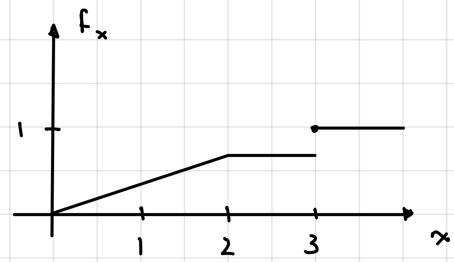
FINALES

20220828

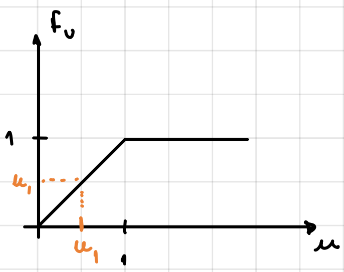
1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

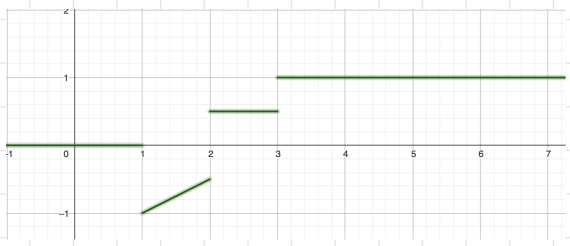
$$F_X(x) = \frac{x}{3}\mathbf{1}\{0 \leq x < 2\} + \frac{2}{3}\mathbf{1}\{2 \leq x < 3\} + \mathbf{1}\{3 \leq x\}$$

Usando los números seleccionados al azar sobre el intervalo $(0,1)$: $u_1 = 0.154$, $u_2 = 0.379$, y $u_3 = 0.723$ simular 3 valores de la variable aleatoria $Y = X|X > 1$.



$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$





$F_Y(y) = F_{X|X>1}(x) = P(X \leq x \mid X>1) \underset{\substack{P(X>1)>0 \\ \frac{2}{3}>0}}{=} \dfrac{P(X \leq x,\ X>1)}{P(X>1)} = \dfrac{P(1 < X \leq x)}{P(X>1)} = \dfrac{F_X(x) - F_X(1)}{2/3} \quad , \quad x > 1$

$$= \frac{\frac{x}{3}\mathbb{1}\{1<x<2\} + \frac{2}{3}\mathbb{1}\{2 \leq x < 3\} + \mathbb{1}\{x \geq 3\} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$$

= (x−3)/3 * 1{1<x<2} + 1/3 * 1{2<=x<3} + 2/3 * 1{x>=3} / 2/3

= (x−3)/2 * 1{1<x<2} + 1/2 * 1{2<=x<3} + 1*{x>=3}

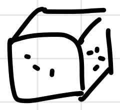
Finalmente, F_Y(y) = (y−3)/2 * 1{1<y<2} + 1/2 * 1{2<=y<3} + 1*{y>=3}

$F_U(u_1) = u_1$, queremos plantear $u_1 \mid F_U(u_1) = F_Y(y_1) \Rightarrow u_1 = F_Y(y_1)$

los u que tenemos son $u_1 = 0,154$; $u_2 = 0,379$; $u_3 = 0,723$

- $\underline{1 < y < 2}$: $u = \frac{y-3}{2} \Rightarrow y = 2u + 3 \Rightarrow 1 < 2u+3 < 2$
- $\underline{2 \leq y < 3}$: $u = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1/2$
- $\underline{y \geq 3}$: $u = 1 \Rightarrow u = 1$

2. Un dado equilibrado tiene sus caras numeradas de la siguiente forma: 3, 5, 5, 5, 6, 6. Se arroja una vez el dado y luego una moneda equilibrada tantas veces como el número obtenido en el dado. Sea X el número observado en el dado, e Y la cantidad de caras observadas. $\underbrace{\text{Calcular } \mathbf{cov}(X,Y)}$



$$\rightarrow \begin{cases} P(\text{sacar } 3) = \frac{1}{6} \\ P(\text{sacar } 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(\text{sacar } 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- arrojo el dado → me da un número x
- arrojo una moneda x veces → cuento las caras

x: número observado en el dado

y: # caras observadas

→ $\underline{x = 3}$ → tiro la moneda 3 veces

$$\underset{\frac{1}{2}}{O} \quad \underset{\frac{1}{2}}{O} \quad \underset{\frac{1}{2}}{O} \quad \sim B(3, 1/2)$$

$Y \mid X = x \sim B(x, 1/2)$, conocemos $p_X(x)$

$\text{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

★ $E[X] = 3\,P(X=3) + 5\,P(X=5) + 6\,P(X=6)$

$= 3\,\frac{1}{6} + 5\,\frac{1}{2} + 6\,\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

★ $E[Y] = E[E[Y \mid X]]$, no sabemos quién es $Y \mid X$ pero sí conocemos $Y \mid X = x$

$E[Y \mid X = x] = \varphi(x)$ ∈ esperanza condicionada y sabemos que se trata de la esperanza de una Binomial $(x, 1/2)$

luego: $\varphi(x) = x\,\frac{1}{2}$

De acá podemos obtener $\varphi(x)$ que es la esperanza condicional de Y, es decir, la función de x que mejor predice a Y. luego $\varphi(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow E[Y \mid X] = \varphi(X) = \frac{X}{2}$

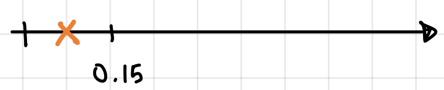
luego: $E[Y] = E[E[Y \mid X]] = E[X/2] \overset{\text{linealidad}}{=} \frac{1}{2} E[X] = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4}$

★ $E[XY] = E[X\,E[Y \mid X]] = E\left[X \cdot \frac{X}{2}\right] = \frac{1}{2} E[X^2] = \frac{1}{2}\left[3^2\,\frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{2} + 6^2 \cdot \frac{1}{3}\right] = 13$

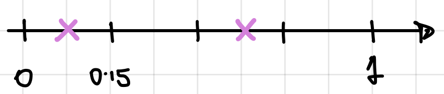
finalmente:

$\text{cov}(X,Y) = 13 - \frac{7}{2}\,\frac{7}{4} = 13 - \frac{49}{8} = 6{,}88$

3. Dos transmisores A y B envían mensajes a un receptor de acuerdo con procesos de Poisson de intensidades 2 y 3 por minuto, respectivamente. Los dos procesos son independientes. Sabiendo que en el primer minuto se enviaron exactamente 2 mensajes, calcular la probabilidad que en los primeros 15 segundos el transmisor A haya enviado al menos un mensaje.

π_A :  PP (2) : envío de mensajes de A por min

π_B :  PP (3) : envío de mensajes de B por min

π :  PP (5) : envío de mensajes de A y B por min

Como hablamos de 2 procesos de Poisson independientes, podemos plantear por superposición un tercer proceso que contenga los eventos de ambos cuya intensidad es la suma de las intensidades de los otros dos procesos.

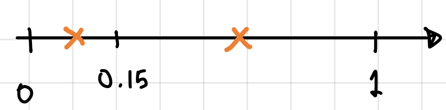
Ahora bien, nos piden $P(N_A(1/4) \geq 1 \mid N(1)=2)$ donde N_A es la VA que cuenta la cantidad de mensajes emitidos por el transmisor A y N es la VA que cuenta la cantidad de mensajes emitidos en total.

Además $N_A(t) \sim \mathcal{P}oi(2t)$ y $N(t) \sim \mathcal{P}oi(5 \cdot t)$

$$P(N_A(1/4) \geq 1 \mid N(1)=2) = \frac{P(N_A(1/4)\geq 1,\ N(1)=2)}{P(N(1)=2)} = \odot$$

$$N_A(1/4) \geq 1,\ N(1)=2 \begin{cases} N_A(1/4)=1,\ N_A(1/4,1)=0,\ N_B(1)=1 \\ N_A(1/4)=1,\ N_A(1/4,1)=1,\ N_B(1)=0 \\ N_A(1/4)=2,\ N_A(1/4,1)=0,\ N_B(1)=0 \end{cases}$$

π. 

π. 

π. 

por eventos ME, la intersección de los eventos es vacío, luego la probabilidad es la sumatoria de los mismos

$$\odot = \frac{P(N_A(1/4)=1, N_A(1/4,1)=0, N_B(1)=1) + P(N_A(1/4)=1, N_A(1/4,1)=1, N_B(1)=0) + P(N_A(1/4)=2, N_A(1/4,1)=0, N_B(1)=0)}{P(N(1)=2)} = \odot$$

como N_A y N_B son independientes:

$$P(N_A(t)=n_A,\ N_B(t)=n_B) = P(N_A(t)=n_A) \cdot P(N_B(t)=n_B)$$

$\star$ $P(\underbrace{N_A(1/4)}_{\sim \mathcal{P}oi(2\cdot 1/4)}=1,\ N_A(1/4,1)=0,\ \underbrace{N_B(1)}_{\sim \mathcal{P}oi(3\cdot 1)}=1) = \frac{(1/2)^1 e^{-1/2}}{1!} \cdot \frac{(1/2)^0 e^{-1/2}}{0!} \cdot \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = \frac{3}{2} e^{-4}$

$\star$ $P(N_A(1/4)=1,\ N_A(1/4,1)=1,\ N_B(1)=0) = \frac{(1/2)^1 e^{-1/2}}{1!} \cdot \frac{(1/2)^1 e^{-1/2}}{1!} \cdot \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = \frac{1}{4} e^{-4}$

$\star$ $P(N_A(1/4)=2,\ N_A(1/4,1)=0,\ N_B(1)=0) = \frac{(1/2)^2 e^{-1/2}}{2!} \cdot \frac{(1/2)^0 e^{-1/2}}{0!} \cdot \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = \frac{1}{8} e^{-4}$

$$\Rightarrow \odot = \frac{15/8\ e^{-4}}{25/2\ e^{-5}} = \frac{3}{20} e \approx 0{,}4$$

4. Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $Ray(\sigma)$. Sea $\hat{v}$ el estimador de máxima verosimilitud para **var**(X), hallar el sesgo de $\hat{v}$.

☞:*Recordar que si $Y = X^2$, entonces $Y \sim \mathcal{E}(1/2\sigma^2)$.*

$$v = Var(X_1) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

$$\frac{d\ln(L(\theta))}{d\sigma} = 0 \rightarrow \text{EMV para } \sigma$$

obtenemos $\hat{\sigma}$

$$\hat{v} = \frac{4-\pi}{2}\hat{\sigma}^2$$

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Ray(\sigma)$

$\hat{v} \in$ EMV de $Var(X)$

• $B(\hat{v})$?

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}\{x \geq 0\}, \quad \sigma > 0$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma^2} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}\{x_i \geq 0\} = \frac{\prod x_i}{\sigma^{2n}} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln(L(\theta)) = \ln\left(\frac{\prod x_i}{\sigma^{2n}} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}\right) = \ln\left(\frac{\prod x_i}{\sigma^{2n}}\right) - \frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2} = \ln(\prod x_i) - \ln(\sigma^{2n}) - \frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \sum \ln(x_i) - 2n\ln(\theta) - \frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{d\ln(L(\theta))}{d\theta} = -\frac{2n}{\theta} - \frac{\sum x_i^2}{2}\frac{(-2)}{\theta^{-3}} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{\sum x_i^2}{\theta^3} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{\theta^3} = \frac{2n}{\theta} \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{2n} = \theta^2$$

$$\Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{2n}}$$

luego $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum x_i}$ $\in$ EMV de θ

$$X \sim Ray(\sigma), \quad f_X(\sigma) = \frac{x}{\sigma} e^{-x^2/2\sigma}$$

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma} e^{-x_i^2/2\sigma} = \frac{\prod x_i}{\sigma^n} e^{-\sum x_i^2/2\sigma} = \frac{\prod x_i}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma}\sum x_i^2}$$

$$\ln(L(\sigma)) = \ln\left(\frac{\prod x_i}{\sigma^n}\right) - \frac{1}{2\sigma}\sum x_i^2 = \sum \ln(x_i) - \ln(\sigma^n) - \frac{1}{2\sigma}\sum x_i^2 = \sum \ln(x_i) - n\ln(\sigma) - \frac{\sum x_i^2}{2\sigma}$$

$$\frac{d(\ln(L(\sigma)))}{d\sigma} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i^2}{2}\frac{1}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{2\sigma^{\cancel{2}}} = \frac{n}{\cancel{\sigma}} \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{2n} = \hat{\sigma} \in \text{EMV de } \sigma^2$$

Como $\hat{\sigma} \in$ EMV de σ y $Var(X) = g(\sigma)$, por el principio de invariancia, $\hat{v} = g(\hat{\sigma}) \in$ EMV de $Var(X)$:

$$\hat{v} = \frac{4-\pi}{2}\hat{\sigma} = \frac{4-\pi}{2}\frac{\sum x_i^2}{2n} \in \text{EMV de } Var(X)$$

$$B(\hat{v}) = E[\hat{v}] - v = E[\hat{v}] - Var(X) = E\left[\frac{4-\pi}{2}\frac{\sum x_i^2}{2n}\right] - \frac{4-\pi}{2}\sigma =$$

$$= \frac{4-\pi}{2}\frac{1}{2n}\sum E[x_i^2] - \frac{4-\pi}{2}\sigma = \frac{4-\pi}{4n}\sum \underbrace{E[Y_i]}_{\sim\mathcal{E}(1/2\sigma)} - \frac{4-\pi}{2}\sigma = \frac{4-\pi}{\cancel{4}\cancel{n}_2}\cancel{n}\cdot\cancel{2}\sigma - \frac{4-\pi}{2}\sigma$$

$$= \frac{4-\pi}{2}\cdot\sigma - \frac{4-\pi}{2}\cdot\sigma = 0$$

$\Rightarrow \hat{v} \in$ insesgado

Rehacer con $L(\sigma^2)$

5. Las llamadas arriban a la central de emergencias de una ciudad según un proceso Poisson de intensidad λ por hora. Si entre las 0:00 horas del lunes y las 12:00 del martes hubo un total de 90 llamadas, construir un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para λ basado en la muestra observada.

0 L — 12 M

PP(μ) : arribo de llamadas por hora

$N(36) = 90$, $N \sim Poi(\mu . 36)$

Me piden $P(A \leq \lambda \leq B) \to 0{,}95$

✓ • Busco el EMV de λ , $\lambda = 36\mu$

✓ • Busco el número de Fisher de λ

✓ • construyo el pivote $\sim \mathcal{N}(0,1)$

✓ • calculo los cuantiles

$\to f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \dfrac{\lambda^{\Sigma x_i} e^{-\lambda n}}{\pi x_i!}$

$\ln(L(\lambda)) = \ln\left(\dfrac{\lambda^{\Sigma x_i} e^{-\lambda n}}{\pi x_i!}\right) = \ln(\lambda^{\Sigma x_i} e^{-\lambda n}) - \ln(\pi x_i!) = \ln(\lambda^{\Sigma x_i}) - \lambda n - \Sigma \ln(x_i!) =$

$= \Sigma x_i \ln(\lambda) - \lambda n - \Sigma \ln(x_i!)$

$\dfrac{d \ln(L(\lambda))}{d\lambda} = \dfrac{\Sigma x_i}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \dfrac{\Sigma x_i}{\lambda} = n \Rightarrow \lambda = \dfrac{\Sigma x_i}{n} \Rightarrow \hat{\lambda} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$ € EMV de λ

$\to I(\lambda) = -E\left[\dfrac{d^2}{d\lambda^2}(\ln(f_\lambda(x)))\right] =$

$f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow \ln(f_\lambda(x)) = \ln\left(\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\right) = \ln(\lambda^x) + \ln(e^{-\lambda}) - \ln(x!) =$

$= x\ln(\lambda) - \lambda - \ln(x!)$

$\Rightarrow \dfrac{d}{d\lambda} \ln(f_\lambda(x)) = \dfrac{x}{\lambda} - 1 = x\lambda^{-1} - 1$

$\dfrac{d^2}{d\lambda^2} \ln(f_\lambda(x)) = (-1)\, x\, \lambda^{-2} = -\dfrac{x}{\lambda^2}$

luego $I(\lambda) = -E\left[-\dfrac{x}{\lambda^2}\right] = \dfrac{1}{\lambda^2} E[x]$, $x \sim Poi(\mu)$

$\Rightarrow I(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2} . \lambda = \dfrac{1}{\lambda}$

recordemos que $\lambda = 36\mu$ es decir función del parámetro al que le queremos calcular el IC

por el principio de invarianza:

$\lambda = 36\mu \Rightarrow \mu = \dfrac{\lambda}{36}$

$\hat{\lambda} \in$ EMV de λ :

$\hat{\mu} = \dfrac{\hat{\lambda}}{36} \in$ EMV de μ

$\to \sqrt{n\, I(\hat{\lambda})}\,(\hat{\lambda} - \lambda) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow U = \sqrt{n \dfrac{1}{\hat{\lambda}}}\,(\hat{\lambda} - \lambda) = \sqrt{\dfrac{n}{\hat{\lambda}}}\,(\hat{\lambda} - \lambda) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1) \to P(a \leq U \leq b) \simeq 0{,}95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}05$

luego $P(a \leq U \leq b) = P(-z_{1-\alpha/2} \leq U \leq z_{1-\alpha/2}) \simeq 1 - \alpha = 0{,}95$

$\Rightarrow P\left(-z_{0.975} \leq \sqrt{\dfrac{n}{\hat{\lambda}}}\,(\hat{\lambda} - \lambda) \leq z_{0.975}\right) \approx 0.95 \to$ despejamos λ

$\to P\left(-z_{0.975}\sqrt{\dfrac{\hat{\lambda}}{n}} \leq \hat{\lambda} - \lambda \leq \sqrt{\dfrac{\hat{\lambda}}{n}}\, z_{0.975}\right)$

$= P\left(+z_{0.975}\sqrt{\dfrac{\hat{\lambda}}{n}} + \hat{\lambda} \geq \lambda \geq -\sqrt{\dfrac{\hat{\lambda}}{n}}\, z_{0.975} + \hat{\lambda}\right) \approx 0.95$, $\hat{\lambda} = 36\hat{\mu}$

ahora bien, como buscábamos el IC de μ y es función de λ, reemplazo:

$P\left(36\hat{\mu} - \sqrt{\dfrac{36\hat{\mu}}{n}}\, z_{0.975} \leq 36\mu \leq 36\hat{\mu} + \sqrt{\dfrac{36\hat{\mu}}{n}}\, z_{0.975}\right) \approx 0{,}95$

$P\left(\hat{\mu} - \sqrt{\dfrac{\hat{\mu}}{36n}}\, z_{0.975} \leq \mu \leq \hat{\mu} + \sqrt{\dfrac{\hat{\mu}}{36n}}\, z_{0.975}\right) \approx 0{,}95$

en términos del enunciado sería $\hat{\lambda}$

$\Rightarrow$ el IC asintótico para μ de nivel 0,95 es $IC = \left[\hat{\mu} - \sqrt{\dfrac{\hat{\mu}}{36n}}\, z_{0.975} \; ; \; \hat{\mu} + \sqrt{\dfrac{\hat{\mu}}{36n}}\, z_{0.975}\right]$

20220811

1. Una orquesta sinfónica tiene en su repertorio 8 sinfonías de Mozart, 12 trabajos modernos y 5 piezas nacionales. Si para cada concierto la orquesta elije 5 obras al azar, calcular la probabilidad de que en el concierto del próximo viernes se escuchen, en el siguiente orden: 2 sinfonías de Mozart, 1 pieza nacional, 1 sinfonía de Mozart y 1 trabajo moderno.

8 mozart
12 modernos
5 nacionales

→ 5 al azar - - →
1° 2 Mozart
2° 1 nacional
3° 1 Mozart
4° 1 moderno

$\# CP = \binom{25}{5}$

$\#(M\,M\,N\,M\,O) = \frac{8}{M} \cdot \frac{7}{M} \cdot \frac{5}{N} \cdot \frac{6}{M} \cdot \frac{12}{O} = \frac{8!}{6!} \; \frac{5!}{4!} \; \frac{6!}{5!} \; \frac{12!}{11!}$ → variaciones

$\Rightarrow P(MMNMO) = \frac{8.7.5.6.12}{\binom{25}{5}} = \boxed{0{,}379}$ RTA

M M N M O

$\frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{5}{23} \cdot \frac{6}{22} \cdot \frac{12}{21}$

2. Sea T la distancia (en miles de kilómetros) hasta la primera falla de las cubiertas de un auto, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{t}{900}\mathbf{1}\{t > 0\}$$

Si las distancias hasta la primera falla de las 4 ruedas de un auto pueden considerarse variables independientes, calcular la probabilidad de que las cuatro ruedas no presenten fallas en los primeros treinta mil kilometros recorridos.

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt} & , \text{ si } t > 0 \\ 0 & , \text{ eoc} \end{cases}$$

T_i: dist. hasta la 1° falla de la cubierta i (en miles de km)

$T_i \overset{iid}{\sim} T$, $P(T > 30) = P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 > 30)$

por iid: $P(T > 30) = \prod_{i=1}^{4} P(T_i > 30)$

busquemos cómo se distribuye T:

$$\int_0^t \frac{s}{900} \mathbb{1}\{s > 0\}\,ds = \frac{1}{900}\int_0^t s\,\mathbb{1}\{s>0\}\,ds = \frac{1}{900}\frac{s^2}{2}\Big|_0^t \mathbb{1}\{t>0\} = \frac{1}{900}\frac{t^2}{2}\mathbb{1}\{t>0\} = \frac{t^2}{1800}\mathbb{1}\{t>0\}$$

luego:

$$F_T = \begin{cases} 1 - e^{-t^2/1800} & , t > 0 \\ 0 & , \text{eoc} \end{cases} = \left(1 - e^{-t^2/1800}\right)\mathbb{1}\{t>0\}$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \frac{t^2}{1800} e^{-t^2/1800} \cdot \frac{2t}{1800} = \frac{2}{1800^2} t^3 e^{-t^2/1800} \rightarrow$$ no veo a qué se parece

$$\Rightarrow P(T_1 > 30) = 1 - P(T_1 \leq 30) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{VAC} \\ P(T_1=30)=0}}{=} 1 - P(T_1 < 30) = 1 - F_{T_1}(30) = 1 - \left[1 - e^{-30^2/1800}\right] = e^{-30^2/1800} = 0{,}607$$

finalmente, $$P(T>30) = \prod_{i=1}^{4} P(T_i > 30) = \prod_{i=1}^{4} e^{-30^2/1800} = \left(e^{-30^2/1800}\right)^4 = e^{-30^2 \cdot 4/1800} = \boxed{0{,}1353}$$

RTA

3. Un dado equilibrado tiene sus caras numeradas de la siguiente forma: 4, 5, 5, 6, 6, 6. Se arroja una vez el dado y luego una moneda equilibrada tantas veces como el número obtenido en el dado. Sea X el número observado en el dado e Y la cantidad de caras observadas. Calcular $\mathbf{E}[X|Y=3]$

$P(X=4) = 1/6$

$P(X=5) = 2/6$

$P(X=6) = 3/6$

$p_X(x) = \dfrac{x-3}{6}, \quad x \in [4,6]$ ①

$Y|X \sim Bin(X, 1/2)$ ② guía 5

La # veces que tiro la moneda es X y tengo proba 1/2 de que sea cara

$E[Y|X] \rightarrow E[X|Y=3]$

sabemos: $\begin{cases} \bullet\ Y|X=x \sim B(x, 1/2) \\ \bullet\ \cancel{Y \sim Ber(1/2)} \end{cases}$

• $f_{XY}(x,3) = f_{Y|X=x}(3)\, f_X(x)$ ③

$$f_{Y|X=x}(y) = \binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y}, \quad y \in [0,x], \quad x \in [4,6]$$

$$f_{Y|X=x}(3) = \binom{x}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y \in [0,x], \quad x \in [4,6]$$

$$\Rightarrow f_{XY}(x,3) = \binom{x}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{x-3}{6}, \quad y \in [0,x], \quad x \in [4,6]$$

$$f_Y(3) = \sum_{x=4}^{6} \binom{x}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{x-3}{6}\right) = \frac{29}{96}$$ ④ guía 2

luego:

$$E[X|Y=3] = \sum_{x=4}^{6} x\, \frac{f_{XY}(x,3)}{f_Y(3)} = \sum_{x=4}^{6} \frac{x}{29/96} \binom{x}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{x-3}{6} = 5{,}379$$ ⑤

Resumen

1) Buscamos $p_X(x)$

2) Sabíamos que $Y|X \sim B(x,p)$

3) Planteamos $f_{Y|X=x}(x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$ → es el denominador no la condición

4) Planteamos $f_Y(y) = \sum_{x \in R_X} f_{XY}(x,y)\, f_X(x)$

5) Finalmente $E[X|Y=y] = \sum_{x \in R_X} x\, \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$

4. Para decir que una nueva serie de Netflix fue exitosa, debe estudiarse si más del 25% de la audiencia (después de un período inicial de 5 episodios), continúa viendo la serie. En una muestra de 400 usuarios se obtuvo que 112 de ellos siguen la serie. Con un nivel de significación asintótico de 0.01, ¿puede considerarse que la serie fue exitosa?

- de 400 la ven 112
- $1-\alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha = 0{,}99$

X_i: el i-ésimo usuario ve la serie $\sim Ber(p)$, $\sum_{i=1}^{400} X_i = 112$

$H_0: p \leq 0{,}25$ vs $H_1: p > 0{,}25$

- busco el test:

$C(p)$ creciente y $H_0: \theta \leq \theta_1$

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & T > k_\alpha \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

como Ber $\in$ flia exponencial , $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p)$

$$\Rightarrow P_{p=p_1}(\delta(\underline{x}) = 1) = P_{p=0.25}(\overline{X} > k_\alpha) = P_{p=0.25}\left(\underbrace{\frac{\sum X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}} > k'_\alpha\right) \underset{\text{TCL}}{\simeq} 1 - \Phi(k'_\alpha) = \alpha$$

$$\rightarrow 1 - \Phi(k'_\alpha) = \alpha = 0{,}99$$

$$\Phi(k'_\alpha) = 0.01 \Rightarrow k'_\alpha = 2{,}326$$

finalmente:

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} 1 , & \dfrac{\sum X_i - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > 2{,}326 \\ 0 , & \end{cases}$$

según la muestra . $\sum X_i = 112 \rightarrow \dfrac{112 - 400 \cdot 0{,}25}{\sqrt{400 \cdot 0{,}25 (1-0{,}25)}} = 1{,}356 < 2{,}326$

$\Rightarrow$ no rechazamos H_0 $\rightarrow$ no puede considerarse que la serie fue exitosa

5. El rinde de una hectárea de naranjas (en toneladas) es una variable aleatoria con distribución normal de media 50. Para cada $\Theta = \theta$, la varianza del rinde es de $1/\theta$. A priori, se sabe que $\Theta \sim \mathcal{E}(1)$. En una muestra de 6 hectáreas se obtuvieron los siguientes rindes: 45.8, 51.1, 53.5, 48.5, 52.1, 49.0. En virtud de la información muestral, hallar la distribución *a posteriori* de θ.

- X: rinde de una hectárea de naranjas en toneladas $\sim \mathcal{N}(50, 1/\theta)$
- $\Theta \sim \mathcal{E}(1)$
- $\underline{x} = 45.8,\ 51.1,\ 53.5,\ 48.5,\ 52.1,\ 49.0$

¿ $f_\Theta(x)$ a posteriori ?

sabemos

$$\underbrace{f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)}_{\text{a posteriori}} = \frac{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_\Theta(\theta) \to \text{a priori}}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_\Theta(\theta)\, d\theta}_{f_{\underline{X}}(\underline{x})}}$$

$$f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,1/\theta} e^{-\frac{(x_i-50)^2}{2\left(\frac{1}{\theta}\right)^2}} = \left(\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum^n \frac{(x_i-50)^2}{2\theta^{-2}}} = \frac{\theta^n}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\theta^2 n}{2}\sum^n (x_i^2+50^2-2x_i 50)}$$

$$= \left(\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\theta^2 n}{2}\left(50^2 n + \sum^n x_i^2 - 100 x_i\right)}$$

a priori $f_\Theta(\theta) = e^{-\theta}$

$$f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_\Theta(\theta) = \left(\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\theta^2 n}{2}\left(50^2 n + \sum^n x_i^2 - 100x_i\right)}\ e^{-\theta}$$

$$= \left(\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\theta^2 n}{2}\left(50^2 n + \sum^n x_i^2 - 100x_i\right) - \theta} = \left(\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\theta^2 \frac{n}{2}\sum(x_i-50)^2 - \theta}$$

$$\int_0^\infty f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\, f_\Theta(\theta)\, d\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_0^\infty \theta^n e^{-\theta^2 k_1 - \theta}\, d\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_0^\infty \theta^n e^{-\theta^2 k} e^{-\theta}\, d\theta$$

$$k = \frac{n}{2}\left(50^2 n + \sum x_i^2 - 100 x_i\right)$$

$$\int^\infty \theta^n e^{-\theta^2 k} e^{-\theta}\, d\theta,$$

$$\int_0^\infty \theta^n e^{-\left(\theta\sqrt{k} + 1/2\sqrt{k}\right)^2 + \frac{1}{4k}}\, d\theta$$

$$e^{1/4k}\int_0^\infty \theta^n e^{-\left(\theta\sqrt{k}+1/2\sqrt{k}\right)^2}\, d\theta$$

llamemos $x = \theta\sqrt{k} \Rightarrow \theta = \frac{x}{\sqrt{k}} \to d\theta = d\frac{x}{\sqrt{k}}$

$a = 1/2\sqrt{k}$

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^n e^{-(x+a)^2}\, d\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$$

$-\theta^2 k - \theta$

$-(\theta^2 k + \theta)$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$\boxed{a = \theta\sqrt{k}}$

$2ab = \theta$

$b = \frac{\theta}{2a} = \frac{\theta}{2\theta\sqrt{k}}$

$\boxed{b = \frac{1}{2\sqrt{k}}}$

$\left(\theta\sqrt{k} + 1/2\sqrt{k}\right)^2$

$\theta^2 k + \frac{1}{4k} + \frac{2\theta\sqrt{k}}{2\sqrt{k}}$

$\theta^2 k + \frac{1}{4k} + \theta$

MAL

$$-\theta^2 - \theta = -(\theta^2 c^2 + \theta)$$

$a = \theta c$, $2ab = \theta \Rightarrow b = \frac{\theta}{2\theta c} = \frac{1}{2c}$

$(\theta c + 1/2c)^2 = \theta^2 c^2 + \frac{1}{4c^2} + \frac{2\theta c}{2c}$

$$\Rightarrow f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) \propto \left(\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\theta^2 \frac{n}{2}\sum(x_i-50)^2 - \theta}$$

$$\Rightarrow f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = k\left(\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\theta^2 \frac{n}{2}\sum(x_i-50)^2 - \theta} = \frac{k}{(\sqrt{2\pi})^n}\theta^n e^{-\theta^2 c^2 - \theta} = \frac{k}{(\sqrt{2\pi})^n}\theta^n e^{-(\theta c + 1/2c)^2 + 1/4c^2}$$

$$c^2 = \frac{n}{2}\sum(x_i-50)^2$$

$$= \frac{k\, e^{1/4c^2}}{(\sqrt{2\pi})^n}\theta^n e^{-(\theta c + 1/2c)^2}$$

5. El rinde de una hectárea de naranjas (en toneladas) es una variable aleatoria con distribución normal de media 50. Para cada $\Theta = \theta$, la varianza del rinde es de $1/\theta$. A priori, se sabe que $\Theta \sim \mathcal{E}(1)$. En una muestra de 6 hectáreas se obtuvieron los siguientes rindes: 45.8, 51.1, 53.5, 48.5, 52.1, 49.0. En virtud de la información muestral, hallar la distribución *a posteriori* de θ.

- X: rinde de una hectárea de naranjas en toneladas $\sim \mathcal{N}(50, 1/\theta)$
- $\Theta \sim \mathcal{E}(1)$
- $\underline{x} = 45.8,\ 51.1,\ 53.5,\ 48.5,\ 52.1,\ 49.0$

¿ $f_\Theta(x)$ a posteriori ?

sabemos $\underbrace{f_{\Theta|X=x}(\theta)}_{\text{a posteriori}} = \dfrac{f_{X|\Theta=\theta}(\underline{x})\ \overbrace{f_\Theta(\theta)}^{\text{a priori}}}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|\Theta=\theta}(\underline{x})\ f_\Theta(\theta)\,d\theta}_{f_{\underline{X}}(\underline{x})}}$

$$f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\ 1/\theta}}\ e^{-\frac{(x_i-50)^2}{2\cdot\frac{1}{\theta}}}\ \mathbb{1}\{x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^{n/2} \cdot e^{-\Sigma(x_i-50)^2\cdot\frac{\theta}{2}}$$

$$f_\Theta(\theta) = e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\cdot f_\Theta(\theta) = \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\frac{\theta}{2}\Sigma(x_i-50)^2} \cdot e^{-\theta}$$

$$= \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-\theta\underbrace{\left(1/2\,\Sigma(x_i-50)^2+1\right)}_{k}}$$

$$= \frac{\theta^{n/2}}{(\sqrt{2\pi})^n}\ e^{-\theta k}$$

$$\Rightarrow f_{\theta|X=x}(\theta) = C\ \frac{\theta^{n/2}}{(\sqrt{2\pi})^n}\ e^{-\theta k} = C\ \theta^{n/2}\ e^{-\theta k}$$

$$\begin{cases} \nu - 1 = \dfrac{n}{2} \Rightarrow \nu = \dfrac{n}{2}+1 \\ \lambda = k \end{cases}$$

$$C = \frac{k^{n/2+1}}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{k^4}{\Gamma(4)} = \frac{k^4}{3!}$$

$$\Rightarrow f_{\theta|X=x}(\theta) = \frac{\left(1/2\,\Sigma(x_i-50)^2+1\right)^4}{3!}\ \theta^3\ e^{-\theta\left(1/2\,\Sigma(x_i-50)^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow \theta|X=x \sim \Gamma\Big(4, \underbrace{\left(1/2\,\Sigma(x_i-50)^2+1\right)}_{k}\Big)$$

veamos que $k = 20{,}38$

finalmente: $\boxed{\Theta|X=x \sim \Gamma(4, 20.38)}$ RTA

1. Se arrojan cinco monedas equilibradas y se agregan en una bolsa tantas bolas blancas como cantidad de caras observadas, y tantas negras como cecas. Luego se extrae una bola al azar y resulta ser blanca. Calcular la probabilidad de que luego de tirar las monedas, hayan quedado en la bolsa dos bolas blancas y tres negras.

C : al arrojar una moneda se observa cara

B : se extrae una bola y se observa que es blanca

A : hay 2 bolas blancas y 3 negras en la bolsa

$P(A \mid B) = ?$

$P(B \mid A) = \frac{2}{5} = P(A \mid B) \frac{P(B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \mid B) = P(B \mid A) \frac{P(A)}{P(B)}$

$P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

M_i : el tiro de la i-ésima moneda es $\underbrace{\text{cara}}$ $\sim Ber(1/2)$ — si pongo "ceca" me da igual

$A \equiv \sum_{i=1}^{5} M_i = 2$, $\sum_{i=1}^{5} M_i \sim B(5, 1/2)$

luego $P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{5} M_i = 2\right) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5}{16}$

finalmente: $P(A \mid B) = \frac{2}{5} \frac{1/2}{5/16} = \frac{16}{25}$

si no tenemos en cuenta el "dado que se extrajo de la bolsa 1 blanca" el problema se reduce a calcular $P\left(\sum_{i=1}^{5} M_i = 2\right)$

2. Un dado piramidal tiene sus caras con los números 1, 2, 3, 4 y cargadas con probabilidades 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 respectivamente. El experimento consiste en arrojar el dado hasta obtener un 1. Sea X la cantidad de tiros hasta observar el 1 e Y la cantidad de 3 observados. Calcular $E[Y]$.

D : nº observado en el dado

$$\left.\begin{array}{l} P(D=1) = 0{,}4 = \frac{4}{10} \\ P(D=2) = 0{,}3 = \frac{3}{10} \\ P(D=3) = 0{,}2 = \frac{2}{10} \\ P(D=4) = 0{,}1 = \frac{1}{10} \end{array}\right\} \quad p_D(d) = \frac{5-d}{10}, \quad d \in [1,4]$$

X : # tiros hasta el primer 1 $\sim \mathcal{G}(0{,}4)$

Y : # 3 observados

$\underline{X=4}$: $\underset{\substack{2\\3\\4}}{\_}\ \underset{\substack{2\\3\\4}}{\_}\ \underset{\substack{2\\3\\4}}{\_}\ \underline{1}$ → tiro en dado 3 veces y observo si salió el 3 $\sim B(3, \underbrace{0.2}_{P(D=3)})$

$\underline{X=5}$: $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{2|3|4}\ \underline{1}$ → tiro el dado 4 veces y observo si salió el 3 $\sim B(4, 0.2)$

$Y | X = x \sim B(x-1, 0.2)$

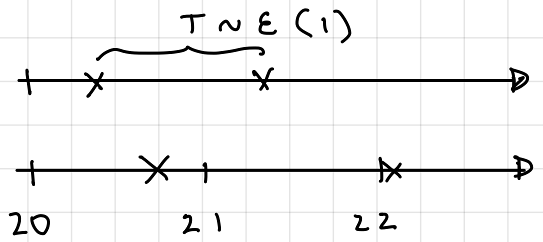
vemos que $E[Y | X=x] = (x-1) \cdot \frac{2}{10} = \varphi(x)$

ahora bien $\varphi(X) = \frac{2}{10}(X-1) = E[Y|X]$

luego $E[Y] = E[E[Y|X]] = E\left[\frac{2}{10}(X-1)\right] = \frac{2}{10} E[X-1] = \frac{2}{10}(E[X]-1) =$

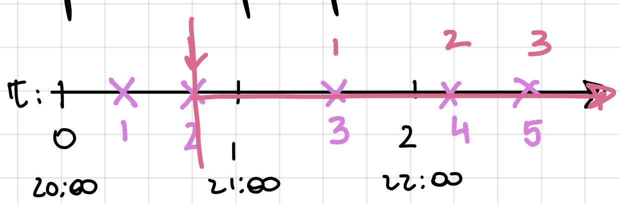
$= \frac{2}{10}\left(\frac{1}{0{,}4} - 1\right) = \boxed{\frac{3}{10}}$ RTA

3. Leo y Mati comienzan sus turnos trabajando de lavacopas en el *Bar Astillas* a las 20:00. Leo rompe copas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 1 por hora. Independientemente, los tiempos (en horas) entre roturas provocadas por Mati son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro $\frac{4}{3}$. Si el sábado se rompieron exactamente 2 copas entre las 20:00 y 21:00, calcular la probabilidad de que la quinta copa se hubiera roto después de las 22:00.



PP (1) : copas que rompe Leo por hr
PP (4/3) : copas que rompe Mati por hr
} indep.

por superposición de PP indep.:



PP $(\underbrace{1 + 4/3}_{7/3})$: copas que se rompen en el bar

P ("la 5° copa se rompe dsp 22" | "se rompieron exac. 2 entre 20 y 21")

G_5 : tiempo hasta que se rompe la 5° copa $\sim \Gamma(5, 7/3)$

$P(G_5 > 2 \mid N(1) = 2) = P(\underset{\sim \Gamma(3, 7/3)}{G_3} > 2) = 0{,}944$

$P(G_5 > 2 \mid N(1) = 2)$

$= P(G_3 > 2)$

4. La tensión de salida de cierto amplificador es ϕ volt, con $\phi > 0$. La medición de la tensión de salida es una variable aleatoria $M = \phi \cdot N$, donde $N \sim \mathcal{N}(0, 4)$. Se realizan 10 mediciones y se observa un promedio de 17 volt. Hallar un cota inferior de confianza de nivel 0.95 para la tensión de salida ϕ basada en la muestra observada.

$M = \phi N$, $N \sim \mathcal{N}(0,4) \Rightarrow M \sim \mathcal{N}(0, \phi^2 4)$

$\overline{m}_{10} = 17$

me piden $P(A < \phi < B) = 0.95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0.05$

podemos plantear $Z \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow P(a \leq z \leq b) = 0.95$, $a = z_{\alpha/2}$, $b = z_{1-\alpha/2}$

ahora bien, proponemos el pivote $Z = \dfrac{\sum M_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ donde $M_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

luego $\dfrac{\sum M_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{(TCL)}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow P\left(A \leq \dfrac{\sum M_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq B\right) = 0{,}95$

ahora bien, no conocemos $\sum M_i$ pero sí a $\overline{M}$:

$P\left(A \leq \dfrac{\overline{M} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq B\right) = 0{,}95$ luego $A = -z_{1-\alpha/2}$, $B = z_{1-\alpha/2}$

$P\left(\dfrac{1}{A} \geq \dfrac{\sqrt{\sigma^2/n}}{\overline{M}-\mu} \geq \dfrac{1}{B}\right) = P\left(\dfrac{1}{A}(\overline{M}-\mu) \geq \sqrt{\sigma^2/n} \geq \dfrac{1}{B}(\overline{M}-\mu)\right)$.

$= P\left(\dfrac{1}{A^2}(\overline{M}-\mu)^2 \geq \dfrac{\sigma^2}{n} \geq \dfrac{1}{B^2}(\overline{M}-\mu)^2\right) =$

$= P\left(\dfrac{1}{A^2}\dfrac{(\overline{M}-\mu)^2}{n} \geq \sigma^2 \geq \dfrac{1}{B^2}\dfrac{(\overline{M}-\mu)^2}{n}\right) =$

$= P\left(\dfrac{1}{A^2}\dfrac{1}{4}\dfrac{(\overline{M}-\mu)^2}{n} \geq \phi^2 \geq \dfrac{1}{B^2}\dfrac{1}{4}\dfrac{(\overline{M}-\mu)^2}{n}\right)$

donde
$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}05 \\ A = -z_{1-\alpha/2} \\ B = z_{1-\alpha/2} \\ \overline{M} = 17 \\ \mu = 0 \\ n = 10 \end{array}\right\} \rightarrow \text{lo único que no conozco es } \phi$$

$\Rightarrow IC(\underline{m}) = \left[\dfrac{1}{B^2}\dfrac{1}{4}\dfrac{(\overline{M}-\mu)^2}{n} ; \dfrac{1}{A^2}\dfrac{1}{4}\dfrac{(\overline{M}-\mu)^2}{n}\right]$

5. El tiempo en minutos que tarda un módem en procesar un paquete de datos es una variable aleatoria T. Para cada $\Theta = \theta$, T tiene distribución exponencial de parámetro θ. A priori Θ es una variable aleatoria con distribución Gamma de media 2 y varianza 1. En una muestra de 20 paquetes se observó que el tiempo promedio en realizar la tarea es 3.8 minutos. Hallar una estimación de Bayes basada en la muestra observada.

T: tiempo en min que tarda en modem

$T \mid \Theta = \theta \sim \mathcal{E}(\theta)$

a priori $\Theta \sim \Gamma(2,1)$

$\bar{T}_{20} = 3{,}8$

me piden $f_{\Theta \mid T=t}(\theta)$ (a posteriori)

$$f_{\Theta \mid T=t}(\theta) = \frac{f_{\underline{T} \mid \Theta=\theta}(\underline{t})\, f_\Theta(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{T}\mid\Theta=\theta}(\underline{t})\, f_\Theta(\theta)\, d\theta}$$

$$f_{\underline{T}\mid\Theta=\theta}(\underline{t}) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta t_i} = \theta^n e^{-\theta \Sigma t_i}$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{(2-1)!} \theta^{2-1} e^{-1.\theta} = \theta e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow f_{\underline{T}\mid\Theta=\theta}(\underline{t}) \cdot f_\Theta(\theta) = \theta^n e^{-\theta \Sigma t_i} \cdot \theta e^{-\theta} = \theta^{n+1} e^{-\theta \underbrace{(\Sigma t_i + 1)}_{k}}$$

$$\theta^{n+1} e^{-\theta k} \quad \lambda = k$$

$n+1 = r-1$

$n+2 = r$

$$\frac{k^{n+2}}{\Gamma(n+2)}$$

$$\int \theta^{n+1} e^{-\theta k}\, d\theta$$

$$\frac{\Gamma(n+2)}{k^{n+2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{k^{n+2}}{\Gamma(n+2)} \theta^{n+1} e^{-\theta k}\, d\theta}_{\in \text{ dist de } \Gamma(n+2,\, k)}$$

$$\Rightarrow \int f_{\underline{T}\mid\theta=\theta}(\underline{t}) \cdot f_\theta(\theta)\, d\theta = \frac{\Gamma(n+2)}{(\Sigma t_i + 1)^{n+2}}$$

$$\Rightarrow f_{\theta \mid T=t} = \theta^{n+1} e^{-\theta k} \frac{k^{n+2}}{\Gamma(n+2)} = \frac{k^{n+2}}{\Gamma(n+2)} \theta^{n+1} e^{-\theta k}$$

$\lambda = k$

$r = n+2$

finalmente, $\theta / T = t \sim \Gamma(22,\ \underbrace{20 \cdot 3{,}8}_{n\sum_{i=1}^{n} t_i} + 1)$

20221222

N la cantidad ...
la recta de regresión de M dado N.

B **4.** La velocidad del viento en cierto momento del día es una variable aleatoria con distribución Rayleigh de parámetro $\sqrt{\theta}$, $\theta > 0$. Dimas mide la velocidad del viento durante 20 días para el momento estudiado, observando que $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 500$. En base a las observaciones de Dimas, construir un intervalo de confianza de nivel 0.99 para θ.

... emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad λ por hora. El 22 ... 0:00 y las 0:30 fueron emitidas exactamente 3 partículas. Considerand...

X_i : velocidad del viento en el i-ésimo día $\sim Ray(\sqrt{\theta})$

$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 500$

me piden $P(A < \theta < B) = 0{,}99 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}01$

sabemos que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \Gamma(n, 1/2\theta)$

estandarizo: $\dfrac{Y - nE[Y]}{\sqrt{n\,Var(Y)}}$, $\left\{ \begin{array}{l} E[Y] = \dfrac{n}{1/2\theta} = 2\theta n \\[2ex] Var(Y) = \dfrac{n}{(1/2\theta)^2} = 4\theta^2 n \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \frac{Y - 2\theta n^2}{\sqrt{n 4\theta^2 n}} = \frac{Y - 2\theta n^2}{2\theta n} = \frac{Y}{2\theta n} - \frac{2\theta n^2}{2\theta n} = \frac{Y}{2\theta n} - n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

luego $P\left(A < \dfrac{Y}{2\theta n} - n < B\right) = 0{,}99$, $A = -z_{1-\alpha/2}$, $B = z_{1-\alpha/2}$

$$P\left(A+n < \frac{Y}{2\theta n} < B+n\right) = P\left(\frac{1}{A+n} > \frac{2\theta n}{Y} > \frac{1}{B+n}\right) = P\left(\frac{Y}{A+n} > 2\theta n > \frac{Y}{B+n}\right) =$$

$$P\left(\frac{1}{2n}\frac{Y}{A+n} > \theta > \frac{1}{2n}\frac{Y}{B+n}\right) = 0{,}99$$

donde $n = 20$

$Y = \sum_{i=1}^{20} X_i^2$

$A = -z_{1-\alpha/2} = -2{,}5758$

$B = z_{1-\alpha/2} = 2{,}5758$ $\rightsquigarrow$ $Z \sim Normal(0,1)$, $P(Z < x) = 1 - \frac{0.01}{2}$ $\longrightarrow$ abajo de todo da x

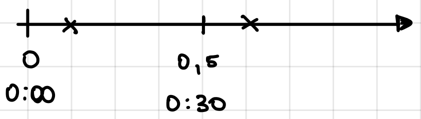
finalmente: $IC(\underline{X}) = \left[\sum_{i=1}^{20} X_i^2 \dfrac{125}{112879} ; \sum_{i=1}^{20} X_i^2 \dfrac{125}{87121} \right]$

luego, dada la muestra: $IC(\underline{x}) = [0{,}5537 ; 0{,}7174]$

observando ... nivel 0.99 para θ.

5. Un radioisótopo emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad λ por hora. El 22 de Diciembre se observó que entre las 0:00 y las 0:30 fueron emitidas exactamente 3 partículas. Considerando que, *a priori*, la intensidad es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 2, hallar la media *a posteriori* para λ.

$PP(\Lambda)$ · emisión de partículas de un radioisótopo por hora



$N(0,5)$ · # arribos entre las 0:00 y 0.30 del 22 de diciembre $\sim Poi(\Lambda/2)$

me dicen $N(0,5) \mid \Lambda=\lambda = 3$

a priori $\Lambda \in VA$, $\Lambda \sim \mathcal{E}(1/2)$

me piden $E[\Lambda \mid N = n]$

busco $f_{\Lambda \mid N=n}(\lambda) = \dfrac{f_{\underline{N}\mid\Lambda=\lambda}(\underline{n})\, f_\Lambda(\lambda)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{N}\mid\Lambda=\lambda}(\underline{n})\, f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda}$

$$f_{\underline{N}\mid\Lambda=\lambda}(\underline{n}) = \prod_{i=1}^{j} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n_i} e^{-\lambda/2}}{n_i!} \mathbb{1}\{n_i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\sum_{i=1}^{j} n_i} e^{-j\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{j} n_i!}$$

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{1}{2} e^{-\lambda/2} \mathbb{1}\{\lambda \geq 0\}$$

$$\Rightarrow f_{\Lambda\mid N=n}(\lambda) = k \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\sum_{i=1}^{j} n_i} e^{-j\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{j} n_i!} \frac{1}{2} e^{-\lambda/2} \mathbb{1}\{\lambda \geq 0\}$$

$$= \frac{k}{2 \prod n_i!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\sum n_i} e^{-j\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}} \mathbb{1}\{\lambda \geq 0\}$$

$$= \underbrace{\frac{k}{2 \prod n_i! \cdot 2^{\sum n_i}}}_{cte} \lambda^{\underbrace{\sum n_i}_{cte}} e^{-\lambda \underbrace{\frac{(j+1)}{2}}_{cte}} \mathbb{1}\{\lambda \geq 0\}$$

$$= k_1 \lambda^{k_2} e^{-\lambda k_3} \mathbb{1}\{ \geq 0\}$$

$\lambda = k_3$

$\nu - 1 = k_2 \Rightarrow \nu = k_2 + 1$

$\dfrac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} = k_1 \Rightarrow \dfrac{k_3^{k_2+1}}{\Gamma(k_2+1)} = k_1$

$k_3 = \dfrac{j+1}{2}$, $k_2 = \sum n_i = 3$

no importa cuánto vale k_1 pues ya sé cómo se distribuye la VA

$\dfrac{k_3^{k_2+1}}{\Gamma(k_2+1)} = \dfrac{2^4}{\Gamma(4)} = \dfrac{8}{3} \ldots \in k_1?$

$k_1 = \dfrac{k}{2 \cdot \prod n_i!\, 2^{\sum n_i}} = \dfrac{k}{2.12.2^3} = \dfrac{k}{192}$

$\dfrac{k_3^{k_2+1}}{\Gamma(k_2+1)} = k_1 \longrightarrow \dfrac{8}{3} = \dfrac{k}{192} \Rightarrow k = 512$

$\Rightarrow \Lambda \mid N = n \sim \Gamma(4, 2)$

finalmente $E[\Lambda \mid N = n] = 2$