

66.70 Estructura del Computador

Algebra de Boole

para construir
computos
lógicos

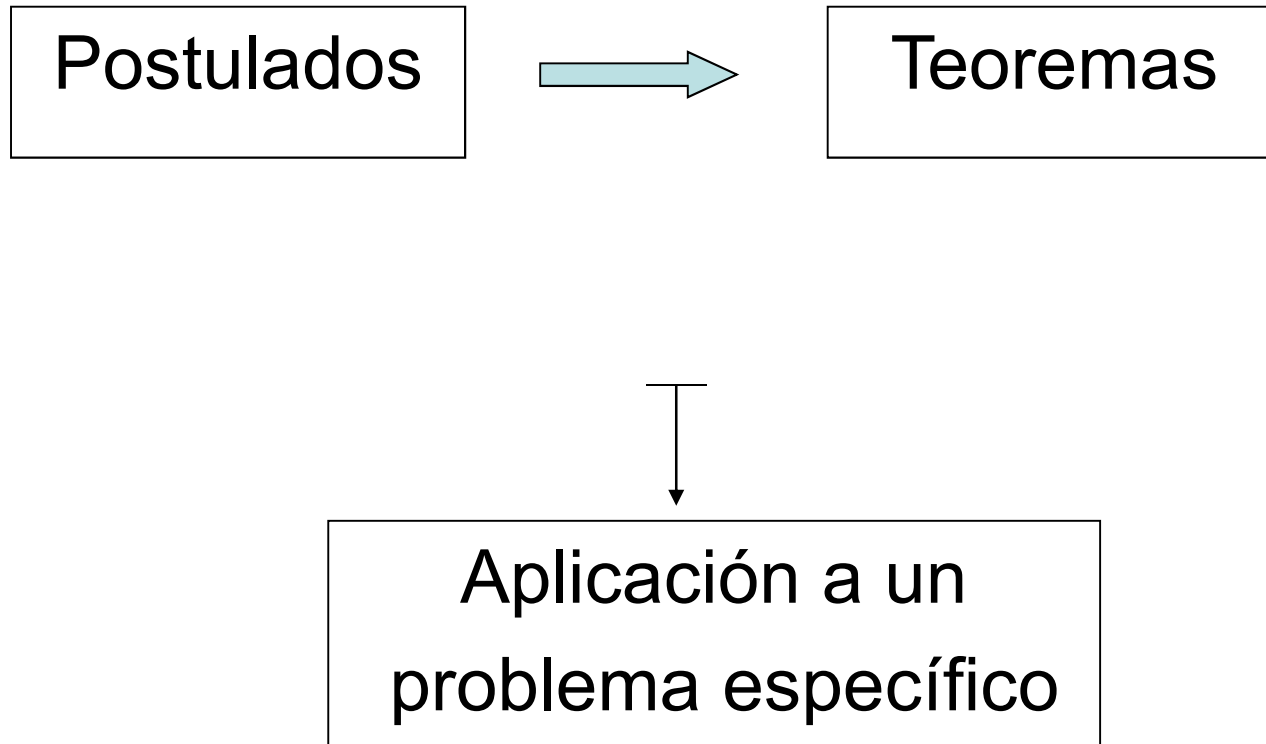
Algebra de Boole

- ❖ Concebida por George Boole (1815-1864) en su libro “THE LAWS OF THOUGHT”
 - ❖ Una oración es una proposición si sólo se le puede asignar uno de dos valores de verdad: Verd. o Falso
 - ❖ Cuáles de las siguientes son proposiciones
 - a) 3 es un número primo
 - b) cuando se añade 5 a 7, la suma es 14
 - c) Existen seres vivos en Venus
 - d) ¿Es primo el número 11?
 - e) Escriba con letra clara!
 - f) El árbol
 - ❖ Proposiciones compuestas
 - a) 1 es el primer número primo y es mayor que cero
 - b) J aprueba Algebra o J va al club
- ❖ Su formalización más precisa fue presentada recién en 1904 por Edward Vermilye Huntington:
- ❖ Establece un paralelo entre la Teoría de Conjuntos y el Cálculo Proposicional: *ambos son un Algebra de Boole*
- ❖ Shannon en 1937 prueba que cualquier relación numérica o lógica puede ser expresada en un circuito eléctrico utilizando el Algebra de Boole.
- ❖ Da una base teórica para poder diseñar y analizar circuitos lógicos (electrónica digital)

Postulados de Huntington

- ❖ P1) Se define un conjunto K de objetos sujetos a una *ley de equivalencia* "=" de modo que
si $a=b$ b puede sustituir a a en cualquier expresión sin afectar su validez
- ❖ P2) Regla de combinación "+" de modo que si a y b están en K entonces $a+b$ está en K
P2') Regla de combinación "." de modo que si a y b están en K entonces $a.b$ está en K
- ❖ P3) Existe un elemento 0 en K de modo que para todo a en K , $a+0=a$
P3') Existe un elemento 1 en K de modo que para todo a en K , $a.1=a$
- ❖ P4) $a + b = b + a$
P4') $a . b = b . a$
- ❖ P5) $a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$
P5') $a + (b . c) = (a+b) . (a + c)$
- ❖ P6) Existe un $\sim a$ de modo que
$$\begin{aligned} a . \sim a &= 0 \\ a + \sim a &= 1 \end{aligned}$$
- ❖ P7) Existen en K al menos dos elementos que no son equivalentes entre sí

Algebra de Boole



Aplicando el Algebra de Boole

Los siete postulados de Huntington deben verificarse en:

- los elementos del conjunto K
- los dos operadores

- Investigar si los circuitos de relés pueden expresarse por medio del álgebra de Boole

Principio de dualidad

$$+ \Leftrightarrow .$$

$$0 \Leftrightarrow 1$$

- *Presente en los Postulados de Huntington*
- *Si dos expresiones son iguales \Rightarrow sus duales también son iguales*

Teoremas

- Idempotencia: $a + a = a$ $a \cdot a = a$
- Elemento absorbente: $a + 1 = 1$ $a \cdot 0 = 0$
- Absorción : $a + (a \cdot b) = a$ $a \cdot (a + b) = a$
- Asociatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Complemento único: El elemento a' asociado al a es único
- Involución: $(a')' = a$, $a + \bar{a} = 1$, $a \cdot \bar{a} = 0$
- En cualquier álgebra booleana: $0' = 1$ $1' = 0$
- Leyes de De Morgan $(a + b)' = a' \cdot b'$ $(a \cdot b)' = a' + b'$

Teoremas

Idempotencia

$$\longrightarrow x \cdot x = x.$$

$$\begin{aligned} x \cdot x &= xx + 0 && \text{por el postulado: 3a)} \\ &= xx + xx' && 6b) \\ &= x(x + x') && 5a) \\ &= x \cdot 1 && 6a) \\ &= x && 3b) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow x + x = x.$$

$$\begin{aligned} x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{por el postulado: 3b)} \\ &= (x + x)(x + x') && 6a) \\ &= x + xx' && 5b) \\ &= x + 0 && 6b) \\ &= x && 3a) \end{aligned}$$

Teoremas

Idempotencia

$$\longrightarrow x + 1 = 1.$$

$$x + 1 = 1 \cdot (x + 1) \quad \text{por el postulado: 3b)}$$

$$= (x + x')(x + 1) \quad 6a)$$

$$= x + x' \cdot 1 \quad 5b)$$

$$= x + x' \quad 3b)$$

$$= 1 \quad 6a)$$

$$\longrightarrow x \cdot 0 = 0 \text{ por dualidad.}$$

Funciones lógicas

- Comparar con las funciones del Análisis Matemático
- Dos valores posibles
- Variables binarias: dependientes e independientes
- Expresión algebraica: operadores lógicos
- Representación por tablas de verdad

Funciones lógicas

- Funciones de dos variables: *cuántas? cuáles?*
- Idem N variables

Cómo expresar una función lógica

□ ¿Cada función tiene una única Tabla de Verdad?

□ ¿Cada función tiene una única Expresión Algebraica?

$$¿ \quad x'y'z + x'yz + xy' = x'z + xy' \quad ?$$

□ Expresiones “*equivalentes*”

Buscando la representación algebraica unívoca

ALGUNAS DEFINICIONES

LITERAL: Una variable y/o su complemento.

TÉRMINO PRODUCTO: Conjunto de literales relacionadas por el conector “ \bullet ”

TÉRMINO SUMA: Conjunto de literales relacionadas por el conector “ $+$ ”

TÉRMINO NORMAL:

Término producto o suma en el cual ningún literal aparece más de una vez

- Producto normal
- Suma normal

TÉRMINO CANÓNICO:

Término normal que contiene tantos literales como variables la función.

Buscando la representación algebraica *unívoca*

‘El adjetivo “canónico” se usa con frecuencia en matemáticas para indicar que algo es natural, como debe ser e independiente de elecciones arbitrarias, que es absoluto y no relativo a un observador, que es intrínseco y no depende de un sistema de referencia... ‘

(Wikipedia)

SUMA CANÓNICA Y PRODUCTO CANONICO:

- “Suma de minitérminos”
- “Producto de maxitérminos”

¿cómo paso de la tabla de verdad a la expresión canónica?

Representaciones unívocas de una función lógica

- ✓ Tabla de verdad
- ✓ Expresión algebraica por suma de minitérminos
- ✓ Expresión algebraica por producto de maxitérminos
- ✓ Suma de minitérminos en forma numérica
- ✓ Producto de maxitérminos en forma numérica

Compuerta

- Símbolo tipo bloque que representa una operación lógica
- Compuertas: *AND*, *OR*, *NOT*, *NAND*, *NOR*, *XOR*
- Relación directa entre la expresión algebraica y su representación gráfica
- Porqué representar por compuertas?

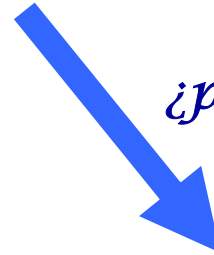
Dada una función lógica $F(x,y,..)$

¿porqué?



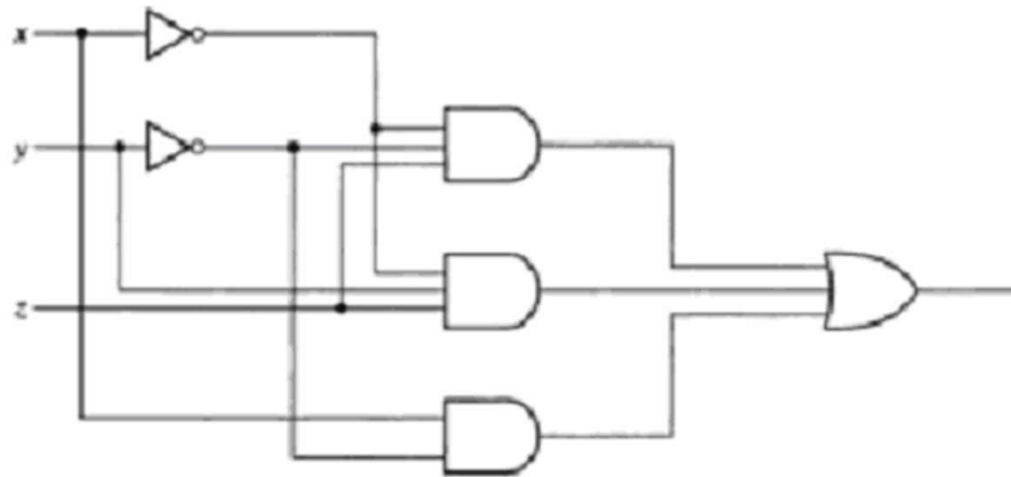
“Expresión unívoca”

¿porqué?

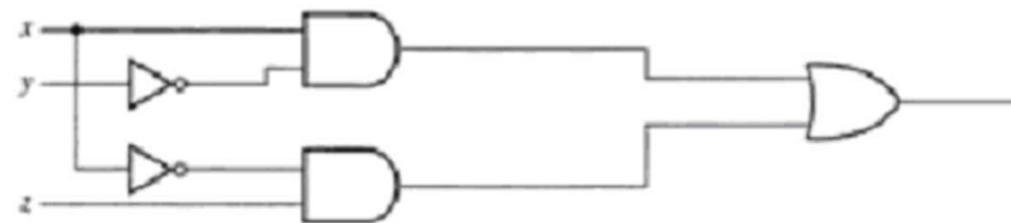


“Expresión simple”

$$F(x,y,z) = x'y'z + x'yz + xy' \rightarrow F(x,y,z) = x'z + xy'$$



$$F(x,y,z) = x'y'z +$$



$$F(x,y,z) = x'z +$$

Criterio de “simplicidad” de una expresión booleana

✓ *Menor número de términos*

✓ *Menor número de variables en cada término*

3 expr. equivalentes:

$$S = BC + ABC$$

$$S = ABC + AB$$

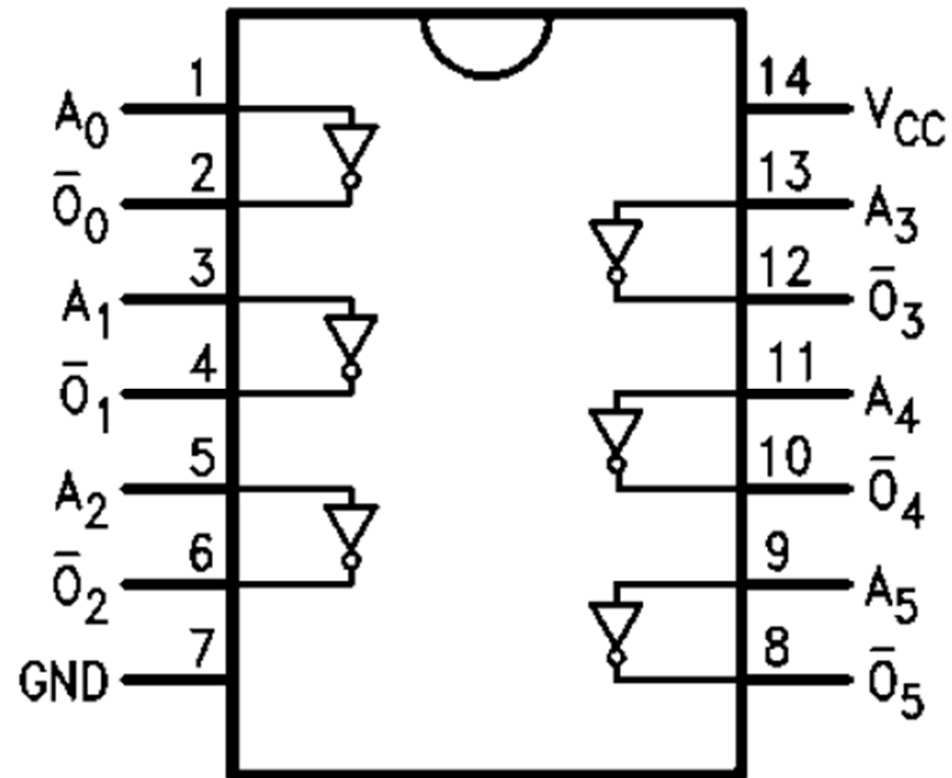
$$S = BC + AB$$

¿Porqué se que son equivalentes?

Expresión Mínima

CI comerciales

74AC04



CI comerciales

74HC00

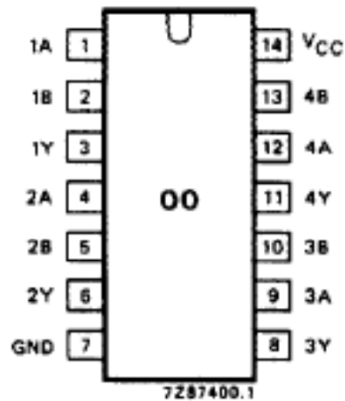


Fig.1 Pin configuration.

74HC00

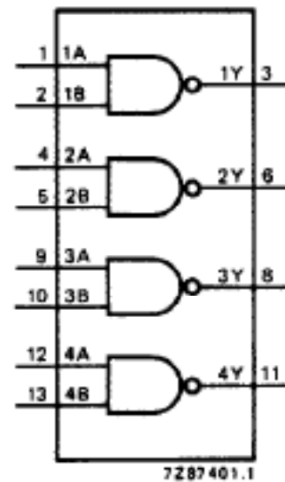
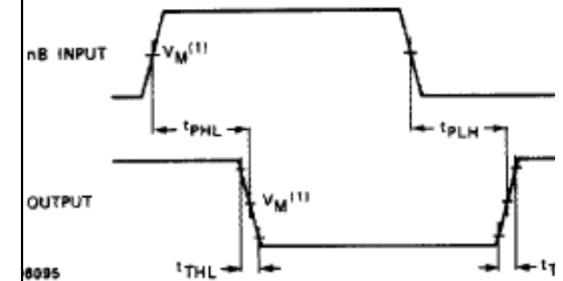


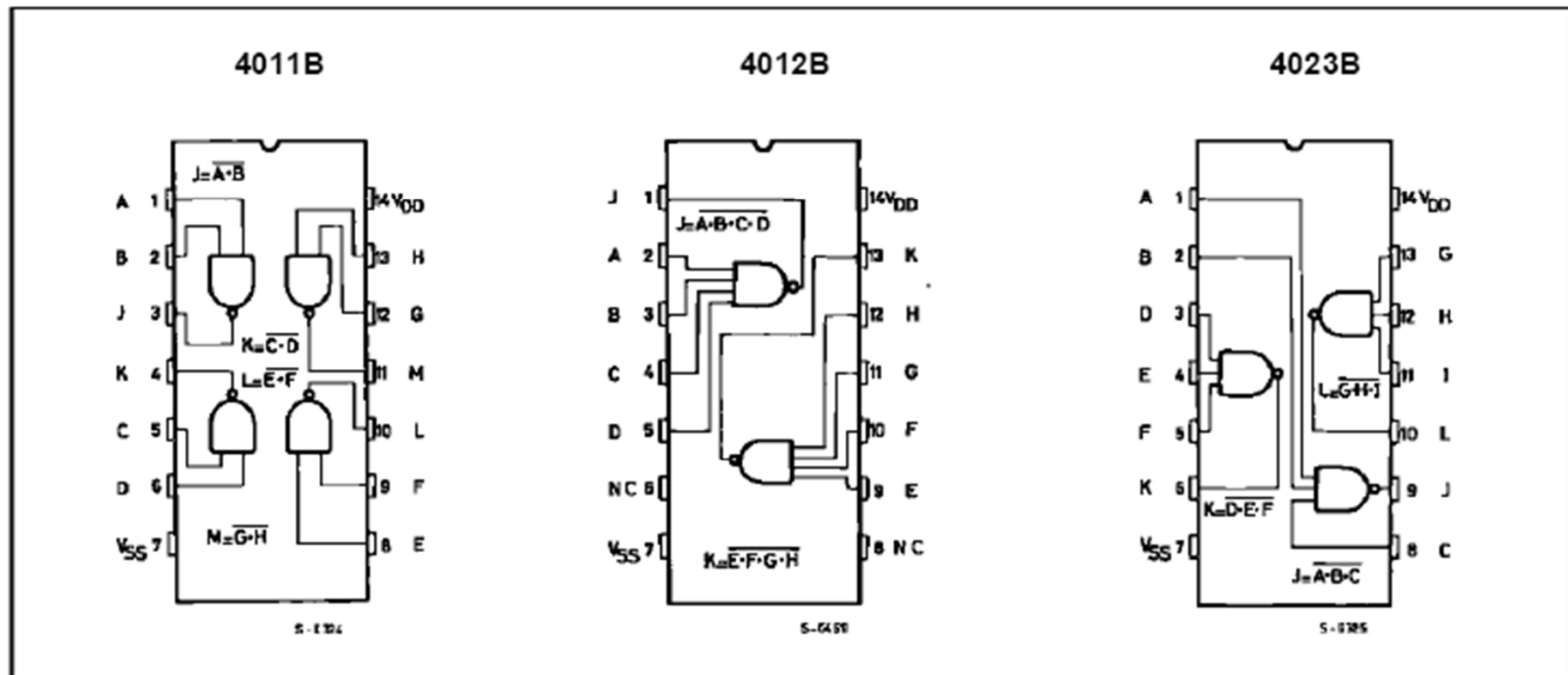
Fig.2 Logic symbol.

74HC00



CI comerciales

PIN CONNECTIONS



Expresiones algebraicas “simples”



✓ *Menos compuertas*

✓ *Menos entradas por compuerta*



✓ *Menor costo*

✓ *Menor tamaño*

✓ *Menor consumo*

Expresiones algebraicas “simples”

- ✓ *Menos compuertas*
- ✓ *Menos entradas por compuerta*

- ✓ *Menor costo*
- ✓ *Menor tamaño*
- ✓ *Menor consumo*

¿Cómo hago para obtener la expresión más simple?