Clase práctica 14 de junio

Caso 1 $X \sim \mathcal{G}(p)$

Caso 2 (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad:

$$p_\theta(x, y) = \frac{e^{\theta xy}}{3 + e^\theta} \cdot \mathbf{1}\{(x, y) : x, y \in \{0, 1\}\}, \quad \theta > 0$$

Caso 3 X una variable aleatoria con densidad

$$f_\theta(x) = 2e^{-2(x-\theta)}\mathbf{1}\{x > \theta\}, \quad \theta > 0.$$

Caso 4 X variable aleatoria con densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\theta-1}\mathbf{1}\{0 \leq x \leq 2\}, \quad \theta > 0.$$

Caso 5 X variable aleatoria con densidad

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbf{1}\{-\frac{1}{2} < x < 0\} + (1+\theta)\mathbf{1}\{0 < x < \frac{1}{2}\}, \qquad 0 < \theta < 1$$

1. En base al EMV hallado para el caso 3, decidir si es insesgado y hallar su varianza. ¿Es consistente?

2. El tiempo (en horas) que demora un operario en realizar una tarea es una variable aleatoria X con densidad
$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\theta-1}\mathbf{1}\{0 \leq x \leq 2\}, \quad \theta > 0.$$
Hallar el sesgo del estimador de máxima verosimilitud para θ, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

3. *Invariancia*. En un juego de tiro al blanco, el dardo impacta en cada tiro en un punto a distancia X del centro, donde X es una variable aleatoria cuya densidad es:
$$f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}\mathbf{1}\{0 < x < 1\}, \quad \theta > 1.$$
Se realizaron 9 tiros independientes, observando las siguientes distancias:
$$0.41,\ 0.68,\ 0.31,\ 0.38,\ 0.16,\ 0.27,\ 0.08,\ 0.12,\ 0.81$$
En base a la información muestral, calcular el estimador de máxima verosimilitud de $\mathbf{P}(X < 1/3)$.

4. Para los casos 1, 2 y 4 hallar la distribución asintótica del EMV. Para el caso 3 hallar la distribución exacta del EMV