Московский государственный институт электронной техники

(Технический университет)

Лабораторная работа №3.

Исследование устойчивости систем автоматического управления.

Москва 2004

<u>Цель работы.</u>

1. Ознакомиться с алгебраическими и частотными методами оценки устойчивости систем автоматического управления.

2. Получить практические навыки исследования устойчивости систем автоматического управления в среде MatLab.

Теоретическая часть

Алгебраические критерии устойчивости.

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = 0 .$$

Из алгебраических критериев наиболее широкое распространение получили критерии Рауса и Гурвица.

Заметим, что необходимым условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения:

$$a_0 > 0; \mathrm{a}_1 > 0; ...; \mathrm{a}_\mathrm{n} > 0 .$$

Критерии устойчивости Рауса и Гурвица позволяют по коэффициентам характеристического уравнения без вычисления его корней сделать вывод об устойчивости системы.

Критерий устойчивости Рауса.

Этот критерий устойчивости был предложен в 1877 г. английским математиком Э. Раусом в виде некоторого правила (алгоритма), которое наиболее просто поясняется табл.1:

Коэффициент r_i	Строка (i)	Столбец			
		1	2	3	4
---	1	$a_0 = c_{11}$	$a_2 = c_{21}$	$a_4 = c_{31}$	…
---	2	$a_1 = c_{12}$	$a_3 = c_{22}$	$a_5 = c_{32}$	…
$r_3 = a_0 / a_1$	3	$c_{13} = a_2 - r_3 a_3$	$c_{23} = a_4 - r_3 a_5$	$c_{33} = a_6 - r_3 a_7$	…
$r_4 = a_1 / c_{13}$	4	$c_{14} = a_3 - r_4 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_4 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_4 c_{43}$	…
$r_5 = c_{13} / c_{14}$	5	$c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_5 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_5 c_{44}$	…
…	…	…	…	…	…
$r_i = c_{1,i-2} / c_{1,i-1}$	i	$c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_i c_{2,i-1}$	$c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_i c_{3,i-1}$	$c_{3,i} = c_{4,i-2} - r_i c_{4,i-1}$	…
…	…	…	…	…	…

Табл. 1

В первой строке табл. 1 записываются в порядке возрастания индексов коэффициенты характеристического уравнения, имеющие четный индекс: $a_0, a_2, a_4 ...$; во второй строке – коэффициенты с нечетным индексом $a_1, a_3, a_5 ...$.

Любой из остальных коэффициентов таблицы определяют как

$$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1},$$

где

$$r_i = c_{1,i-2} / c_{1,i-1}.$$

k - индекс, означающий номер столбца табл. 1; i - индекс, означающий номер строки табл. 1.

Заметим, что число строк таблицы Рауса равно степени характеристического уравнения плюс единица ($n+1$).

После того как таблица Рауса заполнена, по ней можно судить об устойчивости системы. Условие устойчивости Рауса формулируется так: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один тот же знак, т.е. при $a_0 > 0$ были положительными:

$$c_{11} = a_0 > 0; c_{12} = a_1 > 0; c_{13} > 0; ...; c_{1,n+1} > 0.$$

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то система неустойчива, а число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Критерий Рауса особенно удобен, когда заданы числовые значения коэффициентов характеристического уравнения. В этом случае определение устойчивости можно выполнить довольно быстро даже при характеристических уравнениях высокого порядка.

Форма алгоритма, с помощью которого составляют таблицу Рауса, очень удобна для программирования на компьютере, поэтому критерий Рауса нашел широкое применение при исследовании влияния на устойчивость либо коэффициентов характеристического уравнения, либо отдельных параметров системы, не очень сложным образом входящих в эти коэффициенты.

Критерий устойчивости Гурвица.

В 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем был разработан алгебраический критерий устойчивости в форме определителей, составляемых из коэффициентов характеристического уравнения системы.

Из коэффициентов характеристического уравнения строят сначала главный определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & .. & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & .. & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & .. & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – коэффициентами с последовательно убывающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n (n - порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули.

Отчеркивая в главном определителе Гурвица диагональные миноры, получаем определители Гурвица низшего порядка:

$$\Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & .. \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & .. \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & a_k \end{vmatrix}$$

Номер определителя Гурвица определяется номером коэффициента по диагонали, для которого составляют данный определитель. Критерий устойчивости Гурвица формулируется следующим образом: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаком первого коэффициента характеристического уравнения a_0, т.е. при $a_0 > 0$ были положительными.

Таким образом, при $a_0 > 0$ для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & .. \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & .. \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & a_k \end{vmatrix} > 0$$

Используя критерий Гурвица, можно при заданных параметрах системы принять за неизвестный какой-либо один параметр и определить его предельное (критическое) значение, при котором система будет находиться на границе устойчивости.

Следует заметить, что критерий Гурвица можно получить из критерия Рауса, поэтому иногда критерий Гурвица называют критерием Рауса-Гурвица.

Частотные критерии устойчивости.

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими и получили широкое распространение, так как позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем высокого порядка, а также имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность.

Критерий устойчивости Михайлова.

Этот критерий устойчивости, сформулированный в 1938 г. советским ученым А.В. Михайловым позволяет судить об устойчивости системы на основании рассмотрения некоторой кривой, называемой кривой Михайлова.

Пусть дано характеристическое уравнение системы. Левую часть характеристического уравнения называют характеристическим полиномом

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n$$

Если подставить в этот полином чисто мнимое значение $s = jw$, то получим комплексный полином

$$D(jw) = a_0(jw)^n + a_1(jw)^{n-1} + \ldots + a_n = X(w) + jY(w) = D(w)e^{j\varphi(w)},$$

где

$$X(w) = a_n - a_{n-2}w^2 + a_{n-4}w^4 - \ldots,$$
$$Y(w) = w\left(a_{n-1} - a_{n-3}w^2 + an - 5w^4 - \ldots\right)$$

называют соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова; функции $D(w)$ и $\varphi(w)$ представляют собой модуль и фазу (аргумент) вектора $D(jw)$.

При изменении частоты w вектор $D(jw)$, изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую кривой (годографом) Михайлова.

Угол поворота вектора $D(jw)$ вокруг начала координат при изменении частоты w от 0 до ∞ равен

$$\Delta Arg D(jw)\Big|_{w=0}^{w=\infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2m).$$

Отсюда определяем число правых корней полинома $D(s)$, т.е.

$$m = \frac{\pi n/2 - \Delta Arg D(jw)\Big|_{w=0}^{w=\infty}}{\pi}.$$

Видно, что число правых корней будет равно нулю при одном-единственном условии

$$\Delta Arg D(jw)\Big|_{w=0}^{w=\infty} = \pi n \Big/ 2.$$

Это условие является необходимым, но недостаточным условием устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней характеристического уравнения были левыми; иначе говоря, среди них не должно быть корней, лежащих на мнимой оси и обращающих в нуль комплексный полином $D(jw)$, т.е. должно выполняться еще одно условие

$$D(jw) \neq 0.$$

Таким образом критерий Михайлова формулируется следующим образом: для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $D(jw)$ при изменении w от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $\pi n/2$, где n - порядок характеристического уравнения.

Для устойчивых систем кривая Михайлова начинается при $w=0$ на вещественной положительной полуоси. Кроме того, для устойчивых систем фаза должна возрастать монотонно, т.е. вектор $D(jw)$ должен поворачиваться только против часовой стрелки.

Учитывая сказанное выше, можно сформулировать критерий Михайлова следующим образом: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты w от 0 до ∞, начинаясь при $w=0$ на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n – порядок характеристического уравнения.

Критерий устойчивости Найквиста.

Этот частотный критерий устойчивости, разработанный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s)=\frac{R(s)}{Q(s)}=\frac{b_0(s)^m+b_1(s)^{m-1}+...+b_m}{c_0(s)^n+c_1(s)^{n-1}+...+c_n}, \mathrm{m}\le\mathrm{n}.$$

Тогда частотная передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(jw)=\frac{R(jw)}{Q(jw)}=\frac{b_0(jw)^m+b_1(jw)^{m-1}+...+b_m}{c_0(jw)^n+c_1(jw)^{n-1}+...+c_n}=U(w)+jV(w)=A(w)e^{j\varphi(w)},$$

где $U(w)$ и $V(w)$ - действительная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно; модуль $A(w)$ и фаза $\varphi(w)$ частотной передаточной функции равны $A(w)=\sqrt{U^2(w)+V^2(w)}$; $\varphi(w)=Arctg\dfrac{V(w)}{U(w)}$.

Если изменять частоту w от $-\infty$ до ∞, то вектор $W(jw)$ будет меняться по величине и по фазе. Кривую, описываемую концом этого вектора в комплексной плоскости, называют амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы.

Амплитудно-фазовая характеристика симметрична относительно вещественной оси, поэтому обычно вычерчивают только ту ее часть, которая соответствует положительным частотам $w > 0$.

Критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом: если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то, для того чтобы замкнутая система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(jw)$ при изменении частоты w от нуля до ∞ охватывала точку $(-1,0j)$ в положительном направлении $l/2$ раз, где l - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Для определения устойчивости систем с астатизмом любого порядка ν достаточно построить одну ветвь амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, соответствующую положительным частотам, дополнить ее дугой $-\nu\pi/2$ окружности бесконечно большого радиуса и затем применить критерий устойчивости Найквиста.

Практическая часть

Упражнение 1.

Исследовать устойчивость сложной САУ заданной передаточной функцией из лабораторной работы № 2 (упражнение 3). Устойчивость проверить по методу Гурвица и по методу Михайлова.

Приложение

Функция для проверки устойчивости по критерию Гурвица:

```
function f=u_gurv
n = 3
A=zeros(3,3);
A(2,1) = input('Введите a0=');
A(1,1) = input('Введите a1=');
A(3,2) = A(1,1);
```

```
A(2,2) = input('Введите а2=');
A(3,3) = input('Введите а3=');
A(1,2) = A(3,3);
A(1,3)=0;
A(2,3)=0;
A(3,1)=0;
A
A1=[A(1,1:2);A(2,1:2)];
b=0;
   if A(1,1)>0
     b=b+0;
   else
      b=b+1;
   end
      if det(A1)>0
     b=b+0;
   else
      b=b+1;
   end
   if det(A)>0
     b=b+0;
   else
      b=b+1;
   end
if b==0 disp('Сиситема устойчива');
else disp('Сиситема неустойчива');
end
```