Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Интервальный анализ

Отчёт по лабораторным работам №1 и №2

Выполнил:

Студент: Чевыкалов Григорий
Группа: 5040102/30201

Принял:

к. ф.-м. н.
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

Чип быстрой аналоговой памяти PSI DRS4 имеет 8 каналов, каждый из которых содержит 1024 ячейки. Они включают конденсаторы для хранения значения заряда и электронные ключи для записи сигналов и считывания напряжений через АЦП (аналого-цифровой преобразователь). Ячейки объединяются в кольцевые буферы. При подаче сигнала синхронизации запись напряжений на конденсаторы прекращается, а номер ячейки (в которую была сделана последняя запись) запоминается.

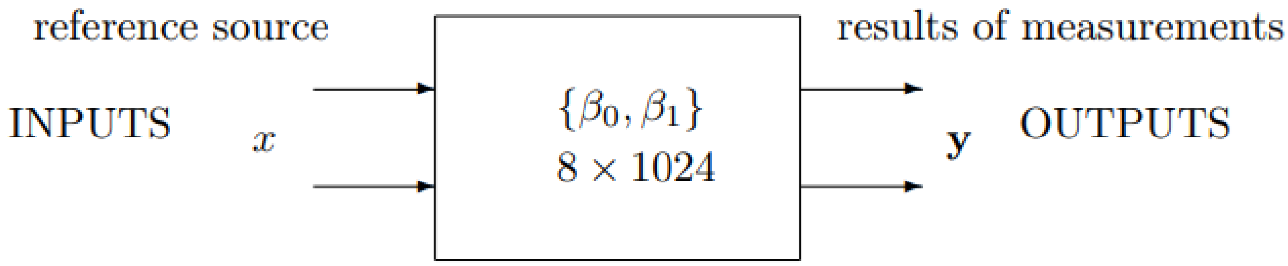

Рис. 1: Структурная схема калибровки DRS4

Ставится задача калибровки данного чипа. Для этого на входы платы подается набор напряжений постоянного значения, охватывающий рабочий диапазон микросхемы. Для каждого отдельного напряжения X, эта операция повторяется 100 раз. На основе полученных данных для каждой ячейки рассчитываются линейные регрессии.

Таким образом, калибровка сводится к определению параметров линейной регрессии

$$Y = \beta_0 X + \beta_1. \tag{1}$$

2 Теория

2.1 Первый метод: нахождение argmax(Tol)

Поскольку показания датчиков обладают погрешностью, полученные данные на самом деле следует рассматривать как интервалы, центр которых совпадает с измеренными показаниями, а радиус ϵ (в данном случае $\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384}$).

Так как показания независимы, можно рассмотреть произвольную ячейку из всех 8×1024 ячеек. Тогда, для данной ячейки имеем 100×11 пар значений (x, y), где x – координата соответствующая поданному напряжению и лежит в границах $[-0.5, 0.5]$, а y координата представляет собой интервал с $wid = 2/16384$. Для того, чтобы найти точечную оценку коэффициентов калибровки, можно воспользоваться распознающим функционалом Tol.

$$\mathrm{Tol}(x) = \mathrm{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\, b_i - \left| \mathrm{mid}\, b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\}. \tag{2}$$

Где A – матрица:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

b – интервальный вектор:

$$\begin{pmatrix} [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \\ \vdots \\ [y_m - \epsilon, y_m + \epsilon] \end{pmatrix} \tag{4}$$

Особенностью данного функционала является то, что допусковое множество решений системы $Ax = b$ можно описать как

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{Tol}(x, A, b) \geq 0\} \tag{5}$$

Если $\mathrm{Tol}(\arg\max(\mathrm{Tol}), A, b) \geq 0$, то система совместная и $\arg\max(\mathrm{Tol})$ можно считать результатом регрессии (а значит это вектор содержащий β_0, β_1).

Однако часто система не является совместной. В таком случае следует рассмотреть множество Tol_i

$$\mathrm{Tol}_i(x, A, b) = \mathrm{rad}(b_i) - \left| \mathrm{mid}(b_i) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|, \quad 1 \leq i \leq m \tag{6}$$

Если существует i для которого $\mathrm{Tol}_i < 0$, то $\mathrm{Tol} < 0$. При этом, чтобы $\mathrm{Tol}_i \geq 0$ достаточно подобрать достаточно большой $\mathrm{rad}(b_i)$.

Таким образом, в случае отсутствия совместности, следует пройтись по строчкам матрицы и элементам b. Если для некоторых из них $\mathrm{Tol}_i < 0$, то нужно "расширить" интервал в правой части, чтобы добиться $\mathrm{Tol}_i = 0$. Тогда очевидно, что $\mathrm{Tol}(\arg\max(\mathrm{Tol}), A, b)$ будет равен 0, а $\arg\max(\mathrm{Tol})$ будет вектором искомых коэффициентов калибровки.

2.2 Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики

У описанного выше метода есть два основных недостатка:

1. "Расширение" интервалов в правой части системы приводит к сильной погрешности на практике, т.к. интервалы расширяются в обе стороны: как в сторону регрессионной прямой, так и от нее.

2. Результатом данного метода является лишь точечная оценка.

В качестве альтернативы, предлагается другой метод, основанный на использовании твинной арифметики.

В первом методе брались все пары $(x_i, [y_i - \epsilon, y_i + \epsilon])$ и работа велась со всеми интервалами. В данном методе предлагается разделить y_i в группы по 100 измерений в зависимости от соответствующего x_i. Тогда для каждого различного x_i для конкретного датчика получится набор значений по которому можно определить внутреннюю и внешнюю оценку, и для каждого x_i посторить твин $[[\underline{y_i^{in}}, \overline{y_i^{in}}], [\underline{y_i^{ex}}, \overline{y_i^{ex}}]]$.

Затем снова построим распознающий функционал Tol, но теперь

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [\underline{y_1^{in}}, \overline{y_1^{in}}] \\ [\underline{y_1^{ex}}, \overline{y_1^{in}}] \\ [\underline{y_1^{in}}, \overline{y_1^{ex}}] \\ [\underline{y_1^{ex}}, \overline{y_1^{ex}}] \\ \vdots \\ [\underline{y_n^{ex}}, \overline{y_n^{ex}}] \end{pmatrix} \tag{7}$$

Если $\mathrm{Tol}(\arg\max(\mathrm{Tol})) = 0$, то так же возвращаем $\arg\max(\mathrm{Tol})$.

Если $\mathrm{Tol}(\arg\max(\mathrm{Tol})) > 0$, то можно найти множество значений (β_0, β_1), при которых $\mathrm{Tol} > 0$ и вернуть его.

Если $\mathrm{Tol}(\arg\max(\mathrm{Tol})) < 0$ снова требуется решить проблему отсутствия совместимости.

Для этого снова рассмотрим Tol_i, однако, вместо изменения правой части, будем убирать соответствующую строку из A и b. В силу того что для каждой пары (x_j, y_j) создается 4 уравнения, при удалении описанным способом несовместимых уравнений, уравнений останется больше, чем при первом способе. А значит решение будет точнее. При этом, в результате данной операции, возможна ситуация, когда $\mathrm{Tol}(\arg\max(\mathrm{Tol})) > 0$.

2.3 Построение коридора совместимости

Определение: Пусть в задаче восстановления зависимостей информационное множество Ω параметров зависимостей $y = f(x, \beta)$, совместных с данными, является непустым. Коридором совместных зависимостей рассматриваемой задачи называется многозначное отображение Γ, сопоставляющее каждому значению аргумента x множество:

$$\Gamma(x) = \bigcup_{\beta \in \Omega} f(x, \beta). \tag{8}$$

В данном случае:

$$f(x, \beta_0, \beta_1) = \beta_0 x + \beta_1. \tag{9}$$

Поэтому для построения коридора совместных зависимостей нужно для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ найти нижнюю и верхнюю ограничивающую прямую из множества допустимых.

Для получения интересующих нас прямых рассматриваем вершины $\{v_0, ..., v_k\}$, где $v_p = (\beta_{p_0}, \beta_{p_1})$, выпуклого многоугольника - допускового множества решений. Для этого вычислим:

$$\overline{p_i} = \arg\max_{1 \le p \le k} \left\{ \beta_{p_0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p_1} \right\}; \quad \underline{p_i} = \arg\min_{1 \le p \le k} \left\{ \beta_{p_0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p_1} \right\} \tag{10}$$

индексы верхней и нижней ограничивающих прямых на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

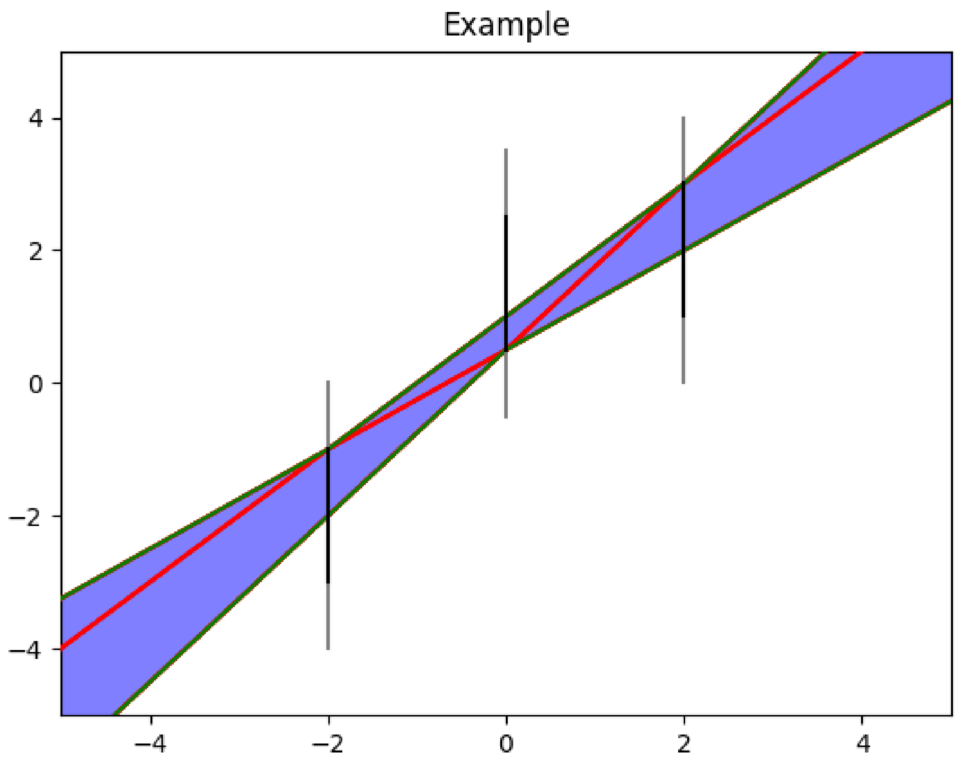

Рис. 2: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений. Твины обозначены серым и черным, прямые в вершинах – красным, выбранные отрезки прямых – зеленым.

Рассмотрим этот пример подробнее.

Изначальные интервалы:

i	x	$\underline{y^{in}}$	$\overline{y^{in}}$	$\underline{y^{ex}}$	$\overline{y^{ex}}$
0	-2	-3.0	-1.0	-4.0	0.0
1	0	0.5	2.5	-0.5	3.5
2	2	1.0	3.0	0.0	4.0

Таблица 1: Начальные данные

Для допускового множества получаем следующие вершины:

β_0	β_1
1.2510	0.4990
0.7490	0.4990
1.0000	1.0010

Таблица 2: Полученные вершины допускового множества

Пусть value $= \arg\min_{1\leq p\leq k}\left\{\beta_{p_0}\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\beta_{p_1}\right\}$. Тогда для каждой границы интервала получим следующее (для интервала до и после последнего добавим дополнительные x: -5 и 5 соответственно. Фактически эти участки бесконечно "длинные").

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	-3.8794
1	0.7490	0.4990	-2.1226
2	1.0	1.0010	-2.4990

Таблица 3: Полученные значения для отрезка $[-5,-2]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p_i}=0$, $\overline{p_i}=1$.

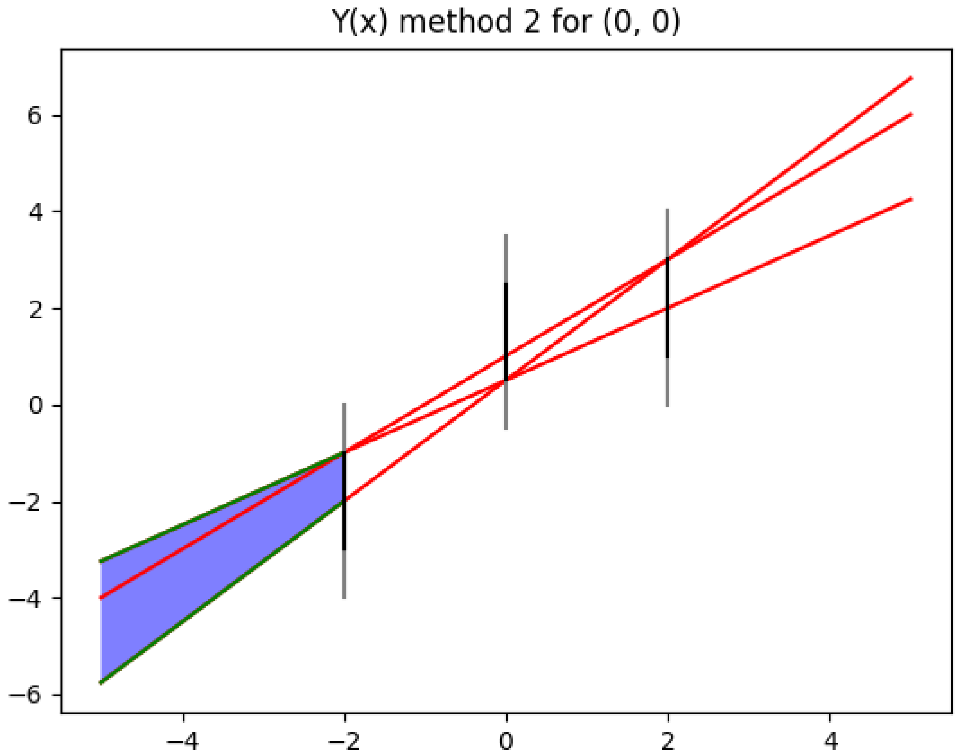

Рис. 3: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на первом участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	-0.7520
1	0.7490	0.4990	-0.2500
2	1.0000	1.0010	0.0010

Таблица 4: Полученные значения для отрезка $[-2, 0]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p_i} = 0$, $\overline{p_i} = 2$.

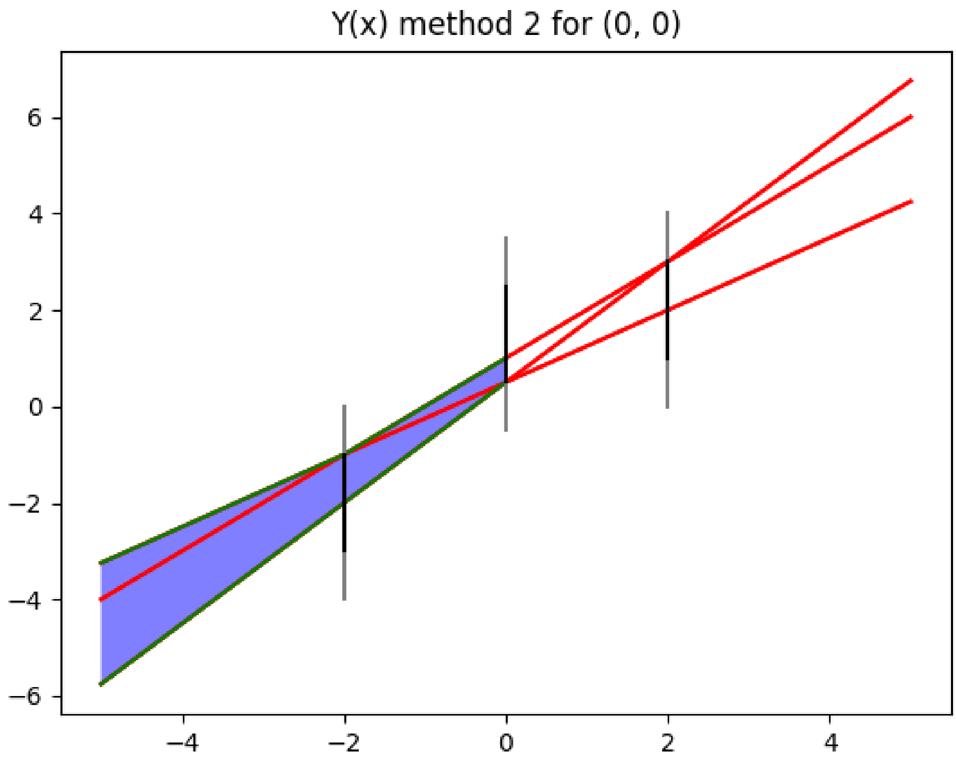

Рис. 4: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на втором участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	1.7500
1	0.7490	0.4990	-1.2480
2	1.0000	1.0010	2.0010

Таблица 5: Полученные значения для отрезка $[0, 2]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p_i} = 1$, $\overline{p_i} = 2$.

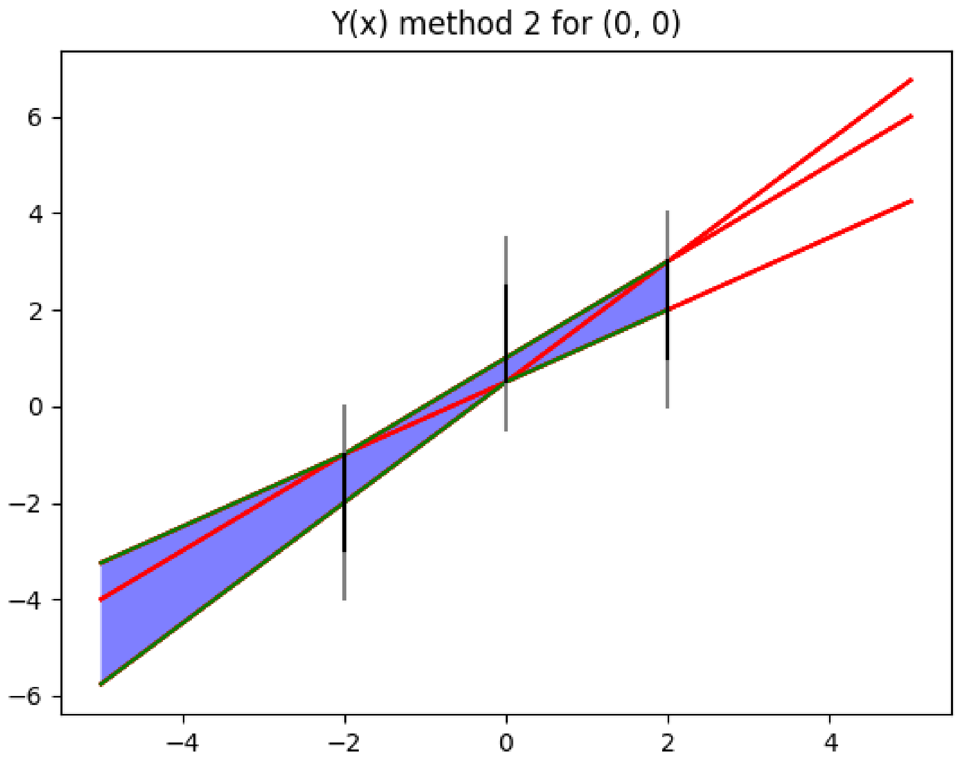

Рис. 5: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на третьем участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	4.8744
1	0.7490	0.4990	3.1206
2	1.0000	1.0010	4.5010

Таблица 6: Полученные значения для отрезка $[2, 5]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p_i} = 1$, $\overline{p_i} = 0$.

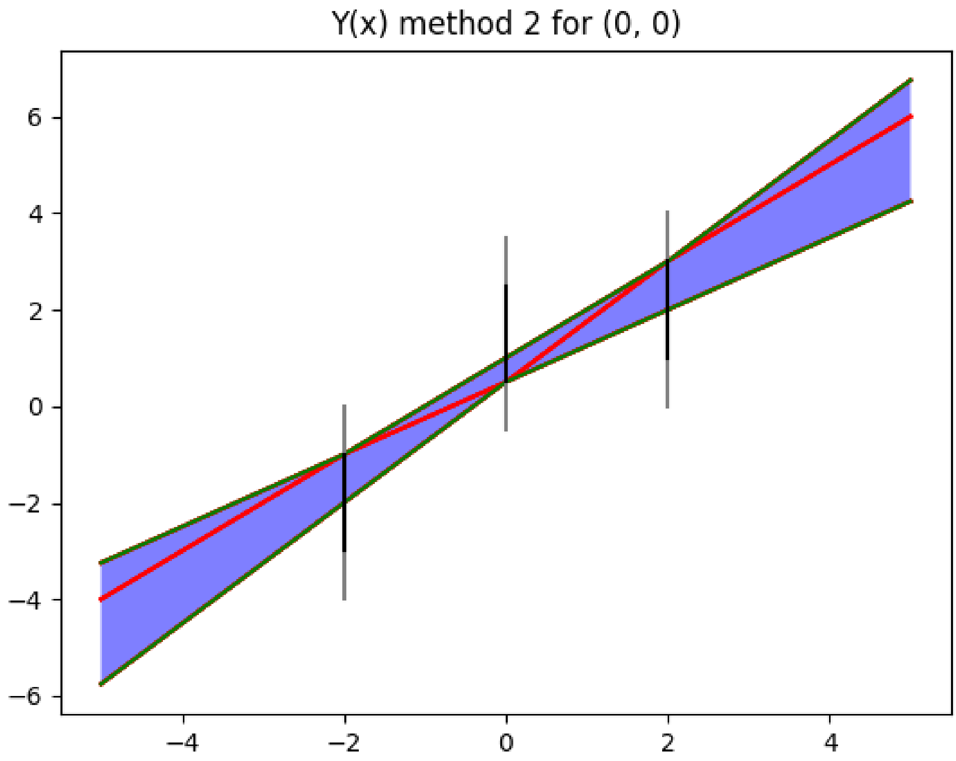

Рис. 6: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на четвертом участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

3 Рализация

Данная работа реализована на языке программирования Python 3.10 с использованием пакетов matplotlib и intvalpy. Код отчёта подготовлен с использованием платформы Overleaf.

4 Результаты

4.1 Результаты для исходных данных

Каждому датчику в чипе были присвоены координаты в зависимости от канала и номера ячейки. Датчик получивший данные из канала $j(1 \leq j \leq 8)$ и находящийся в ячейке $i(1 \leq j \leq 1024)$ будет иметь координаты i, j. Рассматриваются данные датчиков

1. С координатами (0, 631)
2. С координатами (3, 646)
3. С координатами (6, 657)

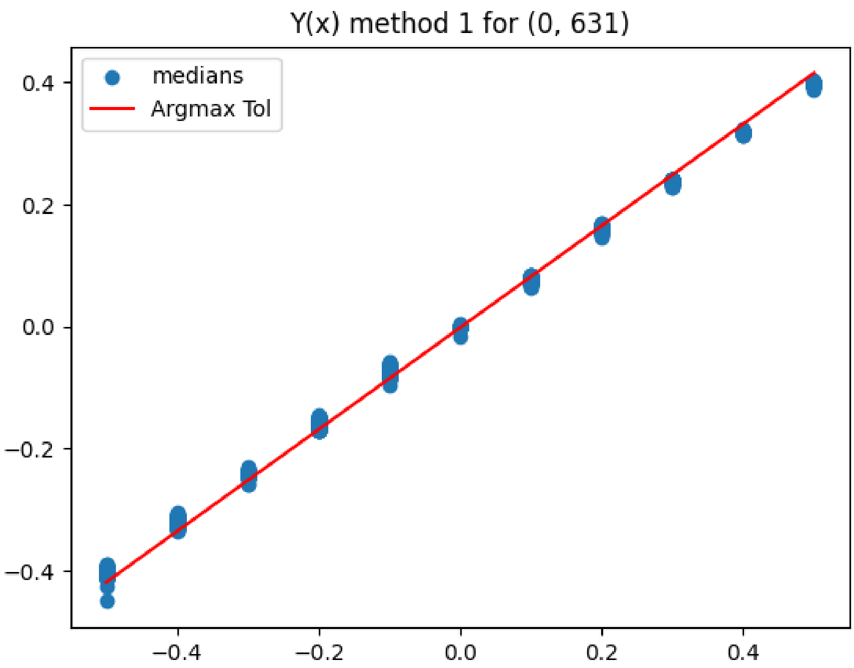

Рис. 7: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 631)

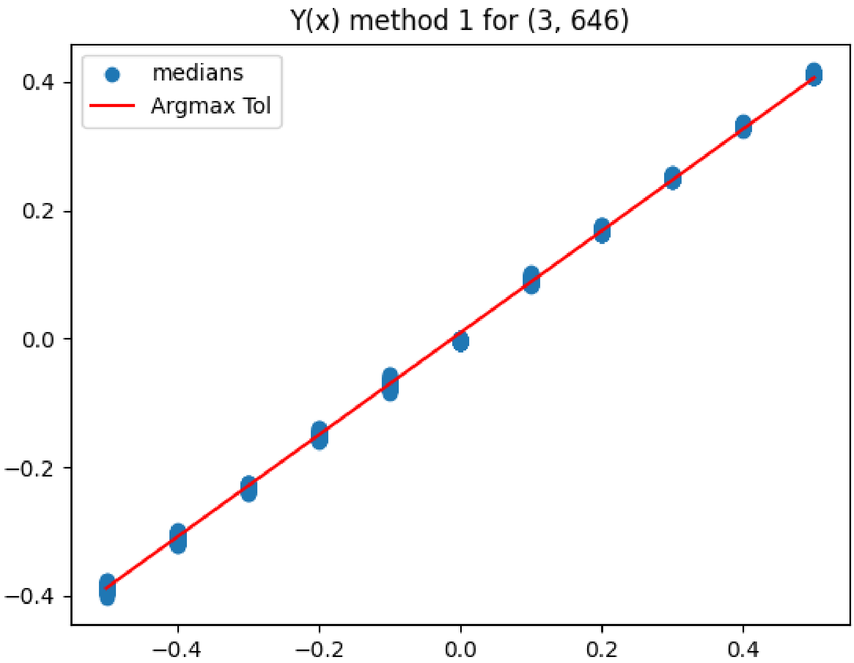

Рис. 8: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (3, 646)

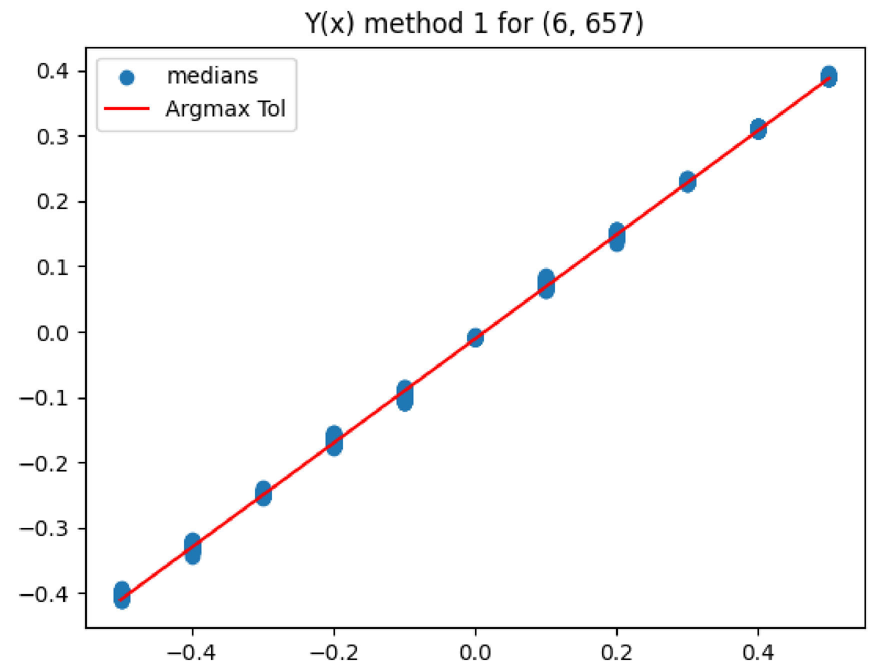

Рис. 9: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (6, 657)

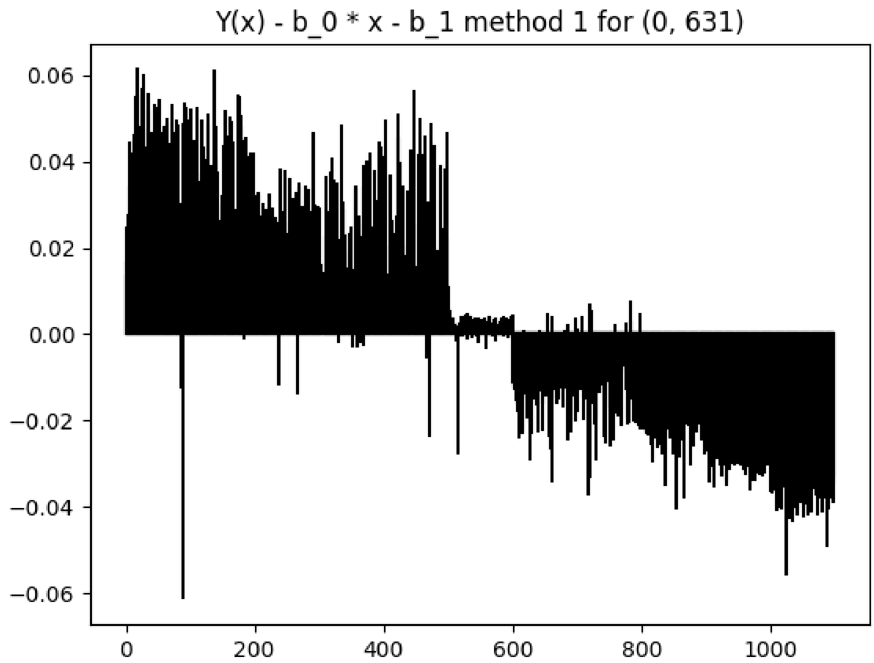

Рис. 10: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 631)

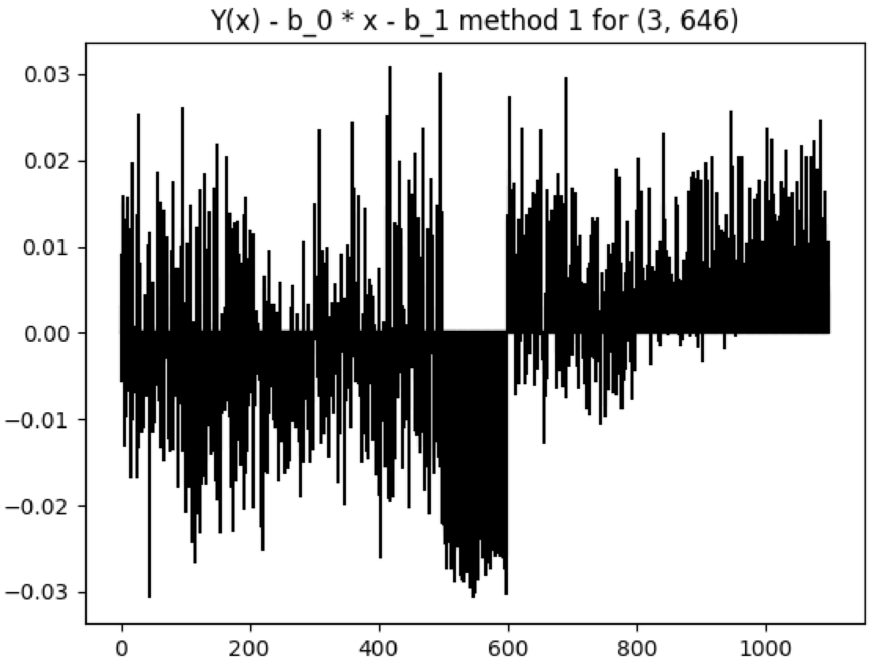

Рис. 11: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (3, 646)

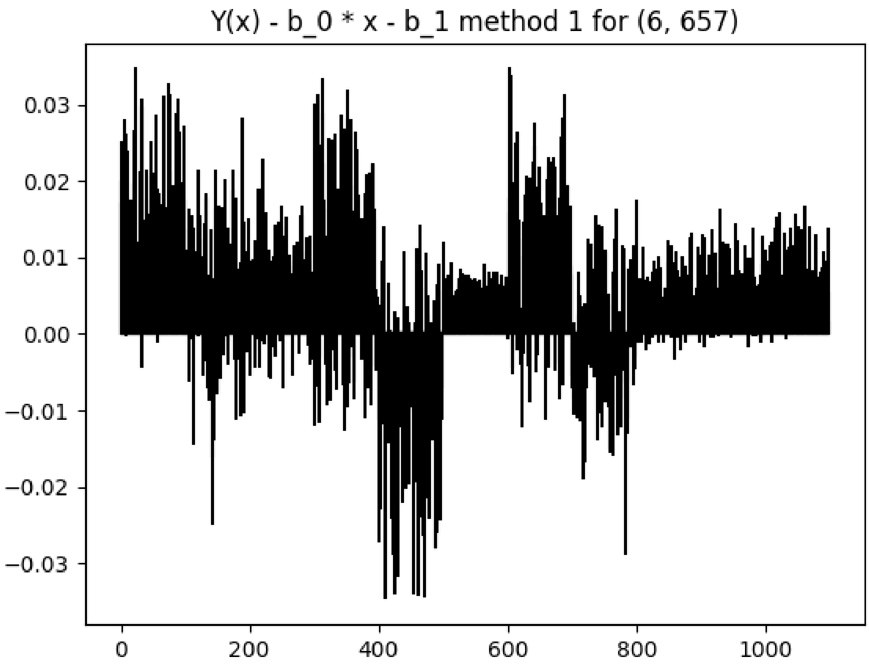

Рис. 12: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (6, 657)

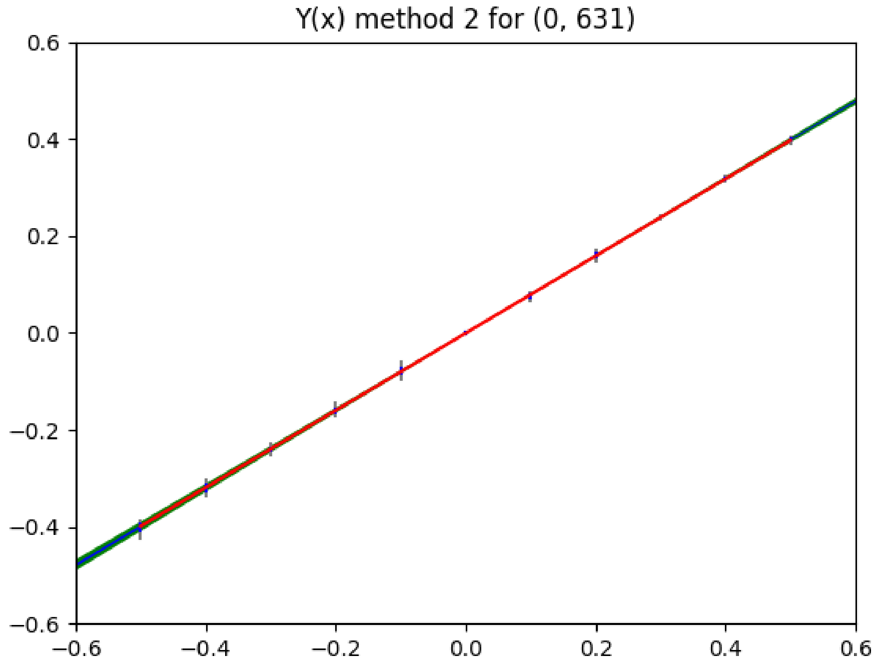

Рис. 13: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 631), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

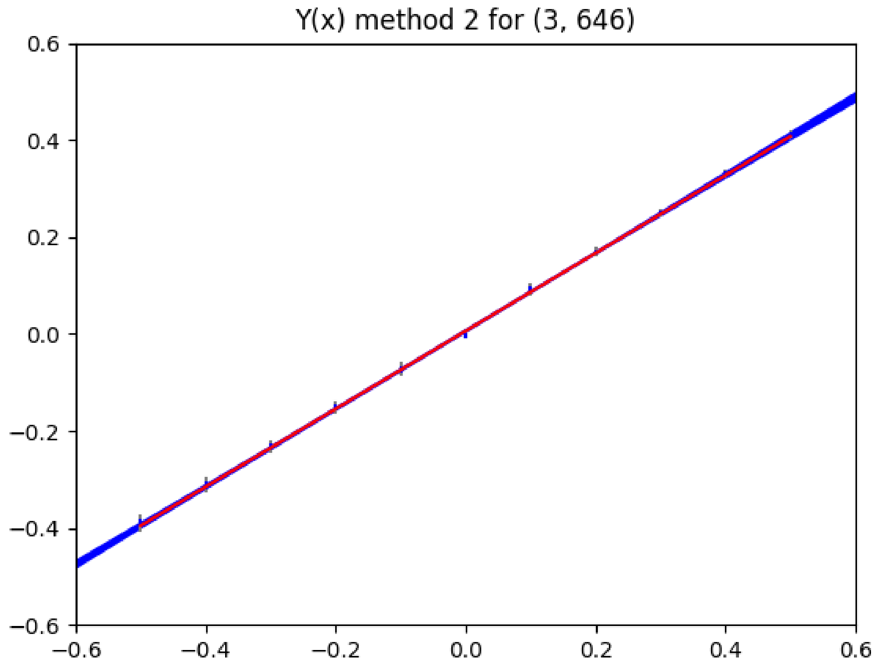

Рис. 14: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (3, 646), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

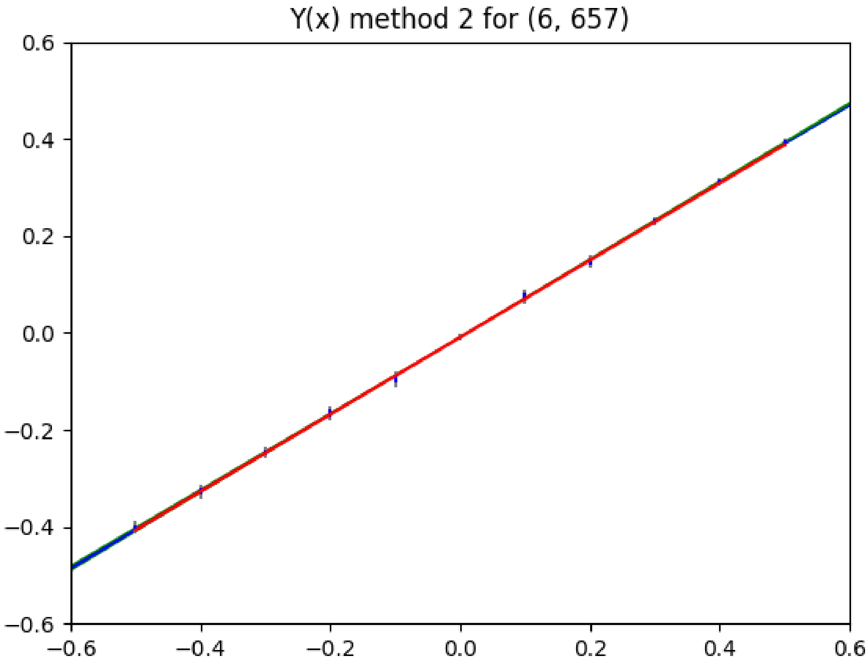

Рис. 15: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (6, 657), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридор совместности Tol обозначен синим цветом

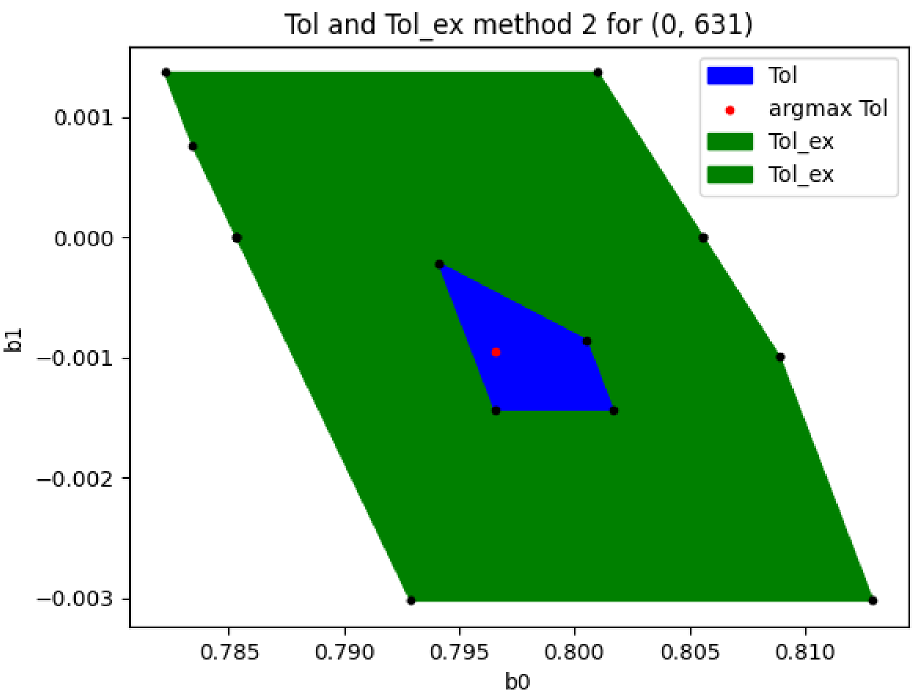

Рис. 16: Tol и Tol_{ex} для датчика (0, 631)

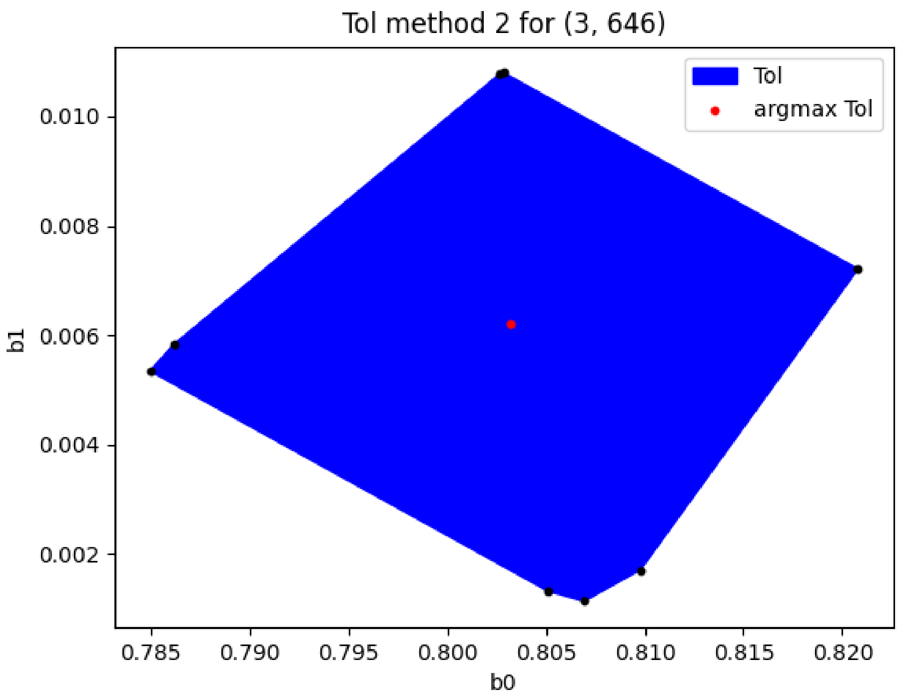

Рис. 17: Tol и Tol_{ex} для датчика (3, 646)

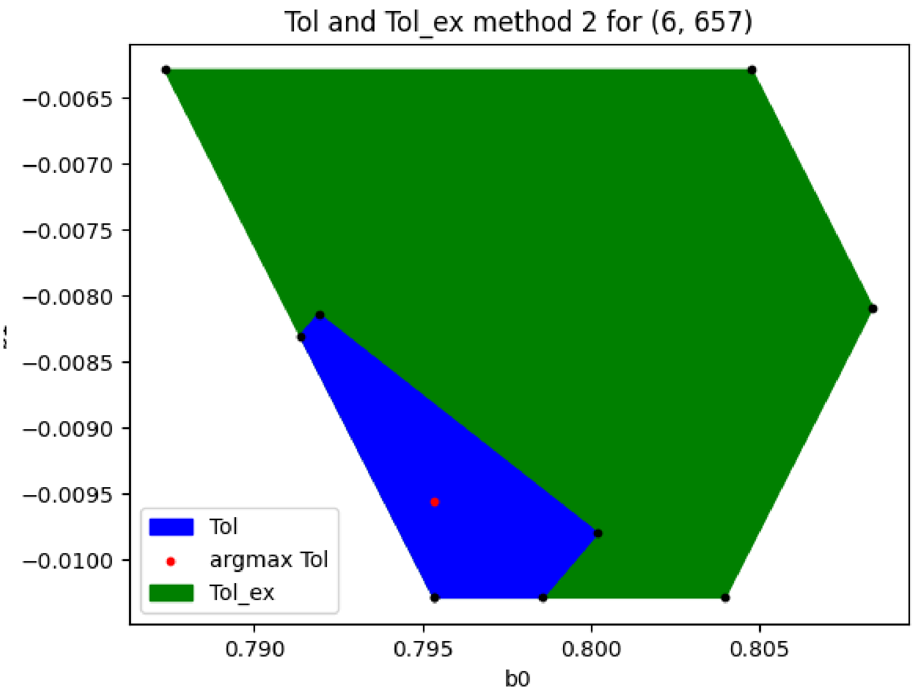

Рис. 18: Tol для датчика (6, 657)

Координаты датчика	Метод	β_0	β_1	Количество модификаций
(0, 631)	1	0.8346	-0.0018	1097
(0, 631)	2	0.7966	-0.0009	0
(3, 646)	1	0.7948	0.0086	1092
(3, 646)	2	0.8032	0.0062	30
(6, 657)	1	0.7980	-0.0112	1094
(6, 657)	2	0.7953	-0.0096	14

Таблица 7: Численные результаты

4.2 Результаты для упрощенных синтетических данных

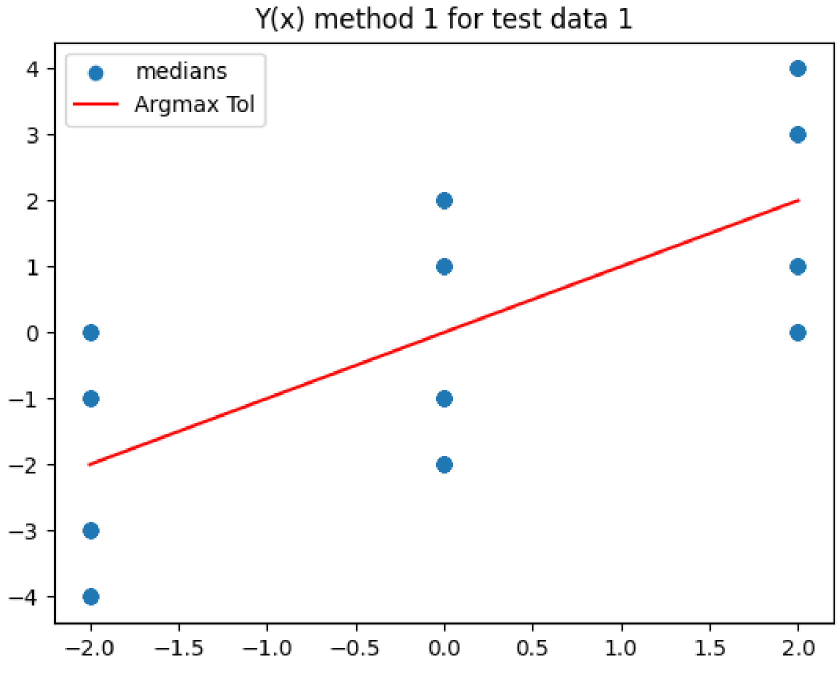

Рис. 19: Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных 1

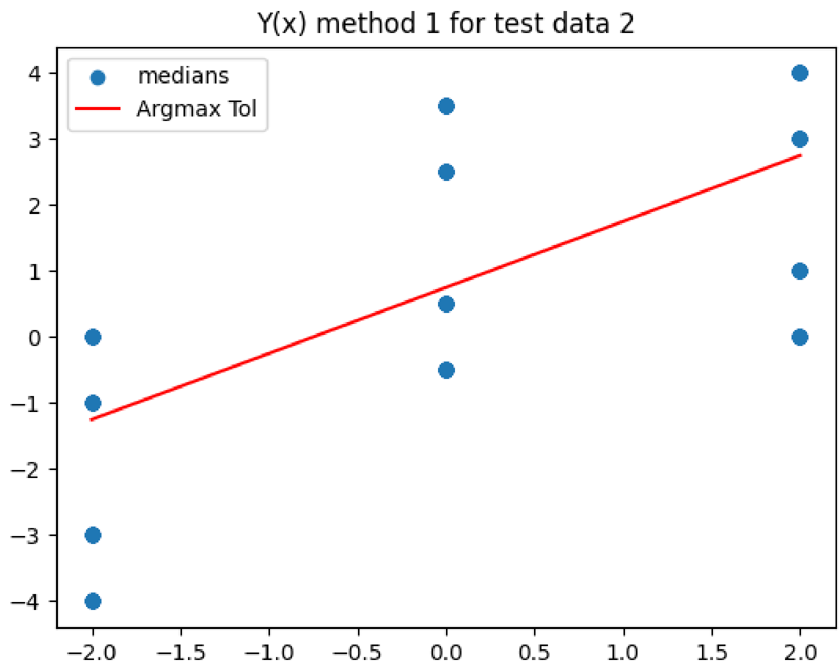

Рис. 20: Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных 2

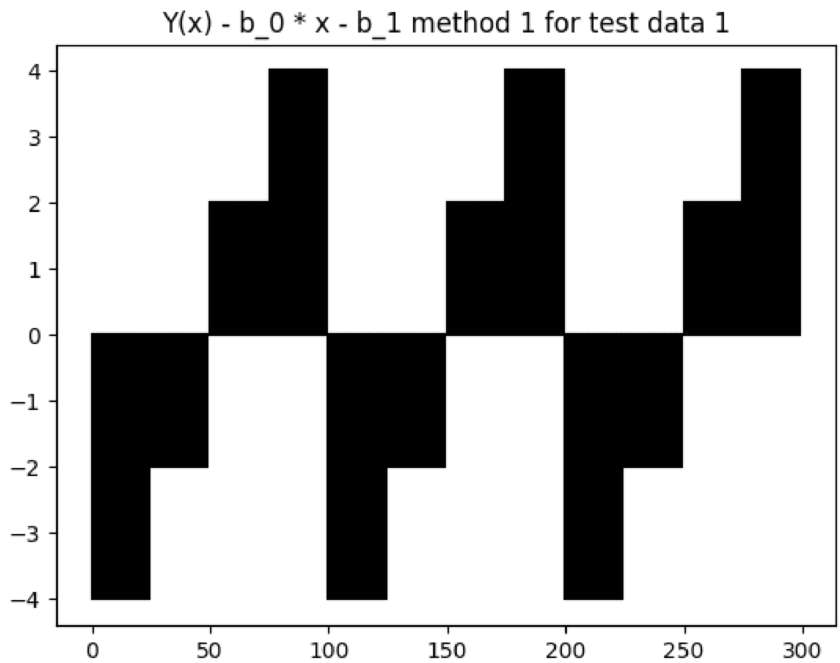

Рис. 21: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных 1

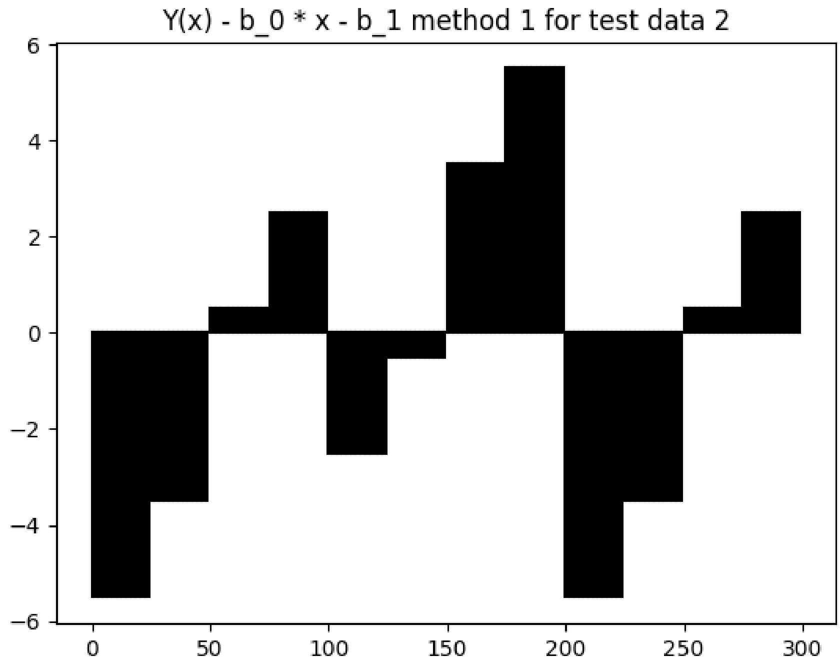

Рис. 22: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных 2

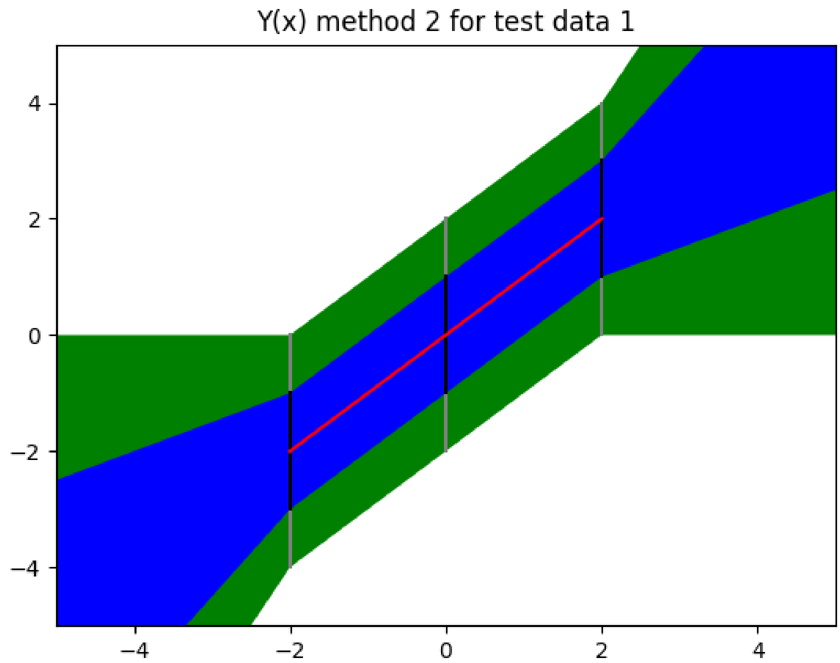

Рис. 23: Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных 1, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Коридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

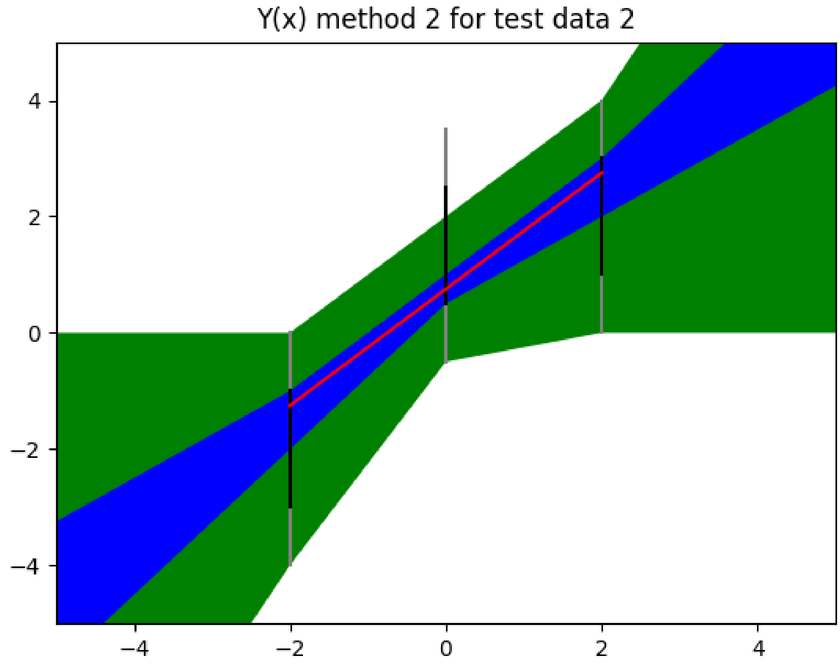

Рис. 24: Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных 2, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Коридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

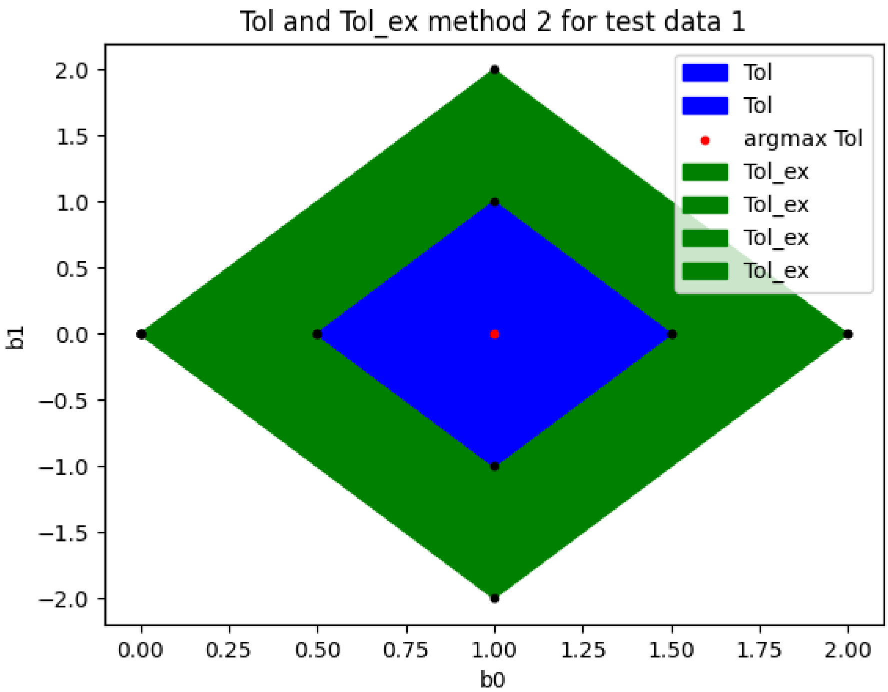

Рис. 25: Tol и Tol_{ex} для синтетических данных 1

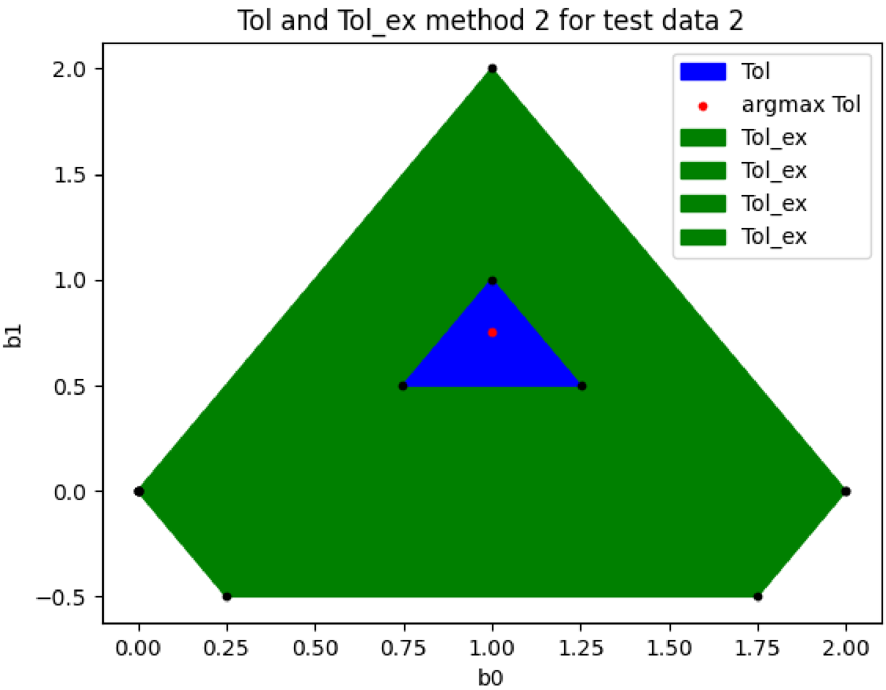

Рис. 26: Tol и Tol_{ex} для синтетических данных 2

5 Обсуждение

Исходя из представленных графиков, можно судить о том, что все описанные в теории этапы выполнены правильно. Также можно заметить что результаты полученные методами 1 и 2 являются близкими, но не совпадают. По количеству модифицированных значений в таблице 1 можно заметить, что датчик с координатами (0, 631) имеет наименьшее число выбросов из рассматриваемых, а датчик с координатами (3, 646) имеет наибольшее число выбросов из рассматриваемых.

6 Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и отчётом:
   https://github.com/gchevykalov/Interval2.