CAPÍTULO 1

Laplace

$$P(A) = \frac{\#\text{ casos favorables } A}{\#\text{ casos posibles}}$$

Álgebra de Eventos

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$
- $P(\overline{A \cup B \cup C}) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

Técnicas de Conteo

★ Regla del Producto $n_A \cdot n_B$

Cantidad de pares ordenados que pueden formarse con un elemento de A y uno de B

★ Permutaciones $n!$

Cantidad de formas ≠ que se puede ordenar

★ Variaciones $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

Cantidad de subconjuntos ordenados de r elementos a partir de n

★ Combinaciones $C_{n,r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$

Cantidad de subconjuntos no ordenados de r elementos a partir de n

★ Anagramas $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$

Permutaciones con elementos repetidos

★ Método de Bose-Einstein $\binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$

Ordenar r elementos indistinguibles en k urnas

Probabilidad Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\downarrow$ $P(B) > 0$

• Propiedades

→ $P(A \cup C | B) = P(A|B) + P(C|B)$, $A \cap C = \emptyset$

→ $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B) = P(B|A)\, P(A)$

→ $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)\, \underbrace{P(B|C)\, P(C)}_{P(B \cap C)}$

Probabilidad Total

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)\, P(B_i)$$

Teorema de Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)\, P(B_j)}$$

proba de la partición

proba de A sobre la partición

proba total de A

Eventos Independientes

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Variables Aleatorias

★ Función de Distribución $F_X(x) = P(X \leq x)$

→ $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

★ Discretos

→ $P(X = x) = p_X(x)$

→ $p_X(x_j) = P(X = x_j) = F_X(x_j) - F_X(x_{j-1})$ ⇢ F_X ϵ escalonada

★ Continuos

→ $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

→ $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

→ $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ ⇢ F_X ϵ continua

Función de Variable Aleatoria

→ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$

Simulación

Dos eventos son equivalentes cuando acumulan la misma probabilidad

Truncamiento

→ $F_{X|X\in A}(x) = P(X \leq x \mid X \in A) = \frac{P(X \leq x,\ X \in A)}{P(X \in A)}$

$P(X \in A) > 0$

$\rightarrow f_{X|X\in A}(x) = \dfrac{d}{dx} F_{X|X\in A}(x) = \dfrac{f_X(x)\,\mathbb{1}\{x\in A\}}{P(X\in A)}$ --> $X \in$ VAC

Vectores Aleatorios

$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$

★ Discreto $p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$\rightarrow p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$

$\rightarrow p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$

$\rightarrow P((X,Y)\in A) = \sum\sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y)$

★ Continuo

$\rightarrow P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$\rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$\rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

★ Independencia $P((X\in A)\cap(Y\in B)) = P(X\in A)\,P(Y\in B)$

$\rightarrow F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{X_1}(x_1)\dots F_{X_n}(x_n)$

$\rightarrow p_{\underline{X}}(\underline{x}) = p_{X_1}(x_1)\dots p_{X_n}(x_n)$

$\rightarrow f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n)$

<=> $X_1, \dots, X_n$ son independientes

CAPÍTULO 3

Esperanza de una Variable Aleatoria

→ $E[h(x)] = \sum_{x \in A} h(x) P(X=x) + \int_{\mathbb{R} \setminus A} h(x) f'_x(x)\, dx$

★ Discreto $E[h(x)] = \sum_{x \in R_x} h(x) p_x(x)$

★ Continua $E[h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_x(x)\, dx$

★ Propiedades

- $h(x) = ax + b \therefore E[h(x)] = a E[x] + b$ → linealidad
- $E[x \mid x \in A] = \dfrac{E[x \, \mathbb{1}\{x \in A\}]}{P(x \in A)}$ → esperanza parcial
- $E[x] = E[x \mid x \in A] P(x \in A) + E[x \mid x \in \bar{A}] P(x \in \bar{A})$ → esperanza total
- $E[x] = \int_0^{\infty} (1 - F_x(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_x(x)\, dx$ → área por encima de F_x

Varianza de una Variable Aleatoria

→ $\text{Var}(x) = E[(x - E[x])^2] = E[x^2] - E[x]^2$

★ Desvío Estándar $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(x)}$

Esperanza de un Vector Aleatorio

→ $E[h(x,y)] = \sum_x \sum_y h(x,y)\, p_{x,y}(x,y)$ → $(x,y) \in$ VAD

→ $E[h(x,y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy$ → $(x,y) \in$ VAC

★ Propiedades

- $E[|X|] \geq E[X]$
- $E[|XY|] = \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$
- $E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$
- $E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$, $X_1, \dots, X_n$ son independientes

Covarianza de un Vector Aleatorio

→ $\text{cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

→ $\text{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

→ (X,Y) indep $\therefore$ $\text{cov}(X,Y) = 0$

→ $\text{cov}(a + bX, c + dY) = bd\,\text{cov}(X,Y)$ → colinealidad

→ $\text{cov}(X+Y, Z) = \text{cov}(X,Z) + \text{cov}(Y,Z)$

→ $\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\,\text{cov}(X,Y)$

Coeficiente de Correlación de un vector Aleatorio

→ $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\,\text{var}(Y)}}$, $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

Predicción

$ECM = E[(Y - g(X))^2]$

★ $g(X) = c$ $\quad ECM = \text{Var}(Y)$

★ $g(X) = a + bX$ $\quad \hat{Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}(X - E[X]) + E[Y]$

↓

RECTA DE REGRESIÓN LINEAL

Desigualdades

* De Markov $P(|x| \geq t) < \dfrac{E[h(x)]}{h(t)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

* De Tchebychev $P(|x - E[x]| \geq k] \leq \dfrac{Var(x)}{k^2}$, $\forall k > 0$

Método del Jacobiano

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = \frac{f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)}{|J|}\Bigg|_{h_1^{-1},\, h_2^{-1}}$$

Teorema 4.14 $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$ independientes

$U = \min(X_1, X_2)$ $\qquad W = V - U$

$V = \max(X_1, X_2)$ $\qquad J = 1\mathbb{1}\{U = X_1\} + 2\mathbb{1}\{U = X_2\}$

- $U \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $P(J=1) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, $P(J=2) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$, $P(J_i) = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$ "quién ganó"
- $f_W(w) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_2 e^{-\lambda_2 w} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\lambda_1 e^{-\lambda_1 w}$, $w > 0$

Suma de VA

- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} Poi(\lambda_i) \therefore \sum^{n} X_i \sim Poi(\sum^{n} \lambda_i)$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} Ber(p) \therefore \sum^{n} X_i \sim B(n,p)$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(p) \therefore \sum^{n} X_i \sim Pas(n,p)$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda) \therefore \sum^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \therefore \sum^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$
- $Z \sim \mathcal{N}(0,1) \therefore \sum^{n} Z_i \sim \chi^2(n)$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} \chi^2_{\gamma_i} \therefore \sum^{n} X_i \sim \chi^2(\sum^{n} \gamma_i)$
- $X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,1) \cdot W = X_1 + X_2 \in$ triangulito

- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} Ray(\theta)$ $\therefore$ $\sum^{n} X_i^2 \sim \Gamma(n, 1/2\theta^2)$

Variables Aleatorias Condicionadas

Discreto

→ $p_{Y|X=x}(y) = P(Y=y \mid X=x) = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$

→ $p_{X,Y}(x,y) = p_{Y|X=x}(y)\, p_X(x)$

→ $p_{X,Y}(x,y) = p_{X|Y=y}(x)\, p_Y(y)$

→ $p_{Y|X=x}(y) = p_Y(y) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ X e Y son independientes

Continuo

→ $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

→ $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y)\, f_X(x)$

→ $f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y=y}(x)\, f_Y(y)$

Mezcla de Variables Aleatorias

→ $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{n} F_{X|A_i}(x)\, P(A_i)$ → probabilidad total

Variable Mezcladora $F_X(x) = \sum_{m \in R_M} F_{X|M=m}(x)\, P(M=m)$

- $p_X(x) = \sum_{m \in R_M} p_{X|M=m}(x)\, P(M=m)$
- $f_X(x) = \sum_{m \in R_M} f_{X|M=m}(x)\, P(M=m)$

Bayes para Mezclas

$p_{M|X=x}(m) = \dfrac{f_{X|M=m}(x)\, P(M=m)}{\sum_{i \in R_M} f_{X|M=i}(x)\, P(M=i)}$

Esperanza de Y condicionada a X (función Regresión $\varphi(x)$)

* Discreto $E[Y|X=x] = \sum_{y \in R_{Y|X=x}} y \, p_{Y|X=x}(y)$

* Continuo $E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y \, f_{Y|X=x}(y) \, dy$

Esperanza Condicional $\varphi(X) = E[Y|X] \rightarrow \in$ VA

→ $E[E[Y|X]] = E[Y]$

→ $E[r(X)\, s(Y) \mid X] = r(X)\, E[s(Y) \mid X]$

→ $E[aY_1 + bY_2 \mid X] = a\,E[Y_1|X] + b\,E[Y_2|X]$

→ $E[Y|X] = E[Y]$ si X e Y son independientes

→ $E[r(X)|X] = r(X)$

→ $E[XY] = E[X\,E[Y|X]]$

Varianza de Y Condicionada a X ($\sigma(x)$)

→ $\sigma(x) = Var(Y|X=x) = E[(Y - E[Y|X=x])^2 \mid X=x]$

Varianza Condicional $\sigma(X) = Var(Y|X) \rightarrow \in$ VA

→ $Var(Y|X) = E[Y^2|X] - E[Y|X]^2$

* Pitágoras $Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var(E[Y|X])$

CAPÍTULO 6

Proceso Bernoulli

- dicotomía
- probabilidad constante
- experimentos independientes

★ X_i: "ocurre el evento i" $\sim Ber(p)$

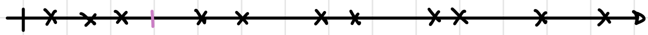
★ Y: "# éxitos en n ensayos" $= \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$

★ N: "# ensayos hasta 1° éxito" $\sim \mathcal{G}(p)$

★ W: "# ensayos hasta k éxitos" $= \sum_{i=1}^{k} N_i \sim Pas(k,p)$

Proceso de Poisson

T: "tiempo entre 2 eventos consecutivos" $\sim \mathcal{E}(\lambda)$



$PP(\lambda)$

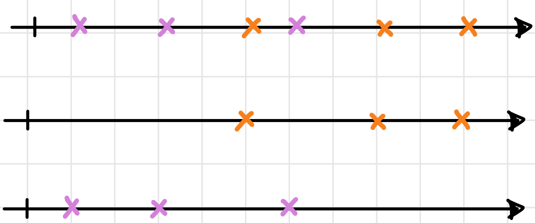
t

$N(t)$: # eventos en el intervalo de longitud t.

$N(t) \sim Poi(\lambda t)$

G: "tiempo hasta el k-ésimo evento" $\sim \Gamma(k, \lambda)$

★ Adelgazamiento o Colores



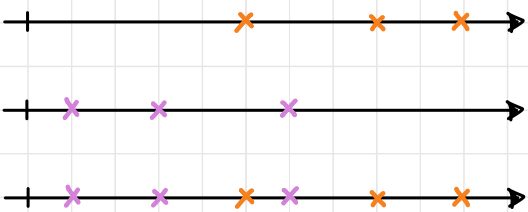
π: $PP(\lambda)$, $N(t) = N_I(t) + N_{II}(t)$

π_I: $PP(\lambda p)$

π_{II}: $PP(\lambda p)$

independientes

★ Superposición



π_I: $PP(\lambda)$

π_{II}: $PP(\lambda)$

π: $PP(\lambda + \lambda)$

★ Distribución condicional tiempos de llegada

→ S_i : momento en el que ocurre el arribo i

$(S_1, \dots, S_n) \sim \mathcal{U}(0,t)$ ∴ $(S_1, \dots, S_n) \mid N(t) = n \sim \mathcal{M}\left(n, \frac{a}{t}, \dots, \frac{t-c}{t}\right)$

CAPÍTULO 8

Estandarización $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \therefore Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Teoremas Límites $X_1, \dots, X_n$ iid, $E[X_i] = \mu < \infty$, $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$

- ★ Ley de los Grandes Números $\bar{X} \to \mu$
- ★ Ley de los Grandes Números (Markov)

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad E(\bar{X}_n) = \mu, \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- ★ Teorema Central del Límite

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Propiedades

- $Z \sim \mathcal{N}(0,1) \therefore Z^2 \sim \chi^2$
- $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $U \sim \chi^2_n$, Z y U indep $\therefore \frac{Z}{\sqrt{U/n}} \sim t_n$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \therefore \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \therefore \sum^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $S^2 = \sum^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \therefore T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $c > 0 \therefore \begin{cases} X + c \sim \mathcal{N}(\mu + c, \sigma^2) \\ cX \sim \mathcal{N}(\mu c, \sigma^2 c^2) \end{cases}$

CAPÍTULO 9

Función de Verosimilitud

- Discreto $l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)$
- Continuo $l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$

Familias Exponenciales

$$f_\theta(x) = A(\theta)\, e^{\sum^{k} c_i(\theta) r_i(x)}\, h(x)$$

- $X \sim Ber(p)$ $\quad f_p(x) = (1-p)\, e^{x \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}\, \mathbb{1}\{x \in \{0,1\}\}$
- $X \sim Par(k,\theta)$ $\quad f_\theta(x) = \theta k^\theta\, e^{-(\theta+1)\ln(x)}\, \mathbb{1}\{x > k\}$
- $X \sim \mathcal{N}$
- $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ $\quad f_{(\alpha,\lambda)} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda x + \alpha \ln x}\, e^{-\ln x}\, \mathbb{1}\{x > 0\}$
- $X \sim \chi^2$
- $X \sim \beta$
- $X \sim Poi$
- $X \sim g(\theta)$ $\quad f_\theta = \frac{\theta}{1-\theta}\, e^{x \ln(1-\theta)}\, \mathbb{1}\{x \in \mathbb{N}\}$

Estadísticos

Dado una m.a $\underline{x}$, es una función que da un valor.

No puede depender de parámetros desconocidos.

★ Teorema de factorización $T = r(\underline{x})$ → estad. suficiente

$$f_\theta(x) = g(r(\underline{x}), \theta)\, h(\underline{x})$$

→ familias exponenciales: $T = \sum_{i=1}^{n} r(x_i)$

- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,\theta) \therefore T = \text{máx}(\underline{x})$
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} \Gamma(\alpha, \lambda) \therefore T = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$

Estimador valor aproximado parámetro desconocido

* **Método Máximo Verosimilitud** $f_{\hat{\theta}}(\underline{x}) = \max_{\theta} f_{\theta}(\underline{x})$

$$\frac{d}{d\theta} \ln(L(\theta)) = 0 \quad , \quad L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{\theta}(x_i)$$

- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} Ber(p) \therefore \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ → insesgado
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,\theta) \therefore \hat{\theta} = \max(\underline{x})$ → asintóticamente insesgado
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} Par(k,\theta) \therefore \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i/2)}$ → asintóticamente insesgado
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2) \therefore \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} \end{cases}$

  $\notin$ insesgado → $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda) \therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} g(\theta) \therefore \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} Poi(\mu) \therefore \hat{\mu} = \bar{x}$
- $\underline{x} \overset{iid}{\sim} Ray(\theta) \therefore \hat{\theta}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Principio de Invarianza (Método Plug In)

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = g(\theta) \\ \hat{\theta} \in \text{EMV de } \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\lambda} = g(\hat{\theta}) \in \text{EMV de } \lambda$$

Bondad del Estimador

★ Riesgo de estimar a θ con $\hat{\theta}$

$$R(\theta, \hat{\theta}) = ECM(\hat{\theta}) = E[(\theta - \hat{\theta})^2]$$

★ Insesgado $E_\theta[\hat{\theta}] = \theta$

★ Sesgado $B(\hat{\theta}) = E_\theta[\hat{\theta}] - \theta$

★ Asimtóticamente Insesgado $\lim_{n \to \infty} E_\theta[\hat{\theta}] = \theta$

★ Débilmente Consistente $Var_\theta(\hat{\theta}) \to 0$ y $E_\theta(\hat{\theta}) \to \theta$

★ Consistencia en Media Cuadrática $\lim_{n \to \infty} ECM(\hat{\theta}) = 0$

- $ECM(\hat{\theta}) = Var_\theta(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$

Estimadores Asintóticamente Normales

★ Número de Información de Fisher

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \ln (f_\theta(x))\right)^2\right] = -E\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln (f_\theta(x))\right]$$

★ Teorema

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{n}\sqrt{I(\theta)}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \overset{a}{\sim} N(0,1) \\ \hat{\theta}_n \in \text{estimador consistente} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{n}\sqrt{I(\hat{\theta}_n)}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \sim N(0,1)$$

- $\underline{X} \sim Ber(p) \quad \therefore \quad I(p) = \dfrac{1}{p(1-p)}$

CAPÍTULO 10

Test de Hipótesis

- H_1 : hipótesis del investigador
- H_0 : hipótesis nula

Tipos de Errores

★ EI se rechaza H_0 que era verdadera

★ EII no se rechaza H_0 que era falsa

Es más grave echar a la cárcel a un inocente → EI

que dejar libre a un culpable → EII

- $P(\text{"EI"}) = P_\theta(\text{"rechazar } H_0\text{"}) = P_\theta(\delta(\underline{x}) = 1) = \pi_\delta(\theta)$
- $P(\text{"EII"}) = P_\theta(\text{"no rechazar } H_0\text{"}) = P_\theta(\delta(\underline{x}) = 0) = 1 - \pi_\delta(\theta)$

Nivel de Significación del Test

$\alpha = \sup_{\theta \in \textcircled{H}} \pi_\delta(\theta)$

P-Valor de un Test

probabilidad de encontrar un valor tan o más extremo que el que se encontró con la muestra.

Test Hipótesis Simple vs Hipótesis Simple

$$H_0 : \theta = \theta_1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_2 \quad \therefore \delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 , & \dfrac{f_{\theta_2}(\underline{x})}{f_{\theta_1}(\underline{x})} > k_\alpha \\ 0 , & \text{eoc} \end{cases}$$

- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, μ desconocido $\therefore$ $T = \dfrac{\sum^{n} x_i - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma^2}}$ $\to H_0$

- $\underline{X} \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, σ desconocido $\therefore$ $T = \sum^{n} \dfrac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_1^2}$ $\to H_0$

★ **Propiedades** $\underline{X} \in$ una familia exponencial

① $c(\theta)$ creciente

$H_0: \theta \overset{\geq}{\leq} \theta_1$

$H_1: \theta \overset{<}{>} \theta_1$

$\to \delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & T \overset{<}{>} k_\alpha \\ 0, & T \overset{\geq}{\leq} k_\alpha \end{cases}$

② $c(\theta)$ decreciente

$H_0: \theta \overset{\geq}{\leq} \theta_1$

$H_1: \theta \overset{<}{>} \theta_1$

$\to \delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & -T \overset{<}{>} k_\alpha \\ 0, & -T \overset{\geq}{\leq} k_\alpha \end{cases}$

Test con Nivel de Significación Asintótico

$\to \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\theta \in \Theta_1} \pi_{\delta_n}(\theta) = \alpha$ $\therefore$ $P_{p=p_0}(\delta(\underline{x}) = 1) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$

Intervalos de Confianza de nivel 1-α

→ $P(\theta \in (a(\underline{x}), b(\underline{x})) = 1-\alpha$

Método del Pivote

$$\left.\begin{array}{l} U = r(\underline{x}, \theta) \\ \\ a \text{ y } b \mid P(a \leq U \leq b) = 1-\alpha \end{array}\right\} \quad S(\underline{x}) = \{\theta \cdot a \leq r(\underline{x}, \theta) \leq b\}$$

→ región de confianza

Intervalos de Confianza de nivel Asintótico 1-α

→ $\lim_{n\to\infty} P(\theta \in S_n(\underline{x})) = 1-\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \sqrt{n\, I(\theta)}\,(\hat{\theta}-\theta) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \\ \\ \bullet\ \hat{\theta} \in \text{consistente para } \theta \end{array}\right\} \quad \sqrt{n\, I(\hat{\theta})}\,(\hat{\theta}-\theta) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Relación entre Intervalos de Confianza y Test

→ $S(\underline{x}) = \{\theta : \delta(\underline{x}) = 0\} \in$ región de confianza de nivel 1-α

CAPÍTULO 12

Estimación Bayesiana

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_{\Theta}(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_{\Theta}(\theta)\, d\theta}$$

$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)$ → a posteriori

$f_{\Theta}(\theta)$ → a priori

$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_{\Theta}(\theta)\, d\theta = f_{\underline{X}}(\underline{x})$

Estimación de Probabilidades

* Discreta $P(X_{n+1} > a \mid \underline{X} = \underline{x}) = \sum_{\theta} P(X_{n+1} > a \mid \Theta = \theta)\, p_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)$

* Continua $P(X_{n+1} > a \mid \underline{X} = \underline{x}) = \int_{a}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{n+1}|\Theta=\theta}(x)\, f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)\, d\theta\, dx$