Lógica matemática, representação e inferência

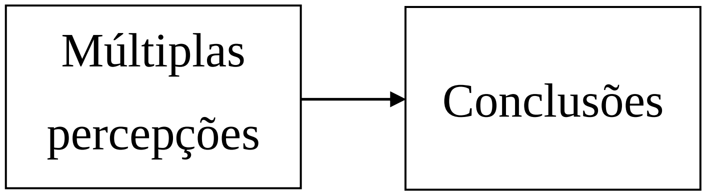
Índice

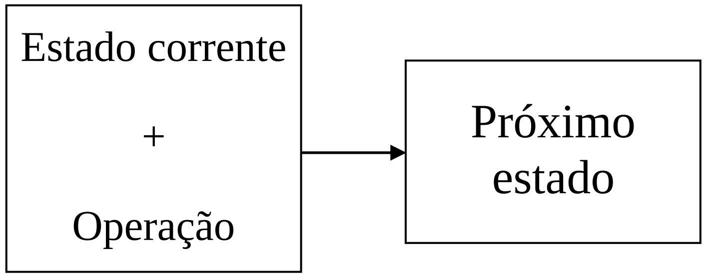
1 Introdução

- Lógica:
  - ✓ Tópico de matemática discreta (lógica matemática);
  - ✓ Seu estudo sistemático deriva da época de Aristóteles (384-322 a.C.);
  - ✓ Promove o tratamento matemático da manipulação do conhecimento.
- A lógica é uma linguagem formal, contendo:
  - ✓ Uma *sintaxe*: indica se uma expressão é legal na linguagem;
  - ✓ Uma *semântica*: indica o significado das expressões legais na linguagem;
  - ✓ Um *modo de manipular expressões na linguagem* para se obter outras expressões na linguagem (*inferência*).
- **A sintaxe é a forma e a semântica é o conteúdo.**
- O que se quer obter com a manipulação de expressões na linguagem? Ou seja, o que se quer obter com os mecanismos de inferência?

- ✓ Espera-se que as novas expressões obtidas, além de serem sintaticamente corretas, tenham um significado (valor semântico) que represente uma 'novidade' acerca do mundo.

- Como caracterizar as 'novidades' acerca do mundo?
  - ✓ A partir de múltiplas percepções do mundo, um agente inteligente precisa chegar a algumas conclusões sobre o mundo;
  - ✓ A partir do que se sabe sobre o estado atual do mundo (via percepções) e do que se sabe sobre as consequências de uma ação que se pretende tomar, um agente inteligente precisa chegar a algumas conclusões caso a ação seja tomada (inferir sobre o próximo estado do mundo).
  - ✓ Há outras formas de inferência possíveis.





- Se o raciocínio e o comportamento inteligente pudessem ser completamente formalizados em termos de lógica matemática, a Inteligência Artificial seria de fácil implementação.
- Por outro lado, não parece ser de alguma utilidade sistemas de Inteligência Artificial que formulam conclusões ilógicas.
- Logo, a **lógica matemática representa um mecanismo rigoroso para realizar inferências e é o fundamento de sistemas baseados em regras**.

2 Sistemas de Inteligência Artificial mais realísticos

- Projetos mais realísticos de Inteligência Artificial devem incluir:
  - ✓ Lógica multivalorada;
  - ✓ Lógica não-monotônica;
  - ✓ Lógica temporal.
- A lógica multivalorada pode ser representada, por exemplo, pela lógica nebulosa.

- Numa lógica monotônica, qualquer coisa que deriva de um conjunto de fatos C_F também deriva de um conjunto de fatos que corresponde a uma extensão de C_F.
- Numa lógica temporal, pressupõe-se que as proposições são verdadeiras em momentos particulares e que esses momentos (que podem ser pontos ou intervalos) estão ordenados. São muito utilizadas em programação concorrente.

3 Lógica proposicional

- Uma lógica é uma ênupla $\langle L, S, R \rangle$ onde:
  - ✓ L é a linguagem da lógica, definida por uma classe de sentenças descritas por uma gramática formal.
  - ✓ S é a semântica da lógica, definida por uma especificação formal de como atribuir significado, no mundo real, aos elementos de L.
  - ✓ R é o sistema de inferência da lógica, definido por um conjunto de regras de inferência formal sobre L.
- Lógica proposicional é a área da lógica que lida com proposições.

- Uma sequência de símbolos (sintaticamente correta) forma uma **proposição**.
- **Uma proposição (ou sentença declarativa, ou fórmula) é uma afirmação acerca de um fato básico, sendo verdadeira ou falsa, mas nunca ambos.**
- Logo, a lógica proposicional lida com fatos que assumem um valor booleano: verdadeiro ou falso.
- <u>Lei do Meio Excluído</u>: Para toda proposição *p*, ou *p* é verdadeiro ou *p* é falso.
- <u>Lei da Contradição</u>: Para toda proposição *p*, *p* não pode ser simultaneamente verdadeiro e falso.

3.1 A linguagem da lógica proposicional

- Símbolos:
  - ✓ Proposições ou variáveis proposicionais: *a*, *b*, ..., *p*, *q*, *r*, ...
  - ✓ Símbolos lógicos: $\neg$ (negação); $\wedge$ (conjunção); $\vee$ (disjunção); $\Rightarrow$ (implicação); $\Leftrightarrow$ (bi-implicação ou equivalência); $\perp$ (falso); $\top$ (verdadeiro).

✓ Regras gramaticais:

- Conect ::= $\wedge$ | $\vee$ | $\Rightarrow$ | $\Leftrightarrow$
- Form_Atom ::= $\perp$ | $\top$ | a | b | ... | p | q | r | ...
- Form ::= Form_Atom | $\neg$ Form | Form Conect Form | (Form)

3.2 Sintaxe e semântica em lógica proposicional

- A sintaxe em lógica proposicional indica que tipo de símbolos podem ser utilizados e em que ordem. Não é necessário saber o seu significado (semântica). Também não é necessário saber que tipo de conhecimento eles simbolizam.
- Para ilustrar essa ideia, geralmente emprega-se um exemplo famoso devido a Chomsky, usando linguagem natural: "Ideias verdes descoloridas descansam furiosamente". Trata-se de uma sentença sintaticamente bem-formada, mas semanticamente sem sentido algum. Substantivo, verbo, adjetivos e advérbio estão corretamente posicionados. Nada além disso.

- É por isso que uma proposição ou sentença declarativa é também chamada de '**fórmula bem-formada**', pois deriva da gramática formal que estabelece a linguagem da lógica proposicional.
- O valor-verdade (semântica) de $\perp$ é sempre falso, o valor-verdade (semântica) de $\top$ é sempre verdadeiro e o valor-verdade (semântica) de outras proposições vai depender de sua composição, ou seja, o valor-verdade da proposição é função dos valores-verdades de seus componentes e de acordo com os conectivos lógicos que os ligam na fórmula composta.
- Uma tabela-verdade apresenta as relações entre os valores-verdade de proposições.
- **Inferência** é o processo de **dedução** de novas proposições verdadeiras a partir de proposições verdadeiras existentes.
- Um **axioma** é uma proposição que é sempre verdadeira.

- Um procedimento de inferência baseado em lógica proposicional parte de um conjunto de axiomas e de uma proposição cujo valor-verdade deve ser deduzido.
- Conforme indicado pela gramática da linguagem, uma proposição ou fórmula composta é formada usando conectivos lógicos:
  - ✓ $\neg$ negação (~) (NOT)
  - ✓ $\wedge$ conjunção (AND)
  - ✓ $\vee$ disjunção (OR)
  - ✓ $\Rightarrow$ implicação ($\rightarrow$)
  - ✓ $\Leftrightarrow$ bi-implicação ou equivalência ($\equiv$)
- Logo, se p e q são proposições (simples ou compostas), então também são proposições:
  - ✓ (p)
  - ✓ $\neg p$
  - ✓ $p \wedge q$
  - ✓ $p \vee q$
  - ✓ $p \Rightarrow q$
  - ✓ $p \Leftrightarrow q$

- Nada mais é proposição, além do que foi indicado acima.
- Seguem algumas equivalências lógicas, onde *p*, *q* e *r* são proposições:

Equivalências	Denominação
$p \wedge \top \equiv p$ $p \vee \bot \equiv p$	Leis de Identidade
$p \vee \top \equiv \top$ $p \wedge \bot \equiv \bot$	Leis de Dominância
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leis de Idempotência
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leis Comutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leis Associativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leis Distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan

- Duas **proposições equivalentes** não têm que apresentar o mesmo significado, mas apenas o mesmo valor-verdade.
- Relações de precedência: formalmente, não haveria necessidade de definir precedência entre conectivos lógicos, pois as proposições sintaticamente corretas deveriam utilizar tantos parênteses quanto necessários. No entanto, para permitir a escrita de proposições mais 'enxutas', estabelecem-se as seguintes relações de precedência:

$\neg$	maior precedência
$\wedge$	
$\vee$	
$\Rightarrow$	
$\Leftrightarrow$	menor precedência

$p \vee q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
$p \wedge q \Rightarrow r \vee z$	$(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee z)$
$p \Rightarrow q \vee r \Leftrightarrow z$	$(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow z$

3.3 Propriedades do conectivo lógico implicação

$$p \Rightarrow q \quad \text{ou} \quad p \rightarrow q$$

SE ⟨antecedente⟩ ENTÃO ⟨consequente⟩

- ⟨antecedente⟩: proposição simples ou composta
- ⟨consequente⟩: proposição simples ou composta

Tabela-verdade ($p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$)

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- $p \Rightarrow q$ é uma proposição composta verdadeira sempre que p é F ou q é V.

- Uma proposição simples pode ser vista como uma implicação sem antecedentes.
- Se uma implicação é verdadeira, o fato do antecedente ser verdadeiro força o consequente a ser verdadeiro. Essa é a base lógica para o encadeamento direto.
- No entanto, o conectivo lógico implicação possui uma fraca capacidade representacional:
  - ✓ *p* e *q* não precisam fazer sentido juntos.

Exemplo: A implicação

SE ⟨4+2=3⟩ ENTÃO ⟨O cachorro é mais esperto que o homem.⟩

é verdadeira pela 4a. linha da tabela-verdade, pois uma hipótese falsa implica uma conclusão com qualquer valor-verdade.

- ✓ A implicação $p \Rightarrow q$ não determina que ‘*p* cause *q*’, embora não impeça que isso ocorra. De fato, não há uma relação de causa-efeito intrínseca. Há simplesmente uma relação entre os valores-verdade de antecedente e consequente e valores-verdade da implicação em si.

✓ O que $p \Rightarrow q$ produz é:

- q é V se p é V, ou seja, p é uma condição suficiente para q;
- p é V somente se q é V, ou seja, q é uma condição necessária para p.

- Formas lógicas relacionadas com a implicação $p \Rightarrow q$:

✓ Converso: $q \Rightarrow p$;
✓ Inverso: $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$;
✓ Contrapositivo: $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

- Equivalências lógicas envolvendo implicações:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$
$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$
$$p \vee q \equiv (\neg p) \Rightarrow q$$
$$p \wedge q \equiv \neg (p \Rightarrow \neg q)$$
$$\neg (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$$
$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$$
$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$$
$$(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$$
$$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

- Se uma implicação e a sua conversa são ambas verdadeiras, então elas são equivalentes (SE E SOMENTE SE).
- Equivalências envolvendo bi-implicações:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (\neg p) \Leftrightarrow (\neg q)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \neg q$$

3.4 Semântica e Métodos para Satisfação de Proposições

- Como já mencionado, a **semântica** de uma proposição é o seu significado;
- A busca de significado para proposições se justifica em bases de conhecimento, as quais dizem alguma coisa sobre o mundo.
- Em lógica proposicional, o significado de uma proposição *p*, em uma dada situação do mundo, é *V* ou *F*.

- **A interpretação de uma proposição é a atribuição de valor-verdade a ela.**
- Uma proposição é **satisfazível** se ela tiver valor-verdade *V* em pelo menos uma interpretação.
- Uma proposição que é sempre verdade é uma **tautologia**.
- Uma proposição que é sempre falsa é uma **contradição**.
- Exemplos:

$p \wedge \neg q$ é satisfeita quando p é V e q é F

$\neg p \vee p \equiv p \Rightarrow p$ é uma tautologia

$\neg p \wedge p$ é uma contradição

⟨fumaça⟩ ⇒ ⟨fogo⟩ não é satisfeita quando ⟨fumaça⟩ é *V* e ⟨fogo⟩ é *F*, sendo satisfeita nas outras situações.

(⟨fumaça⟩ ⇒ ⟨fogo⟩) ⇒ (⟨¬ fumaça⟩ ⇒ ⟨¬ fogo⟩) não é satisfeita quando **⟨fumaça⟩** é *F* e **⟨fogo⟩** é *V*, sendo satisfeita nas outras situações.

(⟨fumaça⟩ ⇒ ⟨fogo⟩) ⇒ (⟨¬ fogo⟩ ⇒ ⟨¬ fumaça⟩) é uma tautologia

- Para a *satisfação de proposições compostas*, existe o método da força bruta, que enumera todas as interpretações possíveis para as proposições lá contidas (também chamadas de *variáveis da proposição composta*) e verifica o valor-verdade em cada caso.
- Vai haver situações em que enumerar todas as interpretações conduz a uma situação infactível, o que remete a métodos alternativos, como:
  - ✓ Busca heurística (por exemplo, via algoritmos evolutivos);
  - ✓ Propagação de restrições, *backtracking* e ordenamento de variáveis.
- Um **problema de satisfação** em lógica proposicional é encontrar um conjunto de atribuições de valores-verdade para as variáveis que compõem uma proposição composta, de modo que esta proposição composta seja verdadeira. Isso só vai ser possível, obviamente, se a proposição composta não for uma contradição.
- Podem ser formulados como problemas de satisfação em lógica proposicional:

✓ Escalonamento de professores em instituições de ensino;

✓ Controle de tráfego aéreo;

✓ Descoberta de bugs em programas computacionais.

- Geralmente, problemas de satisfação são formulados como uma conjunção de disjunções.

4 Processos de inferência em lógica proposicional

4.1 Vinculação de Proposições

- Uma motivação para se dispor de bases de conhecimento, representadas pela descrição lógica de situações, é a possibilidade de extrair **conclusões que remetem a outros aspectos das situações já conhecidas**.
- Exemplo de conteúdo de uma base de conhecimento:

✓ Se ⟨O dia está ensolarado⟩, então ⟨O professor está feliz⟩. (REGRA 1)

✓ Se ⟨O professor está feliz⟩, então ⟨A aula vai ser boa⟩. (REGRA 2)

- ✓ ⟨O dia está ensolarado⟩ (EVENTO 1)

- Pergunta: Pode-se inferir que a aula vai ser boa?
- Existem três proposições envolvidas neste processo de inferência:
  - ✓ ⟨O dia está ensolarado⟩
  - ✓ ⟨O professor está feliz⟩
  - ✓ ⟨A aula vai ser boa⟩
- Logo, existem 8 possibilidades de valores-verdade para elas:

⟨O dia está ensolarado⟩ $\equiv E$	⟨O professor está feliz⟩ $\equiv P$	⟨A aula vai ser boa⟩ $\equiv B$
V	*V*	*V*
V	*V*	*F*
V	*F*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*
F	*F*	*F*

- O que conduz aos seguintes valores-verdade para as regras e eventos presentes na base de conhecimento:

E	*P*	*B*	REGRA 1	REGRA 2	EVENTO 1
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*

- Há apenas uma interpretação para *E*, *P* e *B* que faz com que as regras e eventos presentes na base de conhecimento sejam todos verdadeiros (1a. linha da tabela) e, nessa interpretação, tem-se que *B* é *V*. Logo, conclui-se que a aula vai ser boa.
- Se toda interpretação que satisfaz o conteúdo de uma base de conhecimento também satisfaz uma dada proposição, então diz-se que a base de conhecimento

vincula (*entails*) aquela proposição, ou seja, a proposição é dedutível a partir da base de conhecimento.

- Conclui-se então que o cálculo de vinculação de uma proposição (dedução lógica) envolve enumerar todas as interpretações que satisfazem a base de conhecimento e, então, verificar se aquela proposição é verdadeira em todas elas.
- Outro exemplo de processo de inferência em lógica proposicional:
  - ✓ Considere o seguinte texto descritivo: "Suponhamos que Sócrates está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Platão, só se Platão estivesse disposto a visitá-lo; e que Platão está em tal situação que ele não estaria disposto a visitar Sócrates se Sócrates estivesse disposto a visitá-lo, mas estaria disposto a visitar Sócrates se Sócrates não estivesse disposto a visitá-lo."
  - ✓ Inicialmente, iremos converter este texto descritivo em regras que compõem uma base de conhecimento. Para tanto, considere as seguintes proposições:

P: Sócrates está disposto a visitar Platão.

Q: Platão está disposto a visitar Sócrates.

- ✓ As regras são as seguintes:

  Situação de Sócrates: $Q \Rightarrow P$

  Situação de Platão: $(P \Rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)$

- ✓ <u>Pergunta</u>: Sócrates está disposto a visitar Platão?
- ✓ Outra formulação para a pergunta: Quem é verdadeiro: P ou $\neg P$?
- ✓ Para responder a essa pergunta, é necessário apenas verificar que interpretação para P satisfaz o conteúdo da base de conhecimento, ou seja, que interpretação para P torna as regras da base de conhecimento verdadeiras.
- ✓ A tabela-verdade com todas as interpretações possíveis para o par de proposições $\{P, Q\}$ produz:

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)$
V	V	V	$F \wedge V = F$
V	F	V	$V \wedge V = V$
F	V	F	$V \wedge V = V$
F	F	V	$V \wedge F = F$

✓ Logo, a única situação em que as duas regras são verdadeiras se dá quando P é V e Q é F.

✓ Resposta: Sócrates está disposto a visitar Platão.

- No entanto, com o aumento do número de proposições simples (também chamadas de variáveis da proposição composta) que estão presentes em regras (proposições compostas) e eventos da base de conhecimento, a enumeração de todas as interpretações possíveis para as variáveis se torna infactível.

4.2 Sistema de prova e regras de inferência

- Um sistema de prova é um modo de testar se uma base de conhecimento vincula uma dada proposição sem, no entanto, enumerar todas as interpretações possíveis.
- A prova trabalha apenas com sintaxe e não emprega semântica, ou seja, não recorre à interpretação das variáveis envolvidas.
- Quase todo sistema de prova envolve uma sequência de proposições.
- Será abordado inicialmente um sistema de prova baseado em dedução natural.
- Tudo se inicia com as premissas, ou seja, aquilo que se conhece. São as proposições iniciais.
- Com base nessas proposições, procura-se aplicar regras de inferência.
- Quando uma proposição P aparece em uma linha dessa sequência de proposições, então P está provada a partir da base de conhecimento.

- Mecanismos de inferência para a dedução natural

Modus ponens	Modus tolens	Introdução de AND	Eliminação de AND
$\dfrac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$	$\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$	$\dfrac{p \wedge q}{p}$

- **Modus ponens** foi proposto por Aristóteles, sendo que se trata de uma expressão em latim cujo significado é método de afirmação.
- **Modus tolens** se trata de uma expressão em latim cujo significado é método de negação (do consequente).
- Exemplo de um procedimento de dedução natural, empregando as regras de inferência acima:

Prove S

Passo	Proposição	Derivação
1	$P \wedge Q$	Premissa
2	$P \Rightarrow R$	Premissa
3	$(Q \wedge R) \Rightarrow S$	Premissa
4	P	(1) Eliminação de AND
5	R	(2,4) Modus ponens
6	Q	(1) Eliminação de AND
7	$Q \wedge R$	(6,5) Introdução de AND
8	S	(3,7) Modus ponens

- Embora a dedução natural seja um procedimento sistemático, portanto passível de ser implementado em computador, ele pode envolver uma quantidade enorme de derivações e deve tratar todas as interpretações possíveis para certas variáveis, isso quando mais de uma interpretação para as variáveis torna certas proposições verdadeiras.

4.3 Mecanismos de inferência *sound* e completo

- Mecanismo de inferência *sound*: é aquele que somente gera sentenças que sejam consequências lógicas da base de conhecimento.
- Mecanismo de inferência completo: é aquele que pode encontrar uma prova para qualquer proposição que seja consequência lógica da base de conhecimento.
- As regras de inferência da dedução natural são *sound*, mas não são completas.
- Essa é a razão pela qual os computadores empregam em sistemas de provas uma regra de inferência alternativa, denominada **regra da resolução**, a qual é *sound* e completa.
- Ela requer que todas as proposições sejam convertidas para a forma normal disjuntiva.

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg\, q \vee r \end{array}}{p \vee r}$$

Regra da resolução

- O mecanismo continua sendo aquele de produzir uma sequência de proposições a partir de proposições existentes.

4.4 Resolução ou prova por refutação

- Todas as proposições logicamente consistentes podem ser obtidas aplicando-se a regra da resolução. É por isso que se diz que a resolução é logicamente completa.
- A regra da resolução pode ser empregada para mostrar que um conjunto de proposições é inconsistente, no sentido de que o processo de resolução conduz a uma contradição lógica.
- A grande utilidade desse procedimento está na prova por refutação ou contradição:

Para provar que uma proposição é verdadeira, adiciona-se o negativo dessa proposição à base de conhecimento (conjunto de proposições sabidamente verdadeiras) e busca-se deduzir uma contradição.

- Exemplo: Considere o seguinte conteúdo de uma base de conhecimento:

(1) p

(2) $p \rightarrow q$

(3) $q \rightarrow z$

- O objetivo é provar que z é V. Com isso, deve-se adicionar $\neg z$ à base de conhecimento e converter todos os itens da base de conhecimento em disjunções, produzindo:

(1) p

(2) $\neg p \vee q$

(3) $\neg q \vee z$

(4) $\neg z$

- De (2) e (3), pela regra da resolução, deduz-se $\neg p \vee z$, que produz a seguinte configuração para a base de conhecimento:

(1) p
(2) $\neg p \vee q$
(3) $\neg q \vee z$
(4) $\neg z$
(5) $\neg p \vee z$

- De (4) e (5), pela regra da resolução, deduz-se $\neg p$, que produz a seguinte configuração para a base de conhecimento:

(1) p
(2) $\neg p \vee q$
(3) $\neg q \vee z$
(4) $\neg z$
(5) $\neg p \vee z$
(6) $\neg p$

- Chega-se, assim, a uma contradição ($p \wedge \neg p$), o que permite concluir que $\neg z$ é inconsistente com a base de conhecimento inicial, levando a deduzir que z é V.

5 Lógica de Primeira Ordem

- A lógica proposicional simplesmente mapeia o valor-verdade de uma proposição em verdadeiro ou falso. Sendo assim, não há variáveis envolvidas, no sentido de condicionarem o valor-verdade da proposição dependendo da atribuição feita à variável. Em outras palavras, **não há formas de manipular o conteúdo de uma proposição de modo a modificar seu valor-verdade**.
- Essa é uma limitação muito forte da lógica proposicional, o que motiva o estudo da lógica de predicados.
- Um **predicado** é uma proposição com variáveis.
- Uma **função-predicado** é um mapeamento que atribui valor-verdade a uma proposição, dependendo do valor assumido pelas variáveis envolvidas na proposição.
- Variáveis isoladas também podem assumir valores-verdade a partir de uma função-predicado.

- Os valores que uma variável pode assumir são chamados de **universo de discurso** da variável.
- Como um exemplo, a função-predicado ímpar ($P_{\text{ímpar}}$) pode ser definida como segue:

$$P_{\text{ímpar}}(n) = \begin{cases} V & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ F & \text{caso contrário} \end{cases},$$

sendo que o universo de discurso de n é dado pelos números inteiros.

- Enquanto a lógica proposicional considera que o mundo contém fatos, a lógica de predicados considera que o mundo contém objetos, relações e funções.
- Dois predicados são considerados equivalentes se eles assumem o mesmo valor-verdade para todo o universo de discurso de suas variáveis.
- Novamente, aqui é possível distinguir valor-verdade de significado, pois dois predicados equivalentes podem não fazer sentido algum juntos.

- **Predicados com uma única variável** representam relações unárias e são chamados de **propriedades**. Exemplo:

  pode_se_mover(objeto)

  com o universo de discurso da variável objeto sendo dado na forma:

  objeto = { carro, cavalo, usina nuclear, montanha }

- O predicado acima é verdadeiro para os dois primeiros elementos do universo de discurso e é falso para os dois últimos.
- **Predicados com múltiplas variáveis** estabelecem relações *n*-árias, como:

  próximo_a (região 1, região 2)

  no_topo_de (objeto 1, objeto 2)

5.1 Escolha da representação dos predicados

- A seguinte proposição:

  João está ferido na perna.

  pode ser codificada de variadas formas:

está_ferido (João, perna)

João (perna, está ferido)

perna (João, está ferida)

as quais correspondem às seguintes relações de duas variáveis:

está_ferido (quem, onde)

João (onde, estado)

perna (quem, estado)

- Exemplos de universos de discurso das variáveis precedentes são:

quem = { Maria, Gabriel, João, Tiago, Pedro }

onde = { rosto, peito, cabeça, pé, mão, perna }

estado = { ferido, sadio, marcado, dolorido }

- Frequentemente, **escolhe-se o verbo como nome do predicado**, o que viabiliza o **cálculo de predicados de primeira ordem**.

5.2 Proposições categóricas e predicados quantificados

- **Proposições categóricas** permitem a representação prática de relações mais genéricas, além de quantificar uma grande quantidade de conhecimento.
- Tomando elementos de duas classes, C_1 e C_2, as proposições categóricas podem ser de quatro tipos:

  ✓ Todo elemento de C_1 é elemento de C_2;

  ✓ Nenhum elemento de C_1 é elemento de C_2;

  ✓ Algum (pelo menos um) elemento de C_1 é elemento de C_2;

  ✓ Algum (pelo menos um) elemento de C_1 não é elemento de C_2.

- ‘Todo’ e ‘Nenhum’ são quantificadores universais.
- ‘Algum’ é um quantificador existencial.

- Em lógica de predicados, as proposições categóricas podem ser representadas por dois quantificadores (que não comutam quando usados juntos):
  - ✓ Quantificador universal: $\forall$ (cujo principal conectivo é a implicação)
  - ✓ Quantificador existencial: $\exists$ (cujo principal conectivo é a conjunção)
- Notação:
  - ✓ $\forall X \;\; p(X)$
  - ✓ $\exists X \;\; p(X)$
- Equivalência de predicados quantificados:
  - ✓ $\neg \, (\forall X \;\; p(X)) \;\equiv\; (\exists X \;\; \neg \, p(X))$
  - ✓ $\neg \, (\exists X \;\; p(X)) \;\equiv\; (\forall X \;\; \neg \, p(X))$
- Regras úteis envolvendo predicados quantificados:
  - ✓ $(\forall X \;\; p(X)) \;\rightarrow\; p(a)$
  - ✓ $p(a) \;\rightarrow\; (\exists X \;\; p(X))$

5.3 Sentenças em lógica de primeira ordem

- **Uma fórmula bem formada em lógica de predicados** é um predicado ou uma proposição (simples ou composta), sendo que até agora foram considerados os seguintes tipos de fórmulas:
  - ✓ p (pode ser uma proposição ou um predicado)
  - ✓ $\neg\, p$
  - ✓ $p \wedge z$
  - ✓ $p \vee z$
  - ✓ $p \rightarrow z$
  - ✓ $q(p)$ onde p é qualquer fórmula bem formada e q é um quantificador.
- Exemplo de sentença:

$$\underbrace{\underbrace{>}_{\text{predicate}}\;\Big(\underbrace{\underbrace{Length}_{\text{function}}(\underbrace{LeftLegOf}_{\text{function}}(\underbrace{Richard}_{\text{constant}}))}_{\text{term}},\ \underbrace{\underbrace{Length}_{\text{function}}(\underbrace{LeftLegOf}_{\text{function}}(\underbrace{KingJohn}_{\text{constant}}))}_{\text{term}}\Big)}_{\text{atomic sentence}}$$

- Uma sentença, ou fórmula fechada, é uma fórmula bem formada em que toda ocorrência de uma variável (se houver) está no escopo de um quantificador para aquela variável.
- Caso haja variáveis livres, ou seja, variáveis não restritas ao escopo de um quantificador, então tem-se uma expressão ou fórmula aberta.
- Se o universo das variáveis nas sentenças exclui nomes de predicados e de funções-predicado, então o conjunto de todas as sentenças deriváveis é a linguagem da lógica de primeira ordem.

5.4 Resolução em lógica de primeira ordem

- Também existem métodos sistemáticos para vinculação de expressões em lógica de primeira ordem. Será apresentado aqui apenas um exemplo com a extensão da regra da resolução, embora alguns conceitos importantes, como métodos de substituição e unificação de predicados, não sejam discutidos.
- Considere o seguinte conteúdo de uma base de conhecimento:

F_1: $(\forall x)\,(C(x) \rightarrow (W(x) \wedge R(x)))$

F_2: $(\exists x)\,(C(x) \wedge O(x))$

- Mostrar que:

G: $(\forall x)\,(O(x) \wedge R(x))$.

é uma consequência lógica de F_1 e F_2.

- Para tal, transformam-se F_1, F_2 e $\neg G$ em formas padrões e obtém-se as cláusulas:

(1) $\neg C(x) \vee W(x)$ de F_1
(2) $\neg C(x) \vee R(x)$ de F_1
(3) $C(a)$ de F_2
(4) $O(a)$ de F_2
(5) $\neg O(x) \vee \neg R(x)$ de $\neg G$.

- De (2) e (3), pela regra da resolução, deduz-se:

(6) $R(a)$

- De (4) e (5), pela regra da resolução, deduz-se:

(7) $\neg R(a)$

- Chega-se, assim, a uma contradição $(R(a) \wedge \neg R(a))$, o que permite concluir que $\neg G$ é inconsistente com a base de conhecimento inicial.
- Portanto, G é uma consequência lógica de F_1 e F_2.

6 As limitações da lógica

- "*Whatever language the central nervous system is using, it is characterized by less logical and arithmetic depth than what we are normally used to ... Thus the outward forms of our mathematics are not absolutely relevant from the point of view of evaluating what the mathematical of logical language truly used by the central nervous system is.*"

John von Neumann

- Nos anos 30, o matemático austríaco Kurt Gödel demonstrou que qualquer sistema formal (axiomático) que seja consistente e suficientemente forte a ponto de formalizar a aritmética é incompleto, no sentido de que sempre haverá uma fórmula por ele derivada que não pode ser provada como sendo verdadeira ou falsa pelo sistema formal. Gödel inclusive mostrou como construir esta fórmula e o seu teorema ficou conhecido como Teorema da Incompletude.

- "*Kurt Gödel's achievement in modern logic is singular and monumental* - *indeed it is more than a monument, it is a landmark which will remain visible far in space and time. ... The subject of logic has certainly completely changed its nature and possibilities with Gödel's achievement.*"

John von Neumann

7 Dedução, indução, abdução

- Toda teoria científica é refutável. Se não for refutável, não é ciência.

Karl Popper

- Publicada pela primeira vez em 1933, em alemão, "A Lógica da Pesquisa Científica" é uma das obras mais importantes relacionadas à metodologia e ao conhecimento científico. Nesse livro, Karl Popper dá uma contribuição decisiva ao problema da indução, que desafia os filósofos pelo menos desde o século 17.

- Segundo a concepção tradicional de ciência, o ponto de partida do cientista está nos dados empíricos, observáveis. Esses dados da observação, acumulados, transformam-se em hipóteses que, uma vez verificadas, tornam-se leis científicas. O procedimento lógico que norteia a ciência é a **indução**, que parte de dados singulares para chegar ao universal. O critério de demarcação usado para definir o que é ou não ciência é a **verificação**.
- O problema da indução consiste no fato de que, por mais dados singulares que o cientista acumule, não há uma garantia lógica de que o enunciado universal daí inferido seja verdadeiro.
- Popper defende em sua obra que o critério de demarcação da ciência não é a verificação, mas sim o **falseamento**. O que caracteriza o procedimento do cientista é uma tomada de decisão, em termos metodológicos, de não proteger do

falseamento nenhum enunciado científico. Popper mostra como a ciência só pode ser definida por meio de regras metodológicas.

- Karl Popper nasceu em 1902, em Viena, e morreu em 1994, como um dos mais importantes filósofos do século 20. Seu pensamento iluminou não só o campo da filosofia da ciência, mas também o da teoria política e das ciências sociais.
- Thomas Kuhn, autor de "A Estrutura das Revoluções Científicas", em 1962, foi um grande crítico de Popper. Segundo ele, na prática, as coisas não funcionam como disse Popper. A descoberta científica não pode ser fundamentada na lógica dedutiva, pois, segundo Kuhn, a nova teoria não necessariamente engloba as anteriores. Foi nesse livro que se formalizou o conceito de paradigma e de mudança de paradigma.
- Mas o conceito de refutabilidade das teorias científicas não é diretamente atingido nas críticas de Kuhn a Popper. Há uma clara distinção, portanto, entre aquilo que hoje não pode ser refutado (que sustenta as teorias científicas que estão em

evidência) e aquilo que nunca pôde nem poderá ser refutado (que nunca poderá sustentar nenhuma teoria científica).

- O conhecimento científico pode avançar além dos limites do que é diretamente observável, pois ele pode recorrer a três tipos de inferência:
  - ✓ Dedução;
  - ✓ Indução;
  - ✓ Abdução.
- **Inferência dedutiva:**
  - ✓ A conclusão segue logicamente das premissas (está contida nas premissas). Portanto, a conclusão é lógica.
  - ✓ Não acrescenta conhecimento novo;
  - ✓ De argumentos logicamente válidos se chega a argumentos logicamente válidos.
  - ✓ Silogismo aristotélico.

- **Inferência indutiva:**
  - ✓ De juízos (enunciados) particulares se chega a um juízo (enunciado) geral.
  - ✓ A conclusão não segue logicamente das premissas (não está contida nas premissas). Portanto, a conclusão não é lógica.
  - ✓ Acrescenta conhecimento novo (generalização).
  - ✓ A conclusão necessariamente consiste na **extensão uniforme da evidência**.
  - ✓ Na prática, grande parte do nosso comportamento se baseia na indução, pois é através dela que ganhamos capacidade de prever o futuro.
  - ✓ Muitos acreditam que o papel da indução é levar à descoberta. Outros afirmam que a indução leva a justificar o juízo (a crença).
  - ✓ Hume (1711-1776) não aceita que a indução seja usada para justificar, porque leva a um raciocínio circular (pela experiência).
  - ✓ O Princípio da Unicidade da Natureza (PUN) é um dogma da ciência. Ele sustenta que o futuro vai ser igual ao passado.

- ✓ Mas o PUN não é justificável pela experiência, pois ao tentar buscar esta justificativa, recorre-se ao PUN, gerando um raciocínio circular.

- **Inferência abdutiva:**
  - ✓ Se sustenta na seguinte sequência de ações: postular hipóteses, escolher a melhor (por exemplo, de acordo com o seu **poder explicativo**) e postular uma ligação entre o poder explicativo e a verdade.
  - ✓ De modo simplificado, o esquema geral dos argumentos abdutivos, tais quais aparecem nas discussões contemporâneas, consiste no enunciado de uma evidência (um fato ou conjunto de fatos), de hipóteses alternativas para explicar tal evidência, e de uma apreciação do valor dessas explicações.
  - ✓ A conclusão é a de que **a melhor explicação provavelmente é verdadeira se, além de comparativamente superior às demais, for boa em algum sentido absoluto**.

✓ É por isso que, muitas vezes, os argumentos indutivos são entendidos como casos especiais de argumentos abdutivos.

7.1 Exemplos ilustrativos

- A: Todos os gizes da caixa são brancos.
- B: Todos os gizes da mesa vieram da caixa.
- C: Todos os gizes da mesa são brancos.

- Dedução: $(A \wedge B) \rightarrow C$
- Indução: $(B \wedge C) \Rightarrow A$
- Abdução: $(A \wedge C) -\rangle B$

Este cisne é branco.	Este cisne é branco.
Este cisne é branco.	Este cisne é branco.
Este cisne é branco.	Este cisne é branco.
Este cisne é branco.	: : :
Este cisne é branco.	Este cisne não é branco
Indução:	Dedução:
Todo cisne é branco.	~(Todo cisne é branco.)
	↑
	Popper

7.2 Argumento da coincidência cósmica

- Dada uma teoria em evidência, sempre validada quando testada na prática, se o que a teoria afirma não fosse (aproximadamente) verdadeiro, somente uma coincidência de proporções cósmicas poderia explicar seu sucesso empírico.

7.3 Argumento de ignorância e outras falácias

- O argumento de ignorância, também conhecido como "apelo à ignorância" ou "evidência negativa", é uma falácia lógica.
- As duas formas mais comuns, **ambas falaciosas**, são:
  - ✓ Considerar uma proposição como sendo verdadeira simplesmente pelo fato dela não ter sido provada como falsa, ou então considerar uma proposição como sendo falsa simplesmente pelo fato dela não ter sido provada como verdadeira.
  - ✓ A falta de evidência associada a uma certa proposição constitui uma prova de que uma proposição alternativa é verdadeira.
- É muito comum encontrar exemplos desse tipo de argumento falacioso, seja nas conversas do dia-a-dia, seja em propagandas, seja na política, seja em acontecimentos históricos.

- Exemplos:

1. Visto que os alunos não têm nenhuma questão referente aos tópicos abordados em aula, conclui-se que os alunos estão preparados para a prova.
2. Meu pai não me disse que eu não posso tomar o carro dele emprestado para usar esta noite, logo eu concluo que não há problema em tomar o carro emprestado.
3. Visto que ninguém até hoje provou que existe vida em outras partes do Universo, então conclui-se que não existe vida fora da Terra.
4. Muitas pessoas comem este alimento, o que implica que ele faz bem à saúde.
5. Os eleitores querem mudança, logo devem votar num candidato que nunca participou de eleições antes.
6. Se você não votou neste candidato que defende a ecologia, então você não se importa com questões ecológicas.
7. Este produto acabou de ser lançado no mercado, logo ele deve me satisfazer mais que o produto equivalente que eu estou usando no momento.

8. Se permitirmos que qualquer pessoa produza conteúdo na internet, o que virá a seguir? Vamos permitir que qualquer pessoa dê aula para os nossos filhos?

“In 1950, when Senator Joseph R. McCarthy (Republican, Wisconsin), was asked about the fortieth name on a list of 81 names of people he claimed were communists working for the United States Department of State, he responded that 'I do not have much information on this except the general statement of the agency that there is nothing in the files to disprove his communist connections.'”

- Outra falácia muito comum é associar coincidências com implicações:
  1. Um gato preto passou na minha frente e, pouco tempo depois, eu bati o carro. Logo, gatos pretos dão azar.
  2. Eu sonhei com uma pessoa que eu não via há muito tempo e, na manhã seguinte, eu me deparei com aquela pessoa. Logo, os sonhos são premonitórios.