Problème HAC

COMPLEXITÉ ET CALCULABILITÉ

Guillaume CHARLET
Kenji FONTAINE

2 novembre 2017

Table des matières

1 Description du problème

Dans un graphe G, un arbre couvrant est un arbre consitué uniquement d'arêtes de G et contenant tous les sommets de G. Ces arbres sont enracinés ; un sommet est distingué et appelé la racine de l'arbre. La profondeur d'un tel arbre est égale à la distance maximale d'un sommet à la racine. Le problème est défini comme tel :
Entrée : Un graphe non-orienté G et un entier k.
Sortie : Existe-t-il un arbre couvrant de G de hauteur k ?

2 Partie 2 : HAC est NP-difficile

todo

3 Réduction de HAC vers SAT

Exprimons les contraintes suivantes :

1. Pour chaque sommet v $\in$ V, il y a un unique entier h tq $x_{v,h}$ est vrai.
2. Il y a un unique sommet v tq d(v) = 0 ("v est la racine").
3. Il y a au moins un sommet v tq d(v) = k.
4. Pour chaque sommet v, si d(v) > 0, alors il existe un sommet u tel que uv $\in$ E et d(u) = d(v) − 1 ("le sommet u est un parent potentiel de v dans l'arbre").

1. Pour cette contrainte, nous avons choisi de séparer le problème en deux. Dans un premier temps, nous avons exprimé le fait qu'il y ait au moins un entier h tq $x_{v,h}$ est vrai. Pour cela, nous appliquons un OU logique entre tous les sommets du graphe G et ce, pour chaque valeur allant de 0 à k. Ceci se traduisant par les clauses suivantes :

$$\bigwedge_{v\in V}\bigvee_{i=0}^{k} x_{v,i}$$

   Puis nous avons exprimé le fait qu'il n'y ait au plus qu'un seul entier h tq $x_{v,h}$ est vrai. Nous exprimons cela par un NON ET logique entre toutes les paires de sommets différents du graphe G. En appliquant la loi de De Morgan, nous arrivons aux clauses suivantes :

$$\bigwedge_{v\in V}\bigwedge_{i=0}^{k}\bigwedge_{j=i+1}^{k-1} \neg x_{v,i} \vee \neg x_{v,j}$$

2. De façon similaire à la contrainte précédente, nous avons séparé ce problème en deux. Tout d'abord nous exprimons le fait qu'il y ait au moins une racine, puis le fait qu'il n'y ait qu'une seule racine. Ce qui nous donne les clauses :

$$\bigvee_{v\in V} x_{v,0}$$

$$\bigwedge_{u!=v\in V} \neg x_{u,0} \vee \neg x_{v,0}$$

4 Partie 3 : Entrées-sorties synchrones

todo

5 Partie 4 : Format des graphes

todo

6 Partie 5 : Solveur SAT

todo