Problème HAC

---

# COMPLEXITÉ ET CALCULABILITÉ

---

Guillaume CHARLET
Kenji FONTAINE

3 novembre 2017

# Table des matières


**1 Description du problème** **3**

**2 Partie 2 : HAC est NP-difficile** **3**

**3 Réduction de HAC vers SAT** **4**

# 1 Description du problème

Dans un graphe G, un arbre couvrant est un arbre constitué uniquement d'arêtes de G et contenant tous les sommets de G. Ces arbres sont enracinés ; un sommet est distingué et appelé la racine de l'arbre. La profondeur d'un tel arbre est égale à la distance maximale d'un sommet à la racine. Le problème est défini comme tel :
**Entrée :** Un graphe non orienté G et un entier k.
**Sortie :** Existe-t-il un arbre couvrant de G de hauteur k ?

# 2 Partie 2 : HAC est NP-difficile

1. Montrons qu'il existe une réduction polynomiale du problème Chemin hamiltonien vers HAC. Les données d'entrée sont les mêmes, chaque problème prenant en entrée un graphe G. Il nous faut donc copier les données d'un problème à l'autre, se faisant en temps linéaire. Le problème HAC requiert un entier supplémentaire, nous coûtant un temps logarithmique.
   Il nous faut donc maintenant montrer que toute instance positive (respectivement négatives) du Chemin hamiltonien soit également positive (respectivement négative) chez HAC. Si un graphe admet un chemin hamiltonien, cela signifie que le graphe est connexe. De plus, nous pouvons en partant d'un sommet parcourir l'ensemble des sommets du graphe, en ne passant qu'une seule fois par chaque sommet. Ce qui nous permettrait de créer un arbre "ligne" de la même taille que celle du chemin hamiltonien. Et si un graphe n'admet pas de chemin hamiltonien, cela signifie que le graphe n'est pas connexe. Nous ne pouvons pas extraire un arbre couvrant d'un tel graphe.
2. Nous avons vu en cours que le chemin hamiltonien appartenait à la classe NP complet et nous avons montré qu'il existait une réduction en temps polynomiale d'hamiltonien vers HAC. Le problème HAC est donc lui aussi un problème NP complet.

# 3 Réduction de HAC vers SAT

Exprimons les contraintes suivantes :

1. Pour chaque sommet v $\in$ V, il y a un unique entier h tq $x_{v,h}$ est vrai.
2. Il y a un unique sommet v tq d(v) = 0 (“v est la racine”).
3. Il y a au moins un sommet v tq d(v) = k.
4. Pour chaque sommet v, si d(v) > 0, alors il existe un sommet u tel que uv $\in$ E et d(u) = d(v) − 1 (“le sommet u est un parent potentiel de v dans l’arbre”).

1. Pour cette contrainte, nous avons choisi de séparer le problème en deux. Dans un premier temps, nous avons exprimé le fait qu’il y ait au moins un entier h tq $x_{v,h}$ est vrai. Pour cela, nous appliquons un OU logique entre tous les sommets du graphe G et ce, pour chaque valeur allant de 0 à k. Ceci se traduisant par les clauses suivantes :

   $$\bigwedge_{v\in V}\bigvee_{i=0}^{k} x_{v,i}$$

   Puis nous avons exprimé le fait qu’il n’y ait au plus qu’un seul entier h tq $x_{v,h}$ est vrai. Nous exprimons cela par un NON ET logique entre toutes les paires de sommets différents du graphe G. En appliquant la loi de De Morgan, nous arrivons aux clauses suivantes :

   $$\bigwedge_{v\in V}\bigwedge_{i=0}^{k}\bigwedge_{j=i+1}^{k-1} \neg x_{v,i} \vee \neg x_{v,j}$$

2. De façon similaire à la contrainte précédente, nous avons séparé ce problème en deux. Tout d’abord nous exprimons le fait qu’il y ait au moins une racine, puis le fait qu’il n’y ait qu’une seule racine. Ce qui nous donne les clauses :

   $$\bigvee_{v\in V} x_{v,0}$$

   $$\bigwedge_{u!=v\in V} \neg x_{u,0} \vee \neg x_{v,0}$$

3. Cette contrainte se traduit trivialement en clause, il nous suffit d’appliquer un OU logique entre chacun des sommets du graphe pour une valeur donnée k. Soit :

   $$\bigvee_{v\in V} x_{v,k}$$

4. Pour cette contrainte, nous voulons que si d(v) > 0, une certaine propriété soit satisfaite. Autrement dit, si $x_{v,i}$ est faux, nous voulons que la clause soit vérifiée puisque celle-ci n’a pas de sens concret. Pour cela nous utilisons la négation de cette variable associée à un OU logique. De cette sorte, lorsque la variable est vraie, et donc que la condition d(v) > 0 est vérifiée, nous devons considérer la partie droite du OU.
   La seconde partie du OU logique représente l’existence d’un sommet u comme un parent potentiel de v dans le graphe. Autrement dit, notre OU logique sera vérifié lorsque $x_{u,i-1}$ est vraie.
   Nous amenant ainsi aux clauses suivantes :

   $$\bigwedge_{u,v\in V}\bigwedge_{i=1}^{k} \neg x_{v,i} \vee x_{u,i-1}$$