

**Московский государственный институт электронной техники
(Технический университет)**

**Лабораторная работа №4.
Синтез линейных САУ с помощью метода модального
управления.**

Москва 2004

Цель работы:

Получить практические навыки синтеза линейных САУ.

Теоретическая часть.

Все методы синтеза линейных САУ делятся на три большие группы.

1. *Метод последовательной коррекции.* Сущность данного метода заключается в поэтапном достижении требуемых показателей качества САУ путем введения в контур регулирования соответствующих корректирующих звеньев. Данный метод итеративный и требует от конструктора достаточно большого опыта проектирования САУ.

2. *Графические методы (например, метод корневого годографа).*

3. *Аналитические методы (например, метод модального управления).*

Графические и аналитические методы синтеза – это формальные методы (в отличие от метода последовательной коррекции). Использование графических или аналитических методов зачастую не предполагает большого практического опыта у конструктора.

Сущностью всех формальных методов синтеза является обеспечение заданного расположения полюсов передаточной функции замкнутой САУ и, соответственно, обеспечение заданных показателей качества системы (время регулирования, перерегулирование и др.). При этом предполагается, что переходный процесс определяется в основном полюсом (или парой полюсов), расположенным (расположенными) ближе всего к мнимой оси комплексной плоскости (т.е. полюсом (полюсами) с минимальной действительной частью).

Исходные предпосылки формальных методов синтеза линейных САУ

Пусть имеется линейная САУ, обладающая следующей передаточной функцией

$$W_z(s) = \frac{R(s)}{D(s)} = \frac{R(s)}{(s - c_1) \cdot (s - c_2) \cdot \dots \cdot (s - c_n)}, \quad (1)$$

где $c_i, i \in [1, n]$ – корни полинома знаменателя (полюсы передаточной функции). Пусть k -й полюс (или комплексно-сопряжённая пара полюсов) расположен

(расположена) ближе всего к мнимой оси комплексной плоскости. Назовем этот (эти) полюс (полюсы) *определяющим (определяющими)*, поскольку именно он (они) будет (будут) определять переходный процесс в САУ в целом.

В случае если определяющей является комплексно-сопряжённая пара полюсов, т.е.:

$$c_k = a_k + jb_k \text{ и } c_{k+1} = a_k - jb_k, \quad (2)$$

то ей будет соответствовать колебательный переходный процесс в системе вида

$$d_k \cdot e^{a_k \cdot t} \cdot \cos(b_k \cdot t + \gamma_k), \quad (3)$$

где d_k и γ_k – некоторые постоянные.

В случае если определяющим является действительный полюс вида $c_k = a_k$, ему будет соответствовать апериодический переходный процесс в системе вида

$$d_k \cdot e^{a_k \cdot t}, \quad (4)$$

где d_k – некоторая постоянная.

В обоих случаях действительная часть определяющего (определяющих) полюса (полюсов) a_k – это величина, обратная наибольшей постоянной времени системы, и она определяет время регулирования t_p с точностью 5%, $t_p \approx 3/a_k$, если все остальные полюсы расположены много дальше от действительной оси.

Таким образом, задача синтеза линейной САУ по заданному времени регулирования сводится к задаче перемещения полюсов передаточной функции САУ так, чтобы определяющий полюс (или определяющая пара комплексно-сопряжённая полюсов) располагался (располагалась) в левой части комплексной полуплоскости на расстоянии, не меньшем чем $a_k \approx 3/t_p$. При этом действительному определяющему полюсу будет соответствовать апериодический переходный процесс, а комплексно-сопряжённой паре определяющих полюсов будет соответствовать колебательный процесс.

В случае если в системе переходный процесс носит колебательный характер, то в нем имеется перерегулирование σ вида

$$\sigma \approx e^{-\frac{a_k}{b_k} \cdot \pi} = e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}(\phi_k)}}, \quad (5)$$

где $\operatorname{tg}(\phi_k) = b_k/a_k$ (см. рисунок 1). В выражении (5) перерегулирование σ приведено в относительных единицах.

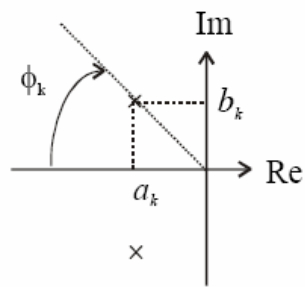


Рисунок 1 – Сектор расположения полюсов по заданному перерегулированию.

Из рисунка 1 видно, что величина перерегулирования полностью определяется величиной угла ϕ_k . В таблице 1 приведены значения ϕ_k для различных перерегулирований σ .

Таблица 1 – Значения ϕ_k для различных перерегулирований σ .

σ	ϕ_k
0,5 %	$30,7^\circ$
1 %	$34,3^\circ$
5 %	46°
10 %	53°
30 %	69°

Из всего вышеизложенного следует, что линейная САУ будет удовлетворять требованиям к длительности переходного процесса и величине перерегулирования, если все полюса ее передаточной функции расположены в некотором сегменте (см. рисунок 2).

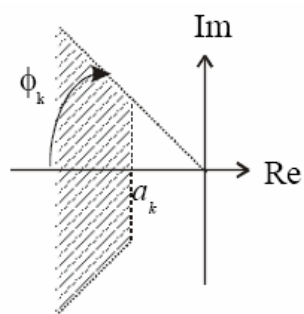


Рисунок 2 – Сегмент допустимого расположения полюсов передаточной функции САУ из требований к длительности переходного процесса и к величине перерегулирования.

Задача синтеза линейной САУ может быть сформулирована как обеспечение расположения полюсов передаточной функции замкнутой САУ в некотором определенном сегменте на комплексной плоскости. При этом

стремятся, чтобы только один полюс (или комплексно-сопряженная пара полюсов) располагались близко от мнимой оси. Остальные полюса стремятся максимально удалить от мнимой оси.

Метод модального управления

Метод модального управления – аналитический метод синтеза линейных САУ. Указанный метод обеспечивает заданное распределение полюсов передаточных функций замкнутой САУ на комплексной плоскости. Естественно, возможность решения указанной задачи зависит от степени наблюдаемости и управляемости САУ (строгие определения наблюдаемости и управляемости выходят за рамки этого курса).

Постановка задачи

Пусть имеется ОУ, заданный в форме уравнений состояния.

$$\frac{dX}{dt} = AX + Bu, \quad (6)$$

где $A \in R^{n,n}$, $B \in R^{n,1}$, $X \in R^{n,1}$, причем A и B удовлетворяют условию полной управляемости, т.е. определитель, составленный из столбцов

$$\det(B | AB | \dots | A^{n-1}B) \neq 0. \quad (7)$$

Требуется найти управление $u = C^T X$, где вектор управления $C \in R^{n,1}$ должен быть таким, чтобы все или часть собственных чисел (мод) матрицы $A + BC^T$ замкнутой САУ имели заданные значения.

Алгоритм метода модального управления состоит из следующих этапов:

1. Задаемся характеристическим полиномом замкнутой САУ (полином знаменателя), т.е. задаем желаемое расположение его корней

$$D(s) = \det(A + BC^T - Es) = 0, D(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0. \quad (8)$$

2. Определяем характеристический полином разомкнутой САУ.

$$d(s) = \det(A - Es) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0. \quad (9)$$

3. Из коэффициентов полиномов $D(s)$ и $d(s)$ сформируем вектор

$$l = [\alpha_0 - d_0, \dots, \alpha_{n-1} - d_{n-1}]^T. \quad (10)$$

4. Найдем искомый вектор управления

$$C^T = -l^T \cdot [\tilde{B} | \tilde{A}\tilde{B} | \dots | \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] \cdot [B | AB | \dots | A^{n-1}B]^{-1}, \quad (11)$$

$$\text{где } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Практическая часть

Пример синтеза линейной САУ

Пусть задан объект управления с помощью передаточной функции вида

$$W(s) = \frac{100}{(s+10)(s+5)}.$$

Пусть управляющее воздействие $u_y=5$. Построить САУ, обеспечивающую длительность процесса регулирования 0,1 с и перерегулирование 1%.

1. Преобразуем математическое описание будущей САУ к виду (6) (рисунок 3). Для этого разобьем передаточную функцию $W(s)$ на простые сомножители.

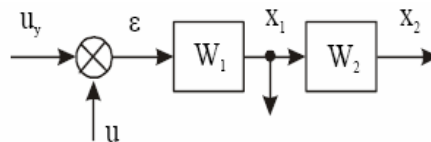


Рисунок 3 – Структурная схема синтезируемой САУ на начальном этапе синтеза.

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = \frac{100}{s+10} \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$\frac{x_1(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{100}{s+10}, \quad \frac{x_2(s)}{x_1(s)} = \frac{1}{s+5}, \quad x_1(s) \cdot (s+10) = \varepsilon(s) \cdot 100, \quad x_2(s) \cdot (s+5) = x_1(s), \quad \text{или}$$

$$\frac{dx_1}{dt} + 10 \cdot x_1 = 100 \cdot \varepsilon, \quad \frac{dx_2}{dt} + 5 \cdot x_2 = x_1, \quad \varepsilon = u_y + u, \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -10 \cdot x_1 + 500 + 100 \cdot u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 5 \cdot x_2. \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Находим управление u и проверяем управляемость САУ:

$\det \begin{vmatrix} 100 & -1000 \\ 0 & 100 \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. система управляема. Определяем сегментные ограничения на расположение полюсов замкнутой САУ. Из требования к длительности переходного процесса $a_k = 3/t_p = 3/0,1 = 30$; из требования к перерегулированию по таблице 1 находим $\varphi_{\text{доп}} = 34,3^\circ$. Задаемся желаемым расположением полюсов замкнутой САУ в данном сегментном ограничении. Пусть $s_1 = -50 + j10$; $s_2 = -50 - j10$ при этом $\varphi_k = 11,3^\circ < 34,3^\circ$. Тогда характеристический полином замкнутой САУ будет иметь вид $(s+50-j10)(s+50+j10) = (s+50)^2 + 100 = s^2 + 100s + 2600$.

Характеристический полином разомкнутой САУ из условия задачи имеет вид $(s+10)(s+5) = s^2 + 15s + 50$.

В соответствии с (10) составляем вектор $l = \{2550, 85\}^T$.

В соответствии с (11) определяем искомый вектор управления

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -50 & -15 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, A \cdot B = \begin{vmatrix} 1 \\ -15 \end{vmatrix}, A \cdot B = \begin{vmatrix} -1000 \\ 100 \end{vmatrix}$$

$$C^T = -\begin{vmatrix} 2550 & 85 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -15 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 100 & -1000 \\ 0 & 100 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} -0,85 & -21,25 \end{vmatrix}.$$

Поскольку $u = C^T X$, то окончательно структура синтезированной САУ приведена на рисунке 4.

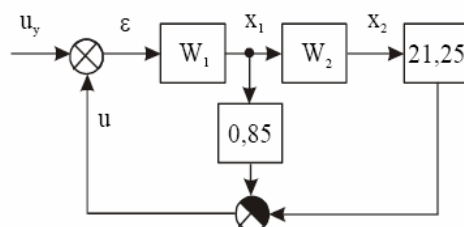


Рисунок 4 – Структурная схема синтезированной САУ.

Характерно, что метод модального управления абсолютно не учитывает статические свойства САУ. Поэтому зачастую необходимо проводить коррекцию статической ошибки регулирования до применения метода модального управления, а после процедуры синтеза необходимо осуществлять проверку статических свойств САУ.

Навыки работы в программе Simulink.

Simulink - интерактивный инструмент для моделирования, имитации и анализа динамических систем. Он дает возможность строить графические блок-диаграммы, имитировать динамические системы, исследовать работоспособность систем и совершенствовать проекты. Simulink полностью

интегрирован с MATLAB, обеспечивая немедленным доступом к широкому спектру инструментов анализа и проектирования. Simulink содержит библиотеки источников сигналов, передаточных функций, измерительных приборов, математических операций и многое другое.

Из элементов, находящихся в библиотеке *Simulink*, составляется схема, где на примере используются следующие элементы. *Step* — источник сигнала в виде ступеньки, *transport delay* и *transport delay 1* — задержки из-за вычислений, *Transfer Fcn* и *Transfer Fcn 1* — передаточные функции. Результирующий сигнал подается на осциллограф.

Общий вид моделируемой системы показан на рисунке 5.

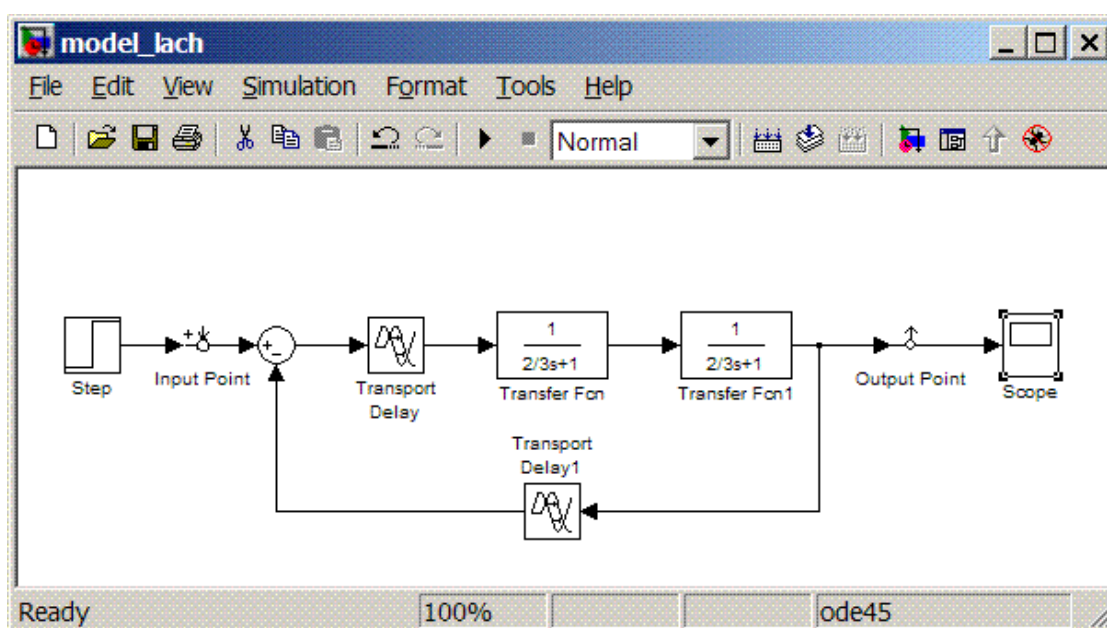


Рисунок 5 — Структурная схема моделируемой системы в *Simulink*.

После того, как собрали схему, запускаем процесс моделирования. Для этого выбираем *Simulation*→*Run*. После окончания расчета модели двойным щелчком мыши на осциллографе получаем переходную характеристику $h(t)$ данной системы, которая показана на рисунке 6.

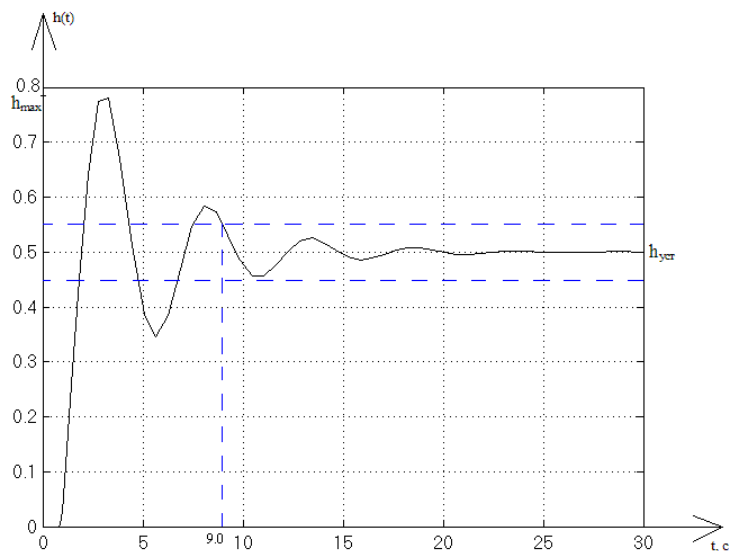


Рисунок 6 — Переходная характеристика моделируемой системы.

Для получения частотных характеристик моделируемой системы ставятся в схеме *Simulink*'а точки *input point* и *output point* (рисунок 7)

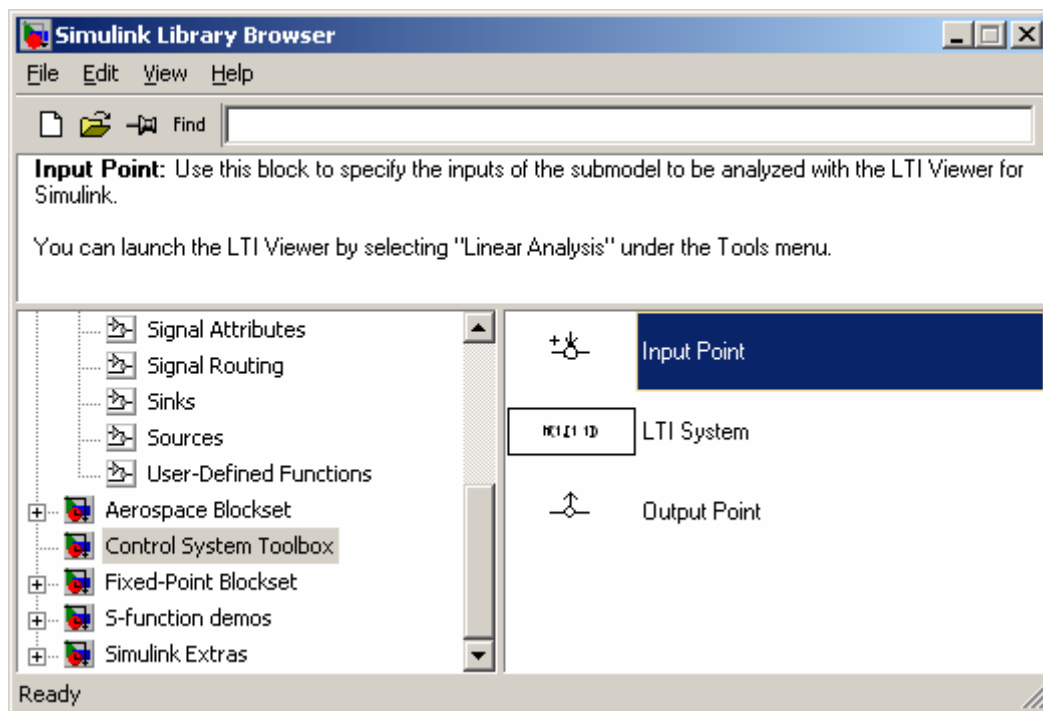


Рисунок 7 — Точки *input point* и *output point*.

Эти точки ограничивают участок системы, на котором проводится частотный анализ. *Simulink* подает тестовые сигналы с разной частотой на входную точку и снимает полученный сигнал с выходной. Для получения результата необходимо выполнить действие *Linear analysis* в панели инструментов *Tools*, в новом окне выбрать «*Get Linearized Model*» в панели

Simulink. Правой кнопкой мыши выбрать в качестве графика диаграммы Бode (*Plot Types* → *Bode*). Диаграммы Бode являются логарифмическими частотными характеристиками, которые для данной системы представлены на рисунке 8.

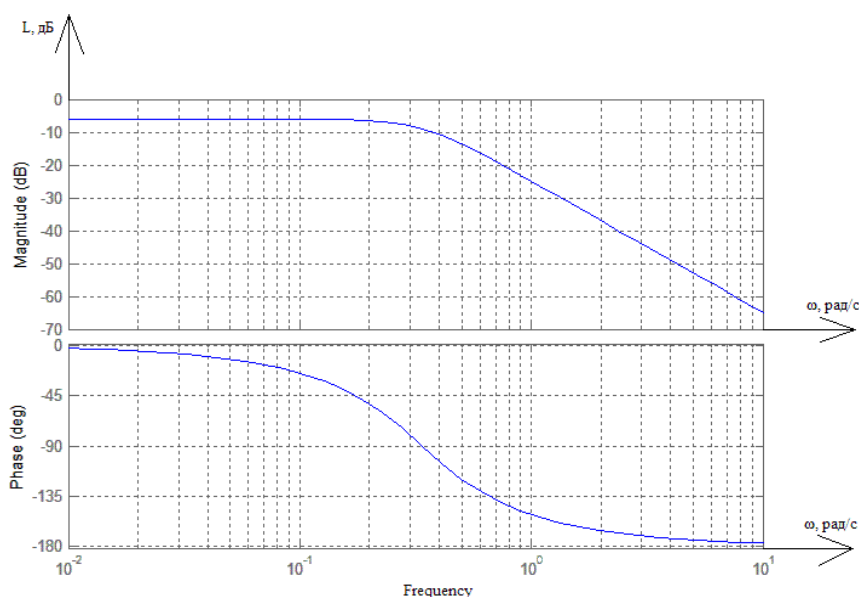


Рисунок 8 — Логарифмические частотные характеристики моделируемой системы.

Описание лабораторной работы

1. Получить у преподавателя номер варианта синтезируемой САУ.
2. В соответствии с заданием синтезировать линейную САУ.
3. С помощью программы Simulink собрать схему и проанализировать динамические свойства синтезированной САУ.

Контрольные вопросы

1. Как изменится тип переходного процесса в вашей системе, если выбрать в качестве определяющего действительный полюс и если выбрать в качестве определяющих комплексно-сопряжённую пару полюсов?
2. Поясните алгоритм выбора сегментных ограничений на расположение полюсов передаточной функции синтезируемой САУ.
3. В чём принципиальное отличие структуры САУ, синтезированной по методу модального управления, от структуры САУ, синтезированной по методу последовательной коррекции? Которую из этих структур проще реализовать в виде схемы электрической принципиальной? Поясните ответ.

4. Возможно ли синтезировать САУ методом модального управления, не разбивая передаточную функцию на простые сомножители? Можно ли синтезировать САУ методом модального управления, выделяя в качестве одного из простых сомножителей постоянный коэффициент K ? Поясните ответ.

Варианты заданий

Вариант 1

Пусть задан объект управления с помощью передаточной функции вида

$$W(s) = \frac{10}{(s+1)(s+5)}$$

Пусть управляющее воздействие $u_y=5$. Построить САУ, обеспечивающую длительность процесса регулирования 0,05 с и перерегулирование 5%.

Вариант 2

Пусть задан объект управления с помощью передаточной функции вида

$$W(s) = \frac{50}{(s+1)(s+10)}$$

Пусть управляющее воздействие $u_y=3$. Построить САУ, обеспечивающую длительность процесса регулирования 0,1 с и перерегулирование 5%.

Вариант 3

Пусть задан объект управления с помощью передаточной функции вида

$$W(s) = \frac{5}{(s+5)(s+1)}$$

Пусть управляющее воздействие $u_y=3$. Построить САУ, обеспечивающую длительность процесса регулирования 0,05 с и перерегулирование 1%.