PARCIALES

Key Color

Sth (algo importante)

Def.

29 / 05 / 2021

1. En una línea de montaje hay dos luces indicadoras, **a** y **b**, cada una de las cuales está encendida en rojo o verde. La probabilidad de que ambas luces estén en verde es 0.45 y de que ambas estén en rojo, 0.25. Si **a** está en verde, la probabilidad de que **b** también esté en verde es 0.9. ¿Son independientes los eventos "**a** está en verde" y "**b** está en rojo"?

A_R : A está en Rojo $\qquad P(A_V \cap B_V) = 0{,}45$

A_V : A está en Verde $\qquad P(A_R \cap B_R) = 0{,}25$

B_R : B está en Rojo $\qquad P(B_V \mid A_V) = 0{,}9$

B_V : B está en Verde $\qquad P(A_V \cap B_R) \stackrel{?}{=} P(A_V)\,P(B_R)$

$$\overbrace{P(B_V \mid A_V)}^{\checkmark} = \frac{\overbrace{P(B_V \cap A_V)}^{\checkmark}}{P(A_V)} \Rightarrow P(A_V) = \frac{P(B_V \cap A_V)}{P(B_V \mid A_V)} = \frac{0{,}45}{0{,}9} = 0{,}5 \Rightarrow P(A_V) = 0{,}5 \Rightarrow P(A_R) = 0{,}5$$

$$\underbrace{P(A_V \cap B_V)}_{\checkmark} = \frac{\underbrace{P(A_V \mid B_V)}P(B_V)}{P(B_V \mid A_V)\,P(A_V)} = \underbrace{P(B_V \mid A_V)}_{\checkmark}\underbrace{P(A_V)}_{\checkmark}\,P(B_V) \Rightarrow P(B_V) = \frac{P(A_V \cap B_V)}{P(B_V \mid A_V)\,P(A_V)} = \frac{0{,}45}{0{,}9 \cdot 0{,}5} = 1$$

$$\Rightarrow P(B_V) = 1 \Rightarrow P(B_R) = 0$$

$$P(A_V \cap B_R) = P(A_V \mid B_R)\underbrace{P(B_R)}_{0} = 0 \Rightarrow P(A_V \cap B_R) = 0$$

luego: $\quad P(A_V \cap B_R) \stackrel{?}{=} P(A_V)\;P(B_R)$

$$0 = 0{,}5 \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$$ los eventos A_V y B_R SON independientes

RM

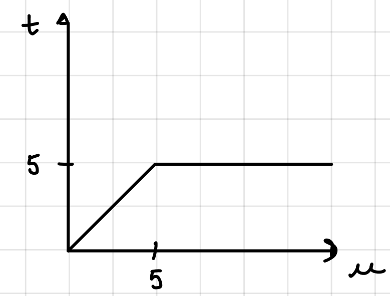
2. El tiempo de funcionamiento (en horas) de una máquina es una variable aleatoria T con función de densidad

$$f_T(t) = \frac{e^{-t/2}}{2(1-e^{-4})}\mathbf{1}\{0 \leq t \leq 8\}.$$

Se decide realizar un service a la máquina cuando esta deje de funcionar o a las 5 horas de funcionamiento, según lo que suceda primero. Hallar la función de distribución del tiempo de uso de la máquina hasta que se realiza el service.

U: tiempo de uso de la máquina hasta que se realiza el service en horas

$$U = \begin{cases} T, & T < 5 \\ 5, & T \geq 5 \end{cases} \Rightarrow U = \min(T, 5)$$



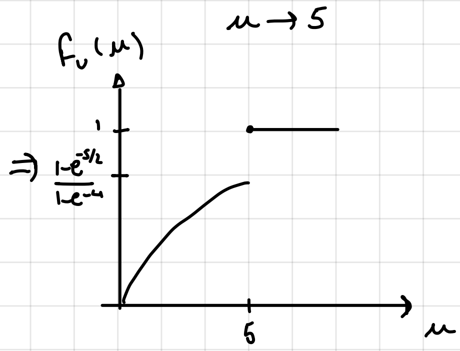
$$F_U(u) = P(U \leq u) = \begin{cases} P(T \leq u), & T < 5 \\ 1, & T \geq 5 \end{cases}$$

$$P(T \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f_T(t)\,dt = \int_{-\infty}^{u} \frac{e^{-t/2}}{2(1-e^{-4})} \mathbb{1}\{0 \leq t \leq 8\}\,dt = \int_{0}^{u} \frac{e^{-t/2}}{2(1-e^{-4})}\,dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-4}} \underbrace{\int_0^u \frac{1}{2} e^{-t\frac{1}{2}}\,dt}_{f_X(x),\ X \sim \mathcal{E}(1/2)} = \frac{1}{1-e^{-4}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}u}\right) = \frac{1-e^{-u/2}}{1-e^{-4}}$$

luego: $\boxed{F_U(u) = \frac{1-e^{-u/2}}{1-e^{-4}} \mathbb{1}\{0 \leq u < 5\} + \mathbb{1}\{u \geq 5\}}$ RTA

$$\lim_{u \to 5} F_U(u) = \frac{1-e^{-5/2}}{1-e^{-4}} \cong 0{,}9350$$



¿ Es dist ?

- cont a derecho
- es monótona no decreciente
- $\lim_{u \to -\infty} F_U(u) = 0$, $\lim_{u \to +\infty} F_U(u) = 1$

$\Rightarrow$ es f. distr.

3. Faxo ataca a Pepo en una partida de rol. El valor de ataque de Faxo es una tirada de un dado de seis caras, el valor de defensa de Pepo es la suma de dos dados piramidales de cuatro caras. Pepo recibe un daño igual a la diferencia entre ataque y defensa si resulta positiva, o cero en caso contrario. Hallar la varianza de la cantidad de daño que recibe Pepo.

A : Valor de ataque de faxo → dado de 6 caras $\Rightarrow R_A = \{1,2,3,4,5,6\}$

D : Valor de defensa de Pepo → suma de 2 dados de 4 caras $\Rightarrow R_D = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

X : Daño que recibe Pepo

$$X = \begin{cases} A - D & , \ A - D > 0 \\ 0 & , \ \text{eoc} \end{cases}$$

$Var(X) = ?$

X

D \ A	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7
2	0	1	2	3	4	5	6
3	0	0	1	2	3	4	5
4	0	0	0	1	2	3	4
5	0	0	0	0	1	2	3
6	0	0	0	0	0	1	2

$R_X = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

asumo independencia entre A y D.

Busco las probabilidades de A.

A

A_2 \ A_1	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$P(A=2) = 1/16$ $P(A=5) = 4/16$ $P(A=8) = 1/16$

$P(A=3) = 2/16$ $P(A=6) = 3/16$ todas las probas

$P(A=4) = 3/16$ $P(A=7) = 2/16$ suman 1 ✓.

Busco probabilidades de X:

$P(X=1) = P(D=1, A=2) + P(D=2, A=3) + P(D=3, A=4) + P(D=4, A=5) + P(D=5, A=6) + P(D=6, A=7) =$

$= P(D=1)P(A=2) + P(D=2)P(A=3) + P(D=3)P(A=4) + P(D=4)P(A=5) + P(D=5)P(A=6) + P(D=7)P(A=7)$

$\underset{P(D=i)=\frac{1}{6}\ \forall}{=} \frac{1}{6}\left(P(A=2) + P(A=3) + P(A=4) + P(A=5) + P(A=6) + P(A=7)\right)$

$= \frac{1}{6}\frac{1}{16}(1+2+3+4+3+2) = \frac{1}{6}\frac{15}{16}$

$P(X=2) = P(D=1, A=3) + P(D=2, A=4) + P(D=3, A=5) + P(D=4, A=6) + P(D=5, A=7) + P(D=6, A=8)$

análogo a P(X=1) $= \frac{1}{6}\left(P(A=3) + P(A=4) + P(A=5) + P(A=6) + P(A=7) + P(A=8)\right) =$

$= \frac{1}{6}\frac{1}{16}(2+3+4+3+2+1) = \frac{1}{6}\frac{15}{16}$

$P(X=3) = P(D=1, A=4) + P(D=2, A=5) + P(D=3, A=6) + P(D=4, A=7) + P(D=5, A=8)$

$= \frac{1}{6}\left(P(A=4) + P(A=5) + P(A=6) + P(A=7) + P(A=8)\right)$

$= \frac{1}{6}\frac{1}{16}(3+4+3+2+1) = \frac{1}{6}\frac{13}{16}$

$P(X=4) = P(D=1, A=5) + P(D=2, A=6) + P(D=3, A=7) + P(D=4, A=8)$

$= \frac{1}{6}\frac{1}{16}(4+3+2+1) = \frac{1}{6}\frac{10}{16}$

$P(X=5) = P(D=1, A=6) + P(D=2, A=7) + P(D=3, A=8) = \frac{1}{6}\frac{1}{16}(3+2+1) = \frac{1}{6}\frac{6}{16}$

$P(X=6) = \frac{1}{6}\frac{3}{16}$, $P(X=7) = \frac{1}{6}\frac{1}{16}$

$$P(X=0) = P(D=2, A=2) + P(D=3, A=2) + P(D=4, A=2) + P(D=5, A=2) + P(D=6, A=2) +$$

$$+ P(D=3, A=3) + P(D=4, A=3) + P(D=5, A=3) + P(D=6, A=3) +$$

$$+ P(D=4, A=4) + P(D=5, A=4) + P(D=6, A=4)$$

$$+ P(D=5, A=5) + P(D=6, A=5)$$

$$+ P(D=6, A=6) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{6}\,\frac{1}{16} \cdot 5}_{A=2} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{16} \cdot 4}_{A=3} + \underbrace{\frac{1}{16} \cdot \frac{3}{16} \cdot 3}_{A=4} + \underbrace{\frac{1}{16} \cdot \frac{4}{16} \cdot 2}_{A=5} + \underbrace{\frac{1}{16} \cdot \frac{3}{16} \cdot 1}_{A=6} =$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{16}\left(1.5 + 2.4 + 3.3 + 4.2 + 3.1\right) = \frac{1}{6}\,\frac{33}{16} = \frac{33}{96}$$

luego:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
p_x	$\frac{33}{96}$	$\frac{15}{96}$	$\frac{15}{96}$	$\frac{13}{96}$	$\frac{10}{96}$	$\frac{6}{96}$	$\frac{3}{96}$	$\frac{1}{96}$

$= \frac{96}{96}$ $\in$ función de proba :)

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$$

$$E[x] = \sum_{x \in R_x} x \; p_x(x) = \frac{1}{96}\left(0.33 + 1.15 + 2.15 + 3.13 + 4.10 + 5.6 + 6\,3 + 7.1\right) = \frac{179}{96}$$

$$E[x^2] = \sum_{x \in R_x} x^2 \; p_x(x) = \frac{1}{96}\left(0^2.33 + 1^2.15 + 2^2.15 + 3^2.13 + 4^2\,10 + 5^2.6 + 6^2.3 + 7^2.1\right) = \frac{659}{96}$$

$$\Rightarrow Var(x) = \frac{659}{96} - \left(\frac{179}{96}\right)^2 = 3{,}3879$$

finalmente: $\boxed{Var(x) = 3{,}3879}$ ||

RTA

1. Akira se presenta a tomar un examen presencial a sus estudiantes con 48 medialunas y 36 churros. De las medialunas 20 están rellenas con crema pastelera, 20 con dulce de leche y el resto no tiene relleno. De los churros, la mitad son rellenos de dulce de leche y el resto no tiene relleno. Todas las facturas se mezclan en la mesa del aula y Akira elige 3 al azar para colocar en un plato y repartir en la primera fila. Si en el plato había exactamente una medialuna con dulce de leche, calcular la probabilidad de que todas las facturas en ese plato fueran rellenas.

48 medialunas $\begin{cases} 20 & \text{crema pastelera} \\ 20 & \text{ddle} \\ 8 & \text{sin relleno} \end{cases}$

36 churros $\begin{cases} 18 & \text{ddle} \\ 18 & \text{sin relleno} \end{cases}$

 → 3 al azar → 

$$P(\text{"hay 3 facturas rellenas"} \mid \text{"hay 1 medialuna de ddle"}) =$$

$$= \frac{P(\text{"hay 3 facturas rellenas" y "hay 1 medialuna de ddle"})}{P(\text{"hay 1 medialuna de ddle"})}$$

$$P(\text{"hay 3 FR" y "hay 1 MDDL"}) = P(\text{"hay 2 FR y 1 MDDL"}) = \frac{\overbrace{\binom{20}{1}}^{\text{MDDL}} \overbrace{\binom{20+20+18-1}{2}}^{\text{Todas las FR menos la MDDL}}}{\binom{84}{3}}$$

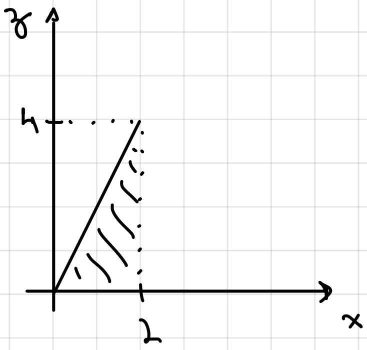
$$P(\text{"hay 1 MDDL"}) = \frac{\binom{20}{1}\binom{83}{2}}{\binom{84}{3}}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\binom{20}{1}\binom{57}{2}}{\binom{20}{1}\binom{83}{2}} = \boxed{0{,}468998} \text{ RTA}$$

2. Xena y Zeus planean encontrarse en el Monte Olimpo para un festín a la medianoche. Los tiempos de llegada (en horas después de la medianoche) de Xena y Zeus son variables aleatorias X y Z respectivamente, con densidad conjunta

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{xz}{8}\mathbf{1}\{0 < x < 2, 0 < z < 2x\}.$$

Para predecir el horario en el que llegará Xena, el Oráculo selecciona un número al azar sobre el intervalo $(0,1)$, revelando el número $0,4096$. A partir del valor revelado por el Oráculo, simular un valor de x para predecir la hora de llegada de Xena.



$f_{XZ}(x,z) = \frac{xz}{8}\,\mathbb{1}\{0<x<2,\ 0<z<2x\}$

$n = 0,4096$

X: "hora de llegada de Xena"

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XZ}(x,z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xz}{8}\,\mathbb{1}\{0<x<2,\ 0<z<2x\}\,dz = \frac{x}{8}\int_0^{2x} z\,\mathbb{1}\{0<x<2\}\,dz =$

$= \frac{x}{8}\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^{2x}\,\mathbb{1}\{0<x<2\} = \frac{x}{16}\left(4x^2-0\right) = \frac{4x^3}{16} = \frac{x^3}{4}\,\mathbb{1}\{0<x<2\}$

$\Rightarrow f_X(x) = \frac{x^3}{4}\,\mathbb{1}\{0<x<2\} \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{t^3}{4}\,dt\ \mathbb{1}\{0<x<2\} = \frac{1}{4}\,\frac{t^4}{4}\Big|_0^x = \frac{1}{16}x^4 = \frac{x^4}{16}$

luego: $F_X(x) = \frac{x^4}{16}\,\mathbb{1}\{0<x<2\} + \mathbb{1}\{x \geq 2\}$

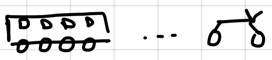
Busco $a_i \mid F_X(x_i) = a_i$.

$a_i = 0,4096 \Rightarrow 0 < a_i < 2 \Rightarrow F_X(x_i) = \frac{x_i^4}{16} = a_i \Rightarrow x_i^4 = 16a_i \Rightarrow x_i = \sqrt[4]{16a_i} = \frac{8}{5} = 1,6$

luego $\boxed{x_{0,4096} = 1,6}$ RTA

Xena llegará al rededor de la 1:36 am.

3. Para ir al trabajo Marilina hace un tramo en tren, seguido por otro tramo en bicicleta. El tiempo (en minutos) que debe esperar el tren es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 15. Una vez que sube al tren, el viaje tiene una duración fija de 10 minutos. Luego de bajar del tren, el tiempo que tarda en hacer el tramo en bicicleta (en minutos) es una variable aleatoria independiente de todo lo demás, con distribución uniforme sobre el intervalo $(10, 15)$. Hallar la esperanza del tiempo total de viaje si se sabe que tuvo que esperar más de 5 minutos a que llegue el tren.



T: tiempo (en minutos) que espero el tren $\sim \mathcal{E}(1/15)$

V: viaje (en minutos) en tren $= 10$

B: tiempo (en minutos) que viajo en bici $\sim \mathcal{U}(10, 15)$

$$E[\underbrace{T+V+B}_{\text{tiempo total de viaje}} \mid T>5] = \,?$$

$$E[T+10+B \mid T>5] = E[T \mid T>5] + E[10 \mid T>5] + E[\underbrace{B \mid T>5}_{\text{indep}}] =$$

$$= E[T \mid T>5] + 10 + E[B]$$

- $T \in$ exponencial $\Rightarrow$ tiene pérdida de memoria. Luego:

  $T \mid T>5 = 5 + T'$, $\quad T' \sim \mathcal{E}(1/15) \Rightarrow E[T] = E[T'] = 15$

- $B \in$ uniforme $\Rightarrow E[B] = \frac{a+b}{2} = \frac{10+15}{2} = \frac{25}{2}$

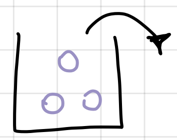
Luego:

$$E[T+V+B \mid T>5] = 5 + 15 + 10 + \frac{25}{2} = \frac{85}{2} = \boxed{42,5} \;\|\; \text{RTA}$$

1. Se lanza 3 veces una moneda cargada con probabilidad 0.6 de que salga cara. Para cada tiro, si sale cara se coloca una bolita blanca en una bolsa, y si sale ceca se coloca una bolita roja. Una vez finalizados los 3 tiros se extrae al azar una bolita de la bolsa. Si la bolita extraída de es blanca, calcular a probabilidad de que luego de la extracción hayan quedado en la bolsa dos bolitas rojas.

$0{,}6 \quad C \to O$

$0{,}4 \quad \bar{C} \to O$



1

$P(\text{hay } 2\,R \mid \text{se extrajo } 1\,B)$

$= \dfrac{P(\text{hay } 2\,R \text{ y se extrajo } 1\,B)}{P(\text{se extrajo } 1\,B)}$