6 (seis)

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA (61.06 - 81.16 - 61.09 - 81.04)

Evaluación Parcial
Duración: 4 horas.

Primer cuatrimestre – 2022
4/6/22 – 9:00 hs.

Curso: 29 Corrector/a: Jemina

Apellido y Nombres: Di Matteo, Carolina

Padrón: 103963

B **1.** Micaela tiene un mazo de 60 cartas de *'Magic: El Encuentro'* que cuenta con 24 cartas de tierras y el resto cartas de hechizos. Si Micaela elige 7 cartas al azar, calcular la probabilidad de que tenga entre 2 y 4 tierras en sus 7 cartas.

M **2.** Cierto objeto se produce mediante dos procesos consecutivos, cuyos tiempos (en minutos) son variables aleatorias X_1 y X_2 independientes con distribución $\mathcal{U}(10, 20)$ y $\mathcal{E}(1/15)$ respectivamente. Hallar la ecuación de la recta de regresión del tiempo total de producción dado el tiempo del primer proceso.

B **3.** El largo y el ancho (en metros) de las chapas rectangulares producidas por una máquina son variables aleatorias X e Y respectivamente, con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(0, 0), (2, 2), (0, 2)$. Hallar y graficar la función de distribución del perímetro de las chapas producidas por dicha máquina.

B **4.** Leon comienza su turno trabajando de lavacopas en el *Bar los Amigos* a las 20:00, donde rompe copas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 3 por hora. Si el sábado rompió la quinta copa exactamente a las 22:00, calcular la probabilidad de que entre las 20:00 y 21:00 hubiera roto a lo sumo una copa.

M **5.** Se tiene un sistema de 100 partículas que responden a las leyes de la física clásica, donde cada partícula posee una masa de 2 kg y cuya velocidad (en m/s) es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 2. Las velocidades de las distintas variables pueden considerarse independientes. Calcular *aproximadamente* la probabilidad de que la energía cinética del sistema sea mayor a 40 J.

Recordar que la energía cinética de una partícula se puede calcular como $E = \frac{1}{2}mv^2$.

Di Matteo, Carolina 103963

HOJA Nº 1

FECHA 4/6/2022

① 60 cartas
↳ 24 cartas de tierras
↳ 34 cartas de hechizos } → 7 cartas

Me piden $P($"entre 2 y 4 tierras"$)$

idea

- 2 tierras → 5 hechizos → $\{T, T, H, H, H, H, H\}$
- 3 tierras → 4 hechizos → $\{T, T, T, H, H, H, H\}$
- 4 tierras → 3 hechizos → $\{T, T, T, T, H, H, H\}$

⇒ Tengo que calcular

$P($"entre 2 y 4 T"$) = P((2T \cap 5H) \cup (3T \cap 4H) \cup (4T \cap 3H))$

me $\swarrow$ $= P(2T \cap 5H) + P(3T \cap 4H) + P(4T \cap 3H)$

Veamos que

$P(iT \cap jH) = P($"exactamente i tierras y exactamente j hechizos"$)$

Como todas las cartas tienen igual probabilidad de ser elegidas, se trata de un espacio equiprobable. Luego, uso Laplace para calcular la proba pedida.

$$P(2T \cap 5H) = \frac{\#(2T \cap 5H)}{\#\Omega} = \frac{\binom{24}{2}\binom{34}{5}}{\binom{60}{7}}$$ ✓

Es fácil ver que

$$P(iT \cap jH) = \frac{\binom{24}{i}\binom{34}{j}}{\binom{60}{7}}, \quad i + j = 7$$

Luego. $$P(\text{"entre 2 y 4T"}) = \frac{\binom{24}{2}\binom{34}{5} + \binom{24}{3}\binom{34}{4} + \binom{24}{4}\binom{34}{3}}{\binom{60}{7}} =$$

NOTA

$\Rightarrow \boxed{P(\text{"entre 2 y 4 T"}) = 0{,}7746}$ RTA.

NOTA

Di Matteo, Carolina 103963

HOJA N° 2

FECHA 4/6/2022

(2) X_1: "tiempo (en min) de producción del 1° proceso" $\sim U(10,20)$

X_2: "tiempo (en min) de producción del 2° proceso" $\sim \mathcal{E}(1/15)$

T: "tiempo (en min) total de producción", $T = X_1 + X_2$

Me piden $\varphi(x_1) = E[T \mid X_1 = x_1]$

$E[T \mid X_1 = x_1] = E[X_1 + X_2 \mid X_1 = x_1] \overset{\text{linealidad}}{=} E[X_1 \mid X_1 = x_1] + E[X_2 \mid X_1 = x_1]$

vemos que $E[\underbrace{X_1 \mid X_1 = x_1}_{x_1}] = E[x_1] = x_1$ (x_1 es cte)

Calculo $E[X_2 \mid X_1 = x_1] = E[X_2] = \dfrac{1}{1/15} = 15$

(X_1 y X_2 indep (dato)) (tabla)

luego:

$E[T \mid X_1 = x_1] = E[X_1 \mid X_1 = x_1] + E[X_2 \mid X_1 = x_1]$

$= x_1 + 15$

$\Rightarrow \boxed{\varphi(x_1) = x_1 + 15}$ // RTA.

No

Pide la recta de regresión no la esperanza condicional

NOTA

Di Matteo, Carolina 103943

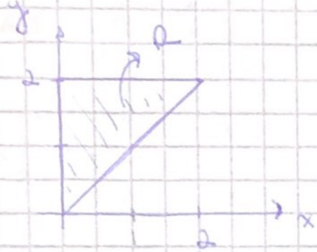
HOJA Nº 3

FECHA 4/6/2022

(3) X: "largo (en metros) de una chapa rectangular"

Y: "ancho (en metros) de una chapa rectangular"

$(X, Y) \sim \mathcal{U}(R)$



Z: "perímetro (en metros) de una chapa rectangular", $Z = 2(X+Y)$ ✓

Me piden $f_Z(z)$ y graficarlo.

$F_Z(z)$

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(2(X+Y) \leq z)$, $Sop(Z) = (0, 8)$

veamos que $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & , (x,y) \in R \\ 0 & , (x,y) \notin R \end{cases}$

con $k \geq 0$ tq $\iint_R f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \iint_R k\,dx\,dy = k \iint_R dx\,dy$

$= \frac{b \cdot h}{2} k = \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot k = 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$(X,Y) \sim \mathcal{U}$

$\Downarrow$

$\iint_R dx\,dy = \text{Área}(R)$

$\Rightarrow f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}\{(x,y) \in R\}$ ✓

veamos que $P(2(X+Y) \leq z) = P\left(\underbrace{Y \leq \frac{z}{2} - X}\right)$

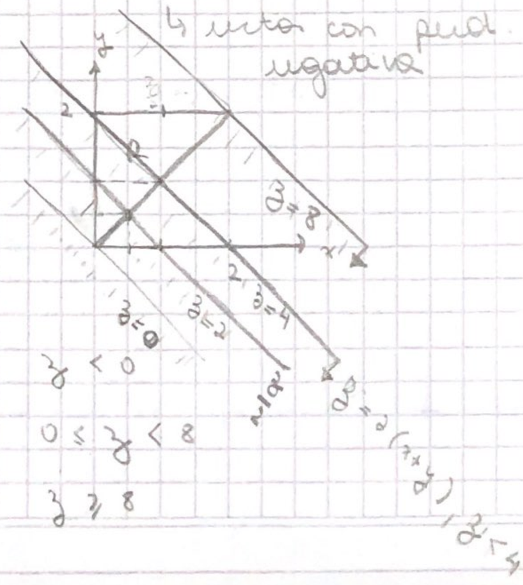
↳ recta con pend. negativa

$z = 0 \Rightarrow Y \leq -X$

$z = 2 \Rightarrow Y \leq 1 - X$

$z = 4 \Rightarrow Y \leq 2 - X$

$z = 8 \Rightarrow Y \leq 4 - X$



luego $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ P(Y \leq z/2 - X) & , 0 \leq z < 8 \\ 1 & , z \geq 8 \end{cases}$ ✓

NOTA

$0 \le z < 4$: $P\left(Y \le \frac{z}{2} - x\right) = \iint f_{XY}(x, y)\,dx\,dy$ (A)

$4 \le z < 8$: $P\left(Y \le \frac{z}{2} - x\right) = \iint f_{XY}(x, y)\,dx\,dy$ (B)

(A) $P(Z \le z) = \frac{1}{2}\left(\frac{(z/2)^2}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{z^2}{2^5} = \frac{z^2}{32}$

tomo todo el triángulo que agarra lo divido en 2 pues sólo quiero el que pertenece a R y lo multiplico por el área del mismo pues $(x, y) \sim U$

$z = 2(x+y)$, $z \in R$

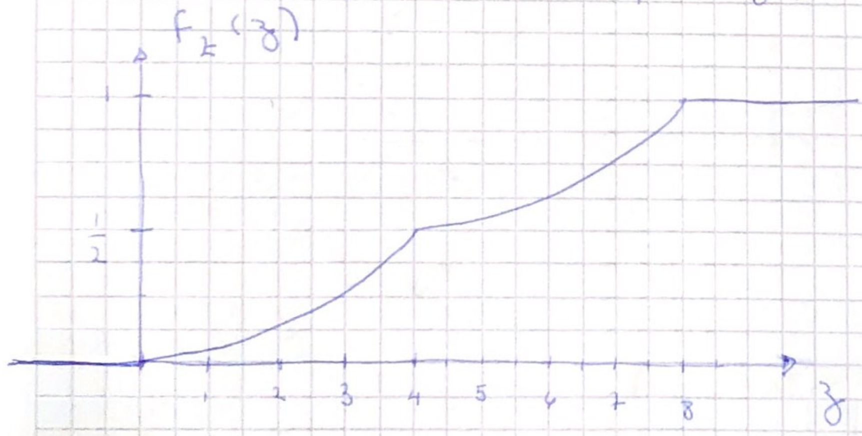
densidad de VA (x, y)

(B) $P(Z \le z) = 1 - P(Z > z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{(4 - z/2)^2}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= 1 - \frac{(4 - z/2)^2}{2^3}$

finalmente:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z < 0 \\ \frac{z^2}{32} & , \ 0 \le z < 4 \to z = 0 \equiv 0,\ z = 4 \equiv \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{(4 - z/2)^2}{2^3} & , \ 4 \le z < 8 \to z = 4 \equiv \frac{1}{2},\ z = 8 \equiv 1 \\ 1 & , \ z \ge 8 \end{cases}$$



- Es continua
- Es monótona creciente
- $\lim_{z \to -\infty} F_Z(z) = 0$, $\lim_{z \to \infty} F_Z(z) =$

→ Es f. de distribución

NOTA

Di Matteo, Carolina 103963

HOJA Nº 4

FECHA 4/6/2022

(4) 5ta rota

20:00 — 21:00 — 22:00

0 — 2

~~1 al menos~~ más de 1

PP(3): "rotura de copas por hora"

Me piden P("rompió ~~al menos~~ más de 1 entre las 20:00 y 21:00 hs" | "rompió la 5ta a las 22:00")

G_5: "tiempo (en hs) hasta que rompe la 5ta" $\sim \Gamma(5,3)$

$N(0,2)$: "# copas rotas entre las 20:00 y 22:00 hs" $\sim Poi(5.2)$

$\Rightarrow p = P(N(1) > 1 \mid G_5 = 2)$

NO A/O. es como ≥ 1

$G_5 = 2 \rightarrow$ entre las 20 y las 22 se rompieron 4

$\Rightarrow p = P(N(1) > 1 \mid N(2) = 4)$.

análogamente:

$N(0,1)$: "# copas rotas entre las 20:00 y 21:00 hs" $\sim Poi(5.1)$

$N(1,2)$: "# copas rotas entre las 21:00 y 22:00 hs" $\sim Poi(5.1)$

$$\Rightarrow p = \frac{P(N(1) > 1,\ N(2) = 4)}{P(N(2)=4)}$$ ✓

$N(1) > 1 \cap N(2) = 4$:

- $N(1) = 2 \cap N(1,2) = 2$
- $N(1) = 3 \cap N(1,2) = 1$
- $N(1) = 4 \cap N(1,2) = 0$

todos eventos ind. e indep. por prop de PPP

luego:

$$p = \frac{P(N(1)=2)\,P(N(1,2)=2) + P(N(1)=3)\,P(N(1,2)=1) + P(N(1)=4)\,P(N(1,2)=0)}{P(N(2)=4)}$$

$$p = \frac{\frac{5^2 e^{-5}}{2!} \cdot \frac{5^2 e^{-5}}{2!} + \frac{5^3 e^{-5}}{3!} \cdot \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^4 e^{-5}}{4!} \cdot \frac{5^0 e^{-5}}{0!}}{\frac{10^4 e^{-10}}{4!}} = \frac{11}{16}$$

$\Rightarrow \boxed{p = 0,6875}$ || ~~12/?~~

↳ calculé la proba para "~~al menos~~ más de 1" y es "a lo sumo" (ó 0 ó 1 copa)

NOTA

veamos que

$P\left(\text{"rompió } \cancel{\text{al menos}} \text{ más de } 1 \text{ entre las 20 y 21"} \,\middle|\, \text{"rompió la } 5^{ta} \text{ a las 22"} \right) = 1 - P\left(\text{"rompió a lo sumo } 1 \text{ entre las 20 y 21"} \,\middle|\, \text{"rompió la } 5^{ta} \text{ a las 22"} \right)$

pues

$$\underbrace{P(N(0,1) > 1 \mid G_5 = 2)}_{\text{lo que calculé previamente}} = 1 - \underbrace{P(N(0,1) \leq 1 \mid G_5 = 2)}_{\text{esta es la proba que me pide el enunciado (me equivoqué antes)}}$$

$$\Rightarrow P(N(0,1) \leq 1 \mid G_5 = 2) = 1 - P(N(0,1) > 1 \mid G_5 = 2)$$

$$= 1 - \frac{11}{16} = \frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(N(0,1) \leq 1 \mid G_5 = 2) = 0{,}3125} \text{ RTA}$$

Ahora si!

NOTA

Di Matteo, Carolina 103963

HOJA N° 5

FECHA 4|6|2022

(5) 100 partículas

m: masa de una partícula (en kg) = 2

V: "velocidad de una partícula (en m/s)" $\sim \mathcal{E}(2)$

V_i: "velocidad de la i-ésima partícula", $i = 1, \ldots, 100$

E: "energía cinética del sistema" (en joules)"

✓ Me piden $P(E > 40)$ aproximado

$E = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 V = V^2 \rightarrow \underbrace{P(E > 40) = P(V^2 > 40)}$

donde $V = \sum_{i=1}^{100} V_i$, $V_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(2)$

NO!

$E_T = \sum_{i=1}^{n} E_i$

- suma de VA iid
- $E[V_i] = 1/2 < \infty$
- $Var(V_i) = 1/4 < \infty$

$\Rightarrow$ uso TCL para aproximar P.

$P(V^2 > 40) = P\left(\left(\sum_{i=1}^{100} V_i\right)^2 > 40\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{100} V_i \leq \sqrt{40}\right)$

$\underset{TCL}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{40} - 100 \cdot 1/2}{\sqrt{100 \cdot 1/4}}\right) = 1 - \underbrace{\Phi(-8{,}7351)}_{\text{casi } 0}$

$\simeq 1 - 0$

finalmente $\boxed{P(E > 40) \simeq 1 \text{ (por TCL)}}$ RTA.

X