

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКИ

Интервальный анализ

Отчёт по лабораторным работам №1 и №2

Выполнил:

Студент: Чевыкалов Григорий

Группа: 5040102/30201

Принял:

к. ф.-м. н.

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург

2024 г.

Содержание

1	Постановка задачи	4
2	Теория	4
2.1	Первый метод: нахождение $\text{argmax}(\text{Tol})$	4
2.2	Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики . .	5
2.3	Построение коридора совместности	6
3	Рализация	11
4	Результаты	11
4.1	Результаты для исходных данных	11
4.2	Результаты для упрощенных синтетических данных	18
5	Обсуждение	22
6	Приложения	22

Список иллюстраций

1	Структурная схема калибровки DRS4	4
2	Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений. Твины обозначены серым и черным, прямые в вершинах – красным, выбранные отрезки прямых – зеленым.	7
3	Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на первом участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.	8
4	Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на втором участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.	9
5	Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на третьем участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.	10
6	Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на четвертом участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.	11
7	Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 631)	12
8	Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (3, 646)	12
9	Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (6, 657)	13

10	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 631)	13
11	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (3, 646)	14
12	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (6, 657)	14
13	Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 631), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом	15
14	Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (3, 646), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом	15
15	Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (6, 657), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридор совместности Tol обозначен синим цветом	16
16	Tol и Tol_{ex} для датчика (0, 631)	16
17	Tol и Tol_{ex} для датчика (3, 646)	17
18	Tol для датчика (6, 657)	17
19	Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных 1	18
20	Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных 2	19
21	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных 1	19
22	Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных 2	20
23	Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных 1, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом	20
24	Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных 2, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом	21
25	Tol и Tol_{ex} для синтетических данных 1	21
26	Tol и Tol_{ex} для синтетических данных 2	22

1 Постановка задачи

Чип быстрой аналоговой памяти PSI DRS4 имеет 8 каналов, каждый из которых содержит 1024 ячейки. Они включают конденсаторы для хранения значения заряда и электронные ключи для записи сигналов и считывания напряжений через АЦП (аналого-цифровой преобразователь). Ячейки объединяются в кольцевые буферы. При подаче сигнала синхронизации запись напряжений на конденсаторы прекращается, а номер ячейки (в которую была сделана последняя запись) запоминается.

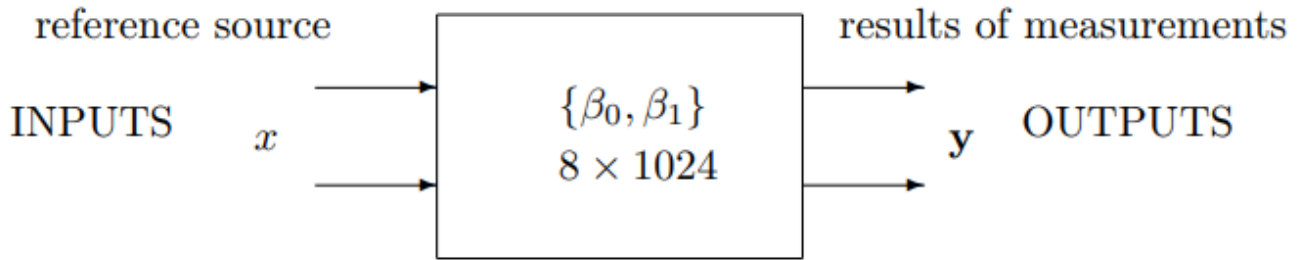


Рис. 1: Структурная схема калибровки DRS4

Ставится задача калибровки данного чипа. Для этого на входы платы подается набор напряжений постоянного значения, охватывающий рабочий диапазон микросхемы. Для каждого отдельного напряжения X , эта операция повторяется 100 раз. На основе полученных данных для каждой ячейки рассчитываются линейные регрессии.

Таким образом, калибровка сводится к определению параметров линейной регрессии

$$Y = \beta_0 X + \beta_1. \quad (1)$$

2 Теория

2.1 Первый метод: нахождение $\operatorname{argmax}(\operatorname{Tol})$

Поскольку показания датчиков обладают погрешностью, полученные данные на самом деле следует рассматривать как интервалы, центр которых совпадает с измеренными показаниями, а радиус ϵ (в данном случае $\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384}$).

Так как показания независимы, можно рассмотреть произвольную ячейку из всех 8×1024 ячеек. Тогда, для данной ячейки имеем 100×11 пар значений (x, y) , где x – координата соответствующая поданному напряжению и лежит в границах $[-0.5, 0.5]$, а y координата представляет собой интервал с $\operatorname{wid} = 2/16384$. Для того, чтобы найти точечную оценку коэффициентов калибровки, можно воспользоваться распознающим функционалом Tol .

$$\operatorname{Tol}(x) = \operatorname{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \operatorname{rad} b_i - \left| \operatorname{mid} b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (2)$$

Где A – матрица:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

b – интервальный вектор:

$$\begin{pmatrix} [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \\ \vdots \\ [y_m - \epsilon, y_m + \epsilon] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Особенностью данного функционала является то, что допустовое множество решений системы $Ax = b$ можно описать как

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Tol}(x, A, b) \geq 0\} \quad (5)$$

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b) \geq 0$, то система совместная и $\arg \max(\text{Tol})$ можно считать результатом регрессии (а значит это вектор содержащий β_0, β_1).

Однако часто система не является совместной. В таком случае следует рассмотреть множество Tol_i

$$\text{Tol}_i(x, A, b) = \text{rad}(b_i) - \left| \text{mid}(b_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right|, \quad 1 \leq i \leq m \quad (6)$$

Если существует i для которого $\text{Tol}_i < 0$, то $\text{Tol} < 0$. При этом, чтобы $\text{Tol}_i \geq 0$ достаточно подобрать достаточно большой $\text{rad}(b_i)$.

Таким образом, в случае отсутствия совместности, следует пройтись по строчкам матрицы и элементам b . Если для некоторых из них $\text{Tol}_i < 0$, то нужно "расширить" интервал в правой части, чтобы добиться $\text{Tol}_i = 0$. Тогда очевидно, что $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol}), A, b)$ будет равен 0, а $\arg \max(\text{Tol})$ будет вектором искомых коэффициентов калибровки.

2.2 Второй метод: нахождение оценки при помощи твинной арифметики

У описанного выше метода есть два основных недостатка:

1. "Расширение" интервалов в правой части системы приводит к сильной погрешности на практике, т.к. интервалы расширяются в обе стороны: как в сторону регрессионной прямой, так и от нее.
2. Результатом данного метода является лишь точечная оценка.

В качестве альтернативы, предлагается другой метод, основанный на использовании твинной арифметики.

В первом методе брались все пары $(x_i, [y_i - \epsilon, y_i + \epsilon])$ и работа велась со всеми интервалами. В данном методе предлагается разделить y_i в группы по 100 измерений в зависимости от соответствующего x_i . Тогда для каждого различного x_i для конкретного датчика получится набор значений по которому можно определить внутреннюю и внешнюю оценку, и для каждого x_i посторить твин $[[y_i^{in}, \overline{y_i^{in}}], [y_i^{ex}, \overline{y_i^{ex}}]]$.

Затем снова построим распознающий функционал Tol, но теперь

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} [y_1^{in}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{in}}] \\ [y_1^{in}, \overline{y_1^{ex}}] \\ [y_1^{ex}, \overline{y_1^{ex}}] \\ \vdots \\ [y_n^{ex}, \overline{y_n^{ex}}] \end{pmatrix} \quad (7)$$

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) = 0$, то так же возвращаем $\arg \max(\text{Tol})$.

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$, то можно найти множество значений (β_0, β_1) , при которых $\text{Tol} > 0$ и вернуть его.

Если $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) < 0$ снова требуется решить проблему отсутствия совместности.

Для этого снова рассмотрим Tol_i , однако, вместо изменения правой части, будем убирать соответствующую строку из A и b . В силу того что для каждой пары (x_j, y_j) создается 4 уравнения, при удалении описанным способом несовместимых уравнений, уравнений останется больше, чем при первом способе. А значит решение будет точнее. При этом, в результате данной операции, возможна ситуация, когда $\text{Tol}(\arg \max(\text{Tol})) > 0$.

2.3 Построение коридора совместности

Определение: Пусть в задаче восстановления зависимостей информационное множество Ω параметров зависимостей $y = f(x, \beta)$, совместных с данными, является непустым. Коридором совместных зависимостей рассматриваемой задачи называется многозначное отображение Γ , сопоставляющее каждому значению аргумента x множество:

$$\Gamma(x) = \bigcup_{\beta \in \Omega} f(x, \beta). \quad (8)$$

В данном случае:

$$f(x, \beta_0, \beta_1) = \beta_0 x + \beta_1. \quad (9)$$

Поэтому для построения коридора совместных зависимостей нужно для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ найти нижнюю и верхнюю ограничивающую прямую из множества допустимых.

Для получения интересующих нас прямых рассматриваем вершины $\{v_0, \dots, v_k\}$ выпуклого многоугольника — допустового множества решений, где $v_p = (\beta_{p_0}, \beta_{p_1})$. Для этого вычислим:

$$\bar{p}_i = \arg \max_{1 \leq p \leq k} \left\{ \beta_{p_0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p_1} \right\}; \quad \underline{p}_i = \arg \min_{1 \leq p \leq k} \left\{ \beta_{p_0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p_1} \right\} \quad (10)$$

индексы верхней и нижней ограничивающих прямых на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

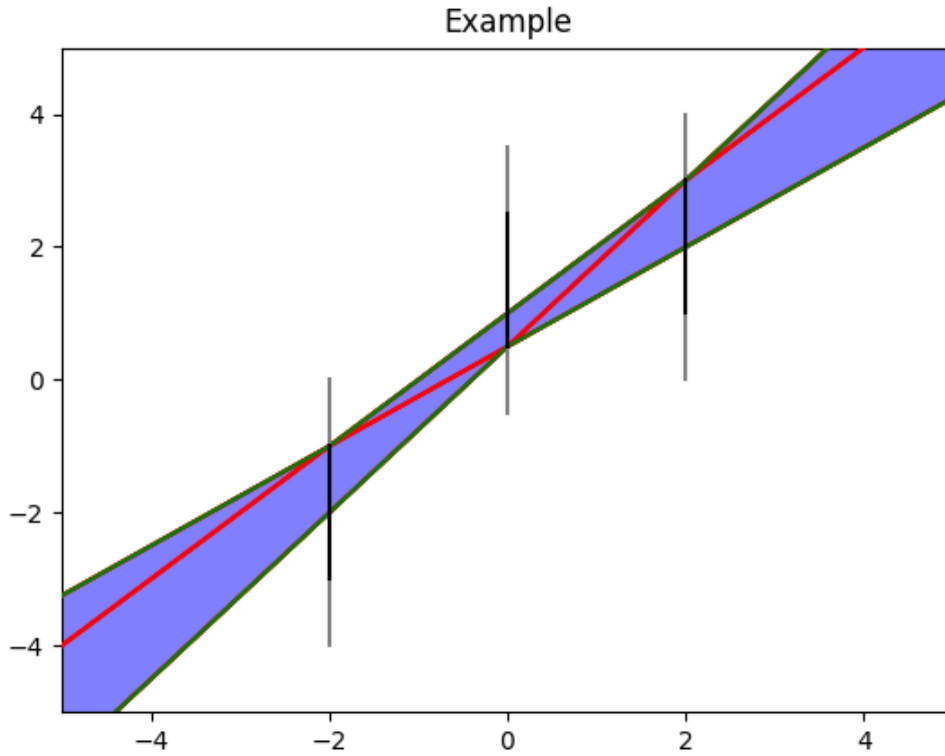


Рис. 2: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений. Твины обозначены серым и черным, прямые в вершинах — красным, выбранные отрезки прямых — зеленым.

Рассмотрим этот пример подробнее.

Изначальные интервалы:

i	x	\underline{y}^{in}	\overline{y}^{in}	\underline{y}^{ex}	\overline{y}^{ex}
0	-2	-3.0	-1.0	-4.0	0.0
1	0	0.5	2.5	-0.5	3.5
2	2	1.0	3.0	0.0	4.0

Таблица 1: Начальные данные

Для допустового множества получаем следующие вершины:

β_0	β_1
1.2510	0.4990
0.7490	0.4990
1.0000	1.0010

Таблица 2: Полученные вершины допускового множества

Пусть $\text{value} = \arg \min_{1 \leq p \leq k} \left\{ \beta_{p_0} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \beta_{p_1} \right\}$. Тогда для каждой границы интервала получим следующее (для интервала до и после последнего добавим дополнительные x : -5 и 5 соответственно. Фактически эти участки бесконечно "длинные").

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	-3.8794
1	0.7490	0.4990	-2.1226
2	1.0	1.0010	-2.4990

Таблица 3: Полученные значения для отрезка $[-5, -2]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p}_i = 0$, $\overline{p}_i = 1$.

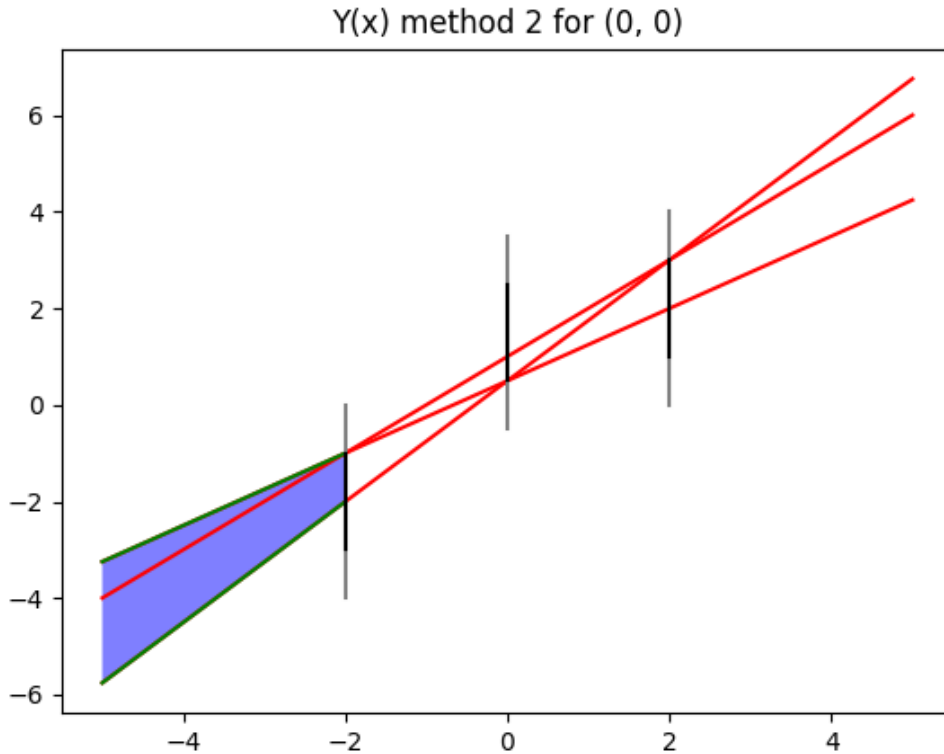


Рис. 3: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на первом участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	-0.7520
1	0.7490	0.4990	-0.2500
2	1.0000	1.0010	0.0010

Таблица 4: Полученные значения для отрезка $[-2, 0]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p}_i = 0$, $\overline{p}_i = 2$.

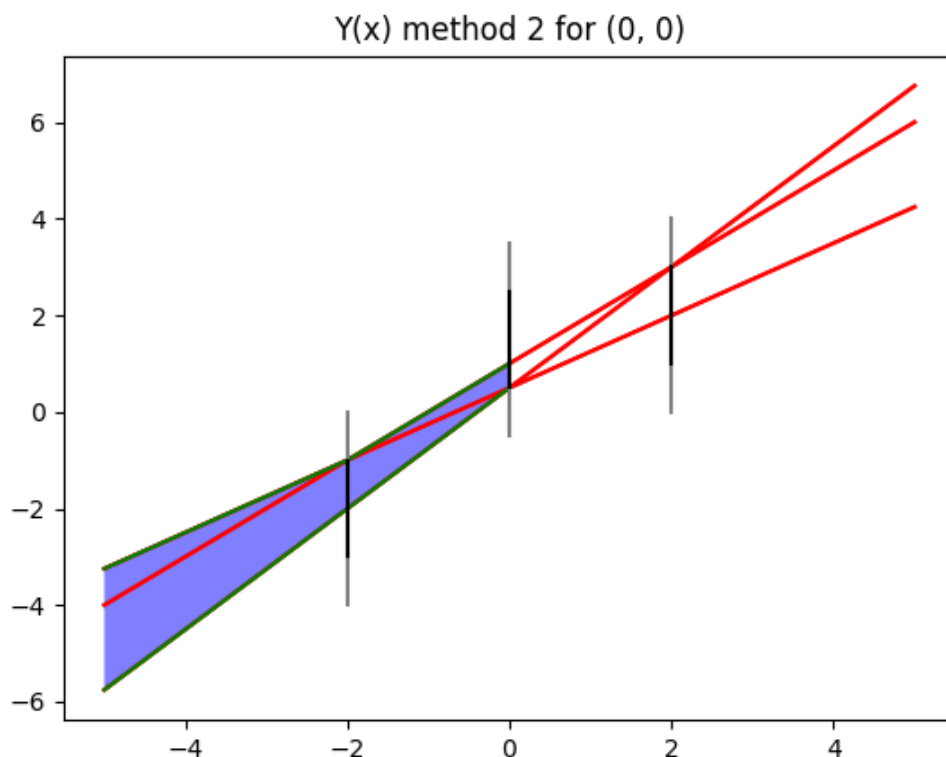


Рис. 4: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на втором участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	1.7500
1	0.7490	0.4990	-1.2480
2	1.0000	1.0010	2.0010

Таблица 5: Полученные значения для отрезка $[0, 2]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p}_i = 1$, $\overline{p}_i = 2$.

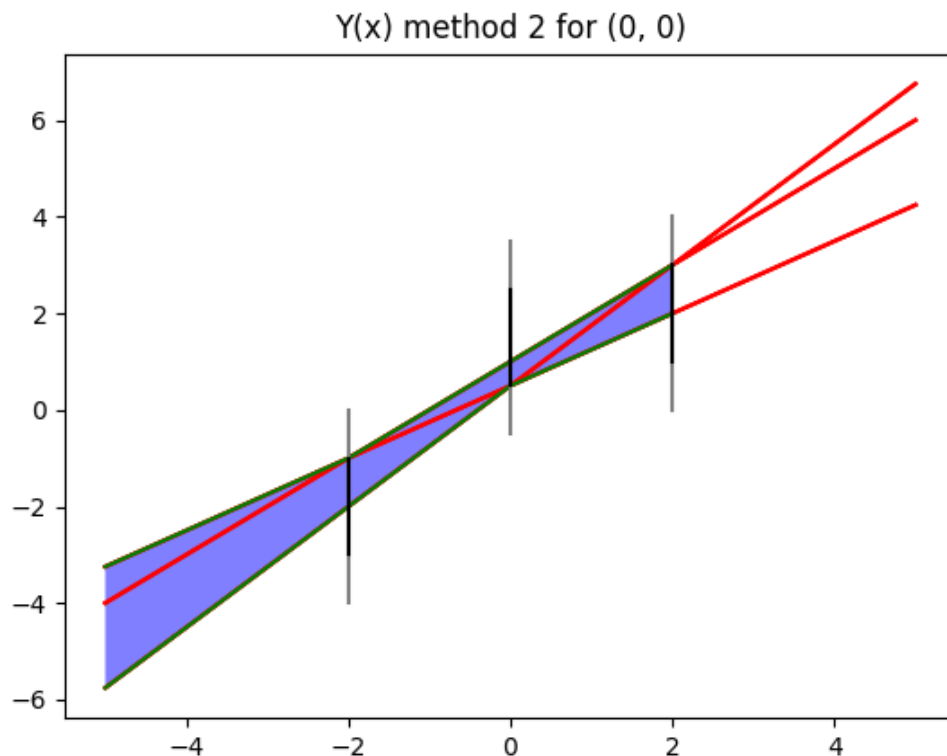


Рис. 5: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на третьем участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

i	β_0	β_1	value
0	1.2510	0.4990	4.8744
1	0.7490	0.4990	3.1206
2	1.0000	1.0010	4.5010

Таблица 6: Полученные значения для отрезка $[2, 5]$

Выбраны следующие индексы: $\underline{p}_i = 1$, $\overline{p}_i = 0$.

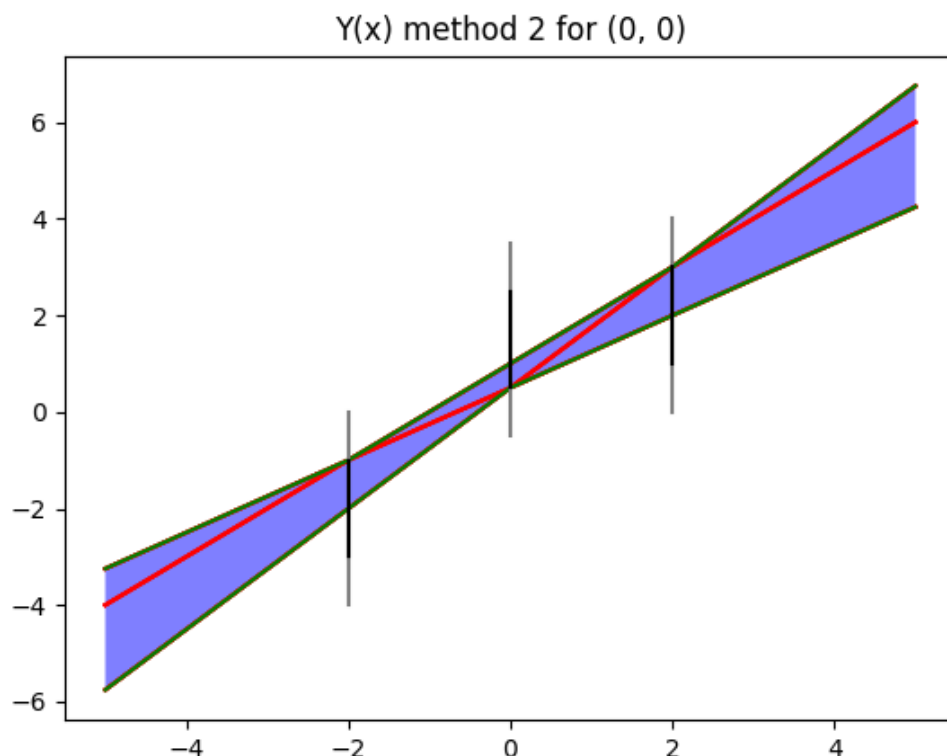


Рис. 6: Иллюстрация построения коридора совместности по вершинам множества допустимых значений на четвертом участке. Голубым обозначена часть коридора, красным ограничивающие прямые, зеленым границы построенной части коридора.

3 Рализация

Данная работа реализована на языке программирования Python 3.10 с использованием пакетов matplotlib и intervalpy. Код отчёта подготовлен с использованием платформы Overleaf.

4 Результаты

4.1 Результаты для исходных данных

Каждому датчику в чипе были присвоены координаты в зависимости от канала и номера ячейки. Датчик получивший данные из канала j ($1 \leq j \leq 8$) и находящийся в ячейке i ($1 \leq i \leq 1024$) будет иметь координаты i, j . Рассматриваются данные датчиков

1. С координатами (0, 631)
2. С координатами (3, 646)
3. С координатами (6, 657)

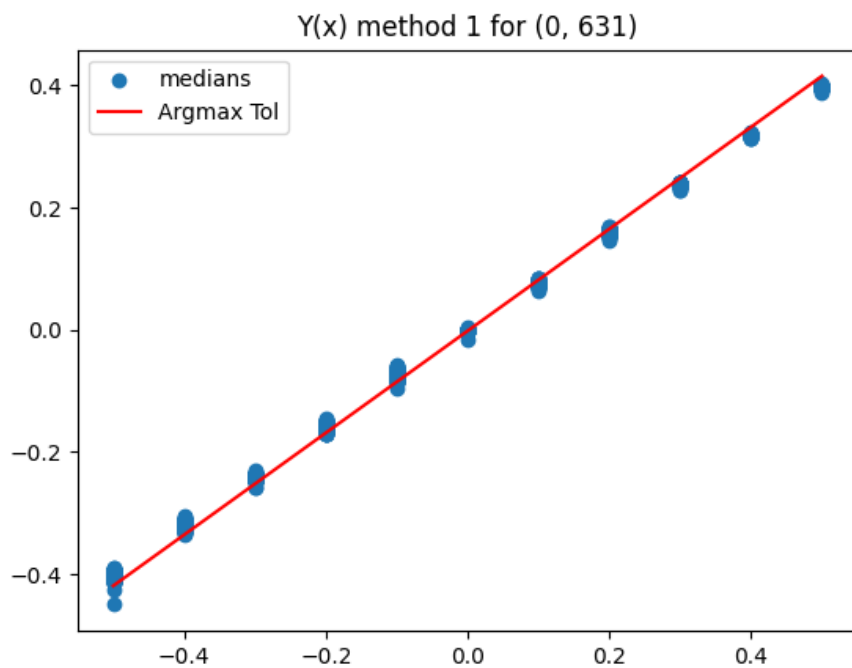


Рис. 7: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (0, 631)

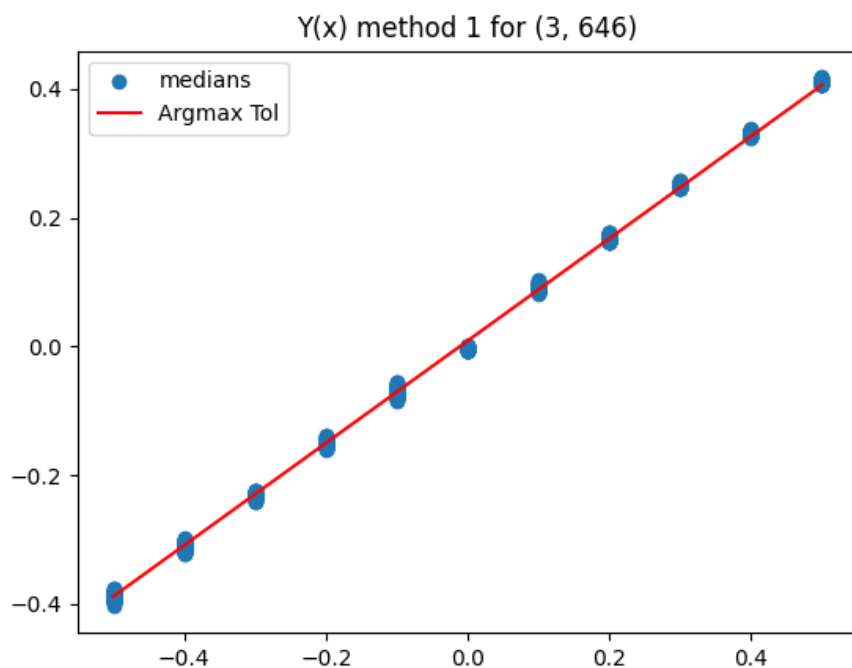


Рис. 8: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (3, 646)

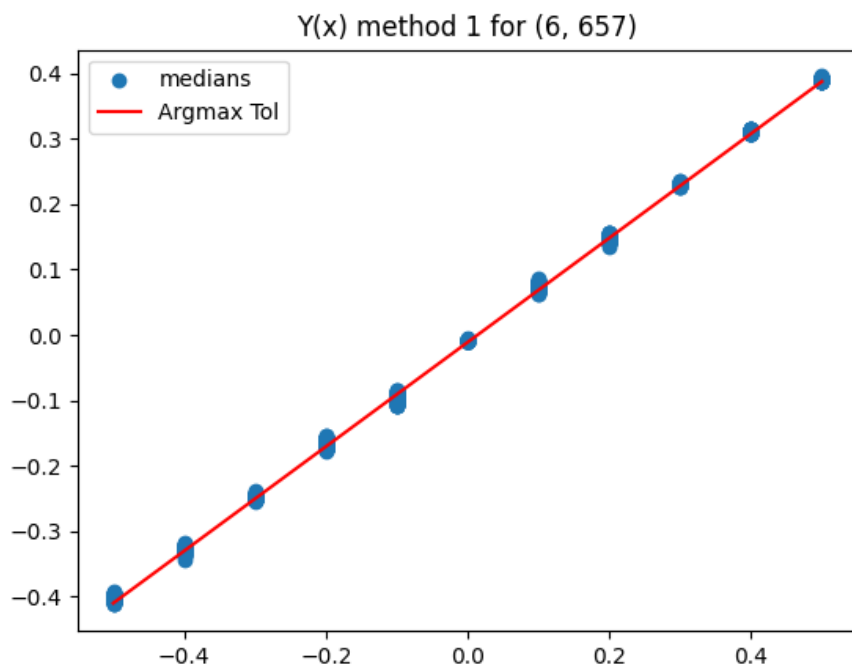


Рис. 9: Калибровочная прямая полученная первым методом для датчика (6, 657)

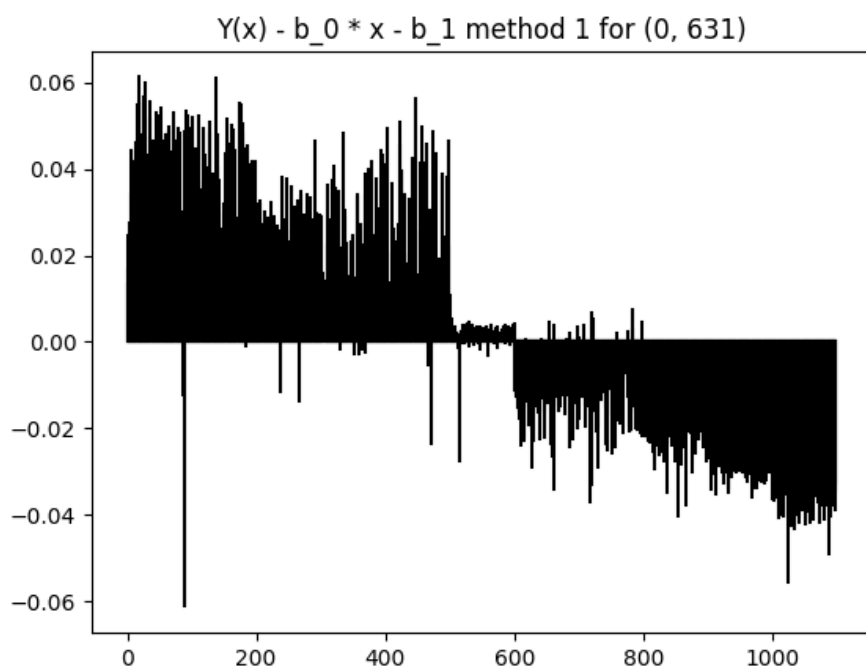


Рис. 10: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (0, 631)

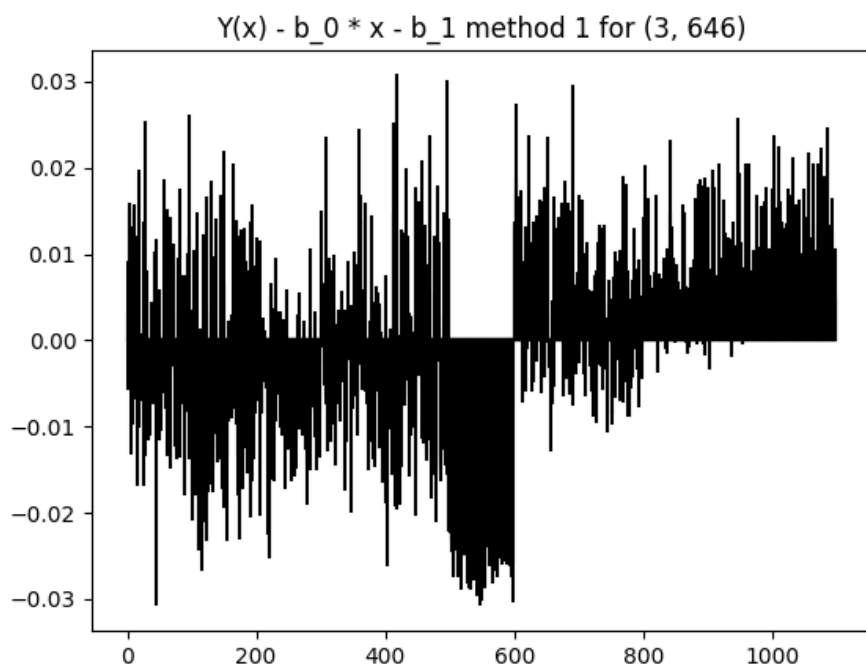


Рис. 11: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (3, 646)

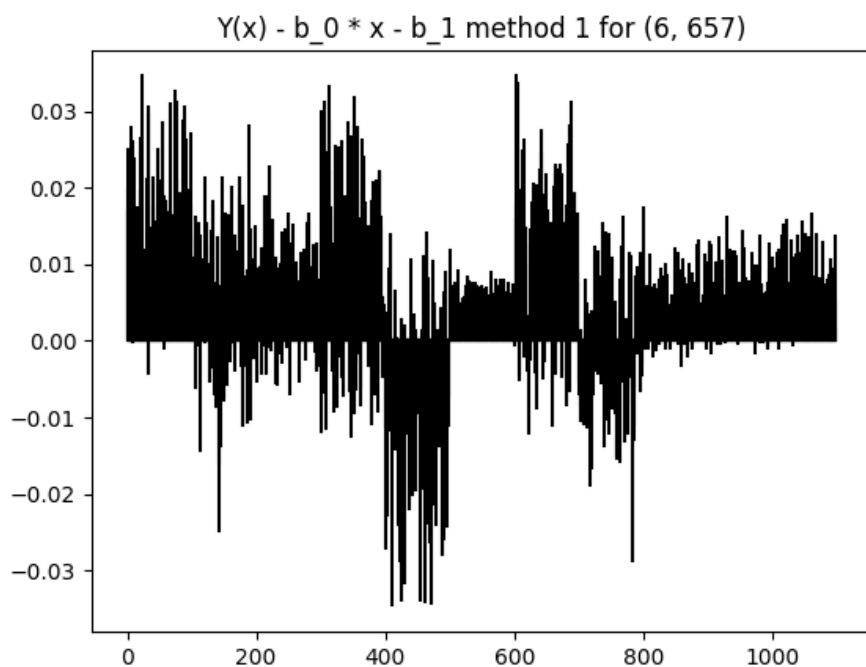


Рис. 12: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и датчика (6, 657)

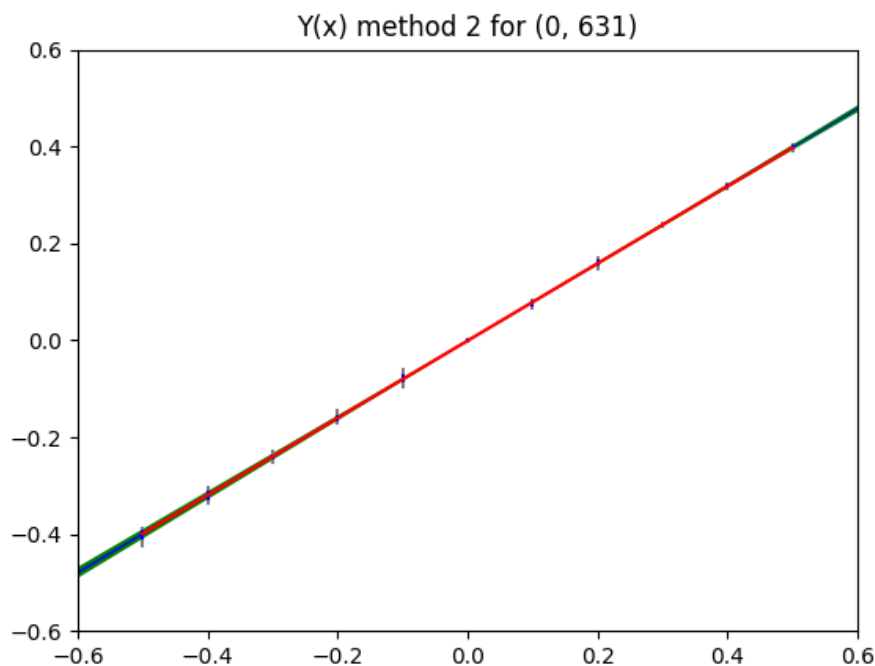


Рис. 13: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (0, 631), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

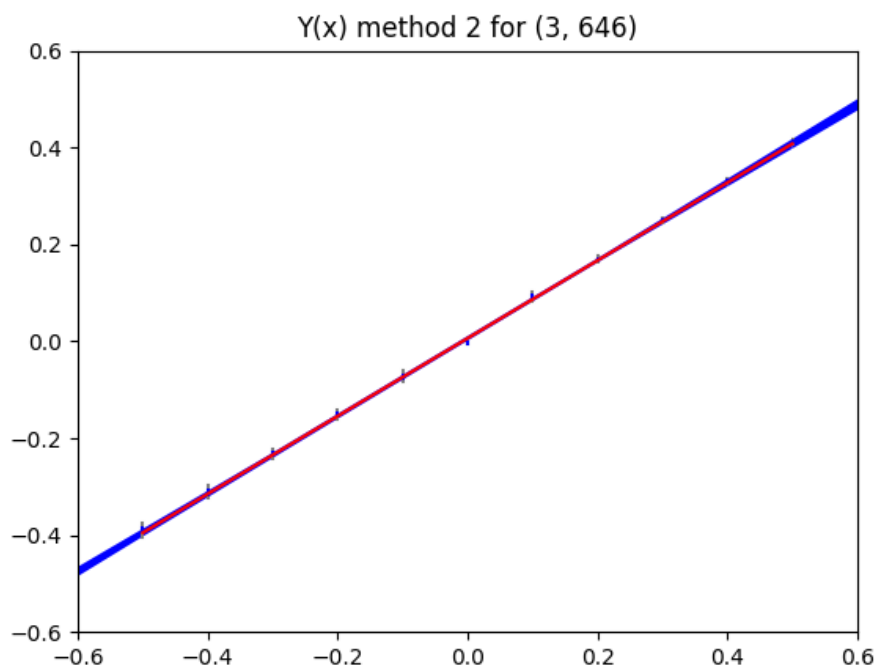


Рис. 14: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (3, 646), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

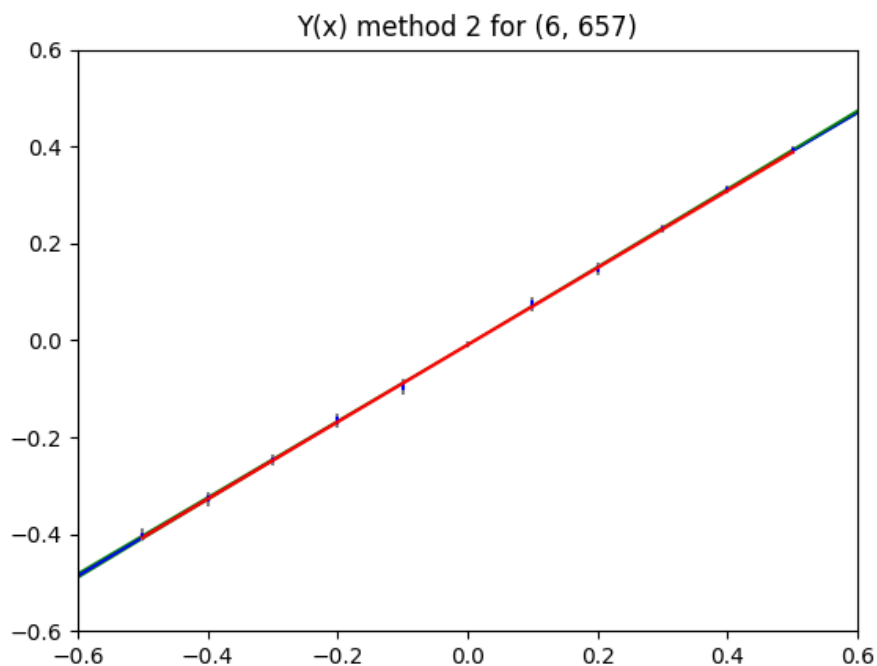


Рис. 15: Калибровочная прямая полученная вторым методом для датчика (6, 657), обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридор совместности Tol обозначен синим цветом

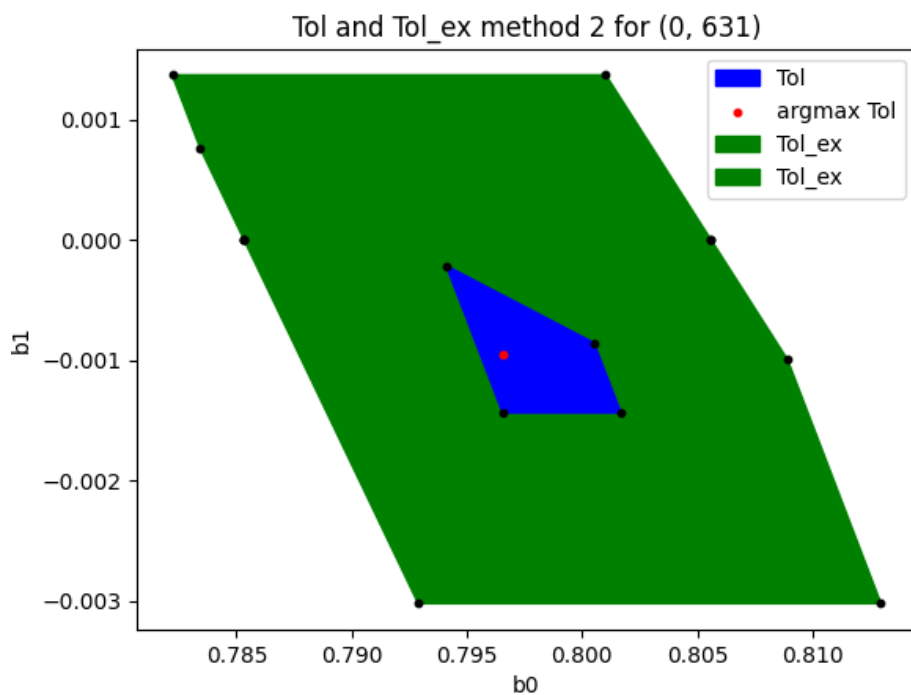


Рис. 16: Tol и Tol_{ex} для датчика (0, 631)

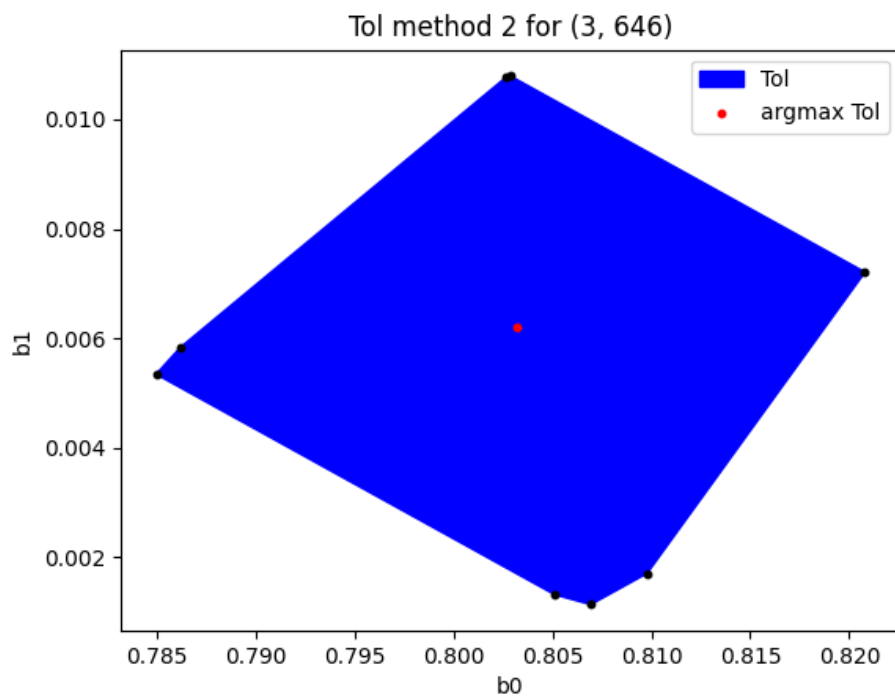
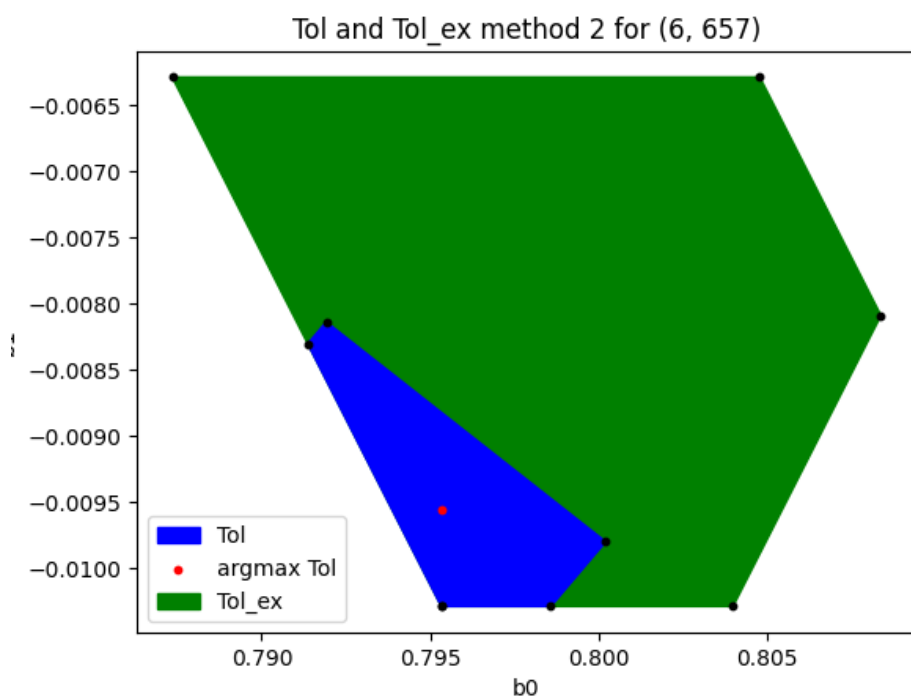
Рис. 17: Tol и Tol_{ex} для датчика (3, 646)

Рис. 18: Tol для датчика (6, 657)

Координаты датчика	Метод	β_0	β_1	Количество модификаций
(0, 631)	1	0.8346	-0.0018	1097
(0, 631)	2	0.7966	-0.0009	0
(3, 646)	1	0.7948	0.0086	1092
(3, 646)	2	0.8032	0.0062	30
(6, 657)	1	0.7980	-0.0112	1094
(6, 657)	2	0.7953	-0.0096	14

Таблица 7: Численные результаты

4.2 Результаты для упрощенных синтетических данных

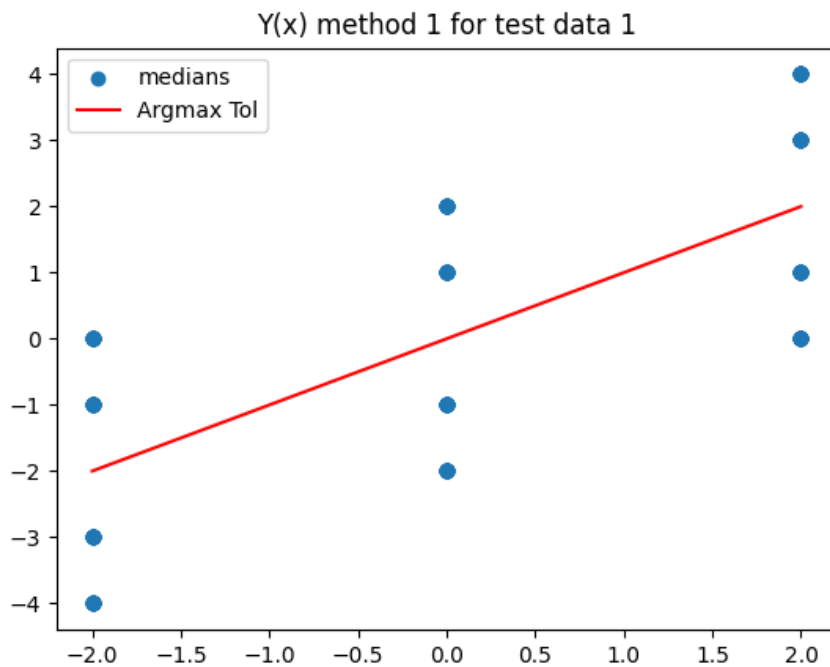


Рис. 19: Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных 1

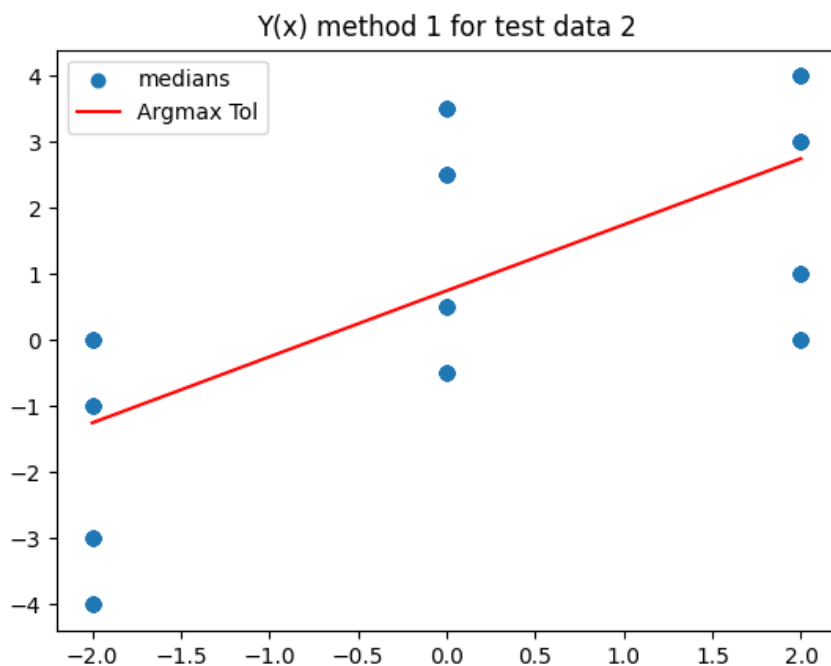


Рис. 20: Калибровочная прямая полученная первым методом для синтетических данных 2

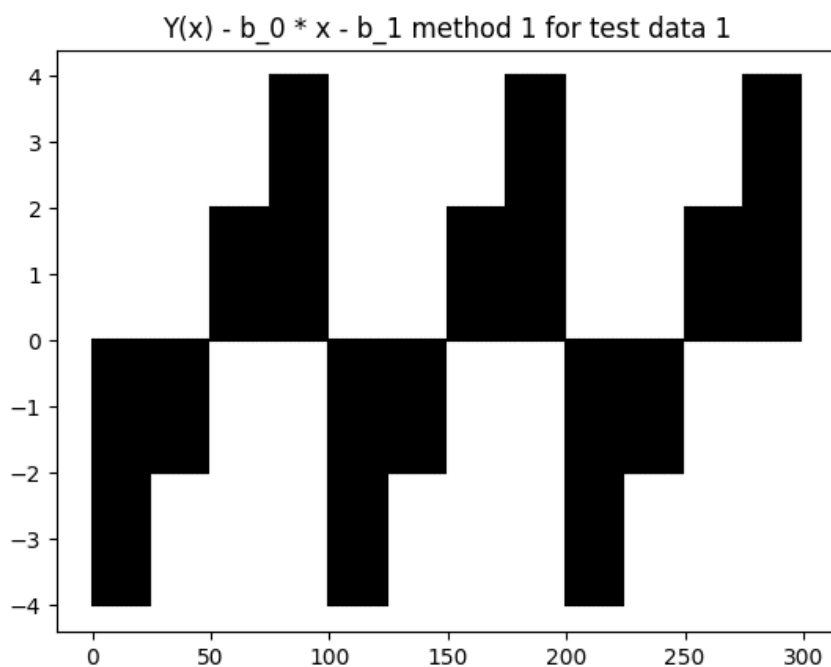


Рис. 21: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных 1

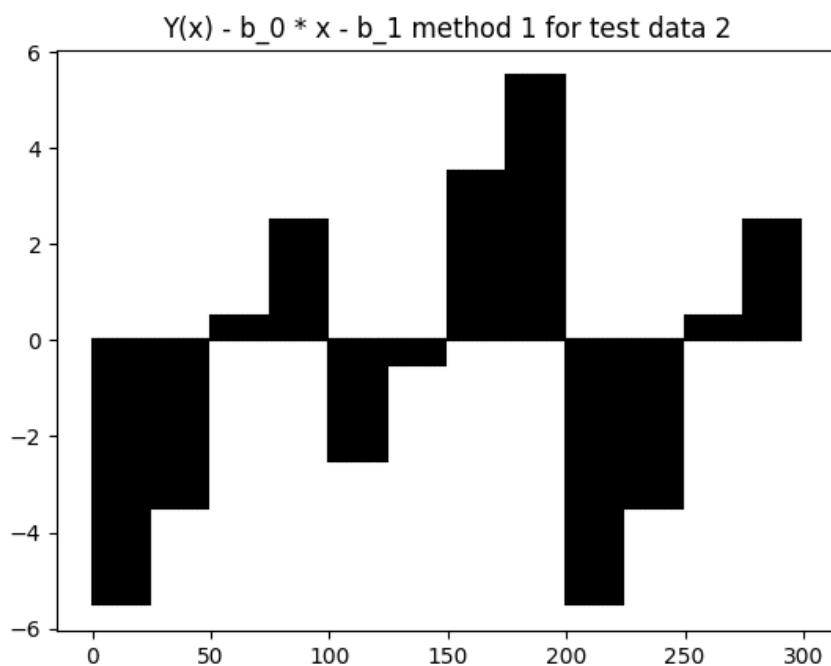


Рис. 22: Разность между данными и калибровочной прямой для первого метода и синтетических данных 2

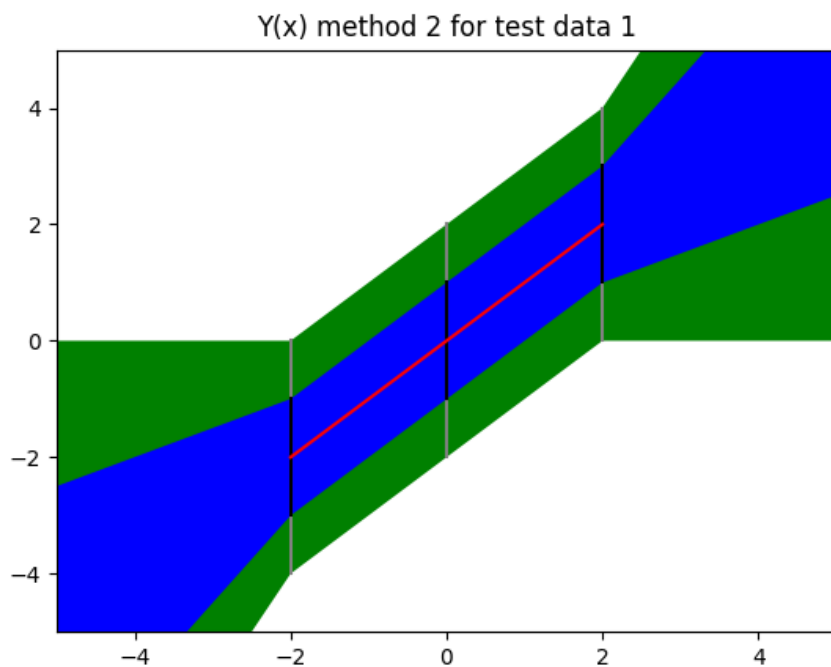


Рис. 23: Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных 1, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

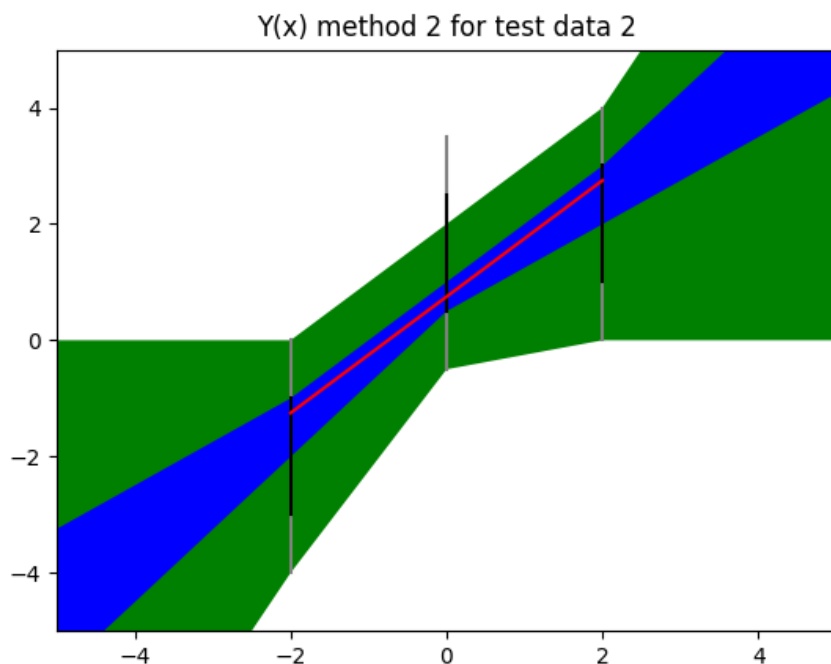


Рис. 24: Калибровочная прямая полученная вторым методом для синтетических данных 2, обозначена красным цветом. Твины обозначены серым и черным цветом. Корридоры совместности Tol и Tol_{ex} обозначены синим и зеленым цветом

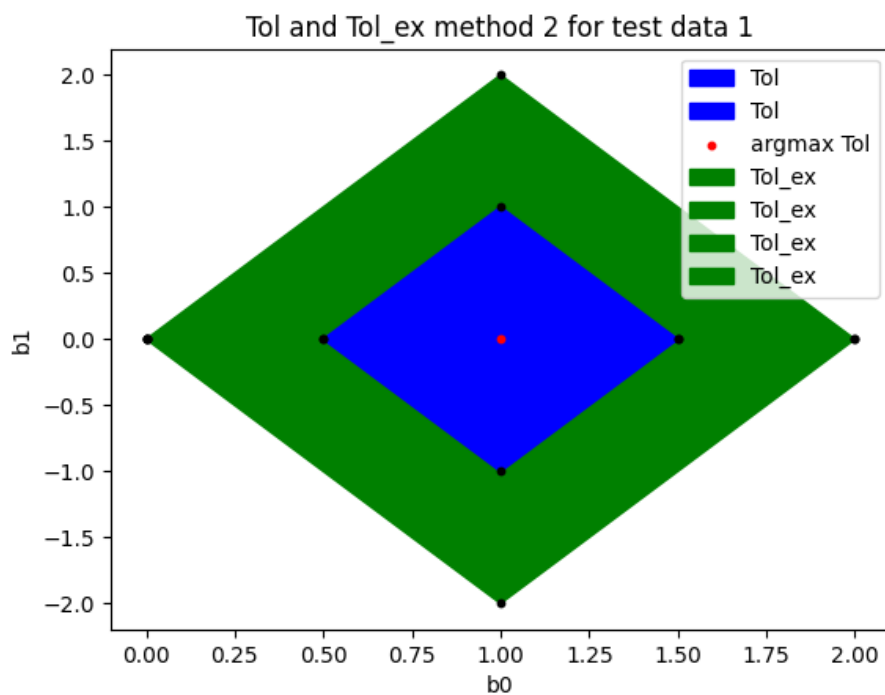


Рис. 25: Tol и Tol_{ex} для синтетических данных 1

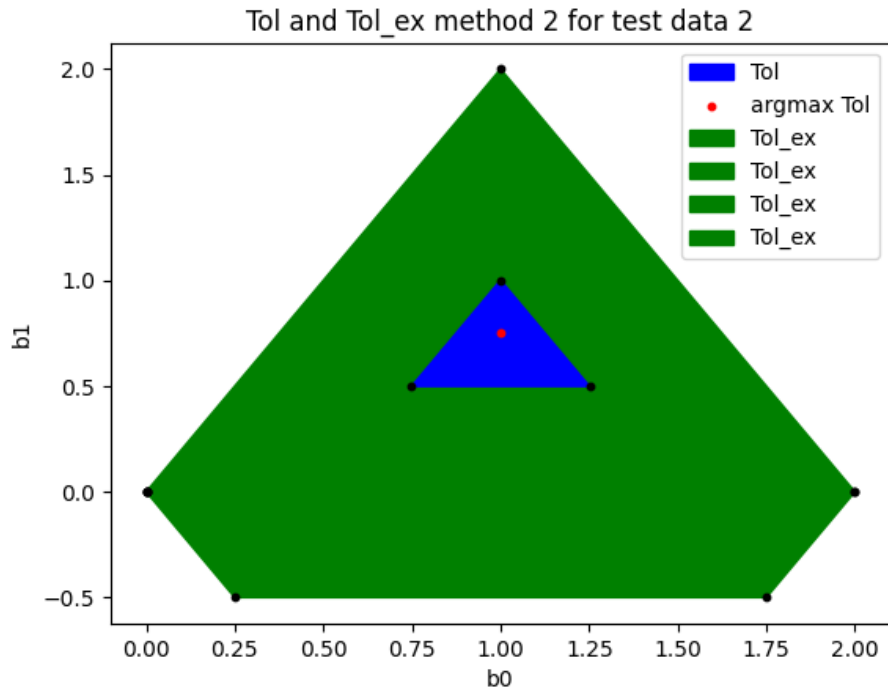


Рис. 26: Tol и Tol_{ex} для синтетических данных 2

5 Обсуждение

Исходя из представленных графиков, можно судить о том, что все описанные в теории этапы выполнены правильно. Также можно заметить что результаты полученные методами 1 и 2 являются близкими, но не совпадают. По количеству модифицированных значений в таблице 1 можно заметить, что датчик с координатами (0, 631) имеет наименьшее число выбросов из рассматриваемых, а датчик с координатами (3, 646) имеет наибольшее число выбросов из рассматриваемых.

6 Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и отчётом:
<https://github.com/gchevykalov/Interval2>.