

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ

Интервальный анализ

Отчёт по лабораторным работам №1 и №2

Выполнил:

Студент: Чевыкалов Григорий

Группа: 5040102/30201

Принял:

к. ф.-м. н.

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург

2024 г.

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Постановка задачи | 4 |
| 2 | Теория | 4 |
| 2.1 | Первый метод: нахождение $\operatorname{argmax}(Tol)$ | 4 |
| 2.2 | Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики . . | 5 |
| 3 | Рализация | 6 |
| 4 | Результаты | 6 |
| 4.1 | Результаты для исходных данных | 6 |
| 4.2 | Результаты для упрощенных синтетических данных | 13 |
| 5 | Обсуждение | 17 |
| 6 | Приложения | 17 |

Список иллюстраций

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Структурная схема калибровки DRS4 | 4 |
| 2 | Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 631) | 7 |
| 3 | Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (3, 646) | 7 |
| 4 | Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (4, 659) | 8 |
| 5 | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 631). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный | 8 |
| 6 | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (3, 646). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный | 9 |
| 7 | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (4, 659). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный | 9 |
| 8 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 631), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом | 10 |
| 9 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (3, 646), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом | 10 |

| | | |
|----|---|----|
| 10 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (4, 659), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом | 11 |
| 11 | Tol, Uni и argmaxTol для датчика (0, 631) | 11 |
| 12 | Tol, Uni и argmaxTol для датчика (3, 646) | 12 |
| 13 | Tol, Uni и argmaxTol для датчика (4, 659) | 12 |
| 14 | Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных | 13 |
| 15 | Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных со смещением | 14 |
| 16 | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный | 14 |
| 17 | Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных со смещением. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный | 15 |
| 18 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом | 15 |
| 19 | Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных со смещением, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом | 16 |
| 20 | Tol, Uni и argmaxTol для синтетических данных | 16 |
| 21 | Tol, Uni и argmaxTol для синтетических данных со смещением | 17 |

1 Постановка задачи

Чип быстрой аналоговой памяти PSI DRS4 имеет 8 каналов, каждый из которых содержит 1024 ячейки. Они включают конденсаторы для хранения значения заряда и электронные ключи для записи сигналов и считывания напряжений через АЦП (аналого-цифровой преобразователь). Ячейки объединяются в кольцевые буферы. При подаче сигнала синхронизации запись напряжений на конденсаторы прекращается, а номер ячейки (в которую была сделана последняя запись) запоминается.

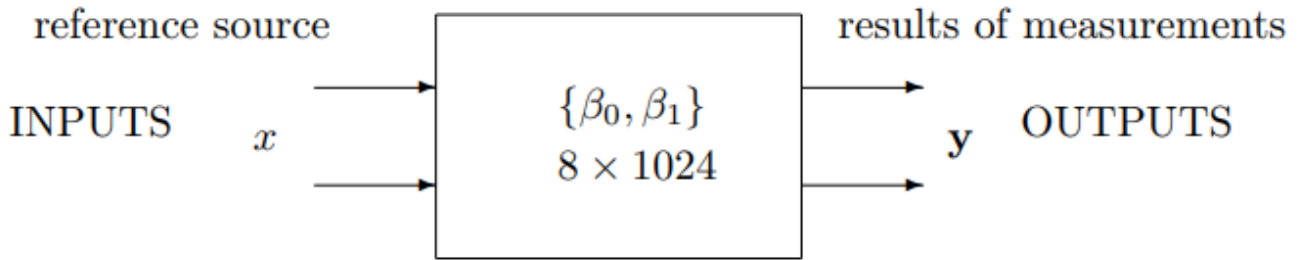


Рис. 1: Структурная схема калибровки DRS4

Ставится задача калибровки данного чипа. Для этого на входы платы подается набор напряжений постоянного значения, охватывающий рабочий диапазон микросхемы. Для каждого отдельного напряжения X , эта операция повторяется 100 раз. На основе полученных данных для каждой ячейки рассчитываются линейные регрессии.

Таким образом, калибровка сводится к определению параметров линейной регрессии

$$Y = \beta_0 X + \beta_1. \quad (1)$$

2 Теория

2.1 Первый метод: нахождение $\operatorname{argmax}(Tol)$

Поскольку показания датчиков обладают погрешностью, полученные данные на самом деле следует рассматривать как интервалы, центр которых совпадает с измеренными показаниями, а радиус ϵ (в данном случае $\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384}$).

Так как показания независимы, можно рассмотреть произвольную ячейку из всех 8×1024 ячеек. Тогда, для данной ячейки имеем 100×11 пар значений (x, y) , где x – координата соответствующая поданному напряжению и лежит в границах $[-0.5, 0.5]$, а y координата представляет собой интервал с $wid = 2/16384$. Для того, чтобы найти точечную оценку коэффициентов калибровки, можно воспользоваться распознающим функционалом Tol .

$$Tol(x) = Tol(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \operatorname{rad} b_i - \left| \operatorname{mid} b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (2)$$

Где A – матрица:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

b – интервальный вектор:

$$\begin{pmatrix} [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \\ \vdots \\ [y_m - \epsilon, y_m + \epsilon] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Особенностью данного функционала является то, что допустовое множество решений системы $Ax = b$ можно описать как

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, A, b) \geq 0\} \quad (5)$$

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b) \geq 0$, то система совместная и $\arg \max(\text{Tol})$ можно считать результатом регрессии (а значит это вектор содержащий β_0, β_1).

Однако часто система не является совместной. В таком случае следует рассмотреть множество Tol_i

$$\text{Tol}_i(x, A, b) = \text{rad}(b_i) - \left| \text{mid}(b_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right|, \quad 1 \leq i \leq m \quad (6)$$

Если существует i для которого $\text{Tol}_i < 0$, то $\text{Tol} < 0$. При этом, чтобы $\text{Tol}_i \geq 0$ достаточно подобрать достаточно большой $\text{rad}(b_i)$.

Таким образом, в случае отсутствия совместности, следует пройтись по строчкам матрицы и элементам b . Если для некоторых из них $\text{Tol}_i < 0$, то нужно "расширить" интервал в правой части, чтобы добиться $\text{Tol}_i = 0$. Тогда очевидно, что $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b)$ будет равен 0, а $\arg \max(\text{Tol})$ будет вектором искомых коэффициентов калибровки.

2.2 Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики

У описанного выше метода есть два основных недостатка:

1. "Расширение" интервалов в правой части системы приводит к сильной погрешности на практике, т.к. интервалы расширяются в обе стороны: как в сторону регрессионной прямой, так и от нее.
2. Результатом данного метода является лишь точечная оценка.

В качестве альтернативы, предлагается другой метод, основанный на использовании твинной арифметики.

В первом методе брались все пары $(x_i, [y_i - \epsilon, y_i + \epsilon])$ и работа велась со всеми интервалами. В данном методе предлагается разделить y_i в группы по 100 измерений в зависимости от соответствующего x_i . Тогда для каждого различного x_i для конкретного датчика получится набор значений по которому можно определить внутреннюю и внешнюю оценку, и для каждого x_i построишь твин $[[y_i^{in}, \overline{y_i^{in}}], [y_i^{ex}, \overline{y_i^{ex}}]]$.

Затем снова построим распознающий функционал Tol , но теперь

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [y_1^{in}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{in}, \overline{y_1^{ex}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{ex}}] \\ \vdots \\ [y_n^{ex}, \overline{y_n^{ex}}] \end{pmatrix} \quad (7)$$

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) = 0$, то так же возвращаем $\arg \max(\text{Tol})$.

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$, то можно найти множество значений (β_0, β_1) , при которых $\text{Tol} > 0$ и вернуть его.

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) < 0$ снова требуется решить проблему отсутствия совместности.

Для этого снова рассмотрим Tol_i , однако, вместо изменения правой части, будем убирать соответствующую строку из A и b . В силу того что для каждой пары (x_j, y_j) создается 4 уравнения, при удалении описанным способом несовместимых уравнений, уравнений останется больше, чем при первом способе. А значит решение будет точнее. При этом, в результате данной операции, возможна ситуация, когда $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$.

3 Рализация

Данная работа реализована на языке программирования Python 3.10 с использованием пакетов matplotlib и intvalpy. Код отчёта подготовлен с использованием платформы Overleaf.

4 Результаты

4.1 Результаты для исходных данных

Каждому датчику в чипе были присвоены координаты в зависимости от канала и номера ячейки. Датчик получивший данные из канала j ($1 \leq j \leq 8$) и находящийся в ячейке i ($1 \leq j \leq 1024$) будет иметь координаты i, j . Рассматриваются данные датчиков

1. С координатами (0, 631)
2. С координатами (3, 646)

3. С координатами (4, 659)

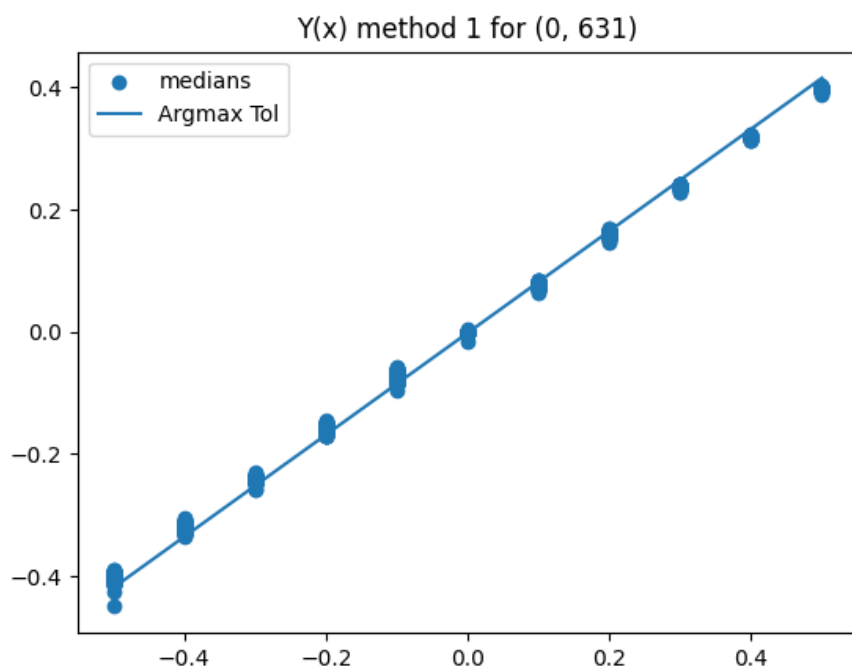


Рис. 2: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 631)

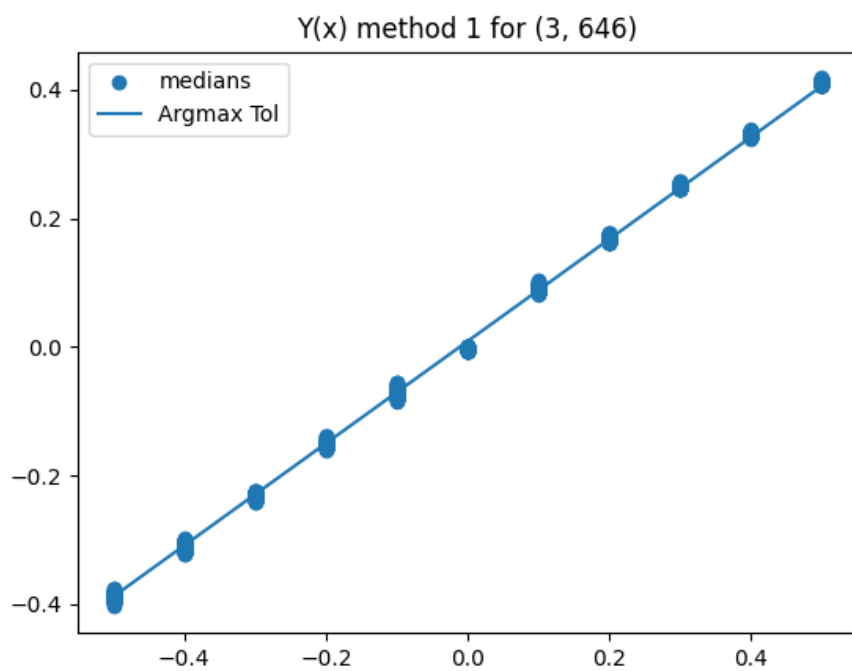


Рис. 3: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (3, 646)

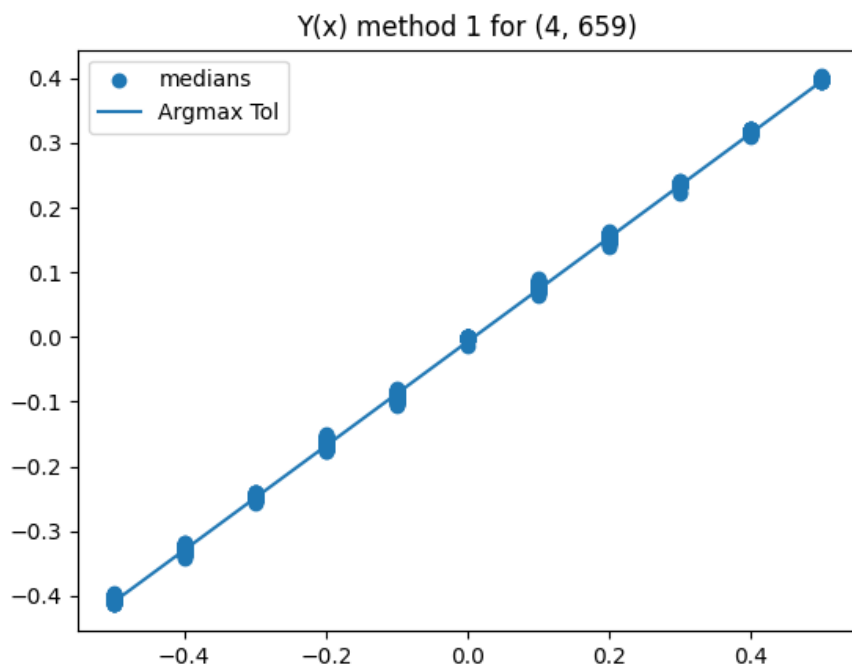


Рис. 4: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (4, 659)

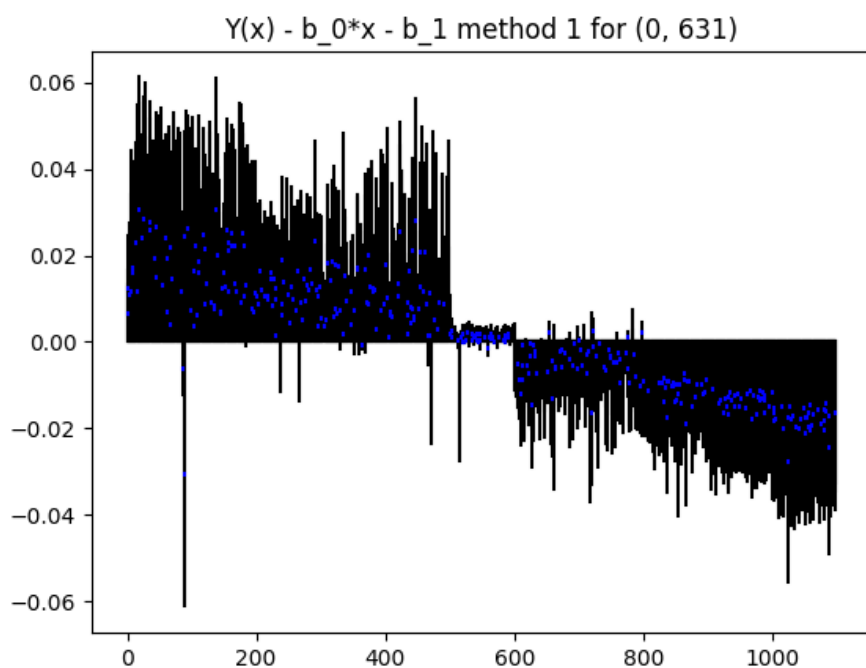


Рис. 5: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 631). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

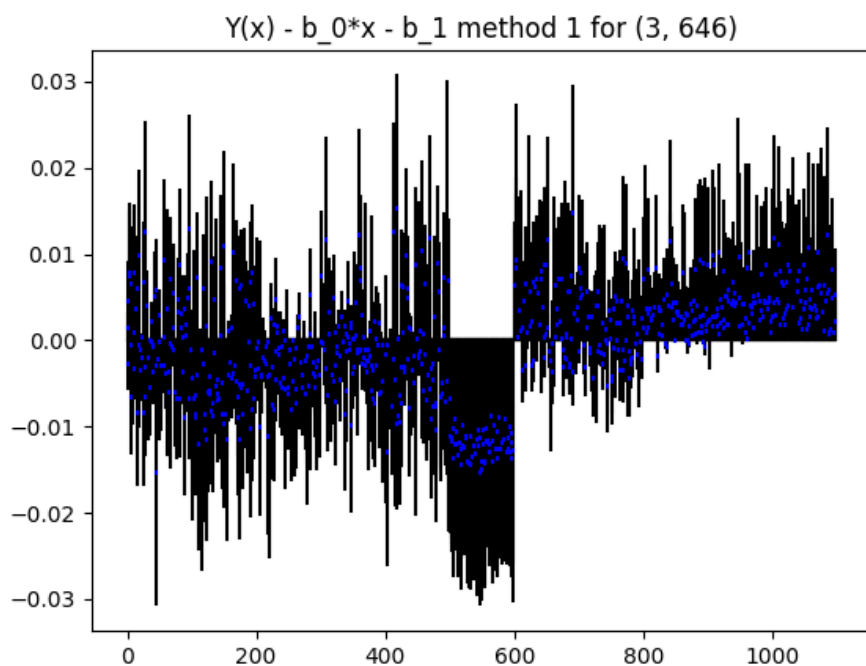


Рис. 6: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (3, 646). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

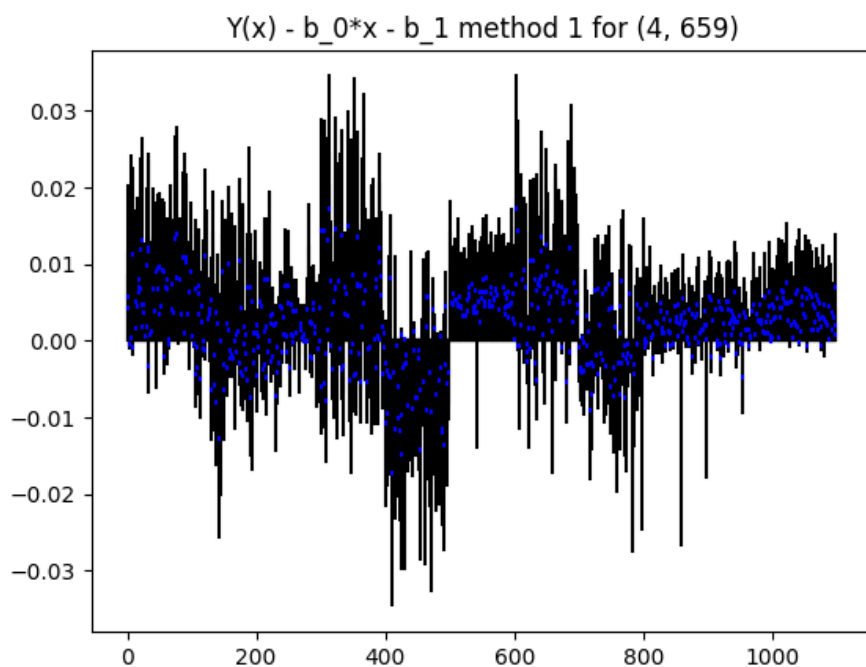


Рис. 7: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (4, 659). Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

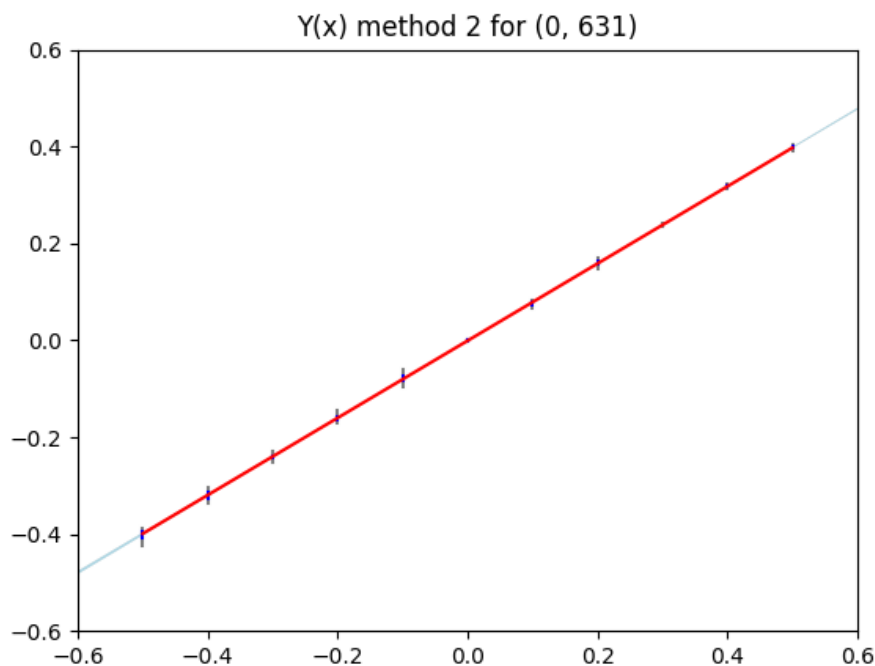


Рис. 8: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 631), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

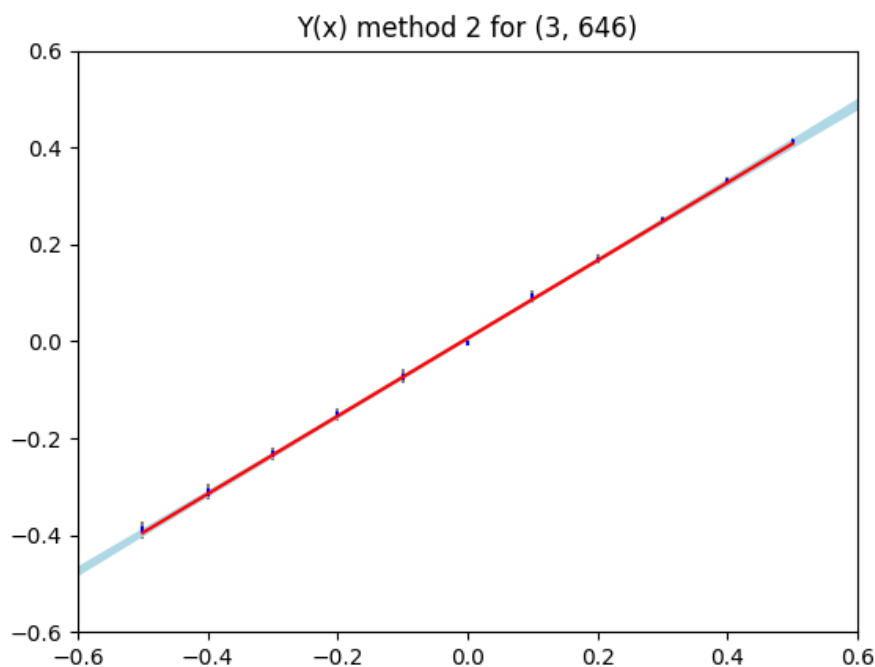


Рис. 9: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (3, 646), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

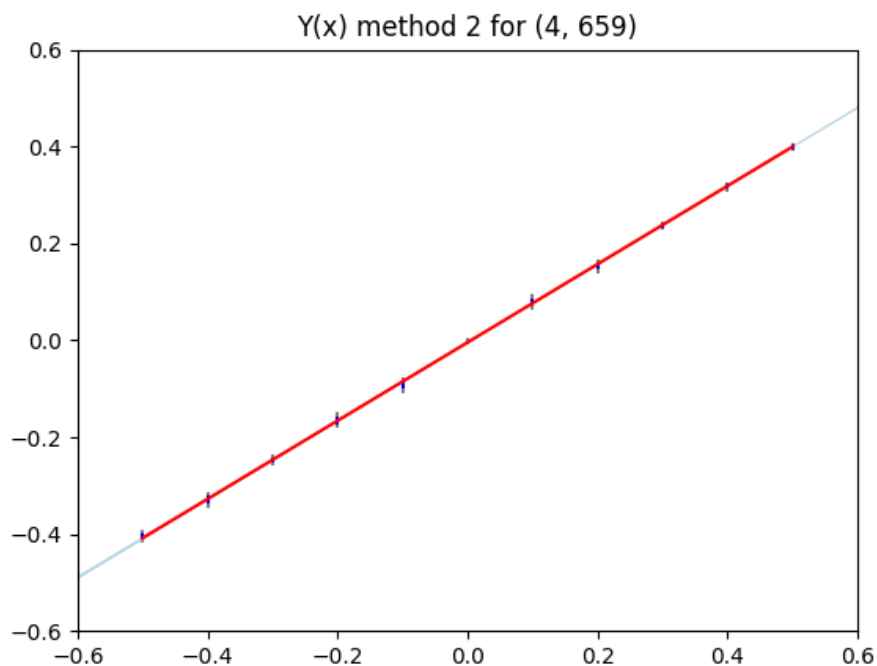


Рис. 10: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (4, 659), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

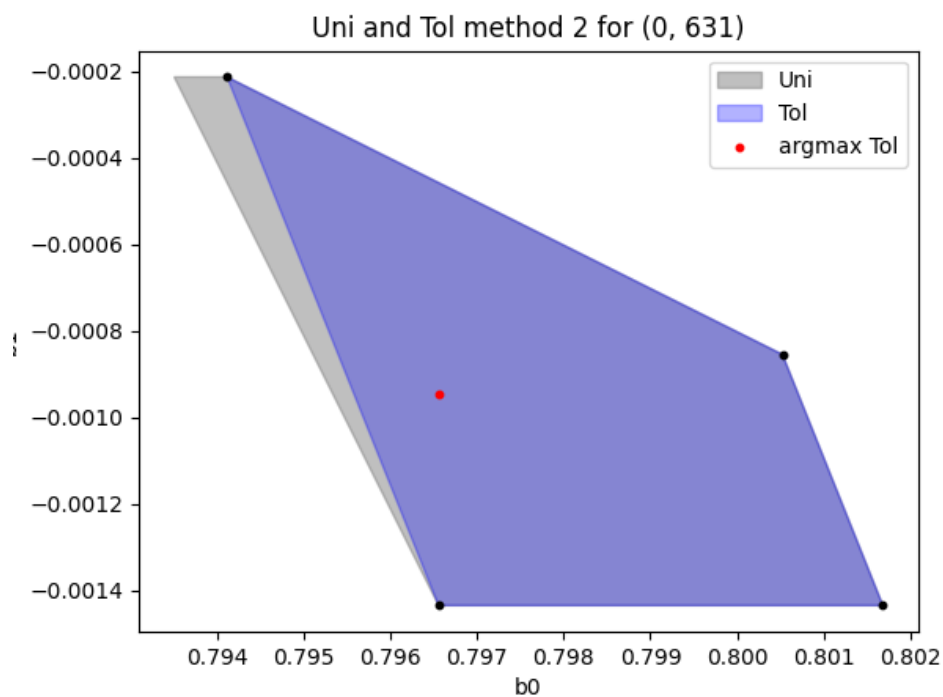
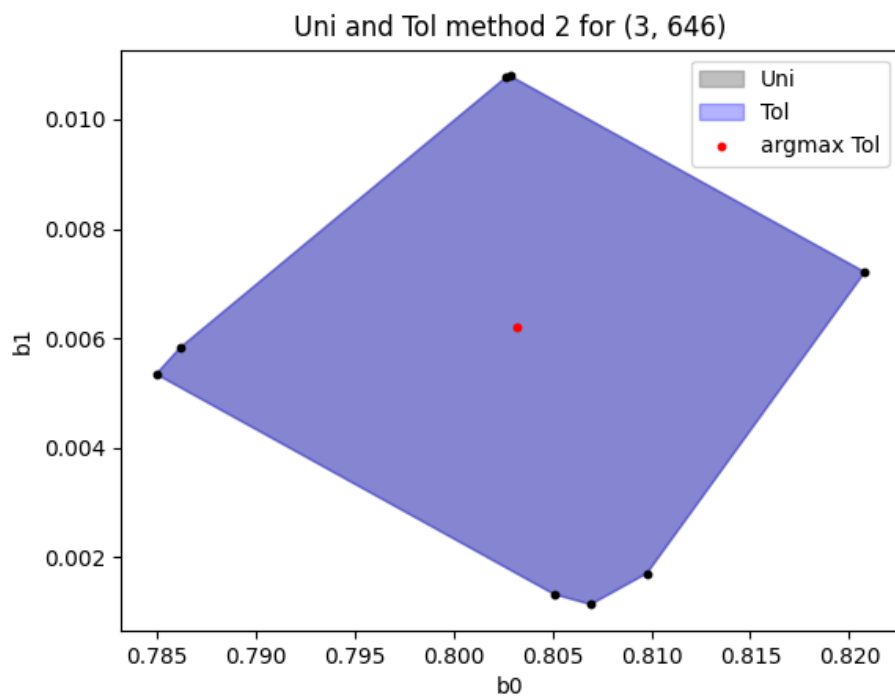
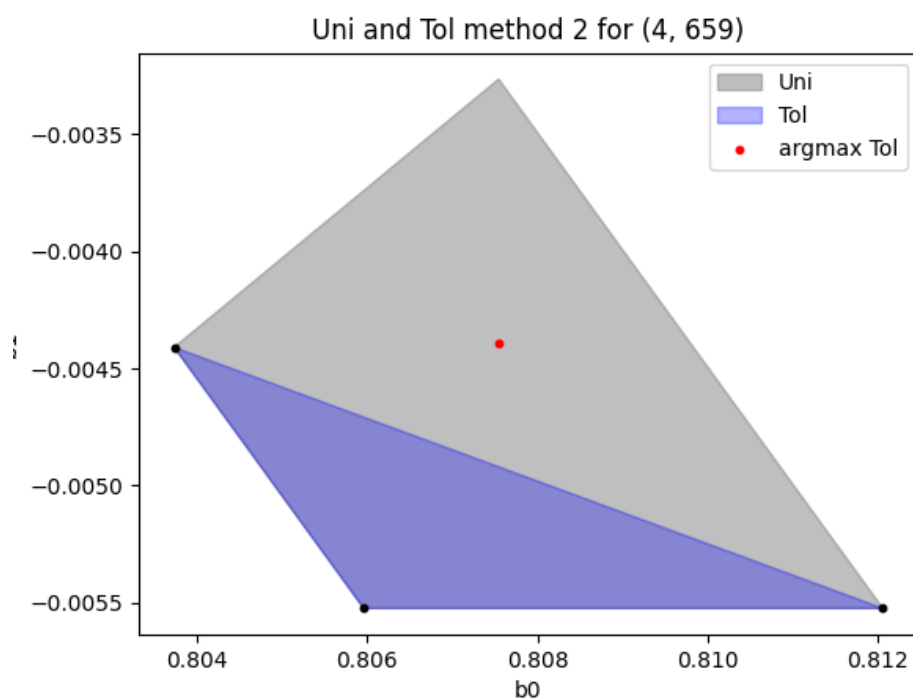


Рис. 11: Tol, Uni и argmaxTol для датчика (0, 631)

Рис. 12: Tol, Uni и argmax Tol для датчика (3, 646)Рис. 13: Tol, Uni и argmax Tol для датчика (4, 659)

| Координаты датчика | Метод | β_0 | β_1 | Количество модификаций |
|--------------------|-------|-----------|-----------|------------------------|
| (0, 631) | 1 | 0.8346 | -0.0018 | 1097 |
| (0, 631) | 2 | 0.7966 | -0.0009 | 0 |
| (3, 646) | 1 | 0.7948 | 0.0086 | 1092 |
| (3, 646) | 2 | 0.8032 | 0.0062 | 30 |
| (4, 659) | 1 | 0.8055 | -0.0072 | 1090 |
| (4, 659) | 2 | 0.8075 | -0.0044 | 12 |

Таблица 1: Численные результаты

4.2 Результаты для упрощенных синтетических данных

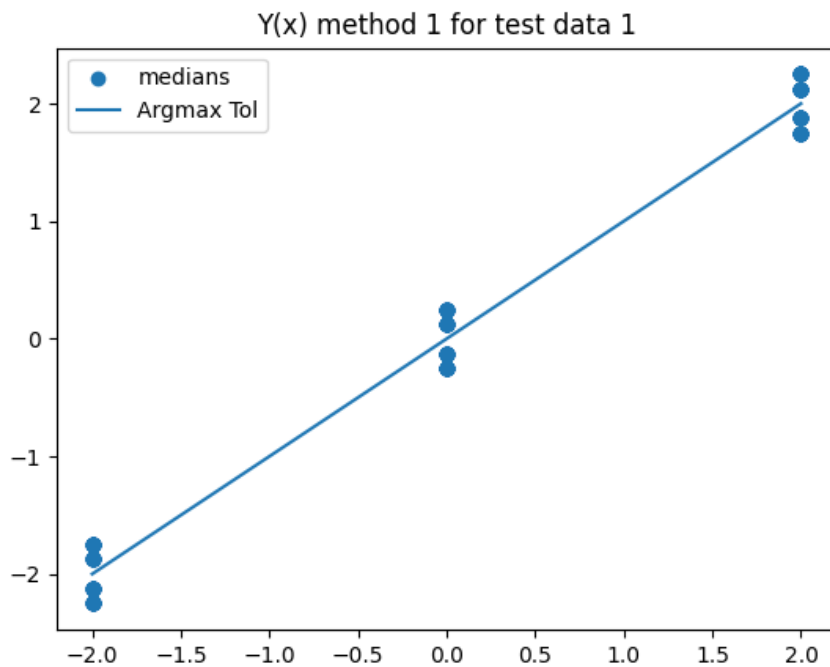


Рис. 14: Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных

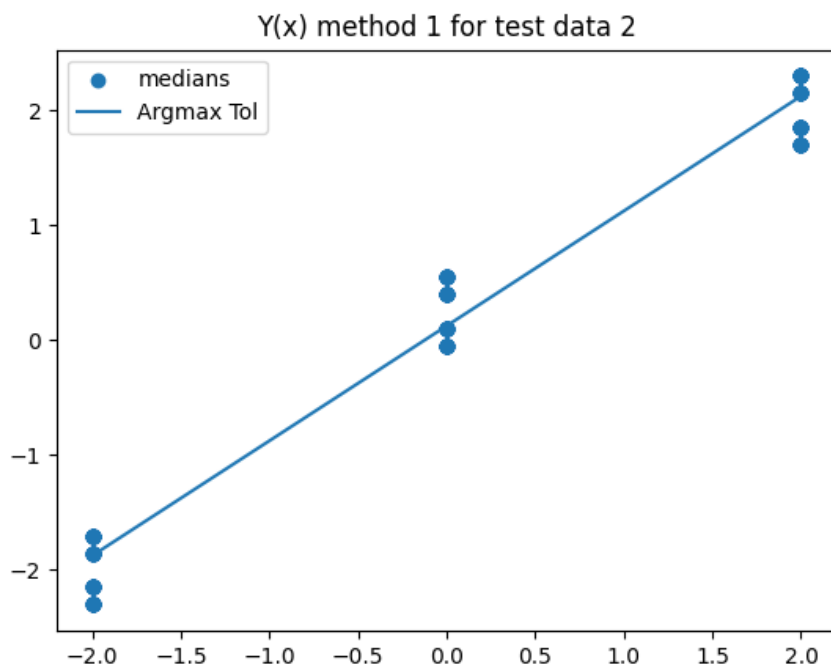


Рис. 15: Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных со смещением

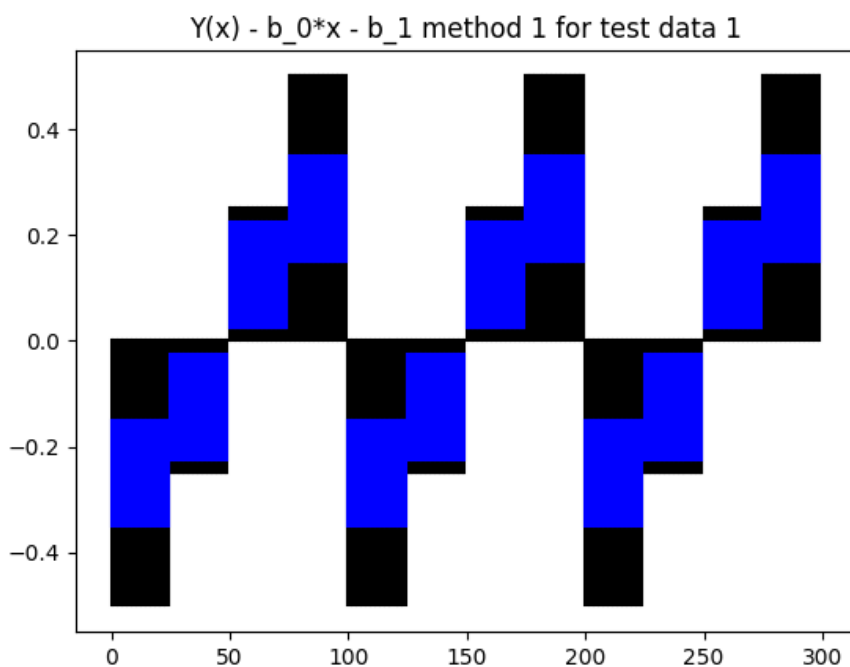


Рис. 16: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

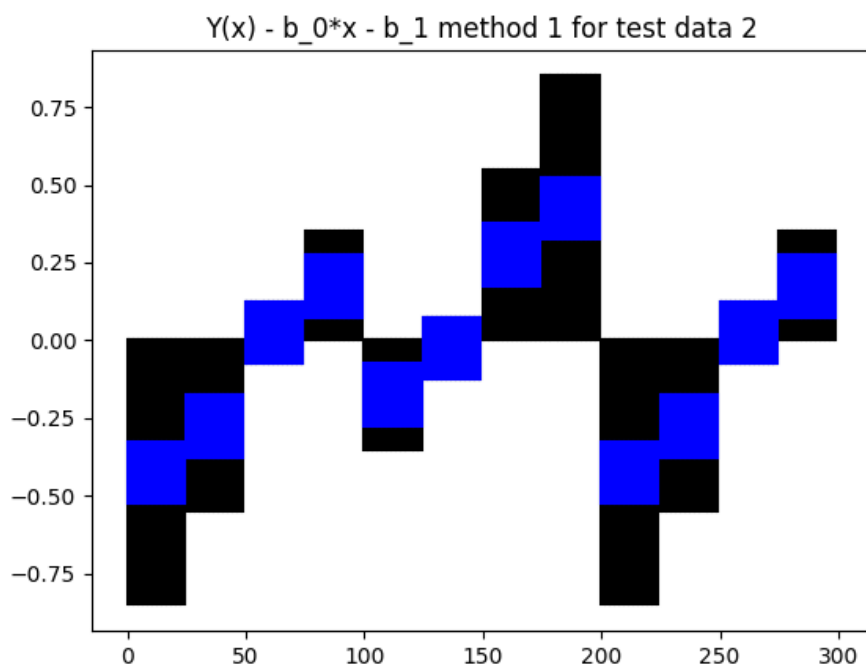


Рис. 17: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных со смещением. Черным цветом обозначен новый интервал, синим исходный

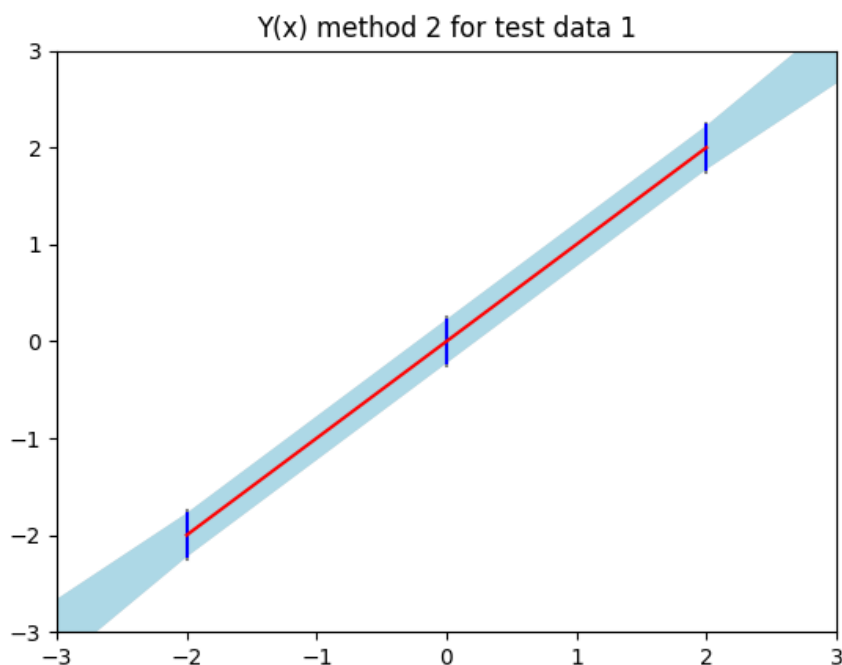


Рис. 18: Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

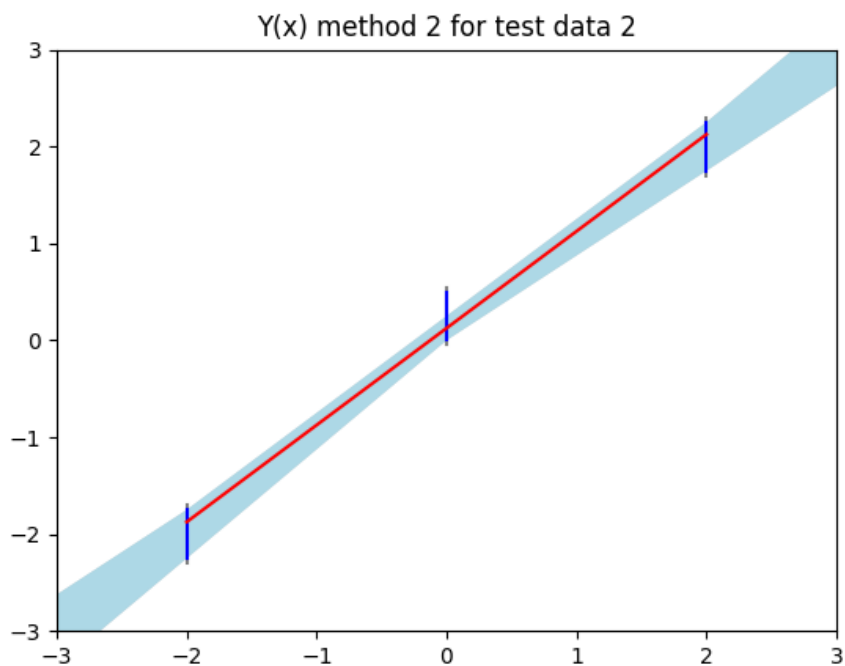


Рис. 19: Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных со смещением, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и синим цветом. Корридоры совместности Tol и Uni обозначены голубым и светло-серым цветом

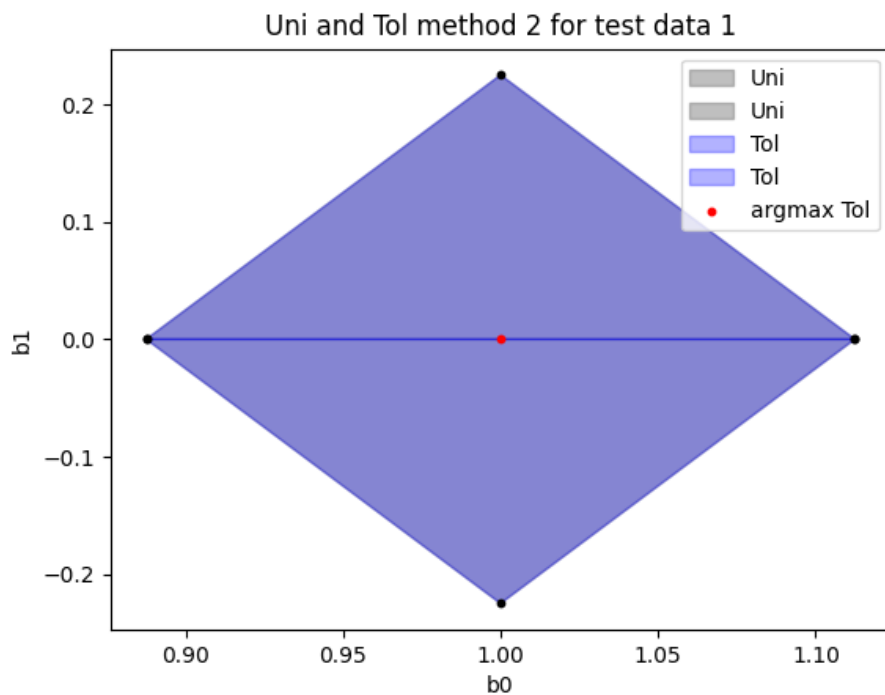


Рис. 20: Tol, Uni и argmaxTol для синтетических данных

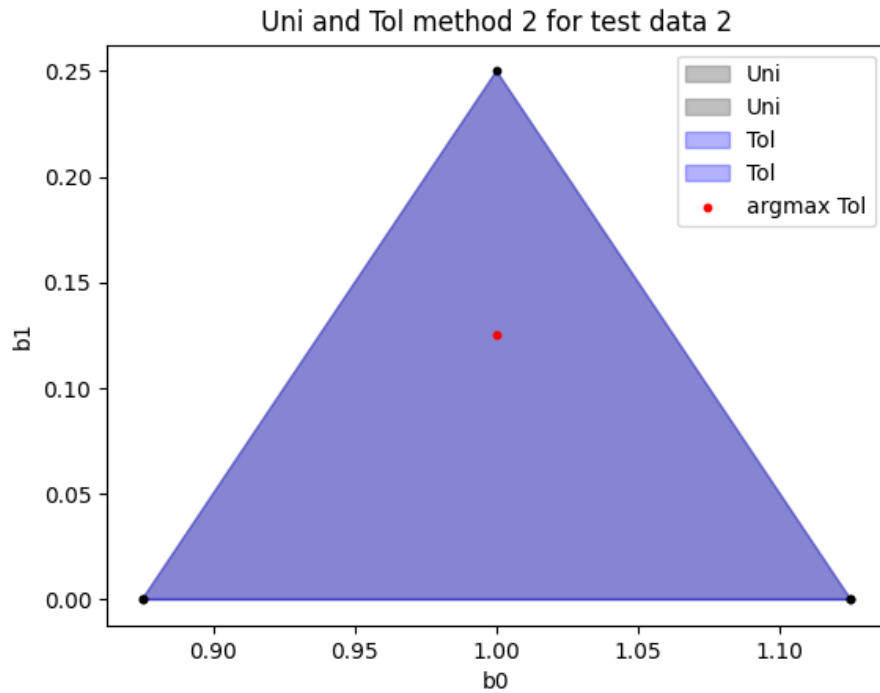


Рис. 21: Tol, Uni и argmax Tol для синтетических данных со смещением

5 Обсуждение

Исходя из представленных графиков, можно судить о том, что все описанные в теории этапы выполнены правильно. Также можно заметить что результаты полученные методами 1 и 2 являются близкими, но не совпадают. По количеству модифицированных значений в таблице 1 можно заметить, что датчик с координатами (0, 631) имеет наименьшее число выбросов из рассматриваемых, а датчик с координатами (3, 646) имеет наибольшее число выбросов из рассматриваемых.

6 Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и отчётом:
<https://github.com/gchevykalov/Interval2>.