20230712

1. Al tiempo $t = 0$, se introduce una innovación tecnológica en una comunidad que tiene una población de n habitantes. La ecuación diferencial que caracteriza a este fenómeno es:
$\frac{dx}{dt} = kx(t)(n+1-x(t))$. El tiempo está medido en meses.

   a) Plantear el problema de valores iniciales sabiendo que la población tiene 100 habitantes y la constante k es 0.01.

   b) Aplicar tres iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio para estimar la cantidad de personas $x(t)$ que adopataron la innovación tecnológica al cabo de 9 meses.

$$\frac{dx}{dt} = k\,x(t)\,(n+1-x(t))$$

a) $t = 0$, $n = 100$

$k = 0{,}01$

Luego el PVI es:

$$\begin{cases} x' = 0{,}01\,x\,(101-x), & t > 0 \\ x(t=0) = 100 & \text{(asumo que todos la usan)} \end{cases}$$

↳ describe la adaptación de la innovación tecnológica a la sociedad.

b) RK PUNTO MEDIO

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + k_2 h \\ k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + h/2,\ y_i + k_1 h/2) \end{aligned}}$$

$h = \frac{9-0}{3} = 3$ ← 3: # iter.

$f(t_i, x_i) = 0{,}01\, x_i\,(101 - x_i)$

$t_0 = 0$

$t_1 = 3$

$t_2 = 6$

$t_3 = 9$

iter 1:

$x_{i+1} = x_i + 3k_2$

$k_1 = 0{,}01 \cdot x_0\,(101 - x_0) = 1$

$x_0 = 100$

$k_2 = 0{,}01\,(x_0 + 1 \cdot 1{,}5) \cdot (101 - (x_0 + 1 \cdot 1{,}5)) = -0{,}5075$

$x_1 = 100 + 3 \cdot (-0{,}5075) = 98{,}4775 \quad , \quad t_1 = 3$

<u>iter 2</u> :

$x_2 = x_1 + 3 k_2$

$k_1 = 0{,}01 x_1 (101 - x_1) = 2{,}4841$

$k_2 = 0{,}01 (x_1 + k_1 \cdot 1{,}5)(101 - (x_1 + k_1\, 1{,}5))$

$= -1{,}2302$

$x_2 = 94{,}7869 \quad , \quad t_2 = 6$

<u>iter 3</u> :

$k_1 = f(t_3 = 6 ; x_2) = 0{,}01\, x_2 (101 - x_2)$

$= 5{,}8892$

$k_2 = f(t_3 = 7{,}5 ; x_2 + k_1 \cdot 1{,}5) = f(7{,}5 ; 103{,}4207)$

$= -2{,}7156$

$x_3 = x_2 + 3 k_2 = 86{,}6401 \quad , \quad t_3 = 9$

finalmente, $\boxed{x(t = 9) \cong 86{,}6401}$ por Rk-2

RTA.

2. Aproximar mediante el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$ el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}(x, y, z) = x^2\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, para mover una partícula que se desplaza sobre la curva $\sigma(t) = (cos(t), sen(t), t)$ con $t \in [0, \pi]$. ($W = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\sigma'(t)dt$) Tomar $\pi = 3$ y una partición del intervalo con $n = 6$.

$\bar{F} = (x^2, y, z)$

$\sigma(t) = (\cos t; \operatorname{sen} t; t)$, $t \in [0, \pi]$

$\pi = 3$, $n = 6$

$W = \int_a^b \bar{F}(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt$

SIMPSON 1/3

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k})\right]}$$

$\bar{F}(\sigma(t)) = (\cos^2 t; \operatorname{sen} t; t)$

$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

$\Rightarrow \bar{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t, t)(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

$= -\cos^2 t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t + t$

$$\int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^3 [\operatorname{sen} t \cos t (1 - \cos^2 t) + t]\,dt$$

con $h = \frac{3-0}{6} = 0,5$, calculo con simpson 1/3:

$$\int_0^3 f(t)\,dt \simeq 0,1667\left[f(0) + f(3) + 4\sum_{k=0}^{2} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{2} f(x_{2k})\right]$$

	x_i	$f(x_i)$
0	0	0
1	0,5	0,5515
2	1	1,209
3	1,5	1,5655
4	2	1,4641
5	2,5	1,4364

luego:

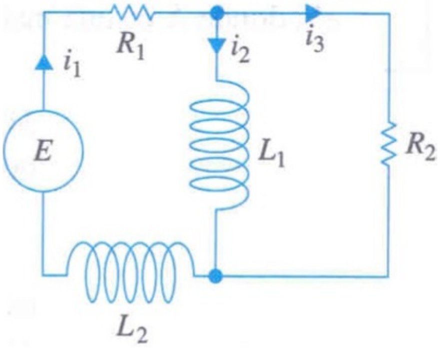
$\sum_{k=0}^{2} f(x_{2k+1}) = 3,7534$

$\sum_{k=1}^{2} f(x_{2k}) = 2,6731$

4 3 $\}$ 2,7219

Luego: $\boxed{W = \int_0^{\pi} F(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt \approx 3{,}8477}$ RTA.

3. El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura



es: $\begin{cases} \frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R_1+R_2}{L_2} i_1(t) + \frac{R_2}{L_2} i_2(t) + \frac{E(t)}{L_2} \\ \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{R_1}{L_1} i_1(t) - \frac{R_2}{L_1} i_2(t) \end{cases}$ Utilizar tres iteraciones del *método de Euler* para estimar la intensidad de la corriente $i_1(0.3)$ e $i_2(0.3)$. Sabiendo que: $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L_1 = 1h$, $L_2 = 1h$, $E(t) = 100sen(t)W$, $i_1(0) = i_2(0) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1+R_2}{L_2} i_1 + \frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{100 \operatorname{sen} t \, W}{L_2} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{R_2}{L_1} i_2 \end{cases}$$

llamo $i_1 = x$, $i_2 = y$

$$\begin{cases} x' = -\frac{R_1+R_2}{L_2} x + \frac{R_2}{L_2} y + \frac{100 \operatorname{sen} t}{L_2} W \\ y' = \frac{R_1}{L_1} x - \frac{R_2}{L_1} y \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

SIST. ECUACIONES DIFERENCIALES : EULER

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_i, x_i, y_i) \\ g(t_i, x_i, y_i) \end{pmatrix}}$$

$$h = \frac{0{,}3 - 0}{3} = 0{,}1$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -\frac{R_1+R_2}{L_2} x_i + \frac{R_2}{L_2} y_i + \frac{100 \operatorname{sen} t_i}{L_2} \\ \frac{R_1}{L_1} x_i - \frac{R_2}{L_1} y_i \end{pmatrix}$$

con $i = 0, \dots, 3$, $x_0, y_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad t = 0{,}1$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9983 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad t = 0{,}2$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4858 \\ 0{,}7986 \end{pmatrix} , \quad t = 0{,}3$$

finalmente,

$$\boxed{\begin{aligned} i_1(0{,}3) &\simeq 2{,}4858 \text{ A} \\ i_2(0{,}3) &\simeq 0{,}7986 \text{ A} \end{aligned}}$$

|| RTA.

4. Dado el sistema lineal $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$

a) Hallar el $\rho(T_{GS})$. Siendo T_{GS} la matriz del método de *Gauss-Seidel* asociada al sistema. Justificar la convergencia del método

b) Realizar dos iteraciones del método de *Gauss-Seidel* utilizar al menos 2 decimales y redondeo. Estimar el error relativo cometido entre dos iteraciones consecutivas. Tomar como semilla $\vec{x}^0 = (0\ 0\ 0)^t$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_{GS} = (D-L)^{-1} U}$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & -0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}48 & 0{,}07 \end{pmatrix}$$

$$\rho(T_{GS}) = \max\{|\lambda_i|\}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ 0 & -0{,}6-\lambda & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}48 & 0{,}07-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ 0 & -0{,}6-\lambda & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}48 & 0{,}07-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -0{,}6-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}48 & 0{,}07-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \left[-(0{,}6+\lambda)(0{,}07-\lambda) - 0{,}048 \right] =$$

$$= -\lambda \left(-0{,}042 + 0{,}6\lambda - 0{,}07\lambda + \lambda^2 - 0{,}048 \right) =$$

$= -\lambda\left(\lambda^2 + 0,53\lambda - 0,09\right) = \emptyset$

$\Rightarrow \lambda = \emptyset \quad \wedge \quad \lambda^2 + 0,53\lambda - 0,09 = \emptyset$

$\lambda = 0,1353 \quad \wedge \quad \lambda = -0,6653$

$\Rightarrow \sigma(T_{GS}) = \{\lambda = \emptyset, \lambda = 0,1353, \lambda = -0,6653\}$

Luego $\rho(T_{GS}) = 0,6653$

$\|T_{GS}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum^{n} |a_{ij}|$: sumatoria de las filas

$= \max\{4 ; 0,7 ; 0,55\} = 4$

$\Rightarrow \|T_{GS}\|_\infty = 4$

Como $\rho(T_{GS}) < \|T_{GS}\|_\infty \Rightarrow$ el método <u>CONVERGE</u>.

b) $\bar{x} = \bar{0}$

$\bar{x}_{k+1} = \underbrace{T_{GS}}_{A} \bar{x}_k + \underbrace{D^{-1}}_{B} \underbrace{b}_{C}$

$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0,5 \\ 1,4 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,34 \\ 1,738 \end{pmatrix}$

$e_r = \dfrac{\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|}{\|\bar{x}_1\|} = \dfrac{2,9240}{2,0421} = 1,4319$

5. Se sabe que la función $f(x) = x^2 - 5x - e^x$ tiene una raíz real en el intervalo $[-1, 0]$.

a) Hallar dicha raíz como punto fijo de una función g admisible. Realizar tres iteraciones de dicho método usar como semilla $x_0 = -0.5$.

b) Hallar el error relativo entre dos iteraciones consecutivas.

$p \;/\; f(p) = \emptyset \quad \wedge \quad g(p) = p$

$g(x) = x - f(x)$

$\quad = -x^2 - 4x + e^x \qquad$ ¿ admisible?

¿EXISTE?

$-1 < g(x) < 0 \rightarrow$ NO!

hay que buscar otro...

$x^2 - 5x - e^x = \emptyset$

$x^2 = 5x + e^x$

$x = 5 + \dfrac{e^x}{x} \rightarrow$ TAMPOCO!

$x^2 - 5x = e^x$

$x = \ln(x^2 - 5x) \rightarrow$ TAMPOCO!

pruebo con $g(x) = x - \varphi(x_0) f(x)$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

$f'(x) = 2x - 5 - e^x$, tomo $x_0 = -0{,}5$

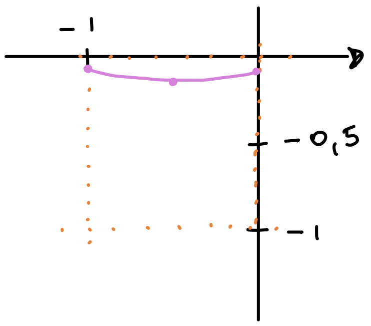
$\Rightarrow \varphi(x_0) = -0{,}1514$

$g(x) = x + 0{,}1514 f(x)$ ¿ admisible?

$\quad = x + 0{,}1514 (x^2 - 5x - e^x)$

$\quad = 0{,}1514 x^2 + 0{,}243 x - 0{,}1514 e^x$

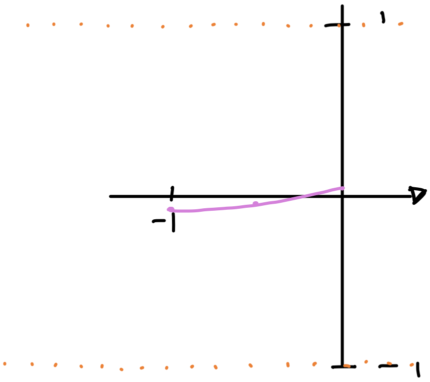
¿EXISTE?



SÍ

• ¿Es único?

$g'(x) = 0{,}3028x + 0{,}243 - 0{,}1514e^x$



sí

Luego g ∈ admisible

Calculo la raíz de $f(x)$ como pf de

$g(x) = 0{,}1514x^2 + 0{,}243x - 0{,}1514e^x$, $x_0 = -0{,}5$:

$g_1 = -0{,}1755$

$g_2 = -0{,}1650$

$g_3 = -0{,}1643$

$f(p_3) = 7{,}053 \cdot 10^{-4} \approx 0$ $(e < 10^{-5})$

$\downarrow$

$-0{,}1643$

b) $er_{g_3,g_2} = \dfrac{|g_2 - g_3|}{|g_2|} = 4{,}242 \cdot 10^{-3}$

20230809

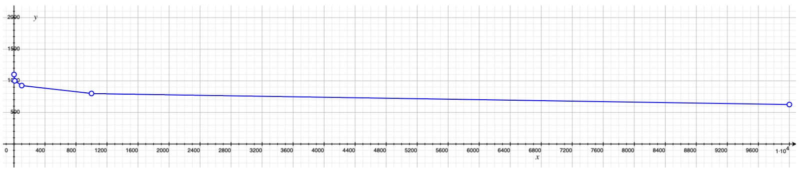
1. Se hace la prueba a un material para estudiar la falla por fatiga cíclica, en la que se aplica un esfuerzo, en MPa, al material y se mide el número de ciclos que se necesita para hacer que falle. Los resultados se presentan en la tabla siguiente. Al hacerse una gráfica log-log, del esfuerzo versus los ciclos, la tendencia de los datos presenta una relación lineal.

$N, ciclos$	1	10	100	1000	10000
$Esfuerzo, MPa$	1100	1000	925	800	625

   a) Usar regresión por mínimos cuadrados para determinar la ecuación de mejor ajuste a dichos datos.

   b) Estimar el esfuerzo para 9800 ciclos.

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$



log - log : relación lineal

$\log x - \log y$

$$\underbrace{\log y = a \log x + b}$$

$$y = 10^{a \log x + b} = 10^{a \log x} \cdot 10^b = x^a \cdot 10^b$$

$\boxed{\text{MODELO POTENCIAL}}$

$$\log y_1 = a \log x_1 + b$$
$$\log y_2 = a \log x_2 + b$$
$$\log y_3 = a \log x_3 + b$$
$$\log y_4 = a \log x_4 + b$$
$$\log y_5 = a \log x_5 + b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \log y_1 \\ \vdots \\ \log y_5 \end{pmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\hat{x}} \underbrace{\begin{pmatrix} \log x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \log x_5 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \log x_1 & \dots & \log x_5 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \log x_5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma \log^2 x_i & \Sigma \log x_i \\ \Sigma \log x_i & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} \log x_1 & \cdots & \log x_5 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log y_1 \\ \vdots \\ \log y_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum \log x_i \log y_i \\ \sum \log y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28{,}83 \\ 14{,}71 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28{,}83 \\ 14{,}71 \end{pmatrix}$$

luego: $a = -0{,}059$

$b = 3{,}06$

a) $\Rightarrow \boxed{\tilde{y} = x^{-0{,}059} \quad 10^{3{,}06}}$ RTA.

$\tilde{y}(1) = 1148 \approx y(1) = 1100$

$\tilde{y}(10) = 1002 \approx y(10) = 1000$

$\underline{\text{Rel. lineal}}$ $\underbrace{\log x}$ - $\underbrace{\log y}$

$\log_{10} y = \underline{a} \log x + \underline{b}$ linealizado

$y = 10^{a \log x + b}$

$y = 10^{a \log x} \cdot 10^b$

$y = (10^{\log_{10} x})^a \cdot 10^b$

$y = x^a \quad 10^b$

$\tilde{y} = x^{a} \cdot 10^{b}$ por CM

$A^T A \hat{x} = A^T b$

b) $\boxed{\tilde{y}(9800) = 668}$ RTA.

2. La masa total de una barra de densidad variable está dada por: $m = \int_0^L \rho(x)A_c(x)dx$, donde m = masa, $\rho(x)$ =densidad, $A_c(x)$ =área de la sección transversal, x =distancia a lo largo de la barra y L =longitud total de la barra. Se midieron los datos siguientes para una barra de 12 m de longitud. Determinar una aproximación de la masa en kilogramos usando *Simpson* $\frac{1}{3}$.

x, m	0	2	4	6	8	10	12
$\rho, \frac{g}{cm^3}$	4	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
A_c, cm^2	100	103	106	110	120	133	150

$$m = \int_0^L f(x)\,dx \simeq$$

$$\simeq \frac{h}{3}\left[f(0) + f(L) + 4\sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k}) \right.$$

con $N = 7$, $L = 12 \Rightarrow h = \frac{12-0}{7} = 1,7$

$$m \simeq 0,5667\left[400 + 495 + 4 \cdot 1278,35 + 2 \cdot 844,34\right]$$

x_i	$f(x_i) = \rho(x_i) \cdot A_c(x_i)$
x_0	400
x_1	406,85
x_2	412,34
x_3	418
x_4	432
x_5	453,53
x_6	495

$$\sum_{k=0}^{2} f(x_{2k+1}) = f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)$$
$$= 1278,35$$

$$\sum_{k=1}^{2} f(x_{2k}) = 844,34$$

finalmente $\boxed{m \simeq 4341,94\ g = 4,34\ kg}$

RoA.

3. El balance de calor en estado estacionario se representa como: $\frac{d^2T}{dx^2} + 0.01(T_a - T) = 0$, para una barra de longitud L. Sabiendo que $T_a = 20°C$.

a) Desarrolle el método de diferencias finitas para un problema de valores en la frontera.

b) Sabiendo que la barra tiene una longitud de $10m$ con $T(0) = 40°C$ y $T(L) = 200°C$. Usar lo desarrollado en *a)* para evaluar el calor en los puntos intermedios de la barra con $N = 8$.

$$T'' + 0{,}01\,(20 - T) = 0$$

a) DIFERENCIAS FINITAS PVF

$$\boxed{\begin{aligned} &y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = f(x)\\ &y(a) = \alpha\\ &y(b) = \beta \end{aligned}}$$

luego:

$$T'' + 0{,}01\,(20 - T) = 0 \qquad\qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$T'' + 0{,}2 - 0{,}01T = 0$$

$$T'' - 0{,}01T = -0{,}2 \Rightarrow P(x) = 0$$

$$Q(x) = -0{,}01$$

$$f(x) = -0{,}2$$

Por lo tanto:

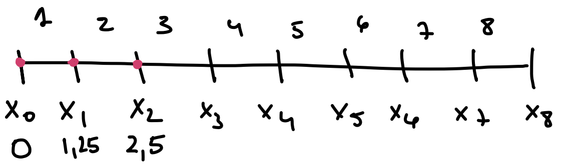
$$\boxed{\left(1 + \frac{h}{2}P_i\right) y_{i+1} + \left(-2 + h^2 Q_i\right) y_i + \left(1 - \frac{h}{2}P_i\right) y_{i-1} = h^2 f_i}$$

$$\Rightarrow y_{i+1} + \left(-2 + h^2 \cdot (-0{,}01)\right) y_i + y_{i-1} = h^2 \cdot (-0{,}2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{i+1} - \left(2 + 0{,}01h^2\right) y_i + y_{i-1} = -0{,}2\,h^2} \quad \text{RTA}$$

b) $a = 0$, $b = 10$, $T(0) = 40$, $T(L) = 200$, $N = 8$

$$h = \frac{10}{8} = 1{,}25, \quad y_0 = 40, \quad y_8 = 200, \quad x_i = 0 + 1{,}25 \cdot i, \quad i \in [0,8]$$



Resuelvo para

$$y_{i+1} - 2{,}016\,y_i + y_{i-1} = -0{,}3125$$

$y(x_0) = 40$ $\qquad$ $y(x_8) = 200$

$y(x_1) = y_1$

$$y_2 - 2{,}016\, y_1 + y_0 = -0{,}3125 \Rightarrow y_2 - 2{,}016\, y_1 = -40{,}3125$$

$$y_3 - 2{,}016\, y_2 + y_1 = -0{,}3125$$

$$y_4 - 2{,}016\, y_3 + y_2 = -0{,}3125$$

$$y_5 - 2{,}016\, y_4 + y_3 = -0{,}3125$$

$$y_6 - 2{,}016\, y_5 + y_4 = -0{,}3125$$

$$y_7 - 2{,}016\, y_6 + y_5 = -0{,}3125$$

$$y_8 - 2{,}016\, y_7 + y_6 = -0{,}3125 \Rightarrow -2{,}016\, y_7 + y_6 = -200{,}3125$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-2{,}016 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40{,}3125 \\
1 & -2{,}016 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}3125 \\
0 & 1 & -2{,}016 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}3125 \\
0 & 0 & 1 & -2{,}016 & 1 & 0 & 0 & -0{,}3125 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2{,}016 & 1 & 0 & -0{,}3125 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2{,}016 & 1 & -0{,}3125 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2{,}016 & -200{,}3125
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-2{,}016 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40{,}3125 \\
0 & 3{,}0643 & -2{,}016 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40{,}9425 \\
0 & 0 & -4{,}1416 & 3{,}0643 & 0 & 0 & 0 & -41{,}9 \\
0 & 0 & 0 & 5{,}3255 & -4{,}1416 & 0 & 0 & 43{,}2005 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -6{,}5746 & 5{,}3255 & 0 & -44{,}8647 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7{,}9289 & -6{,}5746 & 46{,}9193 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9{,}4101 & -1635{,}1771
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array}
\end{array}$$

$$-9{,}4101\, y_7 = -1635{,}1771 \Rightarrow \boxed{y_7 = 173{,}7683}$$

$$7{,}9289\, y_6 = 46{,}9193 + 6{,}5746 \cdot 173{,}7683 \Rightarrow \boxed{y_6 = 150{,}0052}$$

$$-6{,}5746\, y_5 = -44{,}8647 - 5{,}3255 \;\; 150{,}0052 \Rightarrow \boxed{y_5 = 128{,}3298} \;\|$$

$$5{,}3255\, y_4 = 43{,}2005 + 4{,}1616 \cdot 128{,}3298 \Rightarrow \boxed{y_4 = 108{,}3950} \;\|$$

$$-4{,}1616\, y_3 = -41{,}9 - 3{,}0643 \cdot 108{,}3950 \Rightarrow \boxed{y_3 = 89{,}8824} \;\|$$

$$3{,}0643\, y_2 = 40{,}9425 + 2{,}016 \cdot 89{,}8824 \Rightarrow \boxed{y_2 = 72{,}4947} \;\|$$

$$-2{,}014\, y_1 = -40{,}3125 - 72{,}4947 \Rightarrow \boxed{y_1 = 55{,}9560} \;\|$$

4. La ecuación que gobierna el movimiento de una masa m unida a un resorte (con constante k) y a un amortiguador (con constante c) sobre la que además actúa una fuerza externa $F(t)$ se describe como: $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$. Se tiene un cuerpo con masa $m = 1$. Se sabe que: $c = 0$, $k = 9$ y $F(t) = 80cos(5t)$. Ademas :$x_0 = 1$ (m) y velocidad inicial $v_0 = 0\frac{m}{s}$. Encontrar la la posición del cuerpo y su velocidad al cabo de $1.5 segundos$ usando tres iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio.

$$m x'' + c x' + k x = f(t) \quad , \quad h = \frac{1,5 - 0}{3} = 0,5$$

$$\begin{cases} x'' + 9x = 80 \cos(5t) \\ x_0 = 1 \, m \\ v_0 = 0 \, m/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = 80 \cos(5t) - 9x = f(t, x, x') \\ x(t=0) = x_0 = 1 \\ x'(t=0) = v_0 = 0 \end{cases}$$

$$x' = v$$

$$x'' = v' = a = 80 \cos(5t) - 9x$$

luego :

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = 80 \cos(5t) - 9x \\ x_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = v_n$$

$$m_2 = v_n + \frac{h k_1}{2}$$

$$k_1 = f(t_n, x_n, v_n)$$

$$k_2 = f(t_n + h/2 \, ; \, x_n + h m_1/2 \, ; \, v_n + h k_1/2)$$

RK 1/2

ORDEN

SUPERIOR

$\underline{n=0}$:

$$m_1 = v_0 = 0$$

$$k_1 = 80\cos(5.0) - 9x_0 = 71$$

$$m_2 = v_0 + \frac{0{,}5 \cdot 71}{2} = 17{,}75$$

$$k_2 = f(0+0{,}25 \; ; \; 1+0 \; ; \; 17{,}75)$$

$$= 80\cos(5 \cdot 0{,}25) - 9 \cdot 1 = 14{,}23$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 17{,}75 \\ 14{,}23 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8{,}88 \\ 8{,}12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}88 \\ 8{,}12 \end{pmatrix}$$

$\underline{n=1}$:

$$m_1 = v_1 = 8{,}12$$

$$k_1 = f(t_1, x_1, v_1) = 80\cos(5t_1) - 9x_1 = -153{,}01$$

$$m_2 = v_1 + \frac{0{,}5\,(-153{,}01)}{2} = -30{,}13$$

$$k_2 = f\big(t_1 + 0{,}25 \; ; \; x_1 + 0{,}25 \cdot 8{,}12 \; ; \; v_1 + 0{,}25 \cdot (-30{,}13)\big)$$

$$= f(0{,}75 \; ; \; 11{,}91 \; ; \; 0{,}5875)$$

$$= 80\cos(5 \cdot 0{,}75) - 9 \cdot 11{,}91$$

$$= -172{,}83$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9{,}88 \\ 8{,}12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15{,}07 \\ -86{,}42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}19 \\ -78{,}3 \end{pmatrix}$$

$\underline{n=2}$:

$$m_1 = v_2 = -78{,}3$$

$$k_1 = f(t_2, x_2, v_2) = 80\cos(5\ 1) - 9\cdot(-5,19)$$
$$= 69,40$$

$$m_2 = v_2 + \frac{h k_1}{2} = -78,3 + 0,25\cdot 69,40 = -60,95$$

$$k_2 = f(t_2 + 0,25\ ;\ x_2 + 0,25\, m_1\ ;\ v_2 + 0,25\, k_1)$$
$$= f(1,25\ ;\ -24,77\ ;\ -60,95)$$
$$= 302,89$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + 0,5 \begin{pmatrix} -60,95 \\ 302,89 \end{pmatrix}$$

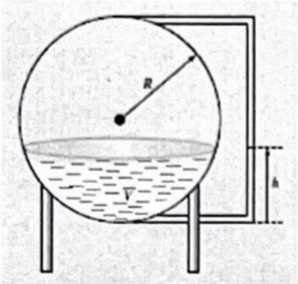
$$= \begin{pmatrix} -5,19 \\ -78,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30,48 \\ 151,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35,47 \\ 73,15 \end{pmatrix}$$

luego,

$$\boxed{\begin{aligned} x(1,5\ s) &= -35,47\ m \\ v(1,5\ s) &= 73,15\ m/s \end{aligned}}$$ RTA.

202208 W0

1. Suponga que está diseñando un tanque esférico de almacenamiento de agua para un poblado pequeño de un país en desarrollo. El volumen del líquido que puede contener se calcula como: $V = \frac{\pi h^2(3R-h)}{3}$ donde V = volumen (m^3), h = profundidad del agua en el tanque (m) y R = radio del tanque



(m). .Si $R = 3m$, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga $30m^3$? Hacer tres iteraciones del método de Newton-Raphson para determinar la respuesta. Encuentrar el error relativo aproximado después de cada iteración. Trabajar con 2 decimales ($\pi = 3.14$).

$$V(h) = \frac{\pi h^2 (3R-h)}{3}$$

Buscamos h_0 tq $V(h_0) = 30$

Usamos el método de NR para buscar la raíz de $V(h) = 30$:

$$\frac{\pi h^2 (3R-h)}{3} = 30 \Rightarrow \underbrace{\frac{\pi h^2}{3}(3R-h) - 30}_{f(h)} = 0$$

Buscamos la raíz de $f(h)$:

$$\frac{3,14}{3} h^2 (9-h) - 30 = 1,04667 h^2 (9-h) - 30 =$$

$$= 9,42003 h^2 - 1,04667 h^3 - 30 = f(h)$$

$$f'(h) = 18,84006 h - 3,14001 h^2$$

Por NR: $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$

sabiendo que $V_T(2R) = V_T(6) \Rightarrow 0 < h < 2R = 6$

tomando un pto. intermedio, una semilla podría ser $p_0 = \frac{6-0}{2} = 3$

Calculo :

n	p_n	p_{n+1}	e_r
0	3	2,04157	0,3128
1	2,04157	2,02744	0,0165
2	2,02744	2,02750	$6,9046 \cdot 10^{-5}$

Luego, por NR, $\boxed{h = 2{,}03 \pm 7 \cdot 10^{-5}}$ RTA.

2. Usar tres iteraciones del método de Newton para sistemas no lineales, para obtener una aproximación de la intersección de las circunferencias:

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-4)^2=5 \\ x^2+y^2=16 \end{cases} \quad \text{Tomar como semilla } (x_0, y_0)^t = (3.8, 1.7)$$

$$\begin{cases} \bar{x}_{u+1} = \bar{x}_u + \bar{y}_u \\ Jf(\bar{x}_u)\,\bar{y}_u = -f(\bar{x}_u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-4)^2 = 5 \\ x^2+y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2+(y-4)^2-5=0 \\ x^2+y^2-16=0 \end{cases}$$

Luego:

$$f = \begin{pmatrix} (x-4)^2+(y-4)^2-5 \\ x^2+y^2-16 \end{pmatrix}$$

$$Jf = \begin{pmatrix} 2(x-4) & 2(y-4) \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

De forma tal que:

$$\begin{pmatrix} 2(x_u-4) & 2(y_u-4) \\ 2x_u & 2y_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_u \\ b_u \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (x_u-4)^2+(y_u-4)^2-5 \\ x_u^2+y_u^2-16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{u+1} \\ y_{u+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_u \\ b_u \end{pmatrix}$$

<u>u = 0</u>:

$$\begin{pmatrix} -0,4 & -4,6 \\ 7,6 & 3,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0,33 \\ 1,33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2155 \\ 0,0905 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5845 \\ 1,7905 \end{pmatrix}$$

$\underline{k = 1}$:

$$\begin{pmatrix} -0,831 & -4,419 \\ 7,169 & 3,581 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0,0545 \\ 0,0545 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0152 \\ 0,0152 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5693 \\ 1,8057 \end{pmatrix}$$

$\underline{k = 2}$:

$$\begin{pmatrix} -0,8614 & -4,3884 \\ 7,1384 & 3,6114 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4,5498 \cdot 10^{-4} \\ 4,5498 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2899 \cdot 10^{-4} \\ 1,2899 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5692 \\ 1,8058 \end{pmatrix}}$$

RMA.

3. Un automóvil diesel acelera gradualmente, de tal manera que para los primeros 10 segundos la aceleración está dada por: $a(t) = 0.12t^2 + 0.6t$, $(\frac{m}{s^2})$. Si el auto parte del reposo, con velocidad inicial nula. Se pide:

   a) Plantear el problema de valores iniciales.

   b) Usar 2 iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio, para obtener la posición y la velocidad del móvil al cabo de 1 segundo.

a) $x'' = 0{,}12t^2 + 0{,}6t \quad , \quad 0 < t < 10$

$x'(0) = 0$

$x(0) = 0$

Planteo.

$x' = v$

$v' = x''$

luego:

$$\begin{cases} v' = 0{,}12t^2 + 0{,}6t = f(t, x, v) \\ x' = v \\ v(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Resuelvo RK punto medio:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ v_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad , \quad h = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

seg

#iter

$m_1 = v_k$

$k_1 = f(t_k, x_k, v_k)$

$m_2 = v_k + \frac{h}{2} k_1$

$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} m_1, v_k + \frac{h}{2} k_1\right)$

$\underline{k=0}$:

$m_1 = v_0 = 0$

$k_1 = f(t_0, x_0, v_0) = 0{,}12 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0 = 0$

$m_2 = v_0 + \frac{0{,}5}{2} k_1 = 0$

$$k_2 = f\Big(\underbrace{t_0 + \tfrac{0{,}5}{2}}_{0{,}25} , \underbrace{x_0 + \tfrac{0{,}5}{2} m_1}_{0} , \underbrace{v_0 + \tfrac{0{,}5}{2} k_1}_{0}\Big) = 0{,}1575$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1575 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}07875 \end{pmatrix}$$

$\underline{k=1}$

$m_1 = v_1 = 0{,}07875$

$k_1 = f(t_1, x_1, v_1) = 0{,}33$

$m_2 = v_1 + \frac{0{,}5}{2} k_1 = 0{,}14125$

$$k_2 = f(t_1 + 0{,}25 , x_1 + 0{,}25\, m_1 , v_1 + 0{,}25\, k_1)$$
$$= 0{,}5175$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 0{,}14125 \\ 0{,}5175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0806 \\ 0{,}3375 \end{pmatrix}$$

Luego, por RK2 :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(1s) \\ v(1s) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0{,}0806 \text{ m} \\ 0{,}3375 \text{ m/s} \end{pmatrix}}$$ RTA.

4. Se desea aproximar la función $f(x) = 3^x - 1$ mediante un trazador cúbico natural de la forma: $S(x) = \begin{cases} S_0 = a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3 & x_0 \le x \le x_1 \\ S_1 = a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3 & x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$ Tomar $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 3)$. Determinar los coeficientes y calcular $S(2.5)$

$$f(x) = 3^x - 1$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0 = a_0 + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3, & 0 < x < 1 \\ S_1 = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3, & 1 < x < 3 \end{cases}$$

luego:

$$S(x) = \begin{cases} S_0 = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3, & 0 < x < 1 \\ S_1 = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3, & 1 < x < 3 \end{cases}$$

Donde:

(1) $S_j(x_j) = f(x_j) = a_j \Rightarrow \begin{cases} S_0(x_0) = f(x_0) = a_0 = f(0) \\ S_1(x_1) = f(x_1) = a_1 = f(1) \end{cases}$

(2) $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) \Rightarrow S_0(x_1) = S_1(x_1) = f(x_1)$

(3) $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}) \Rightarrow S'_0(x_1) = S'_1(x_1)$

(4) $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}) \Rightarrow S''_0(x_1) = S''_1(x_1)$

Además, por Spline Natural:

(5) $S''_0(x_{inicio}) = S''_n(x_{fin}) = 0 \Rightarrow S''_0(x_0) = S''_1(x_2) = 0$

Calculo:

$a_0 = f(0) \Rightarrow a_0 = 0$

$a_1 = f(1) \Rightarrow a_1 = 2$

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} S_0 = 0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 \\ S_1 = 2 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3 \end{cases}$$

de (2): $S_0(x_1) = S_1(x_1) = f(x_1) = 2$ y $S_1(x_2) = f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} S_0(1) = b_0 + c_0 + d_0 \\ S_1(1) = 2 \end{array}\right\} b_0 = 2 - c_0 - d_0$$

de (3) : $S_0'(x_1) = S_1'(x_1)$

$S_0'(1) = b_0 + 2c_0 \cdot 1 + 3d_0 \cdot 1^2$

$S_1'(1) = b_1 + 2c_1(1-1) + 3d_1(1-1)^2$

$\Rightarrow b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1$

$b_1 = 2 - c_0 - d_0 + 2c_0 + 3d_0$

$b_1 = 2 + c_0 + 2d_0$

de (2) :

$S_1(x_2) = f(x_2)$

$2 + b_1 \cdot 2 + c_1 4 + d_1 \cdot 8 = 26$

$b_1 = \frac{24 - 4c_1 - 8d_1}{2}$

$b_1 = 12 - 2c_1 - 4d_1$

de (4) . $S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$

$S_0''(1) = 2c_0 + 6d_0 \cdot 1$

$S_1''(1) = 2c_1 + 6d_1(1-1)$

$2c_0 + 6d_0 = 2c_1$

$c_1 = c_0 + 3d_0$

de (5) : $S_0''(x_0) = S_1''(x_3) = 0$

$S_0''(0) = 2c_0 + 6d_0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

$S_1''(3) = 2c_1 + 6d_1(3-1)$

$= 2c_1 + 12d_1 = 0 \Rightarrow 2c_1 = -12d_1 \Rightarrow c_1 = -6d_1$

Reescribo :

$b_0 = 2 - d_0$

$b_1 = 2 + 2d_0$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 3d_0 \\ c_1 &= -6d_1 \end{aligned}\right\} 3d_0 = -6d_1 \Rightarrow d_1 = -\frac{1}{2} d_0$$

Luego :

$$\begin{cases} b_0 = 2 - d_0 \\ b_1 = 2 + 2d_0 \\ c_1 = 3d_0 \\ d_1 = -\frac{d_0}{2} \\ b_1 = 12 - 2c_1 - 4d_1 \end{cases}$$

$b_1 = b_1$:

$$2 + 2d_0 = 12 - 2c_1 - 4d_1$$

$$1 + d_0 = 6 - c_1 - 2d_1$$

$$d_0 = 5 - c_1 - 2d_1$$

$$c_1 = 5 - 2d_1 - d_0$$

$c_1 = c_1$:

$$3d_0 = 5 - 2d_1 - d_0$$

$$4d_0 = 5 - 2d_1$$

$$2d_1 = 5 - 4d_0$$

$$d_1 = 2{,}5 - 2d_0$$

$d_1 = d_1$:

$$2{,}5 - 2d_0 = -\frac{d_0}{2}$$

$$5 - 4d_0 = -d_0$$

$$-3d_0 = -5$$

$$\boxed{d_0 = 1{,}667} \;\|$$

$b_0 = 0{,}333$

$b_1 = 5{,}334$

$c_1 = 5{,}001$

$d_1 = -0{,}8335$

Luego :

$$S(x) = \begin{cases} S_0 = 0{,}333\,x + 1{,}667\,x^3 , & 0 < x < 1 \\ S_1 = 2 + 5{,}334\,(x-1) + 5{,}001\,(x-1)^2 - 0{,}8335\,(x-1)^3 , & 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(2{,}5) \underset{\text{tomo } S_1}{=} 18{,}4402} \;\| \text{ RTA}$$

$f(2{,}5) = 14{,}59$

5. Se observa que ciertos datos medidos tienen un comportamiento aproximadamente lineal en un gráfico $x - \log(y)$. (Donde $\log(y)$, es el logaritmo decimal de y)

a) Use la aproximación de cuadrados mínimos para determinar una ecuación que ajuste los datos.

b) Estime el valor de y para $x_0 = 3.0$

x	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
y	5.655	4.582	3.240	2.868	0.980

$x - \log y \rightarrow$ comportamiento lineal

$$\log y = mx + k$$

$$y = \underbrace{10^{mx}}_{b} \; \underbrace{10^{k}}_{a}$$

$$y = a\, 10^{bx}$$

$$\log y = \underbrace{\log a}_{\text{cte}} + \underbrace{bx}_{\text{var.}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \log y_1 \\ \log y_2 \\ \log y_3 \\ \log y_4 \\ \log y_5 \end{pmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \log a \\ b \end{pmatrix}}_{x}$$

Resuelvo por CM : $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 23{,}5 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} \Sigma \log y_i \\ \Sigma x_i \log_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}3729 \\ 2{,}6832 \end{pmatrix}$$

Luego.

$$\log \hat{a} = 0{,}8661 \Rightarrow \hat{a} = 7{,}3468$$

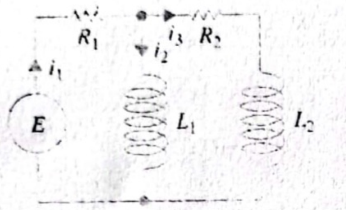
$$\hat{b} = -0{,}2175$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{y}(x) = 7{,}3468\; 10^{-0{,}2175\, x}}$$ RTA

RTA $$\boxed{\tilde{y}(3{,}0) = 1{,}2347}$$

20231213

1. El sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica que se muestra en la figura



es: $\begin{cases} \frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_1}i_2(t) - \frac{R_1}{L_1}i_3(t) + \frac{E(t)}{L_1} \\ \frac{di_3(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_2}i_2(t) - \frac{(R_1+R_2)}{L_2}i_3(t) + \frac{E(t)}{L_2} \end{cases}$ Utilizar tres iteraciones del *método de Euler* para estimar la intensidad de la corriente $i_2(0.3)$ e $i_3(0.3)$. Sabiendo que: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L_1 = 1h$, $L_2 = 1h$, $E(t) = 60V$. $i_2(0) = i_3(0) = 0$.

EULER para ECUACIONES DIFERENCIALES

$i_2 = x \quad , \quad i_3 = y$

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y + 60 = f(t,x,y) \quad , \quad x(0) = 0 \\ y' = -2x - 5y + 60 = g(t,x,y) \quad , \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Por Euler: $\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_i, x_i, y_i) \\ g(t_i, x_i, y_i) \end{pmatrix}$, $h = \frac{0{,}3 - 0}{3} = 0{,}1$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -2x_i - 2y_i + 60 \\ -2x_i - 5y_i + 60 \end{pmatrix}$$

$\underline{i = 0}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} -2.0 - 2\,0 + 60 \\ -2.0 - 5.0 + 60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\underline{i = 1}$:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}6 \\ 7{,}8 \end{pmatrix}$$

$\underline{i = 2}$:

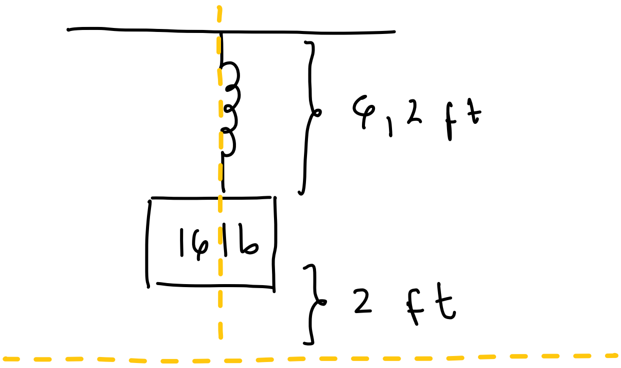
$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}12 \\ 7{,}98 \end{pmatrix}$$

Finalmente, por Euler: $\boxed{\begin{aligned} i_2(0{,}3) &\simeq 12{,}12\ A \\ i_3(0{,}3) &\simeq 7{,}98\ A \end{aligned}}$ RTA.

2. Una masa que pesa 16 libras se une a un resorte de 5 pies de largo, en equilibrio el resorte mide 8.2 pies. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto 2 pies arriba de la posicion de equilibrio. Si se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea, la ecuación diferencial que caracteriza a este fenómeno es:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 10x(t) = 0$. El tiempo está medido en segundos.

a) Plantear el problema de valores iniciales.

b) Aplicar tres iteraciones del método de Runge Kutta del punto medio para estimar la la posición $x(t)$ al cabo de 1.5 segundos.



$$v_i = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

$$x'' + 2x' + 10x = 0$$

$$x'' = -2x' - 10x$$

$$x' = v$$

$$v' = x''$$

Luego:

a)
$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -2v - 10x \\ x(0) = 4{,}2 \text{ ft} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

b) Por RK punto medio:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} m_2 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

$$m_1 = v_i$$

$$k_1 = f(t_i, x_i, v_i)$$

$$m_2 = v_i + \frac{h}{2} k_1$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} m_1, v_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$\underline{i = 0}$:

$m_1 = v_0 = 0$

$k_1 = f(0; 6{,}2, 0) = -62$

$m_2 = v_0 + 0{,}25\,(-62) = -15{,}5$

$k_2 = f\big(0{,}25;\ 6{,}2 + 0{,}25 \cdot 0;\ 0 + 0{,}25\,(-62)\big) = -31$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} -15{,}5 \\ -31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}55 \\ -15{,}5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x\,(0{,}5s) \\ v\,(0{,}5s) \end{pmatrix}$$

$\underline{i = 1}$:

$m_1 = v_1 = -15{,}5$

$k_1 = f(t_1, x_1, v_1) = f(0{,}5; -1{,}55; -15{,}5) = 46{,}5$

$m_2 = v_1 + 0{,}25\,k_1 = -3{,}875$

$k_2 = f(0{,}75; -5{,}425; -3{,}875) = 62$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}55 \\ -15{,}5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} -3{,}875 \\ 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}4875 \\ 15{,}5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x\,(1s) \\ v\,(1s) \end{pmatrix}$$

$\underline{i = 3}$:

$m_1 = v_2 = 15{,}5$

$k_1 = f(t_2, x_2, v_2) = f(1, -3{,}4875; 15{,}5) = 3{,}875$

$m_2 = v_2 + 0{,}25\,k_1 = 16{,}4688$

$k_2 = f\big(1{,}25;\ -3{,}4875 + 0{,}25 \cdot 15{,}5;\ 15{,}5 + 3{,}875 \cdot 0{,}25\big)$

$= f(1{,}25;\ 0{,}3875;\ 16{,}4688) = -34{,}8124$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}4875 \\ 15{,}5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 16{,}4688 \\ -34{,}8124 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}7469 \\ -2{,}9043 \end{pmatrix}$$

Finalmente, por RK punto medio:

$\boxed{x\,(1{,}5\,s) \simeq 4{,}7469\ ft}$ || RTA.

3. Se quiere construir un tejado ondulado de aluminio usando una máquina que comprime una plancha plana inicial y la transforma en una plancha cuya sección transversal tiene la forma de la función $g(x) = sin(x)$. Se sabe que la longitud transversal del tejado ondulado es de 20 metros. Aproximar mediante el método de *Simpson* $\frac{1}{3}$ la longitud L de la plancha plana inicial usar una particion de $n = 10$. ($L = \int_a^b ||\sigma'(t)||dt$.
$\sigma : [a, b] \longrightarrow R^2 / \sigma(t) = (x(t), y(t))$)

por Simpson 1/3 :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i}) \right]$$

Planteo : $\sigma(t) = (t, \sin t)$

$\sigma'(t) = (1, \cos t)$

$||\sigma'(t)|| = \sqrt{1^2 + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

$a = 0$, $b = 20$, $h = \frac{20}{10} = 2$

luego: $f(t) = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

$$\int_0^{20} f(t)\,dt \simeq 0{,}6667\left[f(0) + f(20) + 4\sum_{i=0}^{4} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{4} f(x_{2i}) \right]$$

x_i	$f(x_i)$
0	1,4142
2	1,0831
4	1,1946
6	1,3863
8	1,0105
10	1,3053
12	1,3084
14	1,0093
16	1,3845
18	1,1983
20	1,0801

$\sum_{i=0}^{4} f(x_{2i+1}) = 5{,}9823$

$\sum_{i=1}^{4} f(x_{2i}) = 4{,}898$

luego :

$$\boxed{\int_0^{20} f(t)\,dt \simeq 24{,}1475}$$

RTA.

4. Sea el sistema $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 \\ 0.99 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = (-0.01, -0.01)^t$. Se obtiene con aritmética de 3 dígitos una aproximación $\tilde{x} = (0.981, -0.981)^t$.

a) Estimar el número de condición de la matriz.

b) Obtener una mejor aproximación de la solución haciendo un paso de refinamiento iterativo.

REFINAMIENTO ITERATIVO

a) $r = b - A\hat{x}$

$A\tilde{y} = r$

$$\kappa(A) \simeq 10^t \frac{\|\tilde{y}\|_\infty}{\|\tilde{x}\|_\infty}$$

Luego:

$$r = \begin{pmatrix} -1{,}9 \cdot 10^{-4} \\ -1{,}9 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{y} = r \Rightarrow \tilde{y} = \begin{pmatrix} 0{,}019 \\ -0{,}019 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa(A) \simeq 10^3 \frac{0{,}019}{0{,}981} \Rightarrow \boxed{\kappa(A) \simeq 19{,}3678}$$

Rta.

b) $\tilde{x}_2 = \tilde{x} + \tilde{y} \Rightarrow \boxed{\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ Rta.

5. Hallar una aproximación de la solución del primer cuadrante del sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=25+2xy \\ x^2+2xy+y^2=169 \end{cases}$ Usar dos iteraciones del *método de Newton* para sistemas no lineales.
Tomar como semilla $\bar{x}^0=\overline{(8.5\ \ 3.5)}^t$.

NEWTON SISTEMAS NO LINEALES

$$\begin{cases} x^2+y^2=25+2xy \Rightarrow x^2+y^2-25-2xy=0 \\ x^2+2xy+y^2=169 \Rightarrow x^2+2xy+y^2-169=0 \end{cases}$$

Por Newton para sist. No lineales

$$\bar{x}_{k+1}=\bar{x}_k+\bar{y}_k$$

$$Jf(\bar{x}_k)\,\bar{y}_k=-f(\bar{x}_k)$$

Luego:

$$f(\bar{x}_k)=\begin{pmatrix} x_k^2+y_k^2-25-2x_ky_k \\ x_k^2+2x_ky_k+y_k^2-169 \end{pmatrix}$$

$$Jf(\bar{x}_k)=\begin{pmatrix} 2x_k-2y_k & 2y_k-2x_k \\ 2x_k+2y_k & 2x_k+2y_k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x_k-2y_k & 2y_k-2x_k \\ 2x_k+2y_k & 2x_k+2y_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x_k^2+y_k^2-25-2x_ky_k \\ x_k^2+2x_ky_k+y_k^2-169 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$\underline{k=0}$: $x_0=8{,}5$; $y_0=3{,}5$

$$\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 24 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5208 \\ 0{,}5208 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9{,}028 \\ 4{,}028 \end{pmatrix}$$

$\underline{k=1}$:

$$\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 26{,}112 & 26{,}112 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}4591 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}0279 \\ -0{,}0279 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}0001 \\ 4{,}0001 \end{pmatrix}$$

Luego, por NR para sistemas No lineales:

$$\boxed{\begin{aligned} x &\simeq 9{,}0001 \\ y &\simeq 4{,}0001 \end{aligned}}$$ RTA.

1. El teorema del valor medio para integrales establece que:
Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b-a)$

a) Sea $f(x) = e^x - sen(\pi x)$ con $x \in [0,2]$, determinar una aproximación del valor de α del teorema del valor medio, usando tres iteraciones del método de la bisección. Usar una aproximación de π y de e con tres decimales.

b) Sin realizar más iteraciones determinar cuantas se necesitarían para quer el error de truncamiento sea menor que 10^{-6}.

a) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 \left(e^x - sen\,\pi x\right) dx = 6{,}3891$

$\Rightarrow 6{,}3891 = f(\alpha) \cdot 2 \Rightarrow f(\alpha) = 3{,}1946$

luego:

$e^\alpha - sen(\pi\alpha) = 3{,}1946$

$e^\alpha - sen(\pi\alpha) - 3{,}1946 = 0$

llamo $h(\alpha) = e^\alpha - sen(\pi\alpha) - 3{,}1946$

Busco la raíz de $h(\alpha)$ por Bisección

$\left.\begin{array}{l} h(0) < 0 \\ h(2) > 0 \end{array}\right\}$ por Bolzano hay cambio de signo

$p_0 = \dfrac{b_0 + a_0}{2} = \dfrac{2-0}{2} = 1 \rightarrow h(1) = -0{,}4763$

$h(p_0) < 0 \Rightarrow a_1 = p_0 = 1$

$b_1 = 2$

$p_1 = \dfrac{2+1}{2} = 1{,}5 \rightarrow h(p_1) = 2{,}2871$

$h(p_1) > 0 \Rightarrow a_2 = p_0 = 1$

$b_2 = p_1 = 1{,}5$

$p_2 = \dfrac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25 \longrightarrow h(p_2) = 1{,}0028$

luego: $\boxed{\alpha \simeq 1{,}0028}$ RTA.

b) $\dfrac{\log(b-a) - \log(10^{-4})}{\log(2)} < n$

$20{,}9316 < n$

Luego, se necesitan al menos 21 iteraciones del método de la Bisección para obtener una aproximación cuyo error sea menor a 10^{-4}.

$\boxed{n = 21}$ // RTA

2. Hornbeck en 1975 propuso la siguiente ecuación diferencial ordinaria parásita no lineal: $\frac{dy_1}{dt} = 5(y_1 - t^2)$. Si la condición inicial es $y_1(0) = 0.08$. Hallar el valor de $y_1(0.3)$, usando tres iteraciones del método de Runge-Kutta del punto medio.

$y' = 5(y - t^2)$

$y(0) = 0{,}08$

$y(0{,}3) = ?$

$h = \frac{0{,}3 - 0}{3} = 0{,}1$

por RK punto medio:

$y_{i+1} = y_i + h k_2$

$k_1 = f(t_i, y_i)$

$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$

Luego:

$y_{i+1} = y_i + 0{,}1 k_2$

$k_1 = 5(y_i - t_i^2)$

$k_2 = 5\left[(y_i + 0{,}05 k_1) - (t_i + 0{,}05)^2\right]$

$\underline{i = 0}$:

$k_1 = 0{,}4$

$k_2 = 0{,}4875$

$y_1 = 0{,}1288$

$\underline{i = 1}$:

$k_1 = 0{,}35$

$k_2 = 0{,}375$

$y_2 = 0{,}1175$

$\underline{i = 2}$:

$k_1 = 0{,}3875$

$k_2 = 0{,}3719$

$y_3 = 0{,}1547$

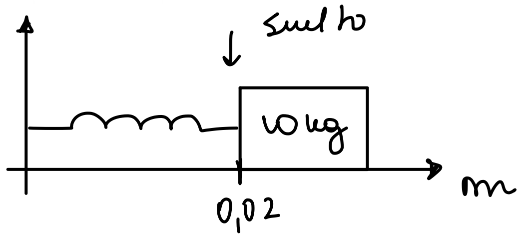
Luego, por RK-1/2:

$\boxed{y(0{,}3s) = 0{,}1547}$

RTA

3. Considerar una masa de 10 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 10\frac{N}{m}$. Si se alarga el resorte una distancia de 0.02 m y se suelta a partir del reposo, determinar la posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t = 0.3$ s, usar tres pasos del método de Euler. Sabiendo que la ecuación diferencial que caracteriza el movimiento vibratorio del péndulo es:

$m\frac{dx^2}{dt^2} + kx = 0$



$k = 10 \frac{N}{m}$ $\qquad h = \frac{0,3}{3} = 0,1$

$x(0,3\ s) = ?$

$v(0,3\ s) = ?$

$10x'' + 10x = 0$

$x'' + x = 0 \Rightarrow x'' = x$

veamos que $\quad x' = v$

$\qquad\qquad\quad v' = x''$

luego:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = x'' = x = f(t, x, v) \\ x(0) = 0,02 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

por Euler:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_i \\ f(t_i, x_i, v_i) \end{pmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} v_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,002 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0202 \\ 0,004 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0206 \\ 0{,}00602 \end{pmatrix}$$

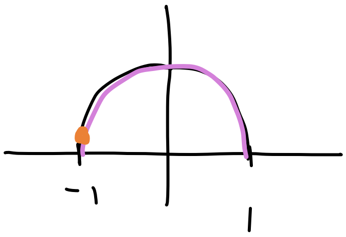
Luego, por Euler:
$$\boxed{\begin{aligned} x(0{,}3\ s) &\simeq 0{,}0206\ m \\ v(0{,}3\ s) &\simeq 0{,}00602\ m/s \end{aligned}}$$

RTA

4. *a*) Calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ sobre una partícula que recorre la semi circunferencia superior que une los puntos $(1,0)$ con $(-1,0)$ usando la regla de *Simpson 1/3* con $N = 12$.Usar $\pi \simeq 3$. Usar al menos cuatro decimales y redondeo.

b) Indicar si el error es menor o igual a un décimo.
$(W = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt,\ \sigma : [a,b] \to \mathbf{R}^2/\sigma(t) = (cos(t), sen(t)))$

a)



$$f(x,y) = (3y^2+2,\ 16x)$$
$$\sigma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)$$
$$W_f = \int_{-1}^{1} f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt$$

$$f(\sigma(t)) = (3\operatorname{sen}^2 t + 2,\ 16\cos t)$$
$$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t,\ \cos t)$$
$$f(\sigma(t))\,\sigma'(t) = -3\operatorname{sen}^3 t - 2\operatorname{sen} t + 16\cos^2 t = g(t)$$
$$\Rightarrow W_f = \int_0^{\pi} g(t)\,dt \simeq \frac{h}{3}\left[g(0) + g(\pi) + 4\sum_{i=0}^{5} g(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{5} g(x_{2i}) \right]$$

donde $h = \frac{\pi - 0}{12} = 0{,}25$

x_i	$g(x_i)$
0	16
0,25	14,48
0,5	11,032
0,75	6,2524
1	1,2004
1,25	-2,871
1,5	-4,892
1,75	-4,317
2	-1,303
2,25	3,3443

$$\sum_{i=0}^{5} g(x_{2i+1}) = 29{,}6277$$
$$\sum_{i=1}^{5} g(x_{2i}) = 14{,}4446$$

Luego:

$$\boxed{W_f \simeq 14{,}9028\ N}$$ Rta.

2,5	8,4292
2,75	12,739
3	15,39

b) Simpson 1/3 tiene una cota de $O(h^4)$

luego $\frac{1}{10} > O(h^4)$

El error efectivamente es menor que 1/10.

$$\int_0^3 g(t)\, dt \approx 14,9027 = sol_R$$

$$\int_0^3 g(t)\, dt \simeq 14,9028 = sol_S$$

$$|sol_R - sol_S| = 0,0001 < 0,1$$

5. Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

a) Demostrar que $\rho(T_{GS}) = 0.5$. Siendo T_{GS} la matriz del método de *Gauss-Seidel* asociada al sistema.

b) Realizar tres iteraciones del método de *Gauss-Seidel* utilizar al menos 4 decimales y redondeo. Estimar el error relativo cometido entre dos iteraciones consecutivas.

a) Reescribo el sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}_{b}$$

$A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{"B"}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{"C"}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{"D"}$$

$$T_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Busco $\rho(T_{GS})$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5-\lambda \end{pmatrix} = \emptyset$$

$$\Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5-\lambda \end{vmatrix} - 0{,}5 \begin{vmatrix} 0 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5-\lambda \end{vmatrix} - 0{,}5 \begin{vmatrix} 0 & -0{,}5-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(-0{,}5-\lambda)(-0{,}5-\lambda) - 0{,}5 \cdot 0 - 0{,}5 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda(-0{,}5-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 0 \quad \wedge \quad -0{,}5 - \lambda = 0$

$\lambda = -0{,}5$ (doble)

$\Rightarrow \sigma(T_{GS}) = \{ \lambda = 0 , \lambda = -0{,}5 \text{ (doble)} \}$

$\Rightarrow \rho(T_{GS}) = \max\{0 ; 0{,}5\} = 0{,}5$

b) además $C_{GS} = \underbrace{(D-L)^{-1} b}_{\text{"A"}} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

Resuelvo:

$$\bar{x}_{k+1} = \underset{\downarrow \atop A}{T_{GS}} \; \underset{\downarrow \atop \text{Ans}}{\bar{x}_k} + \underset{\downarrow \atop B}{C_{GS}}$$

tomo $\bar{x}_0 = \bar{0}$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 2{,}25 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}625 \\ 0{,}375 \\ 0{,}375 \end{pmatrix}, \quad \boxed{\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}125 \\ 1{,}3125 \end{pmatrix}} \text{ RTA.}$$

$$\frac{\| \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \|}{\| \bar{x}_2 \|} = \frac{1{,}9892}{0{,}8197} = \boxed{2{,}4247 = e_r} \text{ RTA.}$$

20200220

1. Dada la siguiente tabla correspondiente a valores medidos de una determinada función calcular el valor aproximado de la derivada en $x = 1$ usando el método de *extrapolación de Richardson*. ($R^{(k)}(h) = \frac{4^k R^{(k-1)}(h/2) - R^{(k-1)}(h)}{4^k - 1}$, $R^{(0)}(h) = R(h)$)

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x)$	1.0000	1.0645	1.2840	1.7551	2.7183	4.7707	9.4877	21.3809	54.5982

$$R^{k}(h) = \frac{4^{k} R^{k-1}(h/2) - R^{k-1}(h)}{4^{k} - 1}$$

$$R^{0}(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Dada $f \in C[1-h, 1+h] \Rightarrow h = 1$ y como máx. se pueden hacer $\frac{1}{4}$ cortes.

$$R^{0}(1) = \frac{f(1+1) - f(1-1)}{2 \cdot 1} = 26,7991$$

$$R^{0}(0,5) = \frac{f(1,5) - f(0,5)}{1} = 8,2037$$

$$R^{0}(0,25) = \frac{f(1,25) - f(0,75)}{0,5} = 6,0312$$

luego:

$$\begin{array}{ccccc} 26,7991 & & & & \\ & > & 2,0052 & & \\ 8,2037 & & & > & 5,5271 \\ & > & 5,3070 & & \\ 6,0312 & & & & \end{array}$$

RTA.

Finalmente, por Richardson: $\boxed{f'(1) = 5,5271}$

2. a) Hallar una aproximación de la solución real para la intersección entre la circunferencia $x^2-2x+y^2=0$ y la hipérbola $xy=0.433$. Utilizar dos iteraciones del método de *Newton* para sistemas no lineales. Usar como semilla $x^{(0)}=(0.49\ \ 0.85)^t$. Trabajar con al menos cuatro decimales y redondeo.

b) Graficar aproximadamente ambas curvas y la solución obtenida.

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ xy=0{,}433 \end{cases}$$

a)

$$f(\bar{x}_k)=\begin{pmatrix} x_k^2-2x_k+y_k^2 \\ x_k y_k-0{,}433 \end{pmatrix}$$

$$Jf(\bar{x}_k)=\begin{pmatrix} 2x_k-2 & 2y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix}$$

por NR sist. No lineales:

$$\bar{x}_{k+1}=\bar{x}_k+\bar{y}_k$$

$$Jf(\bar{x}_k)\,\bar{y}_k=-f(\bar{x}_k)$$

Reemplazo:

$$\begin{pmatrix} 2x_k-2 & 2y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x_k^2-2x_k+y_k^2 \\ x_k y_k-0{,}433 \end{pmatrix}$$

Calculo:

$$\begin{pmatrix} -1{,}02 & 1{,}7 \\ 0{,}85 & 0{,}49 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}0174 \\ 0{,}0145 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}0143 \end{pmatrix}$$

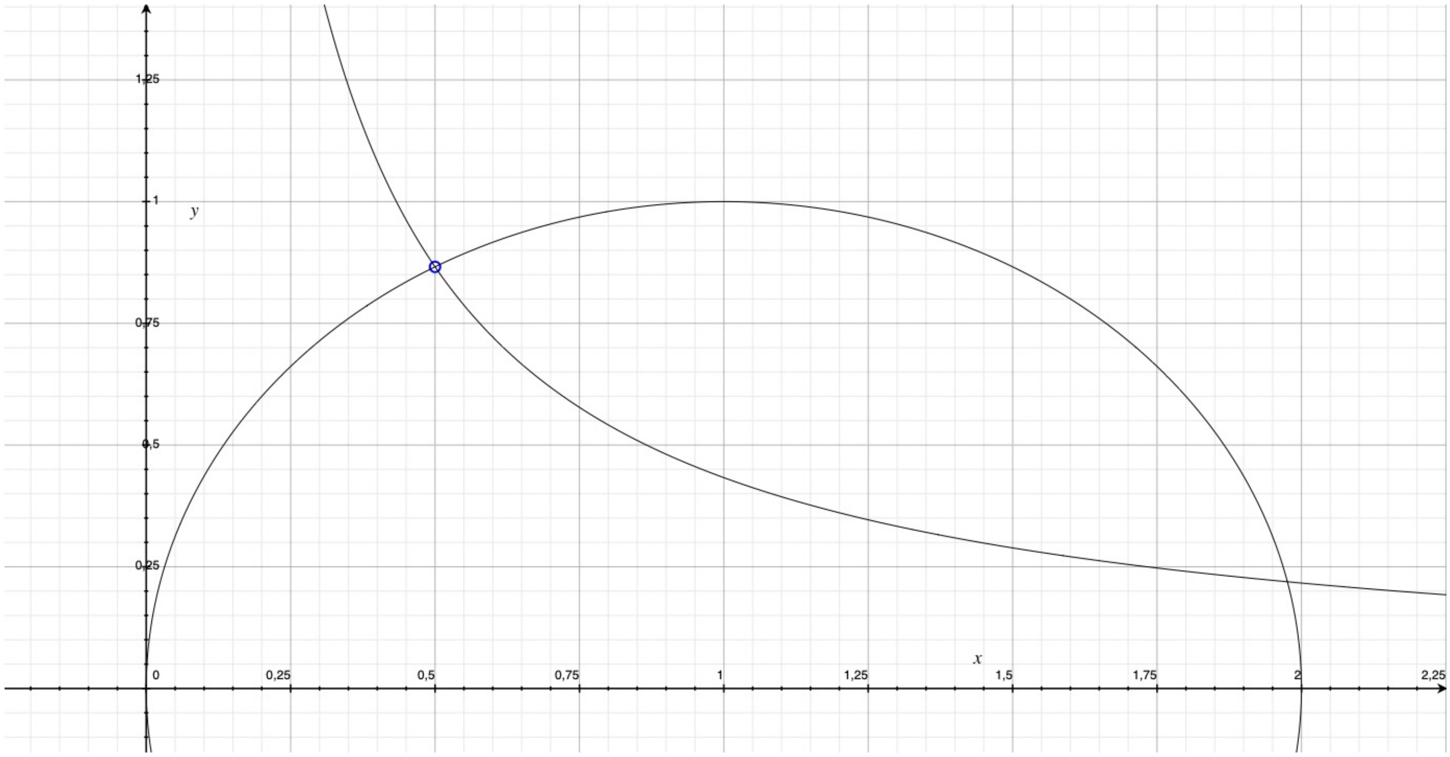
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}8443 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1{,}7326 \\ 0{,}8443 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}0005 \\ -0{,}0002 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4{,}823.10^{-5} \\ -3{,}1642.10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}49995 \\ 0{,}86598 \end{pmatrix}$$

por NR: $\begin{cases} x \simeq 0{,}49995 \\ y \simeq 0{,}86598 \end{cases}$

b) La solución para la intersección es:



que resulta muy bueno :)

3. a) Calcular el área encerrada bajo el gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$ cuando $x \in [-1, 1]$. Usar el método de Simpson $\frac{1}{3}$ con $N = 8$. Trabajar al menos con tres decimales y redondeo. $h = \frac{1-(-1)}{8} = 0{,}25$

b) Indicar si el error cometido en la aproximación es menor que 10^{-2}. Justificar la respuesta.

a) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 0{,}0834\left[f(-1) + f(1) + 4\sum_{i=0}^{3} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_{2i}) \right]$$

x_i	$f(x_i)$
-1	$0{,}3678$
$-0{,}75$	$0{,}5697$
$-0{,}5$	$0{,}7788$
$-0{,}25$	$0{,}9394$
0	1
$0{,}25$	$0{,}9394$
$0{,}5$	$0{,}7788$
$0{,}75$	$0{,}5697$
1	$0{,}3678$

$$\sum_{i=0}^{3} f(x_{2i+1}) = 3{,}0182$$

$$\sum_{i=1}^{3} f(x_{2i}) = 1{,}6065$$

Luego:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 1{,}2841}$$

Rta.

b) Veamos que $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx = 1{,}4936$ ↓ calculadora

Luego $|Sol_{Real} - Sol_{Simp}| = 0{,}2075$

$10^{-2} = 0{,}01 < 0{,}2$

$\Rightarrow$ El error cometido NO es menor a 10^{-2}.

¿Cómo justifico?

tiene que ver con el nombre de la Ec.

4. Los modelos *depredador-presa*, también conocidos como modelos *Lotka-Volterra* responden al sistema de ecuaciones diferenciales (en su forma mas simple):

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

a) Utilizar los valores de las constantes $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.8$ y $d = 0.3$, y las condiciones iniciales $x(0) = 2$ e $y(0) = 1$ para plantear el sistema anterior como un sistema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales.

b) Usar tres iteraciones del método de Euler para estimar $x(0.3)$ e $y(0.3)$. $\longrightarrow h = \frac{0,3}{3} = 0,1$

a)

$$\begin{cases} x' = 1,2\,x - 0,6\,x\,y \\ y' = -0,8\,y + 0,3\,x\,y \\ x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

b) por Euler:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_i, x_i, y_i) \\ g(t_i, x_i, y_i) \end{pmatrix}$$

Reemplazo:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + 0,1 \begin{pmatrix} 1,2\,x_i - 0,6\,x_i y_i \\ -0,8\,y_i + 0,3\,x_i y_i \end{pmatrix}$$

Resuelvo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,12 \\ 0,98 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2497 \\ 0,9639 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3896 \\ 0,9518 \end{pmatrix}$$

Luego, por Euler:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(0,3\,s) \simeq 2,3896 \\ y(0,3\,s) \simeq 0,9518 \end{array}}$$ Rta

5. La *Ley de enfriamiento de Newton* está caracterizada por la ecuación diferencial: $\frac{dT(t)}{dt} = -K(T - T_a)$, donde T es la temperatura del objeto, T_a es la tempertura del ambiente y K es la constante de proporcionalidad. Esta ecuación es usada en criminalística para determinar la hora de muerte, en el instante $t = 0$ se descubre un cuerpo. En ese instante se toma su temperatura $T_0 = 29.5°C$, dos horas después la temperatura es de $T_2 = 23.5°C$, lo que permite determinar la constante $K = 0.49926$, mientras que la temperatura ambiente es de $T_a = 20°C$.

   a) Con los datos anteriores plantear el PVI.

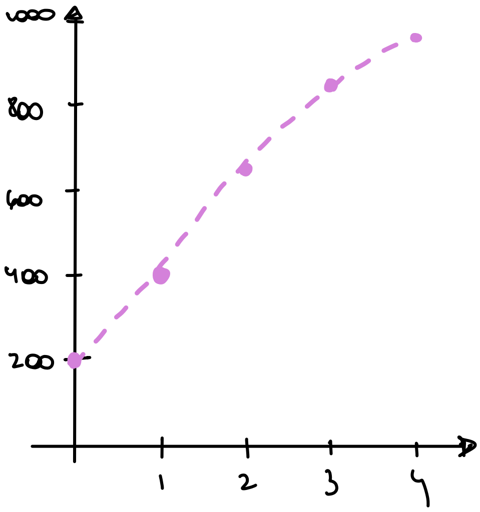
   b) Usar el método de Runge Kuta del punto medio para determinar aproximadamente la hora de muerte. Se sabe que la temperatura del cuerpo era el valor normal: $T_c = 36°C$. Usar $h = 0.2$, 0 $h = -0.2$, de acuerdo a la temperatura que establezca como semilla. ($h = 0.2$ o $h = -0.2$ equivale a dos horas).

20191218

1. a) Cuando una población $P(t)$ no puede crecer más de un cierto valor límite L, la gráfica de la función $P(t)$ es una curva llamada *curva logística* de ecuación: $P(t) = \frac{L}{1+ce^{at}}$. Ajustar por cuadrados mínimos los valores de c y a para $L = 2000$ con los datos de la siguiente tabla:

t	0	1	2	3	4
$P(t)$	200	400	650	850	950

b) Estimar la población para $t = 3.2$ (el tiempo está medido en horas). Usar cuatro decimales y redondeo.



a) $$P(t) = \frac{2000}{1+ce^{at}}$$

$$1+ce^{at} = \frac{2000}{P(t)}$$

$$ce^{at} = \frac{2000}{P(t)} - 1 \rightarrow \text{modelo expo.}$$

Luego:

$$y(t) = \frac{2000}{P(t)} - 1$$

$$y = ce^{at}$$

$$\ln y = \ln ce^{at}$$

$$\ln y = \ln c + at = at + \ln c$$

Resuelvo por CM: $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$\begin{pmatrix} \ln y_0 \\ \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \ln y_3 \\ \ln y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 & 1 \\ t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ t_3 & 1 \\ t_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \ln c \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{4} t_i^2 & \sum_{i=0}^{4} t_i \\ \sum_{i=0}^{4} t_i & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{4} t_i \ln y_i \\ \sum_{i=0}^{4} \ln y_i \end{pmatrix}$$

Calculo:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 66{,}6070 \\ 31{,}3485 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \ln c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66{,}4070 \\ 31{,}3485 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \ln \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}387 \\ 5{,}4997 \end{pmatrix}$$

veamos que $\ln \tilde{c} = 5{,}4997 \Rightarrow \tilde{c} = 244{,}6185$

luego, por CM:

$$\boxed{\tilde{y} = 244{,}6185\, e^{0{,}387t}} \quad RTA$$

b) $\boxed{P(3{,}2h) = \tilde{P}(3{,}2h) = 843{,}9556}$ RTA.