-1}A}_{I} (\tilde{x} - x)$

tomo modulo: $\|A^{-1} r\| = \|\tilde{x} - x\|$

$\|A^{-1}\| . \|r\| \geq \|\tilde{x} - x\|$

multiplico a ambos lados por $\|Ax\|$

$\|Ax\| \|A^{-1}\| . \|r\| \geq \|\underbrace{Ax}_{b}\| \|\tilde{x} - x\|$

$\|A\| \|x\| \|A^{-1}\| . \|r\| \geq \|Ax\| \|A^{-1}\| . \|r\| \geq \|b\| \|\tilde{x} - x\|$

$\Rightarrow \|A\| \|A^{-1}\| . \frac{\|r\|}{\|b\|} \geq \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$

(b) condición de A: $k(a) \geq \frac{\|y\|}{\|\tilde{x}\|} 10^t$

$b - A\tilde{x} = r \Rightarrow \underbrace{A(x - \tilde{x})}_{\tilde{y}} = r \Rightarrow A\tilde{y} = r = \begin{bmatrix} 71 \\ 1.26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 39 & 16 \\ 0.68 & 0.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.98 \\ 1.98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.0194 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A\tilde{y} : \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.0194 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{y} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ $\quad \|y_\infty\| = 0.02$

$\|\tilde{x}\|_\infty = 1.98$

$\Rightarrow \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty} . 10^t = \frac{0.02}{1.98} . 10^3 = 10 \gg 1$ no está bien cond.

aritmética de 3 dígitos

refinamiento: $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + \tilde{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 1.98 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

↳ buscar

2. La ley de radiación de *Stefan* establece que la razón de cambio en la temperatura de un cuerpo a $T(t)$ grados en un medio a $M(t)$ grados es proporcional a $M^4 - T^4$. Sea $K = 40^{-4}$ la constante de proporcionalidad. Suponer la temperatura del medio constante, es decir $M(t) = 70°F$.

a) Si $T(0) = 100°F$, plantear el problema como un problema de valores iniciales para $0 \leq t \leq 2$. Mostrar que tiene solución única.

b) Usar el método de Runge Kutta del punto medio para aproximar la temperatura en el instante $t = 0.2$, usar $h = 0.1$.

$$\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4) = 40^{-4}(70°F - T^4)$$

(a) $T(0) = 100°F$ — Condición de Lipschitz

condición de Lipschitz:

$f(t,y) = \underbrace{kM^4}_{a} - ky^4 = a - ky^4$

↳ f es continua

↳ el conjunto es convexo ⇒ basta con demostrar

hmm?? ↙ $\left[-4ky^3 = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \leftarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| \leq L \ \forall (t,y) \in D \right.$

planteo:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$$|\cancel{kM^4} - y_1^4 - \cancel{kM^4} + y_2^4| \leq L|y_1 - y_2|$$

$$|y_2^4 - y_1^4|$$

$$|(y_2^2 - y_1^2)(y_2^2 + y_1^2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$$|(y_2 - y_1)(y_1 + y_2)(y_2^2 + y_1^2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$$|\cancel{y_2 - y_1}| |(y_1 + y_2)(y_2^2 + y_1^2)| \leq L|\cancel{y_1 - y_2}|$$

tomo $y = \text{máx}(y_1, y_2)$

$$\ldots \leq |(y + y)(y^2 + y^2)| \leq L$$

$$|2y(2y^2)| \leq L$$

$$|4y^3| \leq L$$

como y es continua en el intervalo $0 < t < 2$ la función está acotada

$\Rightarrow$ tomo $\max(|M|)|_{0<t<2}$?? what ?? } chequear...

$\Rightarrow$ tiene solución única

tema: ecs. diferenciales
runge kutta de punto medio

(b) $\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h k_1}{2}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + k_2 h \\ y(\underset{0}{a}) = y_0 = 100 \end{cases}$

$k_1 = kM^4 - k y_i^4 \qquad k_2 = kM^4 - \left(y_i + \frac{hk_1}{2}\right)^4$

$t_0 = 0$; $t_1 = 0.1$; $t_2 = 0.2$

$k_1(0) = kM^4 - k y_0^4 = k(70^4 - 100^4) = 40^{-4}(70^4 - 100^4) = -29{,}684$

$k_2(0) = 40^{-4}\left(70^4 - \left(100 + 0.1 \cdot \frac{(-29{,}684)}{2}\right)^4\right) = -27{,}416$

$y_1 = y_0 + k_2(0) \cdot h = 100 + (-27{,}416) \cdot 0.1 = 97{,}258$

$k_1(1) = 40^{-4}(70^4 - 97{,}258^4) = -25{,}572$

$k_2(1) = 40^{-4}\left(70^4 - \left(97{,}258 + 0.1\frac{(-25{,}572)}{2}\right)^4\right) = -23{,}770$

$y_2 = y_1 + k_2(1) \cdot h = 97{,}258 + (-23{,}770) \cdot 0.1 = 94{,}881$

$\boxed{T(t=0{,}2) = 94{,}881\ °F}$

3. En el estudio de un circuito eléctrico consistente en una resistencia, un condensador, un inductor y una fuerza electromotriz obtenemos un problema con valores iniciales de la forma: $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dE(t)}{dt}$. Donde L es la inductancia en *henrios*, R es la resistencia en *ohms*, C es la capacidad en *faradios*, $E(t)$ es la fuerza electromotriz en *voltios*, e I es la corriente en *amperios*. Determinar la corriente en el instante $t = 0.3$ si la corriente inicialmente es nula lo mismo que su derivada. Sabiendo que: $L = 1H$, $R = 1\Omega$, $C = 0.5F$ y $E(t) = t^2$. Usar el método de Euler para aproximar el valor pedido, calcular el h para realizar tres iteraciones. Usar al menos dos decimales y redondeo.

tema: ecs. diferenciales
método de Euler

$$E(t) = t^2 \Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = 2t$$

$$L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + R\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{I}{C} = 2t$$

condiciones iniciales
$I(0)=0$; $I'(0)=0$

$t_0 = 0$; $t_f = 0.3$ $N = 3$

$$\Rightarrow h = \frac{0.3 - 0}{3} = 0.1$$

expreso la ecuación como un sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial I}{\partial t} = U & I(0)=0 \\ L\frac{\partial U}{\partial t} + RU + \frac{I}{C} = 2t \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{2t}{L} - \frac{I}{LC} - \frac{RU}{L} & U(0)=0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i_{k+1} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_k \\ u_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_k \\ f(t_k, i_k, u_k) \end{bmatrix} \cdot h$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad t = 0.1$$

$$\begin{bmatrix} i_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2.(0.1)/1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \end{bmatrix} \qquad t = 0.2$$

$$\begin{bmatrix} i_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0.02 \\ 2(0.2)/1 - 0 - 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.058 \end{bmatrix} \qquad t = 0.3$$

$$\Rightarrow I(t=0{,}3) = 0.002 \text{ A}$$

4) Determinar la intersección entre la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y la hipérbola $xy = \frac{1}{2}$ en el primer cuadrante tomando como valor inicial el vector $(1.94, 0.26)^t$. Utilizar dos iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales. Usar al menos cuatro decimales y redondeo.

tema: sistemas no lineales
metodo de Newton

sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 & f(x,y) = x^2/4 + y^2 - 1 \\ xy - 1/2 = 0 & g(x,y) = xy - 1/2 \end{cases}$$

Jacobiano:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{x}{2} & 2y \\ y & x \end{vmatrix}$$

$$x_{i+1} = x_i - J^{-1}(x_i)\, F(x_i)$$

$$\begin{cases} J(x_i)\,\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{y_i} = -F(x_i) \\ x_{i+1} = x_i + y_i \end{cases}$$

error de cuenta, falta un (-)

iteración 1: $J(x_0)(y_0) = -F(x_0)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1.94}{2} & 2\cdot(0{,}26) \\ (0{,}26) & 1{,}94 \end{bmatrix} y_0 = \begin{bmatrix} \frac{1.94^2}{4} + 0{,}26^2 - 1 \\ 1.94\cdot 0{,}26 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1{,}94 \\ 0{,}26 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = \begin{bmatrix} 0.0081 \\ 0.0018 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + y_0 = \begin{bmatrix} 1.9481 \\ 0.2612 \end{bmatrix}$$

iteración 2:

$$\begin{bmatrix} \frac{1.9481}{2} & 2\cdot(0{,}2612) \\ 0{,}2612 & 1{,}9481 \end{bmatrix} y_1 = \begin{bmatrix} 1.9481^2/2 + 0.2612^2 - 1 \\ 1.9481 \cdot 0{,}2612 - 1/2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0.0162 \\ 0.0023 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1{,}9643 \\ 0{,}2635 \end{bmatrix}$$

[ME COMÍ EL (-) EN LA ECUACIÓN] y error de cuentas

5. Si la velocidad de un fluido está descrita por $V(x,y,z) = (y^2, zx, z)$. Determinar, usando la regla de los trapecios compuesta con $N = 6$ la circulación a lo largo de la curva C. Sabiendo que la curva C es la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas, en el plano $z = 0$. Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos dos decimales y redondeo. ($F = \int_a^b V(\sigma(t))\sigma'(t)dt$, $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 / \sigma(t) = (cos(t), sen(t), 0)$)

tema: integración
regla de los trapecios

$$\int_a^b V(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$V(x,y,z) = (y^2, zx, z)$

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$\Rightarrow V(\sigma(t)) = (\sin^2 t, 0, 0)$

$V(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = -\sin^3 t$

$\Rightarrow$ la integral queda: $\displaystyle\int_0^{2\pi} -\sin^3(t)\, dt \underset{\pi \approx 3}{=} \int_0^6 -\sin^3(t)\, dt$

paso h: $\dfrac{b-a}{N} = \dfrac{6-0}{6} = 1$

regla de los trapecios: $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \frac{h}{2}\left[f(a) - f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right]$

$$\Rightarrow \int_0^6 -\sin^3(t)\, dt = \frac{1}{2}\left[-\sin^3(0) + \sin^3(6) + 2\sum_{k=1}^{N-1} -\sin^3(k)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + 0.0219 + 2 \cdot (-0{,}0352)\right] = -0{,}0243$$

19.07.17

① a) Demostrar la siguiente afirmación: sea $g \in C^{m+1}[a,b]$, tiene un cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$, existe un método de cv cuadrática, para hallar esta raíz.

b) Usar cuatro iteraciones del método hallado en a) p/hallar la raíz múltiple de $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$. Trabajar al menos con cuatro decimales y redondeo.

demostración; raíces

ⓐ

sea f con un cero de multiplicidad m en p, entonces f se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(x) = (x-p)^m \, q(x)$$

derivo m veces:

$$f'(x) = m \cdot (x-p)^{m-1} q(x) + (x-p)^m q'(x)$$

$$f''(x) = m(m-1)(x-p)^{m-2} q(x) + m(x-p)^{m-1} q'(x) + \left[(x-p)^m q'(x)\right]'$$

$$f^3(x) = m(m-1)(m-2)(x-p)^{m-3} q(x) + \dots$$

$$\vdots$$

$$f^m(x) = \underbrace{m!\,(x-p)^0 q(x)}_{\neq 0 \text{ en el } \lim_{x \to p}} + \dots$$

defino la función $\mu(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{(x-p)^m q(x)}{m(x-p)^{m-1} q(x) + (x-p)^m q'(x)}$

$$= \frac{(x-p)^m \qquad q(x)}{(x-p)^{m-1}\left(m \cdot q(x) + (x-p)\, q'(x)\right)}$$

$$\mu(x) = (x-p) \cdot \frac{q(x)}{m \cdot q(x) + (x-p)\, q'(x)}$$

p es un cero de $\mu(x)$ y es un 0 simple pues el otro termino no tiene un 0 en p

⇒ método de Neuton-Rapson a esta función modificada

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'}$$

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\frac{f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)\cdot f'(x)}{f'(x)^2 - f(x)\cdot f''(x)}$$ como f, f', f'' son continuas

y $u(x)$ tiene un 0 simple, se cumplen las condiciones de convergencia cuadrática del Newton-Rapson

(b) $\begin{cases} f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \\ f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \\ f''(x) = 12x^2 - 6x - 6 \end{cases}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\,f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)\cdot f''(x_k)}$$

$$= x_k - \frac{(x_k^4 - x_k^3 - 3x_k^2 + 5x_k - 2)(4x_k^3 - 3x_k^2 - 6x_k + 5)}{(4x_k^3 - 3x_k^3 - 6x_k + 5)^2 - (x_k^4 - x_k^3 - 3x_k^2 + 5x_k - 2)(12x_k^2 - 6x_k - 6)}$$

↓ hacer con semilla cercano a 1.

(2) Usar 3 iteraciones del método de Newton para sist. no lineales p/obtener una aprox. de la solución del sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$

En el primer cuadrante tomando como valor inicial el vector $(0.5\ \ 1.5)^t$. Realizar el gráfico aproximado.

tema: ecs. no lineales, Newton

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)\,F(x_k)$$

$$J(x_k)\underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{y_k} = -F(x_k)$$

$$F(x_k) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 3 \\ xy - 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J(x_k)\cdot y_k = -F(x_k) \\ x_{k+1} = y_k + x_k \end{cases}$$

$$J(x_k) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

iteración 1:

$$\begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \bar{y} = \begin{bmatrix} -(x_0^2 + y_0^2 - 3) \\ -(x_0 y_0 - 1) \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \bar{y} + x_0 = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 1.625 \end{bmatrix}$$

iteración 2:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \bar{y} = -\begin{bmatrix} (x_1^2 + y_1^2 - 3) \\ x_1 y_1 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y} = \begin{bmatrix} -0.0069 \\ -0.0069 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0.61806 \\ 1.61806 \end{bmatrix}$$

iteración 3 : $\tilde{y} = \begin{bmatrix} 2.157 \cdot 10^{-5} \\ 2.157 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0.6180 \\ 1.6180 \end{bmatrix}$

(3) se sabe que la ecs. dif. no lineal de segundo orden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\left(\frac{\pi}{4}\theta\right) = 0$$

es un modelo de movimiento de un péndulo simple de long. L. sabiendo que: $g = 9.8\ m/s^2$ y $L = 2m$. Aplicar el método de Euler en el intervalo $[0,2]$ para aproximar $\theta(0,3)$, sabiendo que $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = -1$ y $h = 0.1$. Usar toda la presición de su calculadora

- método de Euler: $y_{k+1} = y_k + h.f(t_k, y_k)$

sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu \quad : \quad \begin{cases} \frac{d\mu}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\left(\pi/4\,\theta\right) = f(t_k, \theta_k) \\ d\theta/dt = \mu = g(t_k, \theta_k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{k+1} = \mu_k + h\left(-\frac{g}{L}\sin(\pi/4\,\theta_k)\right) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + h\cdot\mu_k \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -1 + h\left(-\frac{g}{L}\sin\left(\pi/4 \cdot 0\right)\right) = -1 \\ \theta_1 = 0 + h\cdot(-1) = -0.1 \end{cases} \qquad t = 0.1$$

$$\begin{cases} \mu_2 = -1 + h\cdot\left(-g/L \sin\left(\pi/4 \cdot (-0.1)\right)\right) = -0,9616 \\ \theta_2 = -0.1 + h(-1) = -0.2 \end{cases} \qquad t = 0.2$$

$$\begin{cases} \mu_3 = -0.9616 + 0.1\left(-g/L \sin\left(\pi/4 \cdot (-0.2)\right)\right) = -0.88490215522 4 \\ \theta_3 = -0.2 + h(-0.9616) = -0,29615550 4309 \end{cases} \qquad t = 0.3$$

(4) El censo de una población P(t) de microtus arvalis, un ratón de campo, se refleja en la sig. tabla:

t(meses)	0	2	6	10	12
P(t)	2	5	20	109	300

a) Plantear un modelo que modele un crecimiento poblacional
b) estimar la pobl. t=9 y t=13, usando cuadrados mínimos. Usar al menos 2 decimales y redondeo. Indicar si se debe alertar a la comunidad sobre una epidemia. Justificar

cuadrados mínimos

Crecimiento poblacional:

$$P(t) = a e^{bt}$$

$$\underbrace{\ln(p)}_{y} = \underbrace{\ln(a)}_{\alpha} + \underbrace{b}_{\beta}t$$

t	P(t)	y
0	2	0.6931
2	5	1.6094
6	20	2.9957
10	109	4.6913
12	300	5.7038

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6931 \\ 1.6094 \\ 2.9957 \\ 4.6913 \\ 5.7038 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$(A^T A)\, x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 284 & 30 \\ 30 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136{,}552 \\ 15{,}6934 \end{bmatrix}$$

$\beta = 0.4076$

$\alpha = 0.6930 \Rightarrow a = e^{\alpha} = 1{,}9998$

$$\Rightarrow P(t) = 1{,}9998\, e^{0.4076\, t}$$

$P(9) = 78{,}376$

$P(13) = 400{,}198$ → no sé si se puede confiar tanto pq está fuera de rango

(5) Según la ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la dif. de temperatura entre la sust. y el aire. Sabemos que $T_{aire} = 30°C$ y la sustancia se enfría de 100°C a 70°C en 15 minutos $\Rightarrow k = -0.0373$

a) Plantear el problema anterior como PVI

b) estimar el tiempo necesario p/ que la sust. alcance una T° menor a 35°C, método de Runge-Kutta de punto medio con $h = 0.5$

Runge-Kutta de punto medio

(a) y = temperatura de una sustancia:

$$\frac{dy}{dt} = k(y - T_A)$$

$k_1 = f(t, y) = k(y - T_A)$: Runge-Kutta de punto medio

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot k_2 \Rightarrow k_1 = f\left(t + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_1}{2}\right)$$

↳ hacer las cuentas

$$y_{k+1} = y_k + h(a_1 k_1 + a_2 k_2)$$

↳ $a_1 = 0$; $a_2 = 1$ } R-K p. medio

20.02.20

(1)

1. Dada la siguiente tabla correspondiente a valores medidos de una determinada función calcular el valor aproximado de la derivada en $x = 1$ usando el método de *extrapolación de Richardson*. ($R^{(k)}(h) = \frac{4^k R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1}$, $R^{(0)}(h) = R(h)$)

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x)$	1.0000	1.0645	1.2840	1.7551	2.7183	4.7707	9.4877	21.3809	54.5982

hacer.

2

2. a) Hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la circunferencia $x^2 - 2x + y^2 = 0$ y la hipérbola $xy = 0.433$. Utilizar dos iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales. Usar como semilla $x^{(0)} = (0.49 \;\; 0.85)^t$. Trabajar con al menos cuatro decimales y redondeo.

b) Graficar aproximadamente ambas curvas y la solución obtenida.

Newton no lineal

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 \\ g(x,y) = xy - 0.433 \end{cases}$$

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)\,\bar{F}(x_k)$$

$$J(x_k)\,\underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{y_k} = -\bar{F}(x_k) \quad ; \quad x_{k+1} = x_k + y_k$$

$$J(x_k) = \begin{bmatrix} 2x_k - 2 & 2y_k \\ y_k & x_k \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{F}(x_k) = \begin{bmatrix} x_k^2 - 2x_k + y_k^2 \\ x_k y_k - 0.433 \end{bmatrix}$$

iteración 1:

$$J(x_0)\cdot y_0 = -F(x_0) \Rightarrow y_0 = 0.010 \; ; \; y_2 = 0.016$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + y_0 = \begin{bmatrix} 0.500039 \\ 0.86626 \end{bmatrix}$$

iteración 2:

$$J(x_1)\cdot y_1 = -F(x_1) \Rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^{-5} \\ -2{,}4 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

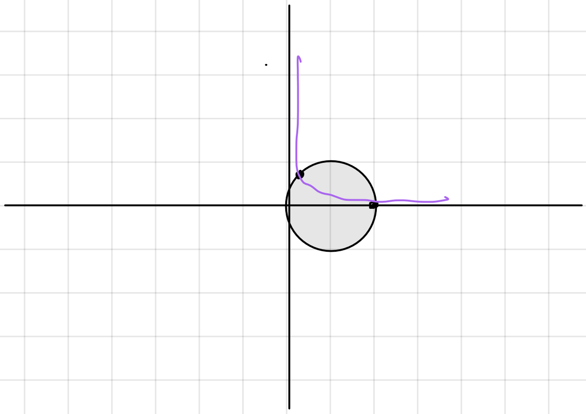
$$x_2 = x_1 + y_1 = \begin{bmatrix} 0.49999 \\ 0.86602 \end{bmatrix}$$

b)

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$xy = 0.433$$



3

3. a) Calcular el área encerrada bajo el gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$ cuando $x \in [-1, 1]$. Usar el método de Simpson $\frac{1}{3}$ con $N = 8$. Trabajar al menos con tres decimales y redondeo.

b) Indicar si el error cometido en la aproximación es menor que 10^{-2}. Justificar la respuesta.

Simpson 1/3

tema: integración

a)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left\{ f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{(N-2)/2} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{(N-2)/2} f(x_{2k}) \right\}$$

sub intervalos: $N = 8$

$[x_k ; x_{k+2}]$ $k = 0, \dots, N-2$:

$[x_0 ; x_2] = [-1 ; -1/2]$

$[x_2 ; x_4] = [-1/2 ; 0]$

$[x_4 ; x_6] = [0 ; 1/2]$

$[x_6 ; x_8] = [1/2 ; 1]$

de -1 a 1 8 puntos

$\hookrightarrow h = 1/4$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \simeq \frac{1/4}{3}\left\{ f(-1) + f(1) + 4\sum_{k=0}^{3} e^{-x_{2k+1}^2} + 2\sum_{k=1}^{3} e^{-x_{2k}^2} \right\}$$

$$\simeq \frac{1/4}{3}\left\{ 2\cdot 0.36788 + 4\left(2\cdot 0.56978 + 2\cdot 0.93941\right) + 2\left(1 + 2\cdot 0.7788\right)\right\}$$

$$\simeq \frac{1/4}{3}\left(17{,}9245\right) = 1{,}49371$$

b)

$$e^{-x^2} \rightarrow -2x e^{-x^2} \xrightarrow[f^2]{} -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$$

$$\xrightarrow[f^3]{} -8x^3 e^{-x^2} + 12x e^{-x^2}$$

$$\rightarrow 12 e^{-x^2} - 24x^2 e^{-x^2} + 16x^4 e^{-x^2} - 24x^{\cancel{2}} e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2}\left[16x^4 - 48x^2 + 12\right] \Big\} \; \text{max en } x = 0 \Rightarrow f^{iv}(0) = 12$$

$$|E_T| \leq h^4 \frac{(b-a)}{180} L = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{2}{180} \cdot 12 = 5{,}21 \cdot 10^{-4}$$

4

4. Los modelos *depredador-presa*, también conocidos como modelos *Lotka-Volterra* responden al sistema de ecuaciones diferenciales (en su forma mas simple):

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

a) Utilizar los valores de las constantes $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.8$ y $d = 0.3$, y las condiciones iniciales $x(0) = 2$ e $y(0) = 1$ para plantear el sistema anterior como un sistema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales.

b) Usar tres iteraciones del método de Euler para estimar $x(0.3)$ e $y(0.3)$.

ecs. diferenciales

metodo de Euler

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 1{,}2\,x(t) - 0.6\,x(t)\cdot y(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) = -0.8\,y(t) + 0.3\,x(t)\,y(t) \end{cases}$$

$x(0) = 2$; $y(0) = 1$

$$\begin{cases} f(t,x,y) = 1{,}2\,x - 0.6\,x\cdot y \\ g(t,x,y) = -0.8\,y + 0.3\,x\cdot y \\ x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

metodo de Euler:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + h\,f(t, x_k, y_k) \\ y_k + h\,g(t, x_k, y_k) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tres iteraciones: $[a, b] = [0, 0.3] \Rightarrow \frac{b-a}{N} = h = \frac{0.3}{3} = 0.1$

$t = 0.1$ $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0.1\,(1{,}2\cdot 2 - 0{,}6\cdot 2\cdot 1) \\ 1 + 0.1\,(-0{,}8\cdot 1 + 0{,}3\cdot 2\cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.12 \\ 0.98 \end{bmatrix}$

$t = 0{,}2$ $\quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}2497 \\ 0.9639 \end{bmatrix}$

$t = 0{,}3$ $\quad \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}3896 \\ 0{,}9519 \end{bmatrix}$

5

La *Ley de enfriamiento de Newton* está caracterizada por la ecuación diferencial: $\frac{dT(t)}{dt} = -K(T - T_a)$, donde T es la temperatura del objeto, T_a es la tempertura del ambiente y K es la constante de proporcionalidad. Esta ecuación es usada en criminalística para determinar la hora de muerte, en el instante $t = 0$ se descubre un cuerpo. En ese instante se toma su temperatura $T_0 = 29.5$°C, dos horas después la temperatura es de $T_2 = 23.5$°C, lo que permite determinar la constante $K = 0.49926$, mientras que la temperatura ambiente es de $T_a = 20$°C.

a) Con los datos anteriores plantear el PVI.

b) Usar el método de Runge Kuta del punto medio para determinar aproximadamente la hora de muerte. Se sabe que la temperatura del cuerpo era el valor normal: $T_c = 36$°C. Usar $h = 0.2$, o $h = -0.2$, de acuerdo a la temperatura que establezca como semilla. ($h = 0.2$ o $h = -0.2$ equivale a dos horas).

Runge-kutta punto medio

a)
$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = -0,49926\,(T-20) \\ T(0) = 29,5 \end{cases}$$

b) runge kutta del punto medio: $y_{k+1} = y_k + h\cdot(a_1k_1 + a_2k_2)$

$y_{k+1} = y_k + hk_2 \Leftarrow \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{matrix}$

$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{hk_1}{2}\right)$

$k_1 = f(t_k, y_k)$

debo usar $h=-0,2$ así voy "hacia atrás" en el tiempo

iter. 1:

$k_1(0) = f(0, y_0 = f(0, 29,5)) = -4,74297$

$k_2(0) = f\left(\frac{-0.2}{2},\ 29,5 + \frac{-0.2}{2}(-4,74297)\right) = -4,50617$

$y_1 = y_0 + (-0.2)(-4,50617) = 30,401$

iter 2:

$k_1(1) = f(-0,2\ ;\ 30,401) = -5,19292$

$k_2(1) = f\left(-0.2 - 0.2/2;\ 30,401 + \frac{(-0,2)}{2}\cdot(-5,19292)\right) = -5,45218$

$y_2 = y_1 + (-0.2)(-5,45218) = 31,49167$

iter 3:

$k_1(2) = f(0,4; 31,492) = -5,73733$

$k_2(0) = f\left(0,4 + \frac{0.2}{2};\ 31,388 + \frac{(-0,2)}{2}(-5,73733)\right) = -6,02377$

$y_3 = y_1 + (-0.2)(-6,02377) = 32,6964$

iter 4:

$k_1(3) = f(0{,}6\ ,\ 32{,}6964) = -6{,}338817$

$k_2(3) = f\left(0{,}6 + \frac{0.2}{2}\ ;\ 32{,}6964 + \frac{(-0.2)}{2}(-6{,}338817)\right) = -6{,}65529$

$y_4 = y_3 + (-0.2)(-6{,}65529) = 34{,}02748$

iter 5:

$k_1(4) = f(0{,}8\ ;\ 34{,}02748) = -7{,}00336$

$k_2(4) = f\left(0{,}8 + \frac{0.2}{2}\ ;\ 34{,}02748 + \frac{(-0.2)}{2}(-7{,}0036)\right) = -7{,}353$

$y_5 = y_4 + (-0.2)(-7{,}353) = 35{,}49808$

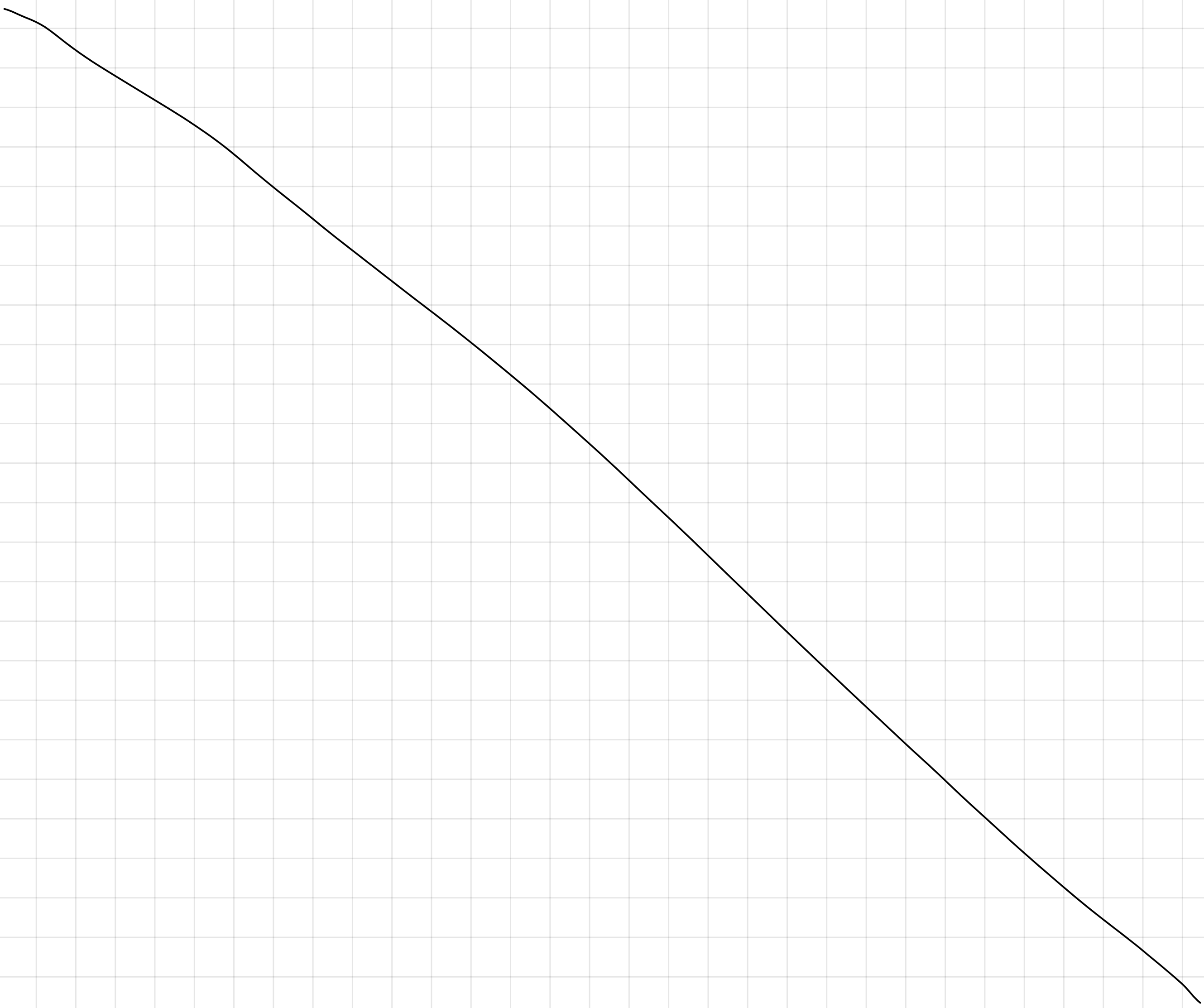
iter 6:

$k_1(5) = f(1\ ;\ 35{,}49808) = -7{,}73757$

$k_2(5) = f\left(1 + 0.2/2\ ;\ 35{,}49808 + \frac{(-0.2)}{2}(-7{,}73757)\right) = -8{,}12384$

$y_6 = y_5 + (-0.2)(-8{,}12388) = 37{,}12286$

[entre $t = 5 \cdot 2hs = 10hs$ y $t = 6 \cdot 2hs = 12hs$]



09.09.20

(1) 1. El teorema del valor medio para integrales establece que:
Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b-a)$

a) Sea $f(x) = e^x - sen(\pi x)$ con $x \in [0,2]$, determinar una aproximación del valor de α del teorema del valor medio, usando tres iteraciones del método de la bisección. Usar una aproximación de π y de e con tres decimales.

b) Sin realizar más iteraciones determinar cuantas se necesitarían para quer el error de truncamiento sea menor que 10^{-6}.

bisección

$$\int_0^2 (e^x - \sin(\pi x))\,dx = e^x + \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^2 = f(\alpha)(2)$$

$$= e^2 + \frac{\cos(\overbrace{\pi \cdot 2}^{2\pi})}{\pi} - \frac{\cos(0)}{\pi} - 1 = 2(e^\alpha - \sin(\pi\alpha))$$

$$h(\alpha) = e^2 - 2e^\alpha + 2\sin(\pi\alpha) - 1 \Leftarrow e^2 - 1 = 2e^\alpha - 2\sin(\pi\alpha)$$

$\alpha \in [0,2]$

tomo 3 decimales de e y π $\Rightarrow$ $e \approx 2{,}718$
$\pi \approx 3{,}142$

$$h(\alpha) = 2{,}718^2 - 2 \cdot 2{,}718^\alpha + 2 \cdot \sin(3{,}142 \cdot \alpha) - 1$$

$h(0) = 4{,}387524 > 0$; $h(2) = -8{,}385895 < 0$ } $\rightarrow$ hay cambio de signo

	a	b	(a+b/2)	
+	0	2 −	1	+
	1	2	1.5	−
	1	1.5	1.25	−

$f(1.25) = -2{,}007 \Rightarrow$ mala aprox. pero $\alpha = 1{,}25$

(b) $n > \log_2\left(b-a/10^{-6}\right) = 20{,}93 \Rightarrow 21$ iteraciones

2

2. Hornbeck en 1975 propuso la siguiente ecuación diferencial ordinaria parásita no lineal: $\frac{dy_1}{dt} = 5(y_1 - t^2)$. Si la condición inicial es $y_1(0) = 0.08$. Hallar el valor de $y_1(0.3)$, usando tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

Runge-kutta punto medio

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 5(y - t^2) \\ y(0) = 0.08 \end{cases}$$

$t = 0{,}3$ y $N = 3$ $h = \frac{0{,}3}{3} = 0{,}1$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + h/2, \ y_k + hk_1/2) \\ y_{k+1} = y_k + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \end{cases}$$

$f(t, y) = 5(y - t^2)$

$a_1 = 0$; $a_2 = 1$

it 1:

$t = 0$

$k_1 = 5(y_0 - t_0^2) = 5(0.08) = 0.4$

$k_2 = 5\left(0.4 + \frac{0.1 \cdot 0{,}4}{2} - \left(\frac{0.1}{2}\right)^2\right) = 0.4875$

$y_1 = y_0 + 0.1(0.4875) = 0.12875$

it 2:

$t = 0{,}1$

$k_1(1) = 0.59375$

$k_2(1) = 0.6796875$

$y_2 = y_0 + 0.1(0.6796875) = 0.19671875$

it 3:

$k_1(2) = 0.78359375$

$k_2(2) = 0.866992 1875$

$y_3 = y_0 + 0.1 \cdot 0.866992 1875 = 0{,}283417 96875.$

$$\boxed{y(0.3) = 0{,}28345}$$

③

3. Considerar una masa de 10 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 10\frac{N}{m}$. Si se alarga el resorte una distancia de 0.02 m y se suelta a partir del reposo, determinar la posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t = 0.3$ s, usar tres pasos del método de Euler. Sabiendo que la ecuación diferencial que caracteriza el movimiento vibratorio del péndulo es:

$m\frac{dx^2}{dt^2} + kx = 0$

$$\begin{cases} 10\,kg \, \dfrac{dx^2}{dt^2} + 10\,\dfrac{N}{m} \cdot x = 0 \\ x(0) = 0.02\,m \qquad v(0) = 0 \end{cases}$$

$t = 0.3\,s \quad N = 3 \Rightarrow h = 0.1$

defino:

$$\frac{dx}{dt} = \mu \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^2}{dt} = \frac{d\mu}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu = f(t, x, \mu) \\ \dfrac{d\mu}{dt} = \dfrac{dx^2}{dt} = -x = g(t, x, \mu) \end{cases}$$

metode de Euler: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{k+1} = x_k + h \cdot \mu_k \\ \mu_{k+1} = \mu_k + h(-x_k) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_0 = 0.02 \\ \mu_0 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ iter 1:

$x_1 = 0.02 + 0.1 \cdot 0 = 0.02$

$\mu_1 = 0 + 0.1 \cdot (-0.02) = -0.002$

iter 2:

$x_2 = 0.02 + 0.1(-0.002) = 0.0198$

$\mu_2 = -0.002 + 0.1(-0.02) = -0.004$

iter 3:

$x_3 = 0.0198 + 0.1(-0.004) = 0.0194$

$\mu_3 = -0.004 + 0.1(-0.0198) = -0.00598$

$$\begin{bmatrix} x(0.3) \\ \mu(0.3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0194 \\ -0.00598 \end{bmatrix}$$

4

4. a) Calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ sobre una partícula que recorre la semi circunferencia superior que une los puntos $(1,0)$ con $(-1,0)$ usando la regla de *Simpson 1/3* con $N = 12$.Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos cuatro decimales y redondeo.

b) Indicar si el error es menor o igual a un décimo.
$(W = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt,\ \sigma : [a,b] \to \mathbf{R}^2 / \sigma(t) = (cos(t), sen(t)))$

regla de simpson 1/3 $\quad N=12 \quad \pi \approx 3$

regla de simpson

$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0, \pi]$

$\sigma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$h = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$f(t) = (3\sin^2(t) + 2,\ 16 \cdot \cos(t))$

$\int (3\sin^2(t) + 2,\ 16 \cdot \cos(t))(-\sin(t), \cos(t))$

$\int_0^3 -3\sin^3(t) - 2\sin(t) + 16 \cdot \cos^2(t) . dt$

regla de simpson 1/3

$$\int_a^b f(t).dt \cong \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(0) + f(3) + 4\sum_{k=0}^{5} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{5} f(x_{2k})\right)$$

$x_k \quad k = 0, \ldots, 11 \quad : \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(t)\,dt = \frac{h}{3}\Big(16 + 15{,}39 + 4\,[f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75) + f(2.25) + f(2.75)] + 2 \cdot (f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2) + f(2.5)]\Big)$$

$$= \frac{h}{3}(16 + 15{,}39 + 4 \cdot 29{,}6277 + 2 \cdot 14.467) \simeq 14.902$$

(5)

5. Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

a) Demostrar que $\rho(T_{GS}) = 0.5$. Siendo T_{GS} la matriz del método de *Gauss-Seidel* asociada al sistema.

b) Realizar tres iteraciones del método de *Gauss-Seidel* utilizar al menos 4 decimales y redondeo. Estimar el error relativo cometido entre dos iteraciones consecutivas.

$T_G = (D-L)^{-1} U \qquad C_G = (D-L)^{-1} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

también se puede despejar a partir de las ecuaciones.

$$T_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad \rho(T) = \max(|\lambda_T|) = 0.5$$

$\lambda_T = \{0, -0.5, -0.5\} \Rightarrow \max(|\lambda_T|) = 0.5$

(b)

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = (x_2^k - x_3^k - 1)\frac{1}{2} \\ x_2^{k+1} = -x_1^{k+1} - x_3^k + 2 \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{2}x_1^{k+1} + \frac{1}{2}x_2^{k+1} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

- usar una semilla mas o menos buena
- hacer las iteraciones

18.12.19

(1) a) Cuando una población $P(t)$ no puede crecer más de un cierto valor límite L, la gráfica de la función $P(t)$ es una curva llamada *curva logística* de ecuación: $P(t) = \frac{L}{1+ce^{at}}$. Ajustar por cuadrados mínimos los valores de c y a para $L = 2000$ con los datos de la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	200	400	650	850	950

b) Estimar la población para $t = 3.2$ (el tiempo está medido en horas). Usar cuatro decimales y redondeo.

cuadrados mínimos

$$P(t) = \frac{2000}{1+ce^{at}}$$

t	$P(t)$
0	200
1	400
2	650
3	850
4	950

$$P(t) = \frac{2000}{1+ce^{at}}$$

$$(1+ce^{at})\,P(t) = 2000$$

$$ce^{at} = \left(\frac{2000}{P(t)} - 1\right) \Rightarrow \underbrace{\ln(c)}_{\gamma} + at = \underbrace{\ln\left(\frac{2000}{P(t)} - 1\right)}_{y}$$

$\hookrightarrow at + \gamma = y$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(2000/200) \\ \ln(2000/400) \\ \ln(2000/650) \\ \ln(2000/850) \\ \ln(2000/950) \end{bmatrix}}_{b}$$

$\rightarrow A^TA\,x = A^Tb$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} a \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5278 \\ 1.9990 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow c = e^{1.9990} =$

$$P(t) = \frac{2000}{1 + e^{1.9990} \cdot e^{-0.5278t}}$$

(b) $P(3.2) = 846{,}2 \Rightarrow 846$ pero debería ser > 850.

2

2) Un automóvil diesel acelera gradualmente, de tal manera que para los primeros 10 segundos la aceleración está dada por: $a(t) = 0.12t^2 + 0.6t$, $(\frac{m}{s^2})$. Si el auto parte del reposo, con velocidad inicial nula. Se pide:

a) Plantear el problema de valores iniciales.

b) Usar 2 iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio, para obtener la posición y la velocidad del móvil al cabo de 1 segundo.

$a(t) = 0.12\,t^2 + 0.6t$ el auto parte de reposo $\Rightarrow v(0) = 0$

Runge-Kutta

$\frac{dv}{dt} = a(t)$

$\frac{dx}{dt} = v$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt} = 0.12t^2 + 0.6t \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases}$$

$\Rightarrow f(t, x, v) = 0.12t^2 + 0.6t$
$\quad g(t, x, v) = v$

al cabo de un segundo ; 2 iteraciones $\Rightarrow h = \frac{1}{2} = 0.5$

runge kutta del punto medio:

$y_{k+1} = y_k + h \cdot (a_1 k_1 + a_2 k_2)$ $\quad a_1 = 0;\ a_2 = 1$

$k_1 = f(t_k, y_k)$; $k_2 = f(t_k + h/2,\ y_k + \frac{h k_1}{2})$

↳ para este sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + h \cdot f(t_k + h/2) \\ x_{k+1} = x_k + h \cdot g(v_k + \frac{h \cdot k_1}{2}) \end{cases} \qquad \begin{matrix} v_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{matrix}$$

iter. 1:

$t_0 = 0$

$v_1 = 0 + 1/2 \cdot (0.12(0.25)^2 + 0.6(0.25)) = 0.07875$

$x_1 = 0 + 1/2 \cdot (0 + 0.25\ k_1(0)) = 0$

↳ $k_1(0) = v_0 = 0$

iter 2:

$t_1 = 0.5$

$v_2 = 0.07875 + 1/2\,(0.12\,(0.5 + 0.25)^2 + 0.6\,(0.5 + 0.25)) = 0.3375$

$x_2 = 0 + \frac{1}{2}(0.07875 + 0.25 \cdot k_1(1)) = 0.4922$

$k_1(1) = g(v_1) = 0.07875$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3375 \\ 0.4922 \end{bmatrix}$$

③ 3. (b) a) Teniendo en cuenta que no es conocida una primitiva de la función $f(x) = e^{x^2}$. Calcular el valor de la integral definida $\int_0^1 e^{x^2}dx$, usar le regla de los trapecios compuesta con $N = 8$, trabajar con 5 decimales y redondeo.

b) Sabiendo que el error en la fórmula de los Trapecios es: $|E_T| = \frac{h^3}{12} N L$, donde $f''(\xi) \leq L$ decidir justificando la respuesta si el error es $< 10^{-3}$

regla de los trapecios
tema: integración

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \quad : N = 8 \Rightarrow h = \frac{1}{8} \Big\} \text{ paso de los intervalos}$$

$$\frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right) = \frac{1/8}{2}\left(1 + 2{,}71828 + 2\sum_{k=1}^{N=8} f(k/8)\right) \approx \frac{23{,}51540}{16} \approx 1{,}46971$$

$f(x_1) = e^{1/8^2} = 1.01575$

$f(x_2) = e^{2/8^2} = 1.06449$

$f(x_3) = e^{3/8^2} = 1.15099$

$f(x_4) = e^{4/8^2} = 1.28403$

$f(x_5) = e^{5/8^2} = 1.47790$

$f(x_6) = e^{6/8^2} = 1.75505$

$f(x_7) = e^{7/8^2} = 2.15034$

$f(x_8) = e^{1^2} = 2.71828$

(b) $f'(x) = 2x e^{x^2}$ $\qquad f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = (4x^2 + 2) e^{x^2}$

necesito el máximo de $f''(x)$ en $x \in [0, 1] \Rightarrow$ máximo en $x = 1$ pues la función es estrictam' creciente.

$f''(1) = (4+2) e \cong 21{,}74625$, tomo L como máx $f''(x)$ en $x \in [0,1]$

$$|E_T| = \frac{h^3}{12} N L \leq \frac{h^3}{12} \cdot 8 \cdot 21{,}74625 = 0.0283$$

$\Rightarrow |E_T| \nleq 10^{-3}$

(4)

5. Demostrar la siguiente afirmación: *Sea* $g \in C[a,b]$, *tal que* $g(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b]$, g' *es continua en* (a,b) *y* $|g'(x)| \leqslant k < 1, \forall x \in (a,b)$. *Si* $g'(p) = 0$, g'' *es continua y* $g''(p) \neq 0$. *Entonces* $\exists \delta > 0$ *tal que para toda semilla* $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, *la sucesión* $p_n = g(p_{n-1})$ *converge al menos cuadráticamente al único punto fijo* $p \in [a,b]$.

demostración punto fijo

Como $x \in [a,b]$ y $g(x) \in [a,b] \Rightarrow \exists$ un punto fijo
Como $g'(x)$ es continua y $|g'(x)| \leqslant k < 1$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$ el punto fijo es único.

g'' es continua $\Rightarrow$ está acotada y $g''(p) \neq 0$

desarrollo el polinomio de Taylor para g

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x-p) + \frac{g''(\xi)}{2}(x-p)^2$$ donde ξ entre x y p.

como $g'(p) = 0$

$$\Rightarrow g(x) = g(p) + \frac{g''(\xi)}{2}(x-p)^2$$

$\Rightarrow$ cuando $x = p_n \Rightarrow p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n-p)^2$ con ξ_n entre p_n y p

Luego $p_{n+1} - p = \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n-p)^2$

como $|g'(u)| \leqslant k < 1$ en $[p-\delta, p+\delta]$ y g manda $[p-\delta, p+\delta]$ en sí mismo, del teorema punto fijo se deduce que $\{p_n\}_{n \geq 0}$ cv a p.

Como ξ_n está entre p y p_n $\forall n \Rightarrow$ resulta que $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ también converge a p $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|(p_n - p)^2|} = \frac{|g''(p)|}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ converge cuadráticamente; si $g''(p) = 0$, convergerá con órdenes superiores.

16.09.20

1. La siguiente tabla corresponde a la distancia recorrida por un móvil ($e(t)$), sobre una pista durante 65 seg. Completar la tabla con la velocidad del movil en cada instante de tiempo usando diferencias centradas siempre que sea posible. Estimar la aceleración a los 30 seg.

Tiempo	0.0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
$e(t)$	0	54	115	175	250	330	400	460	516	566	628	698	774	844
velocidad	10,8	11,5	12,1	13,5	13,5	15	13	11,6	10,6	11,2	13.2	14,6	14,6	14

diferenciación

en $t=0$ no se puede utilizar dif centradas $\Rightarrow$ uso hacia adelante

$$f'(0) \simeq \frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{54}{5} = 10,8$$

en $5 \leq t \leq 60$ se pueden usar dif centrales:

$$f'(t_i) \simeq \frac{f(t_{i+1})-f(t_{i-1})}{2h} =$$

en $t=65$ no se puede dif centrales: dif hacia atrás

$$f'(65) = \frac{f(65)-f(60)}{5} = 14$$

derivada segunda:

$$f''(x_i) \approx \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_{i-1})}{2h}$$

$$\approx \left(\frac{f(x_{i+2})-f(x_i)}{2h} - \frac{f(x_i)-f(x_{i-2})}{2h}\right)\frac{1}{2h}$$

$$= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{4h^2}$$

$$\Rightarrow f''(30) \simeq \frac{f(40) - 2f(30) + f(20)}{4 \cdot 5^2} \simeq -0,34$$

(2)

2. Suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$, inicialmente con 25 individuos, satisface la ecuación logística

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = 0.0225P(t) - 0.0003P(t)^2 \\ P(0) = 25 \quad \text{el tiempo está medido en meses} \end{cases}$$

a) Utilizar tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio para aproximar la población en 6 meses. Trabajar al menos con cuatro cifras decimales y redondeo.

b) ¿Qué porcentaje de la población se incrementó en ese tiempo?

↳ bastante trivial, hacer si hay tiempo

(3)

3. La ley de enfriamiento\calentamiento de Newton establece que: *La razón de cambio respecto del tiempo t de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre $T(t)$ y la temperatura T_m del medio ambiente.*

a) Plantear el problema anterior como un problema de valores iniciales cuando el $0 \leq t \leq 3$ el tiempo está medido en minutos.

b) Una taza de café que se encuentra a una temperatura de 65°C, se la coloca en un ambiente a una temperatura de 24°C, la constante de proporcionalidad en este caso es −0.0650. Calcular el valor de h para que se requieran cuatro iteraciones del método de Euler para estimar la temperatura de la taza a los 2 minutos y estimarla.

ya hecho varias veces: $h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(4)

4. Se sabe que la suma de dos números es 7 y el producto es 12. Plantear un sistema para estimar dichos números. Resolver el sistema usando dos iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales tomando como semilla $x^0 = (2.9\ ,\ 3.9)^t$. Trabajar al menos con cuatro decimales y redondeo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 \cdot x_2 = 12 \end{cases}$$

metodo de Newton: $\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - J^{-1} F(\bar{x}^{(k)})$

$$\Rightarrow \bar{J}(\underbrace{\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^{k}}_{\bar{y}^k}) = -\bar{F}(\bar{x}^{(k)})$$

Newton no lineal

$$y \quad \bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + \bar{y}^k$$

$$J(\bar{x}^k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_2^k & x_1^k \end{bmatrix} \quad ; \quad F(\bar{x}^k) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 7 \\ x_1 x_2 - 12 \end{bmatrix}$$

iter 1: $\bar{y}^1 = \begin{bmatrix} 0.09 \\ 0.11 \end{bmatrix}$ $\quad x^1 = \begin{bmatrix} 2.9 + 0.09 \\ 3.9 + 0.11 \end{bmatrix}$

iter 2: $\bar{y}_2 = \begin{bmatrix} -0.00990 \\ 0.00990 \end{bmatrix} \Rightarrow x^2 = \begin{bmatrix} 2.980098 \\ 4.019902 \end{bmatrix}$

5

5. El potencial electrostático u entre dos esferas concéntricas de radio $r = 1$ y $r = 4$ se determina a partir de la ecuación diferencial de segundo orden:
$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0$, sabiendo que $u(1) = 50$ y $u(4) = 100$.

a) Plantear el problema como un problema de valores en la frontera.

b) Tomar $n = 6$ y el metodo de diferencias finitas para obtener el potencial en los puntos intermedios.

diferencias finitas

$$\begin{cases} \frac{d^2\mu}{dr^2} = f(r, \mu, \mu') = -\frac{2}{r}\mu' & 1 \leq r \leq 4 \\ \mu(1) = 50;\ \mu(4) = 100 \end{cases}$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} \quad ; \quad y'(x) \cong \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$\mu''(r_k) = \frac{\mu(r_{k+1}) - 2\mu(r_k) + \mu(r_{k-1})}{h^2} \quad ; \quad \mu'(r_k) \simeq \frac{\mu(r_{k+1}) - \mu(r_{k-1})}{2h}$$

$$\frac{\mu(r_{k+1}) - 2\mu(r_k) + \mu(r_{k-1})}{h^2} = -\frac{2}{r_k}\cdot\left(\frac{\mu(r_{k+1}) - \mu(r_{k-1})}{2h}\right)$$

$$\mu(r_{k+1})\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r_k \cdot h}\right) - \frac{2}{h^2}\mu(r_k) + \mu(r_{k-1})\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{r_k h}\right) = 0$$

$$n = 6 \Rightarrow h = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = 1/2 \cong 0.5$$

puntos de la malla: $r_1 = 1.5$; $r_2 = 2$; $r_3 = 2.5$; $r_4 = 3$; $r_5 = 3.5$

$$\mu_6\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{3.5\cdot(0.5)}\right] - \frac{2}{0.5^2}\mu_5 + \mu_4\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{3.5(0.5)}\right] = 0$$

$$\mu_5\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{3(0.5)}\right] - \frac{2}{0.5^2}\cdot\mu_4 + \mu_3\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{3(0.5}\right] = 0$$

$$\mu_4\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{2.5(0.5)}\right] - \frac{2}{0.5^2}\mu_3 + \mu_2\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2.5(0.5)}\right] = 0$$

$$\mu_3\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{2(0.5)}\right] - \frac{2}{0.5^2}\mu_2 + \mu_1\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2\cdot(0.5)}\right] = 0$$

$$\mu_2\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{1.5(0.5)}\right] - \frac{2}{0.5^2}\mu_1 + \mu_0\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{1.5(0.5)}\right] = 0$$

pongo las condiciones de frontera:

$$-8\mu_5 + \mu_4(4{,}5714) = -100\cdot(4{,}5714)$$

$$(4{,}6667)\mu_5 - 8\mu_4 + \mu_3(4{,}6667) = 0$$

$$(4{,}8)\mu_4 - 8\mu_3 + \mu_2(4{,}8) = 0$$

$$5\mu_3 - 8\mu_2 + \mu_1\cdot 5 = 0$$

$$(5{,}3333)\mu_2 - 8\mu_1 + \quad = -(5{,}3333)\cdot 50$$

$$\mu = [\mu(3.5), \mu(3), \mu(2.5), \mu(2), \mu(1.5)]$$

$$\mu = [-67{,}477 ; -218{,}085 ; -306{,}382 ; -292{,}553 ; -161{,}702]$$

chequear las cuentas.

13.02.19

1

1. a) Demostrar la regla de los trapecios compuesta para aproximar $\int_a^b f(x)dx$.

b) Hallar el área de la región limitada por

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x \\ y \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{cases}$$ Usar Trapecios Compuesta con $N = 6$.

regla de los trapecios

(a) $$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{polinomio de Lagrange}}{\cong} \int_a^b P_L(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, L_j(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} f(x_j) \int_a^b L_j(x)\,dx$$

Luego: $$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, A_j$$

→ se aproxima la función en $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, ..., N-1$ mediante el polinomio interpol. de Lagrange $p_k(x)$, usando los nodos $[x_k, x_{k+1}]$

$$p_k(x) = f(x_k) \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1}) \cdot \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)\,dx$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1}) \cdot \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right] dx$$

$$= f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\,dx + f(x_{k+1}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\,dx$$

$$= f(x_k) \cdot \frac{(x - x_{k+1})^2}{2(x_k - x_{k+1})} + f(x_{k+1}) \cdot \frac{(x - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)} \Bigg]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= \frac{f(x_{k+1}) \cdot (x_{k+1} - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)} - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k+1})^2}{2(x_k - x_{k+1})}$$

$$= \frac{f(x_{k+1}) \cdot (x_{k+1} - x_k)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(x_{k+1} - x_k)}} + \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k+1})^{\cancel{2}}}{2\cancel{(x_{k+1} - x_k)}}$$

$$= \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\text{ancho}} \cdot \underbrace{\frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}}_{\text{altura promedio}}$$

$$\Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_{k+1})+f(x_k)\right]$$

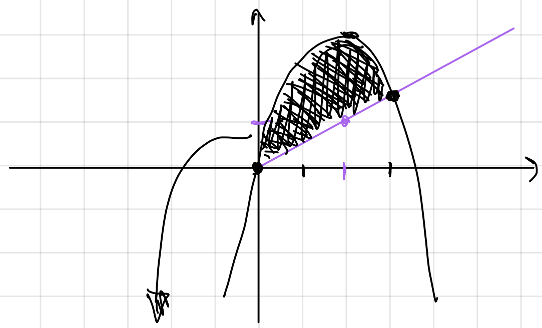
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \cong \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{2}\left[f(x_{k+1})+f(x_k)\right]$$

$$\cong \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right]$$

(b)

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x \\ y \leq -\frac{1}{2}x^2+2x \end{cases}$$

$N = 6$



intersección $x = 0$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

$$0 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$0 = x\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)$$

$$x = 3$$

∘ tengo que calcular esa área:

$$\Rightarrow I = \int_0^3 \left[\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right) - \frac{1}{2}x\right] dx$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$h = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{0.5}{2}\left[f(0)+f(3)+2\sum_{k=1}^{5} f(x_k)\right] \cong f(0)+f(3)+2\sum_{k=1}^{5} f\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\cong \left[0+0+2\left[4.375\right]\right] = 8{,}75 \cdot \frac{0.5}{2}$$

$$= 2{,}1875$$

(2)

2. Hallar una aproximación de la solución de la ecuación $ln(x) + 2 - x = 0$, empleando el método de punto fijo, para una función adecuada que garantice la converegencia del mismo. Utilizar una tolerancia de 10^{-2}.

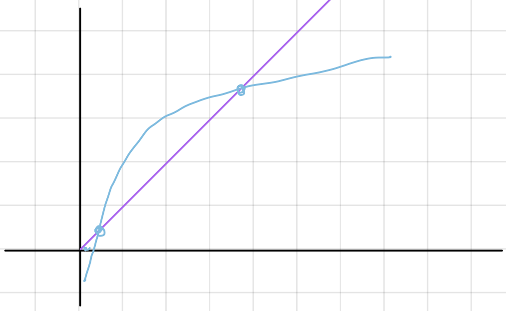
$\ln(x) + 2 - x = 0$; punto fijo ; tolerancia 10^{-2} — punto fijo

$x = 2 + \ln(x)$

$\ln + 2 - x$

$f(x) = 2 + \ln(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$



$\left|\frac{1}{x}\right| \leq k \leq 1 \quad \forall x > 1$

$x_{k+1} = 2 + \ln(x_k)$ $\quad 2.5 = x_0 \rightarrow x_1 = 2{,}91629 \rightarrow x_2 = 3.070313$

$\rightarrow x_3 = 3.121779 \rightarrow x_4 = 3{,}13840 \rightarrow x_5 = 3.143714$

$e = 5.10^{-3} < 10^{-2}$

$\boxed{\Rightarrow p_n = 3{,}14}$

(3)

3. En un contenedor se transportan refrigeradores y cocinas industriales. Cada cocina pesa 1 tonelada y cada refrigerador 2 toneladas. Por otro lado una cocina ocupa $1.1m^3$ y cada refrigerador $2m^3$. En total entre cocinas y refrigeradores se registró un peso de 10 toneladas, ocupando un espacio de $10.4m^3$.

a) Obtener, usando dos iteraciones del método de Gauss-Seidel, una aproximación de la cantidad de cocinas y refrigeradores que se transportaron. Trabajar con aritmética de tres dígitos.

b) Indicar si el sistema está bien condicionado.

↳ ya hecho en 03.07.19

(4)

4. La tasa de enfriamiento de un cuerpo se expresa como: $\frac{dT(t)}{dt} = -k(T - T_a)$, donde T es la temperatura del cuerpo (°C), T_a es la temperatura del medio circundante (°C) y k es la constante de proporcionalidad (por minuto). Así, esta ecuación (denominada ley de Newton para el enfriamiento) especifica que la tasa de enfriamiento es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del medio circundante. Si una bola de metal calentada a 80°C se sumerge en agua que se mantiene a $T_a = 20°C$ constante, la temperatura de la bola cambia, así:

Tiempo,(min)	0	5	10	15	20	25
T,(°C)	80	44.5	30.0	24.1	21.7	20.7

a) Utilizar diferenciación centrada para determinar $\frac{dT(t)}{dt}$ en cada valor del tiempo. Graficar $\frac{dT(t)}{dt}$ versus $T - T_a$.

b) Emplear cuadrados mínimos para estimar el valor de k.

diferencias centradas se puede con $5 \leq t \leq 20$

$f'(5) = \dfrac{30 - 80}{2 \cdot 5} = -5$; $f'(10) = \dfrac{24.1 - 44.5}{2h} = -2{,}04$

$f'(15) = \dfrac{21.7 - 30}{10} = -0.83$ $\quad f'(20) = \dfrac{20.7 - 24{,}1}{10} = -0.34$

$y = a\,x \qquad y = \dfrac{dT}{dt}\,;\; x = T - T_a$

dT/dt	$T - T_a$
-5	24.5
$-20,4$	10
$-0,83$	$4,1$
-0.34	$1,7$

$$\begin{cases} -5 = a\,24,5 \\ -20,4 = a\,10 \\ -0,83 = a\,4,1 \\ -0,34 = a\,1,7 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 24,5 \\ 10 \\ 4,1 \\ 1,7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot [a] = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -20,4 \\ 0,83 \\ 0,34 \end{bmatrix}}_{b}$$

$A^T A = 719,950 \qquad \Rightarrow A^T A \cdot a = A^T b \;\Rightarrow\; 719,950 \cdot a = -322,519$

$A^T b = -322,519$

$$a = -\frac{322,519}{719,950} = -0,44797$$

$\Rightarrow\; a = -k = -0,44797 \;\Rightarrow\; k = 0,44797$

5

5. Si se drena el agua desde un tanque cilíndrico vertical por medio de abrir una válvula en la base, el líquido fluirá rápido cuando el tanque esté lleno y despacio conforme se drene. La tasa a la que el nivel del agua disminuye es:

$\frac{dy(t)}{dt} = -ky$ donde k es una constante que depende de la forma del agujero y del área de la sección transversal del tanque y agujero de drenaje. La profundidad del agua y se mide en metros y el tiempo t en minutos. Si $k = 0.06$, determinar cuánto tiempo se requiere para que el nivel del agua haya descendido al menos a 2.6m si el nivel del fluido se encuentra en un inicio a 3 m. Utilizar el método de Runge-Kutta del punto medio con $h = 0.5$.

$y(0) = 3m \qquad h = 0,5 \qquad$ quiero que $\quad y(t_f) = 2,6$

$f(t, y) = -ky$

R-K 2: $\; y_{k+1} = y_k + h\,k_2(k) \qquad k_1 = f(t_k, y_k)$

$$k_2(k) = f\left(t_k + h/2,\; y_k + \frac{h \cdot k_1(k)}{2}\right)$$

it 1:

$f(0,3) = -0.06 \cdot 3 = -0,18 = k_1(0)$

$k_2(0) = f(0,25,\; 3 + 0.25(-0,18)) = -0,1173$

$y_1 = y_0 + 0.5 \cdot (-0,1173) = 2,94135$

it 2:

$k_1(1) = -0.06 \cdot 2,94135 = -0,176481$

$k_2(1) = (2,94135 + 0.25(-0,176481))(-0,06) = -0,173834$

$y_3 = y_1 + 0.5(-0,173834) = 2,85443$

↳ buen, y así sigo hasta 2,6.

03-02.21

(1) 1. Usar dos iteraciones del *Método de Newton, para sistemas no lineales,* para obtener una aproximación a la solución del sistema dado. Usar como semilla $(0.1 \;\; 0.1)^T$. Hallar el error relativo entre dos iteraciones conscutivas. Trabajar con cuatro decimales y redondeo.

$$\begin{cases} x - 3x^2y = 0 \\ y - x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\bar{x}) = x_1 - 3x_1^2 x_2 \\ g(\bar{x}) = x_2 - x_1^3 \end{cases} \qquad \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - J^{-1}(\bar{x}_k) \cdot \bar{F}(\bar{x}_k)$$

$$F(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) \end{bmatrix} \qquad J(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) = -F(\bar{x}_k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} J(\bar{y}_k) = -F(\bar{x}_k) \\ \bar{x}_{k+1} = \bar{y}_k + \bar{x}_k \end{cases}$$

$$J(\bar{x}_k) = \begin{bmatrix} 1 - 6x_k y_k & -3x_k^2 \\ -3x_k^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(\bar{x}_k) = \begin{bmatrix} x_k - 3x_k^2 y_k \\ y_k - x_k^3 \end{bmatrix}$$

it 1:

$$\Rightarrow J(x_0) \cdot \bar{y}_0 = -F(x_0) \Rightarrow y_0 = \begin{bmatrix} -0.1065 \\ -0.1022 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} -0.006452 \\ -0.002194 \end{bmatrix}$$

it 2:

$$J(x_1) \cdot y_1 = -F(x_1) \Rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} 6.4535 \cdot 10^{-3} \\ 2.1941 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

falta calcular error

(2)

2. Suponga que un lago de volumen $V = 10km^3$ tiene contaminantes A y B disueltos uniformemente en cantidades iniciales de 1 y 7 toneladas respectivamente. Agua contaminada con una concentración de $1\frac{ton}{km^3}$ de A ingresa a una tasa constante de 6 km^3/año. Además, ingresaron directamente 1 ton/año, del contaminante A y 2 ton/año, del contaminante B. Suponer que agua perféctamente mezclada sale del lago a una tasa de 6 km^3/año. El sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza a este problema se puede escribir como:
$\begin{cases} A'(t) = 6 - 0.6A(t) \\ B'(t) = 2 - 0.6B(t) \end{cases}$. Indicar las condiciones iniciales y aproximar la cantidad de contaminate A y B presentes al cabo de $0.5seg$, usar cinco iteraciones del método de *Euler*. Indicar si las cantidades de contaminantes son iguales transcurrido ese tiempo.

$$\begin{cases} A'(t) = 6 - 0.6A(t) \\ B'(t) = 2 - 0.6B(t) \\ A(0) = 1;\ B(0) = 7 \end{cases}$$

$t_f = 0.5$ y $N = 5 \Rightarrow h = \frac{0.5}{5} = 1$

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k + h\cdot(6 - 0.6\cdot a_k) \\ b_k + h\cdot(2 - 0.6\, b_k) \end{bmatrix}$$

iter 1:

$a_1 = 1 + 0.1(6 - 0.6\cdot 1) = 1.54$ 0.1 s

$b_1 = 7 + 0.1(2 - 0.6\cdot 7) = 6.78$

iter 2:

$a_2 = 2.0476$

$b_2 = 6.5732$

0.2 s

iter 3:

$a_3 = 2.5247$

$b_3 = 6.3788$

0.3 s

iter 4:

$a_4 = 2.9733$

$b_4 = 6.1961$

0.4 s

iter 5:

$a_5 = 3.3949$

$b_5 = 6.0243$

0.5 s

la cantidad de cont $A(0.5) = 3.3949$ ≠ $B(0.5) = 6.0243$

(3)

3. El potencial electrostático u entre dos esferas concéntricas de radio $r = 1$cm y $r = 4$cm se determina a partir de la siguiente ecuacion diferencial:
$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0.$
Siendo las condiciones de borde $u(1) = 50$, $u(4) = 100$. Usar el método de diferencias finitas con $n = 6$, para estimar el potencial entre los nodos comprendidos entre 1 y 4.

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2du}{rdr} = 0 \quad 1 < r < 4 \\ u(1) = 50;\ u(4) = 100 \end{cases}$$

$n = 6 \wedge L = 4 - 1 \Rightarrow h = \frac{3}{6} = 0.5$

diferencias finitas:

$$u''(r_k) = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} \quad \wedge \quad u'(r_k) = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}$$

puntos de la malla : $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{1{,}5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 3.5\}$

$\Rightarrow$ armo mi sist. lineal, usando:

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}\right) = 0$$

$$u_{k+1}\left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r_k h}\right] - 2u_k\left(\frac{1}{h^2}\right) + u_{k-1}\left[\frac{1}{h^2} - \frac{1}{r_k h}\right] = 0$$

$$\underbrace{u_6}_{\mu(4)}\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{3.5 \cdot 0.5}\right] - 2u_5\left[\frac{1}{0.5^2}\right] + u_4\left[\frac{1}{0.5^2} - \frac{1}{3.5 \cdot 0{,}5}\right] = 0$$

$$u_5\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{3 \cdot 0{,}5}\right] - 2u_4\left[\frac{1}{0.5^2}\right] + u_3\left[\frac{1}{0.5^2} - \frac{1}{3 \cdot 0.5}\right] = 0$$

$$u_4\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{2.5 \cdot 0{,}5}\right] - 2u_3\left[\frac{1}{0.5^2}\right] + u_2\left[\frac{1}{0.5^2} - \frac{1}{2.5 \cdot 0{,}5}\right] = 0$$

$$u_3\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{2 \cdot 0{,}5}\right] - 2u_3\left[\frac{1}{0.5^2}\right] + u_2\left[\frac{1}{0.5^2} - \frac{1}{2 \cdot 0{,}5}\right] = 0$$

$$u_2\left[\frac{1}{0.5^2} + \frac{1}{1.5 \cdot 0{,}5}\right] - 2u_2\left[\frac{1}{0.5^2}\right] + \underbrace{u_0}_{\mu(1)}\left[\frac{1}{0.5^2} - \frac{1}{1.5 \cdot 0{,}5}\right] = 0$$

error de cuenta

$$\left.\begin{array}{l} 100 \cdot (4{,}5714) - 8u_5 + \cancel{(4{,}5714)}\, u_4 = 0 \\ 4.6667 \cdot u_5 - 8u_4 + \cancel{(4.6667)}\, u_3 = 0 \\ \text{error de cuenta} \\ 4.8\, u_4 - 8u_3 + \cancel{4.8}\, u_2 = 0 \\ \text{error cuenta} \\ 5u_3 - 8u_2 + \cancel{5}u_1 = 0 \\ \text{error cuenta} \\ 5{,}333\, u_2 - 8u_1 + \cancel{5{,}333}\,(50) = 0 \\ \text{error cuenta} \end{array}\right\} \rightarrow \mu = \begin{bmatrix} 97{,}62 \\ 94{,}44 \\ 90 \\ 83{,}33 \\ 72{,}22 \end{bmatrix}$$

(4) 4. *a)* Calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x,y) = (3y^2+2, 16x)$ sobre una partícula que recorre la semi circunferencia superior que une los puntos $(1,0)$ con $(-1,0)$ usando la regla de *Simpson 1/3* con $N = 12$. Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos cuatro decimales y redondeo.

b) Indicar si el error es menor o igual a un décimo.
$(W = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt,\ \sigma : [a,b] \to \mathbf{R}^2/\sigma(t) = (cos(t), sen(t)))$

(a) $f(x,y) = (3y^2+2,\ 16x)$ semicirc. sup $(1,0) \Rightarrow t=0$
$(-1,0) \Rightarrow t = \pi \cong 3$

$N = 12$

$f(\sigma(t)) = [3\sin^2(t)+2,\ 16\cos(t)]$ $h = \frac{3}{12} = 1/4$

$\sigma'(t) = [-\sin(t),\ \cos(t)]$

$f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = -3\sin^3(t) - 2\cdot\sin(t) + 16\cos^2(t)$

$$\int_0^3 [-3\sin^3(t) + 2.\sin(t) + 16\cos^2(t)] \cong \frac{h}{3}\Big[f(0) + f(3) + 4\sum_{k=0}^{5} f\left(\tfrac{2k+1}{4}\right) + 2\sum_{k=1}^{5} f\left(\tfrac{2k}{4}\right)\Big]$$

$$\cong \frac{0.25}{3}\Big[16 + 15{,}79069 + 4\cdot(29{,}6277) + 2\cdot(14{,}46702)\Big] \cong 14{,}90297$$

el error en simpson 1/3: $|E_T| \leqslant \frac{h^5}{180} N \cdot L$

donde $L \geqslant |f^{(iv)}(x)|\ \forall x \in [0,3]$

hago la derivada 4ta: $f'(x) = \cos(x)(-9\sin^2(x) - 32\sin(x) - 2)$

$f''(x) = (-18.\sin(x) - 32)\cdot\cos^2(x) + \sin(x)\cdot(9\sin^2(x) + 32\sin(x) + 2)$

$f'''(x) = (81\sin^2(x) + 128\sin(x) - 16)\cos(x)$

$f^{iv}(x) = (162.\sin(x) + 128).\cos^2(x) - \sin(x)(81\sin^2(x) + 128\sin(x) - 16)$

encuentro el máximo y el mínimo de esta función

$x_1 = 0{,}25789$ o $x_2 = 2{,}883702$ } max $f^{iv}(x_1) = 152{,}7143 = f^{iv}(x_2)$
$x_3 = 1{,}570796$ } min $f^{iv}(x_3) = -193$

$\max(|f^{iv}(x)|) = +193\ \forall x \in [0,3]$

$|E_T| \leqslant \frac{h^5}{180} \cdot 12 \cdot (193) = 0.402 \nleqslant 10^{-1}$ → no se cumple

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]^{3}:\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right]^{2}:\left[\frac{7}{8}-\right.}$$