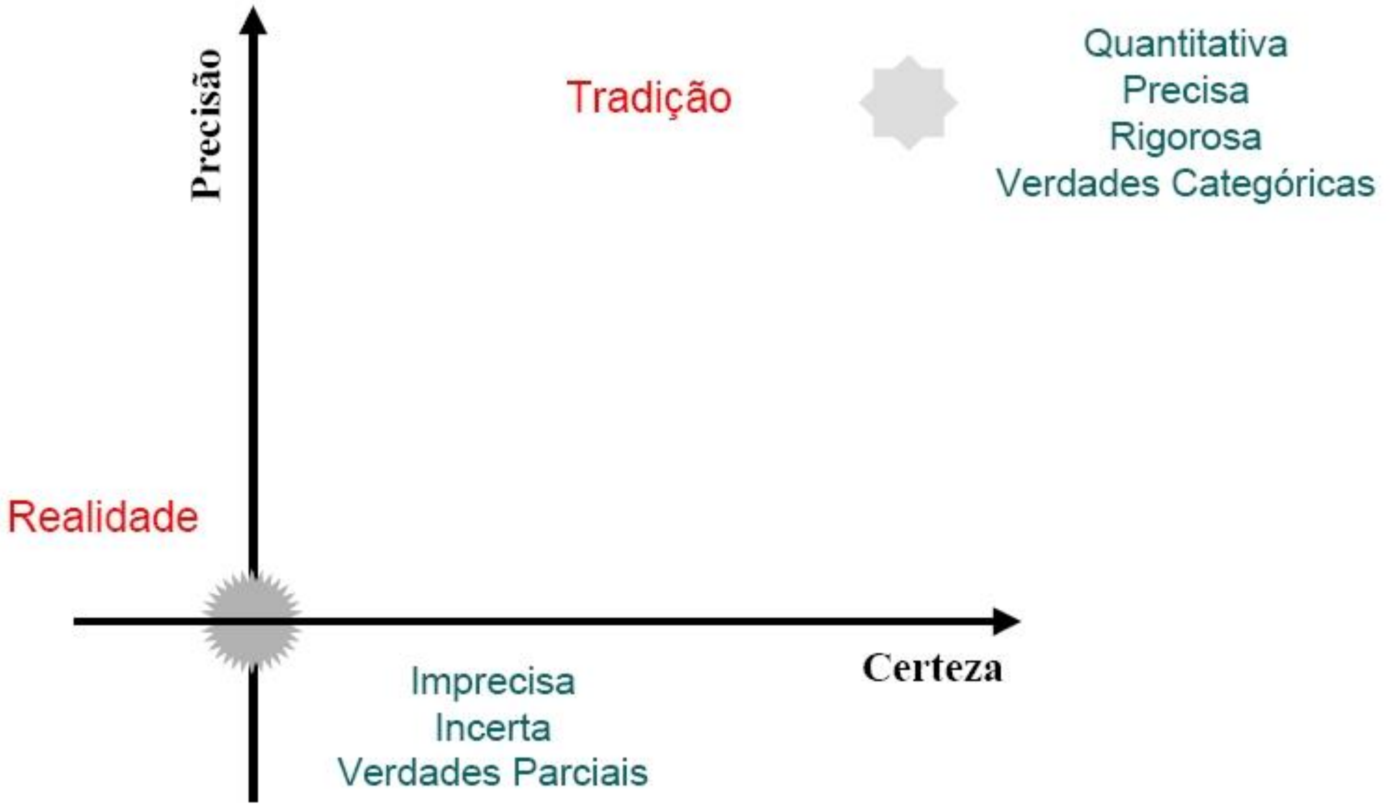
Sistemas Nebulosos

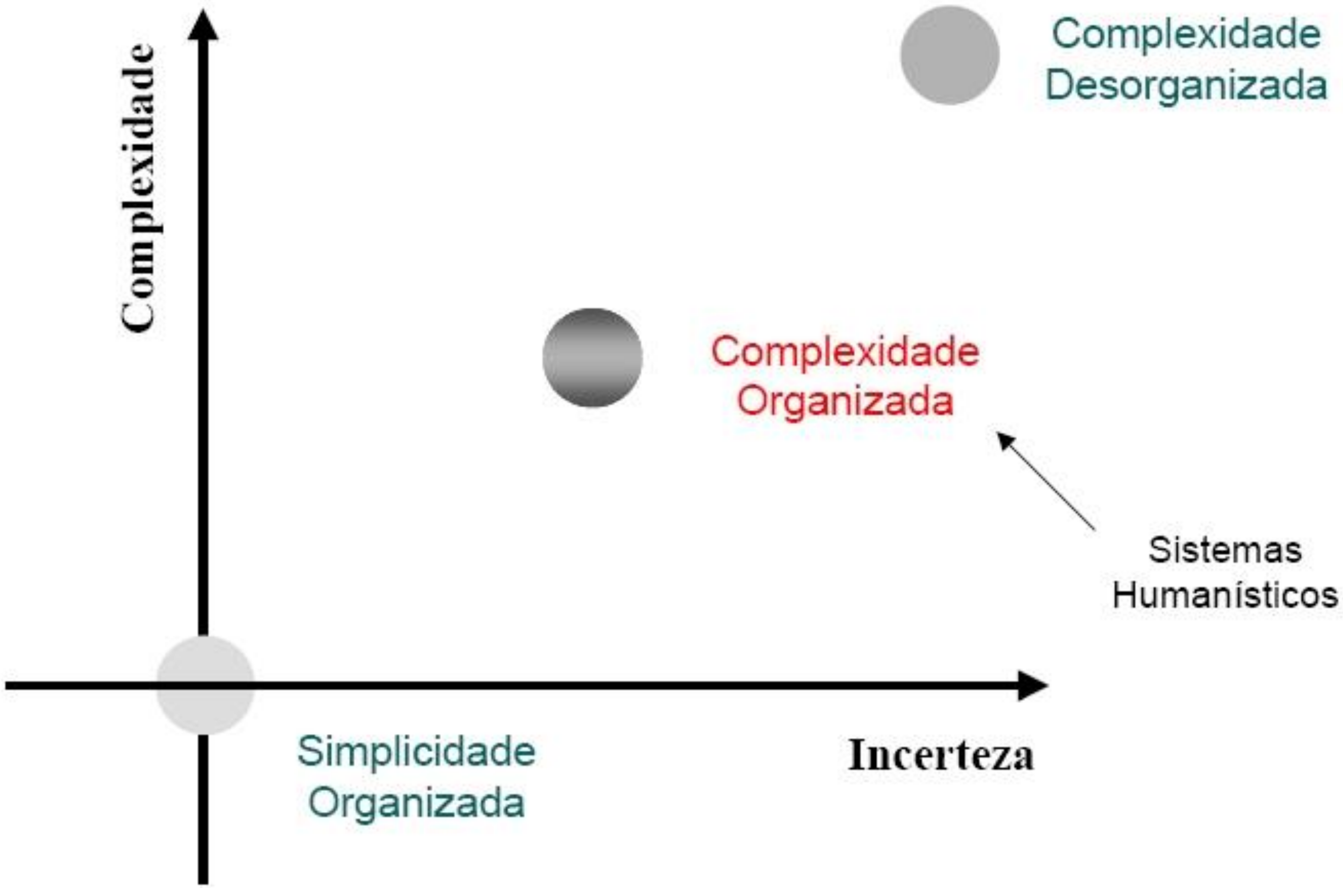
Baseado em Notas de Aula da disciplina de pós-graduação IA861 – Sistemas Nebulosos (Prof. Fernando Gomide, FEEC/Unicamp), em Notas de aula do Prof. Adriano Cruz (NCE-IM UFRJ) e na Tese de Doutorado de Myriam Delgado (FEEC/Unicamp, 2002)

1 Preâmbulo

Ciência: Tradição e Realidade



Ciência e Complexidade (Warren Weaver, 1948)



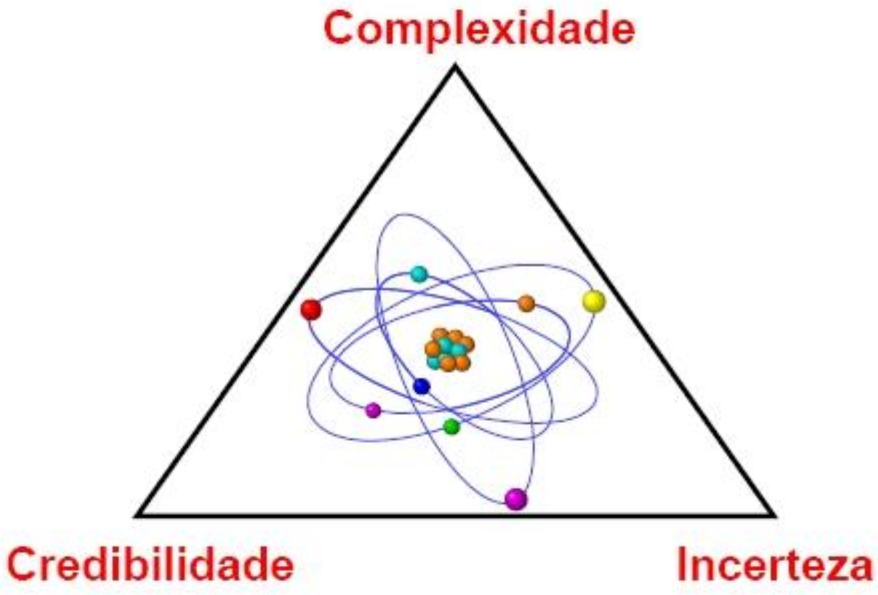
Princípio da Incompatibilidade (Zadeh, 1973)

Lotfi Zadeh

"State informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics."

À medida que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade de fazer afirmações precisas e que sejam significativas acerca deste sistema diminui até que um limiar é atingido, além do qual precisão e significância (ou relevância) tornam-se quase que características mutuamente exclusivas.

Modelos, Realidade e Utilidade (George Klir, 1995)



Embora usualmente (mas não sempre) indesejável quando considerada isoladamente, a incerteza se torna muito útil quando considerada em conjunto com outras características de modelos de sistemas: em geral, admitir mais incerteza tende a reduzir a complexidade e aumentar a credibilidade do modelo resultante.

Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante

Número Cidades	Precisão (%)	Tempo Computação
100.000	1	2 dias
100.000	0.75	sete meses
1.000.000	3,5	3,5 horas

Fonte: New York Times, 12/03/91

Convivência dos Opostos

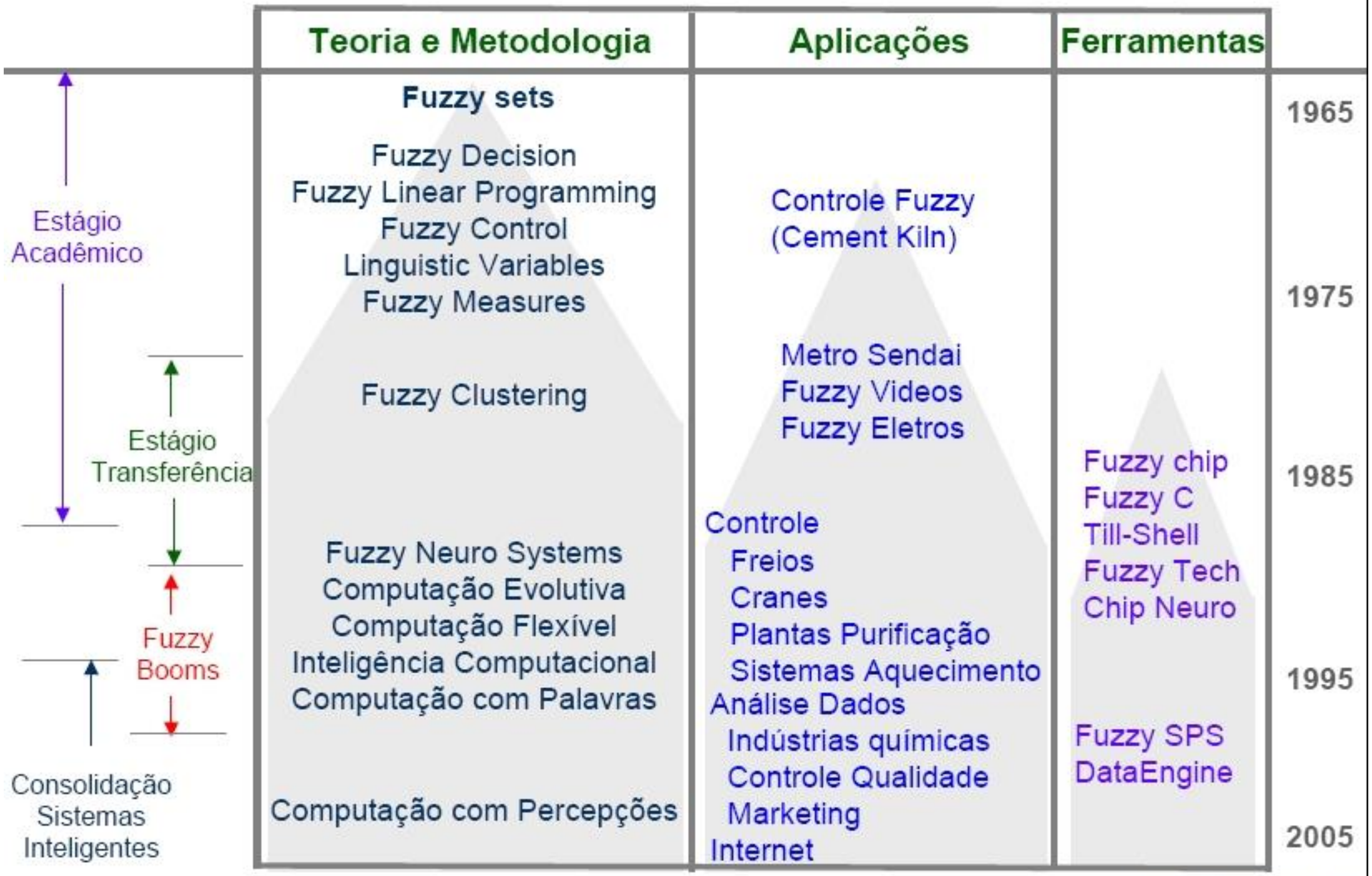
*Fuzz*y em inglês significa:

"*indistinct, blurred, not sharply delineated or focused*".

Tecnicamente, *fuzzy* representa imprecisão ou incerteza baseada na intuição humana e não na teoria de probabilidade

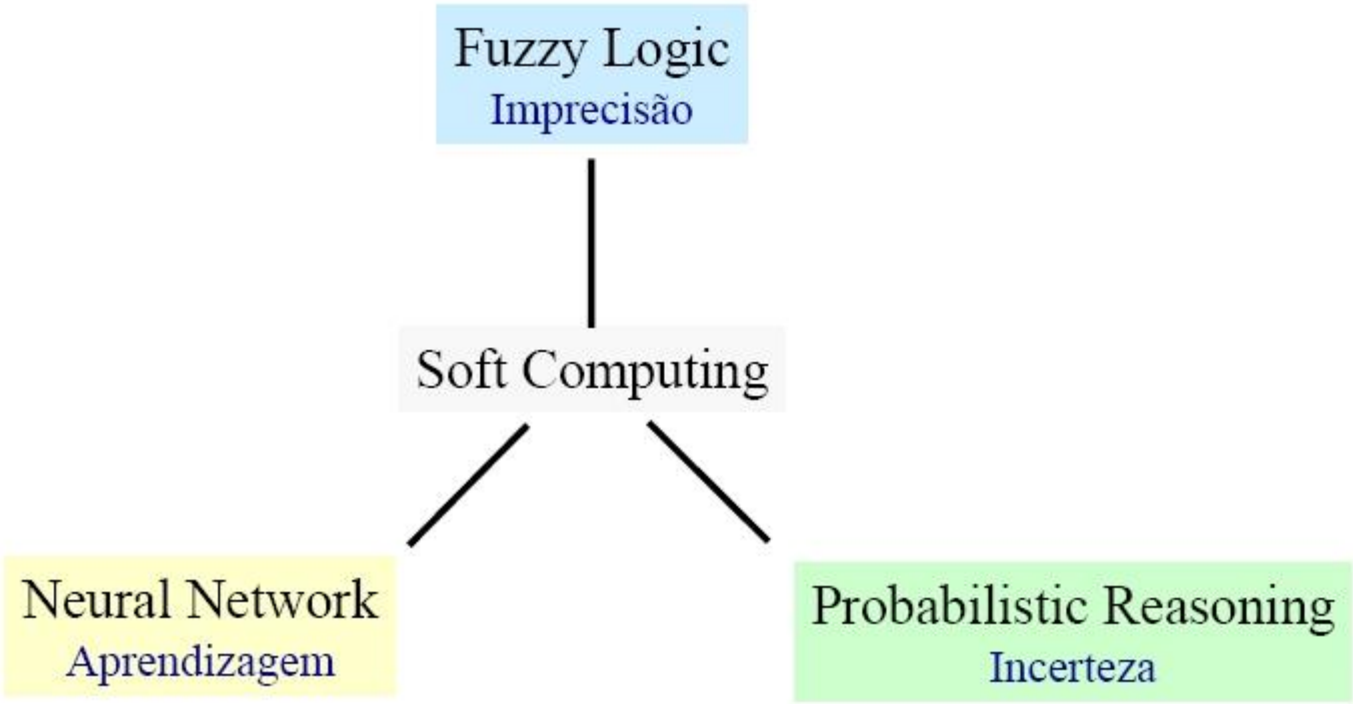
~1920: J. Lukasiewicz, E. Post (three-valued and many valued logic)
~1965: L. A. Zadeh (fuzzy sets)
~1972: M. Sugeno (fuzzy measures)
~1974: E.H. Mamdani (fuzzy controller)
~1982: first major industrial application into operation, Denmark
~1986: Hitachi subway train controller
~1987: widespread applications of fuzzy sets in Japan
~1990: widespread applications of fuzzy sets worldwide

Evolução Sistemas Fuzzy



Fonte: Zimmermann, 1999

Inteligência Computational



Computação Flexível

2 Introdução à Lógica Nebulosa

- Lógica que trata matematicamente informações imprecisas usualmente empregadas na comunicação humana.
- Lógica multi-valorada que estende a lógica booleana usualmente empregada em computação.
- *Não se imagina como tudo é vago até que se tente fazê-lo de modo preciso.*

Bertrand Russel

- Bertrand Russel, ao tentar formalizar a Matemática, encontrou, no paradoxo do mentiroso de Creta, a possibilidade de algo ser e não ser ao mesmo tempo.

O Filósofo Cretense dizia que todos os Cretenses mentem.

Se ele mente então ele pode falar a verdade, se ele fala a verdade então ele está mentindo.

2.1 Detratores

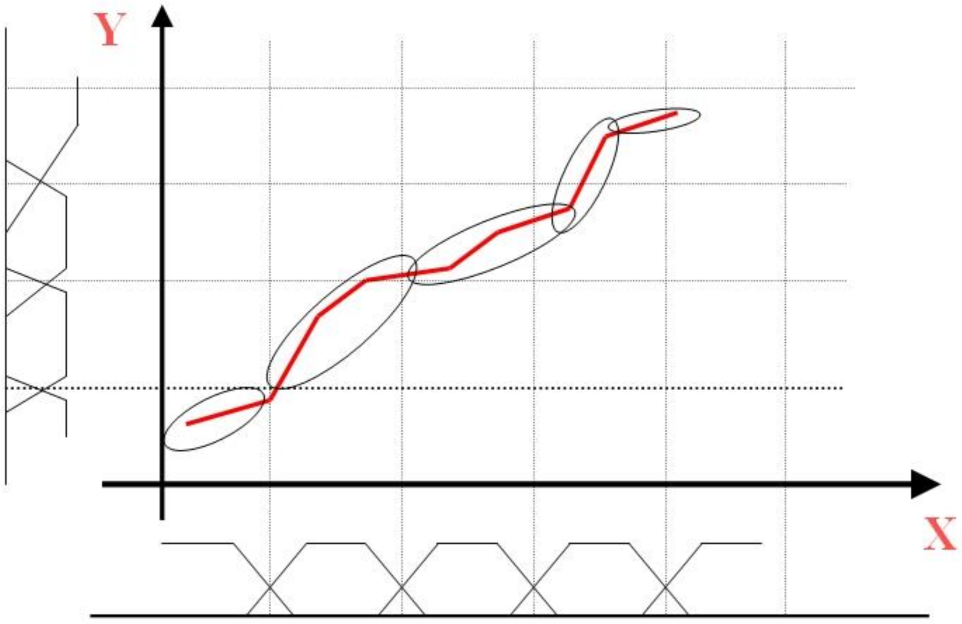
- *Lógica Nebulosa é errada, errada e perniciosa. O que precisamos é mais pensamento lógico, não menos. O perigo da lógica nebulosa é que ela irá encorajar aquele tipo de pensamento impreciso que nos trouxe tantas dificuldades. Lógica Nebulosa é a cocaína da Ciência!*

  Prof. William Kaham - U. Cal – Berkeley

- *O conceito de nebuloso é uma espécie de permissividade científica. Ele tende a resultar em bordões socialmente atrativos, desacompanhados da dura disciplina do trabalho científico e da observação paciente.*

  Prof. Rudolf Kalam - U. Florida - Gainesville

2.2 Aproximação de funções



- *É sempre possível aproximar uma curva com um número finito de remendos.*

Bart Kosko

- Remendos são pedaços de conhecimento sobre o problema. Cada remendo corresponde a uma regra, ou proposição da forma:

Se ⟨X é muito alto⟩ então ⟨Y é muito alto⟩

- Teorema de Aproximação Nebulosa: Um sistema nebuloso aditivo F: $X \rightarrow Y$ aproxima uniformemente uma função f: $X \rightarrow Y$ se X é uma região compacta e f é contínua.

Bart Kosko

- Conclusão: Os sistemas nebulosos também apresentam capacidade de aproximação universal, como as redes neurais artificiais, e têm a vantagem de admitirem um maior grau de interpretabilidade.
- Precauções: *Se você tem um martelo, tudo irá se parecer com um prego.*

Atribuído a Dinísio de Agapunta (300 a.C.)

2.3 Conjuntos nebulosos

2.3.1 Universo de discurso

- Corresponde ao espaço onde estão definidos os elementos do conjunto.
- Notação: X

- Exemplos:
  - ✓ Altura de seres humanos: $0 \leq alt \leq 2{,}5$m
  - ✓ Temperatura ambiente: $-70^o \leq temp \leq +70^o$

2.3.2 A visão aristotélica

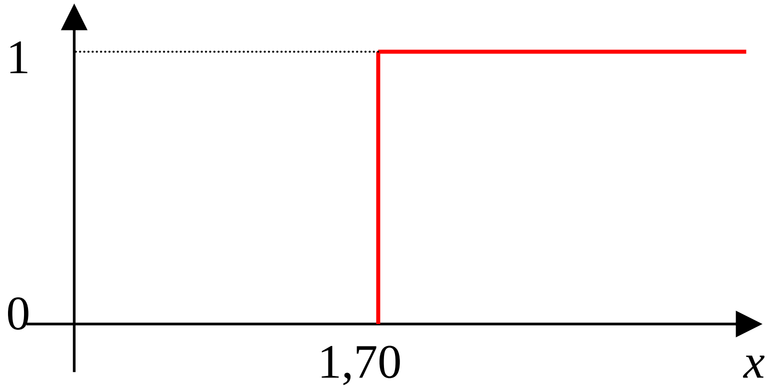
- Filósofo macedônio que viveu entre 384 e 322 a.C.;
- Estudou com Platão;
- Criador da lógica formal, em que os objetos são classificados em categorias muito bem definidas (ou ⟨se pertence⟩ ou ⟨não se pertence⟩ a um conjunto);
- De família ligada à medicina associa o espírito de observação à índole classificatória;
- Moldou a forma de pensamento ocidental por quase 2 milênios.

2.3.3 Função de pertinência de conjuntos clássicos

- Define se um elemento pertence ou não a um conjunto.

- Exemplo: *A* é o conjunto das pessoas altas e *x* é altura (em metros).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1{,}70 \\ 0 & \text{se } x < 1{,}70 \end{cases}$$



- O problema da escolha do limiar entre dois conjuntos (alto / não alto) é denominado de paradoxo de Sorites, atribuído ao dialético, Eubulides de Mileto, adversário de Aristóteles.
- O paradoxo se enuncia com os seguintes termos:

Quando um monte de areia deixa de ser um monte de areia caso retiremos um grão de areia de cada vez?

2.3.4 Operações com conjuntos clássicos

$$\begin{array}{ll}
\textit{União} & A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\
\textit{Interseção} & A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\
\textit{Complemento} & \overline{A} = \{x \mid x \notin A, x \in X\} \\
\textit{Diferença} & A \mid B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}
\end{array}$$

x	y	$x \cup y$	$x \cap y$	$\overline{x}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

$$\begin{array}{ll}
\textit{Comutatividade} & A \cup B = B \cup A \\
 & A \cap B = B \cap A \\
\textit{Associatividade} & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
 & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\
\textit{Distributividade} & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
 & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\textit{Idempotência} & A \cup A = A \\
 & A \cap A = A \\
\textit{Identidade} & A \cup \emptyset = A \\
 & A \cap \emptyset = \emptyset \\
 & A \cup X = X \\
 & A \cap X = A \\
\textit{De Morgan} & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\
 & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}
\end{array}$$

- A união de um conjunto com seu complemento forma o conjunto universo:

$$A \bigcup \overline{A} = X$$

Esta é a chamada lei da exclusão do meio.

- A interseção de um conjunto com seu complemento é vazia:

$$A \bigcap \overline{A} = \phi$$

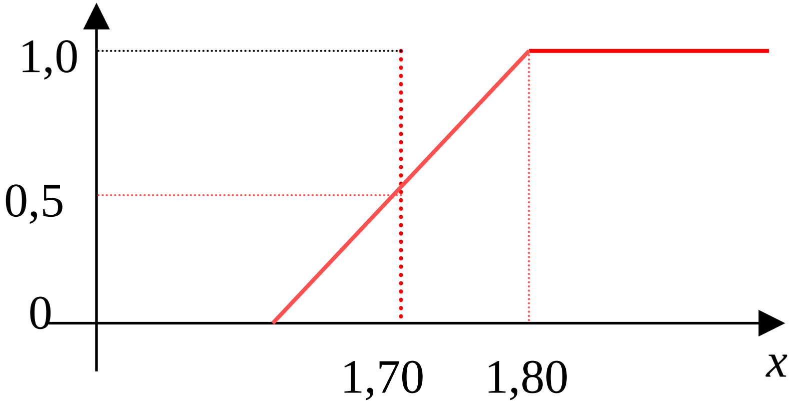
Esta é a chamada lei da não-contradição.

2.3.5 Função de pertinência de conjuntos nebulosos

- Define o grau de pertinência de um elemento a um conjunto.
- Exemplo: A é o conjunto das pessoas altas e x é altura (em metros).

$$\mu_A(x) \in [0,1]$$

A função $\mu_A(\cdot): X \rightarrow [0,1]$ mapeia elementos do universo de discurso (valores possíveis de altura em metros) em um grau de pertinência ao conjunto A das pessoas altas.



- Um conjunto nebuloso pode, então, ser definido como um conjunto ordenado de pares:

Elemento

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

Conjunto Nebuloso

Função de Pertinência

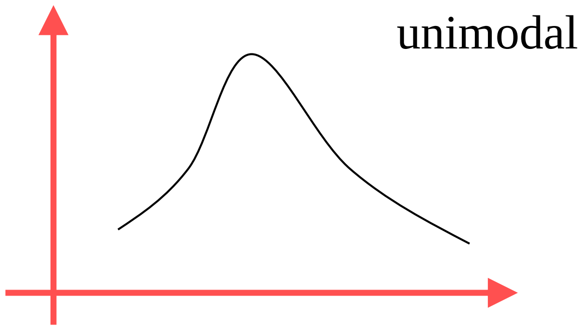
Universo de Discurso

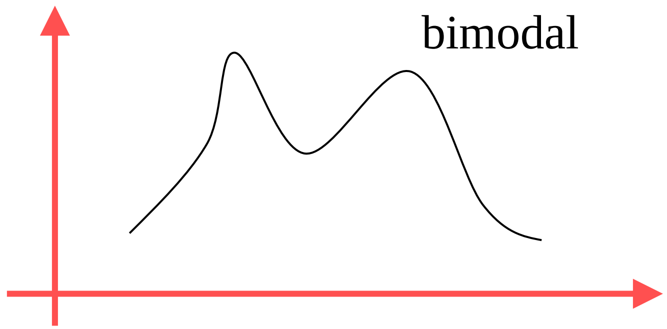
2.3.6 Tipos de função de pertinência

- Unimodal: Uma função de pertinência é unimodal se

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]: \mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu(x_1), \mu(x_2)]$$

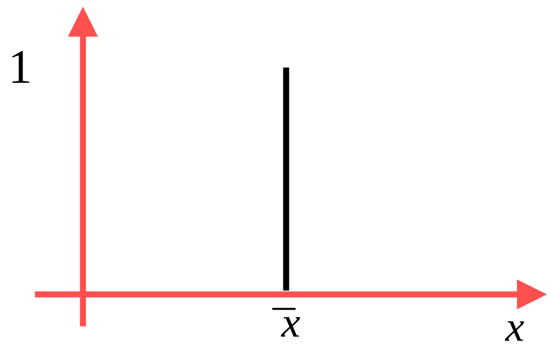
Para toda função A unimodal, é possível afirmar que, se $\mu_A(x) > \mu_A(y)$, então x está mais perto da definição ideal de A do que y.



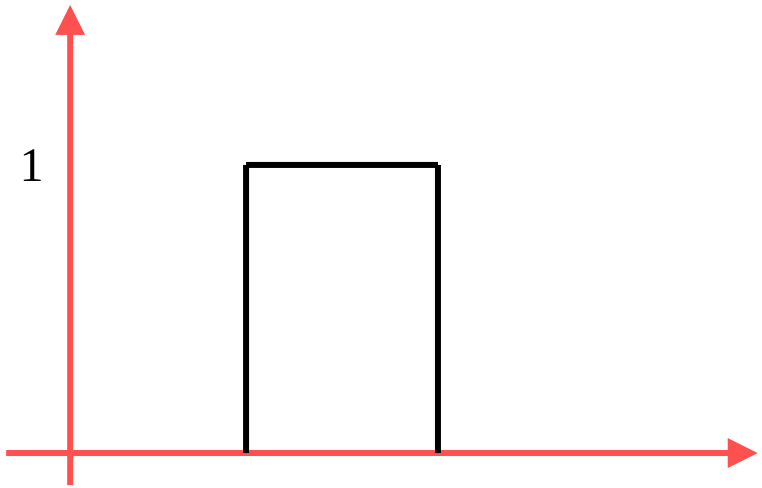


- Singleton:

$$\mu_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} 1 & x = \bar{x} \\ 0 & x \neq \bar{x} \end{cases}$$

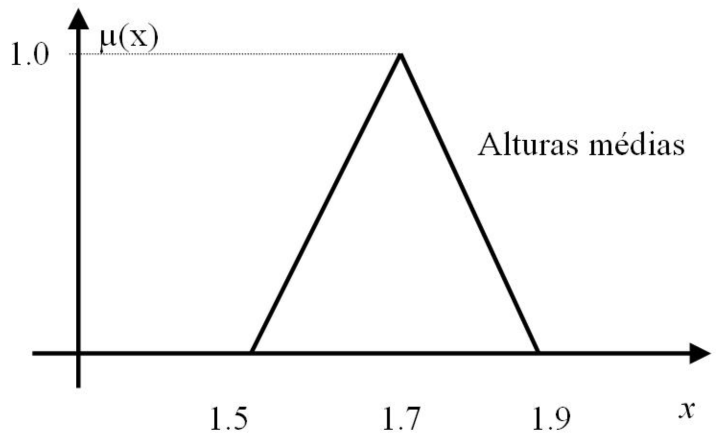


- Clássica:

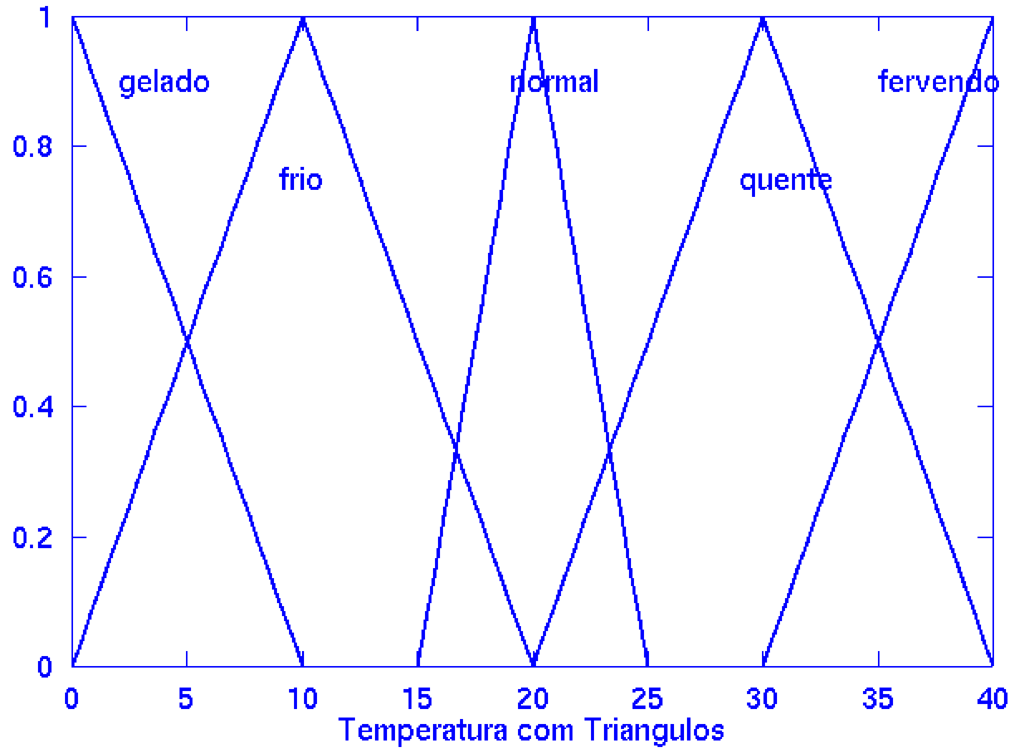


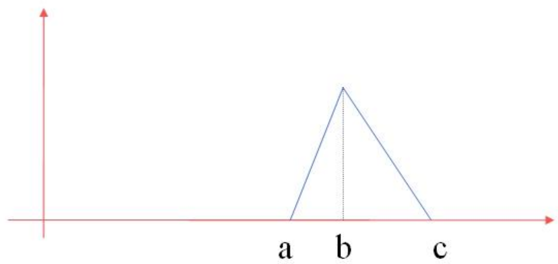
- Triangular

$$\mu_{\text{Alturas médias}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 1{,}5 \\ 5 * x - 7{,}5 & 1{,}5 \le x < 1{,}7 \\ -5 * x - 9{,}5 & 1{,}7 \le x < 1{,}9 \\ 0 & x \ge 1{,}9 \end{cases}$$



- Exemplo de funções triangulares na granularização do universo de discurso

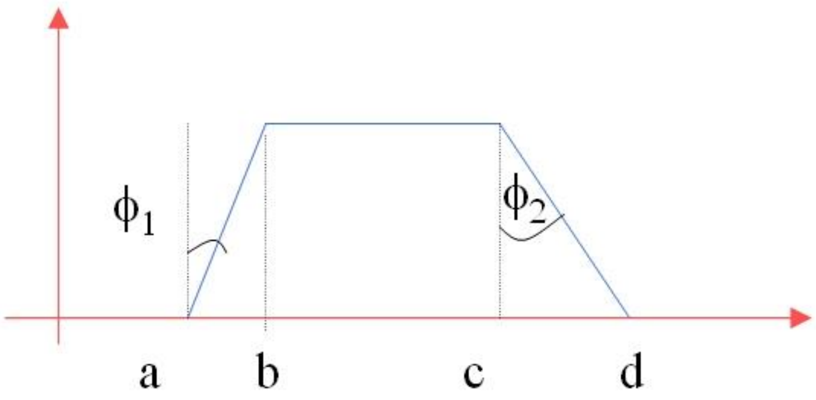




Cada triângulo precisa de 3 parâmetros para ser definido.

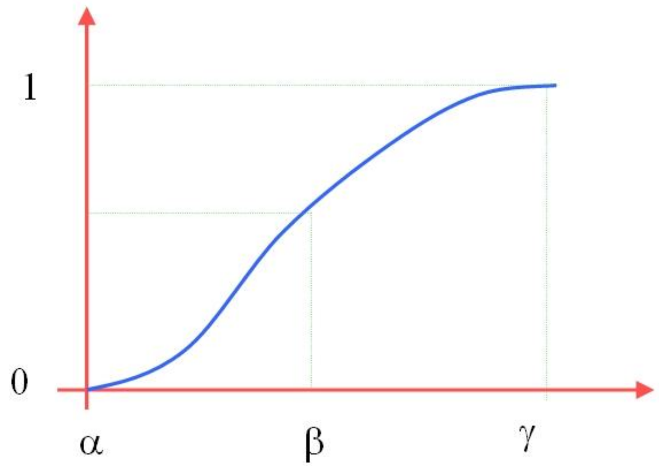
$$tri(x;a,b,c)=\begin{cases} 0 & x<a \\ (x-a)/(b-a) & a\le x\le b \\ (c-x)/(c-b) & b\le x\le c \\ 0 & x>c \end{cases}$$

- Trapezoidal: requer 4 parâmetros



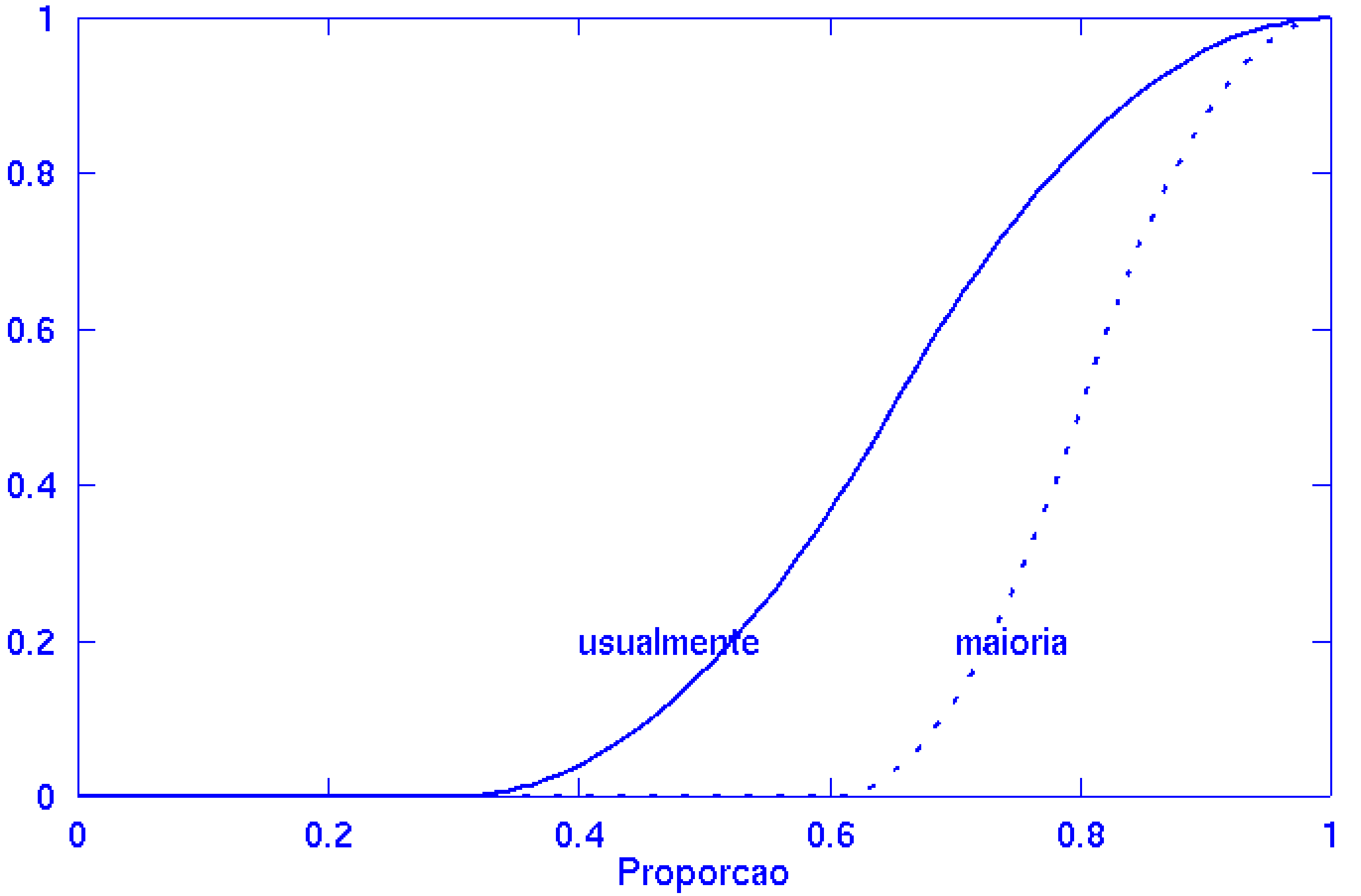
$$trap(x:a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & b\le x<c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & c\le x<d\\ 0 & x\ge d\end{cases}$$

- Sigmoidal: requer como parâmetros o valor de pertinência 0 (α), o valor de inflexão ou pertinência 0,5 (β) e o valor de pertinência 1 (γ).

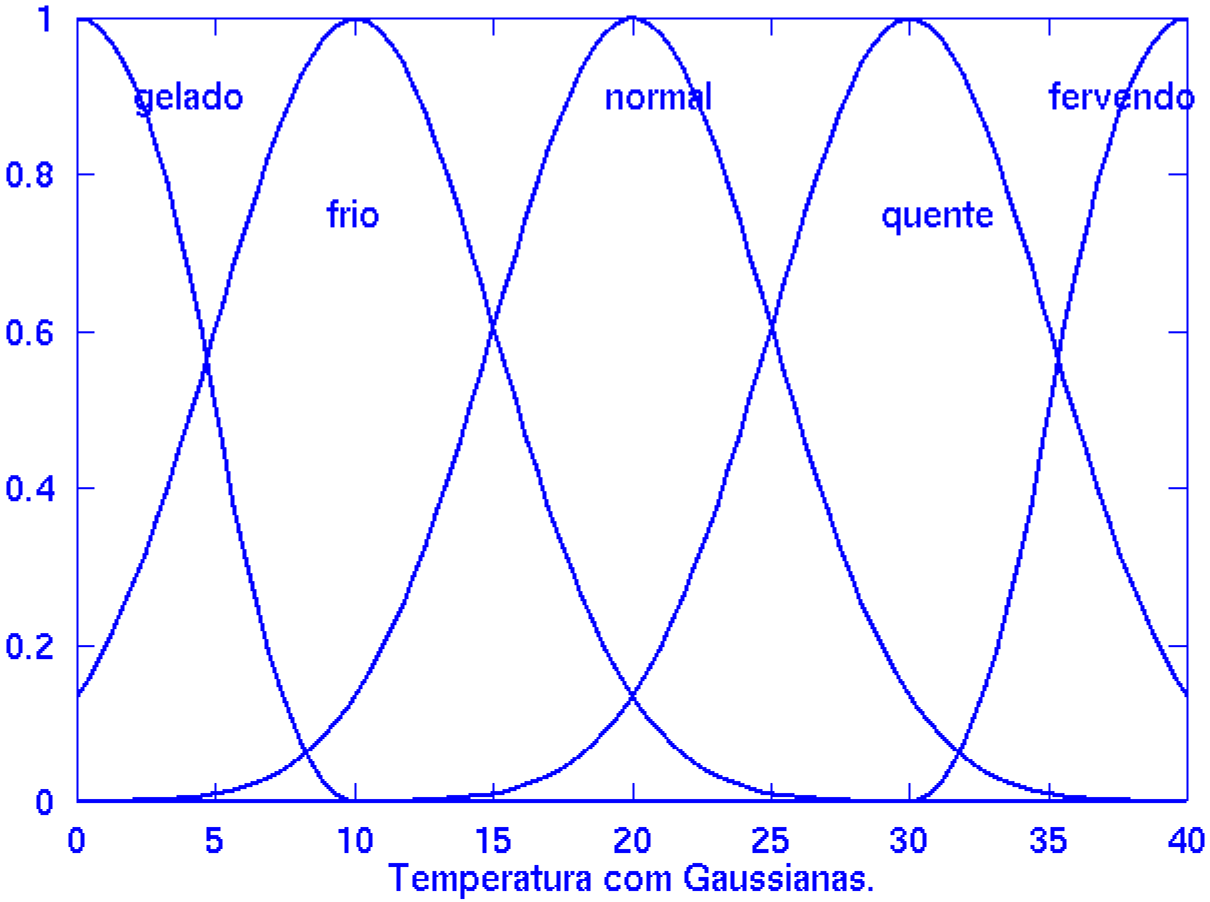


$$S(x,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}0 & x\le\alpha\\ \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 & \alpha<x\le\beta\\ 1-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\gamma-x}{\gamma-\beta}\right)^2 & \beta<x\le\gamma\\ 1 & x>\gamma\end{cases}$$

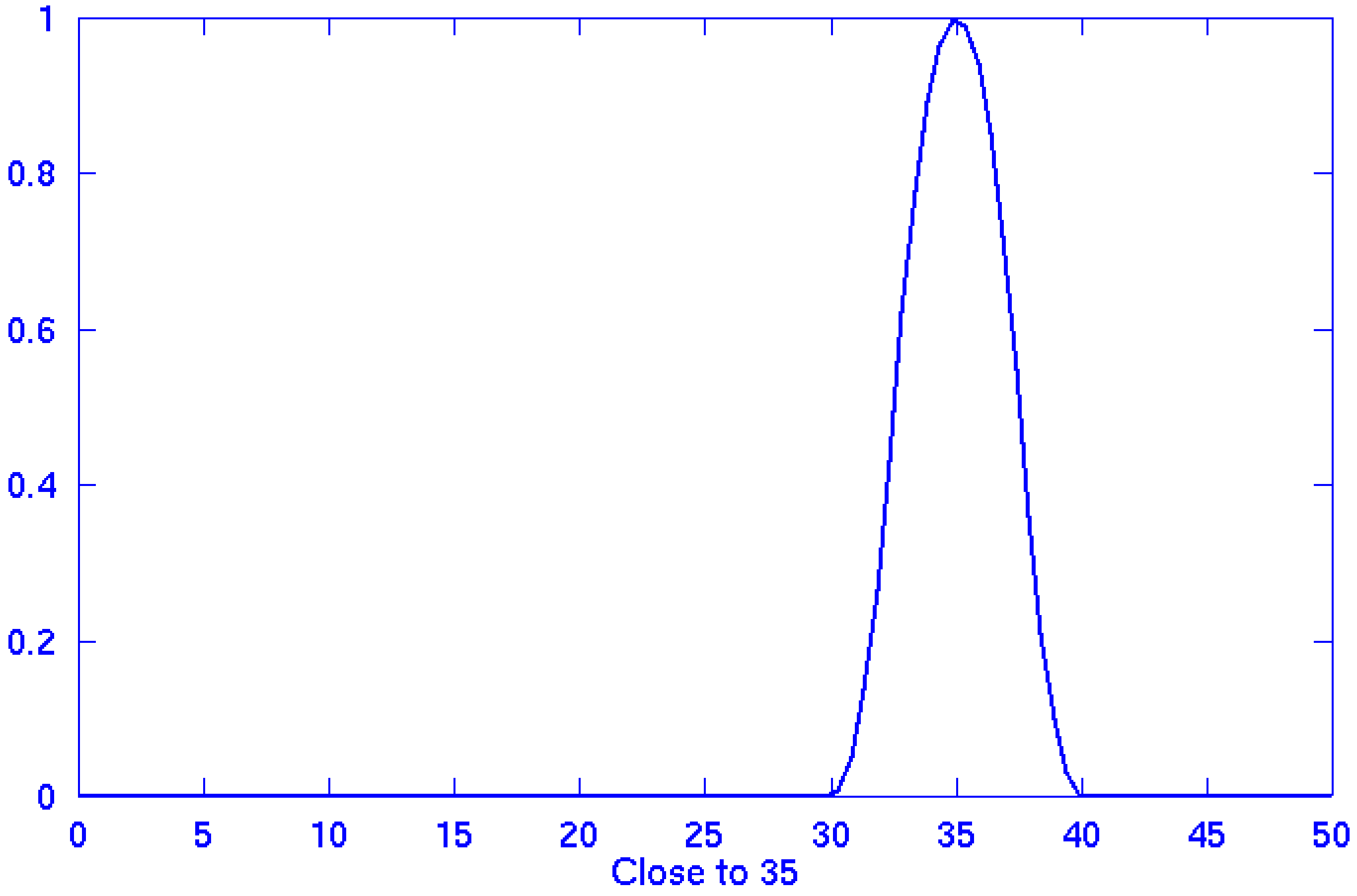
- Veja como ficam as propostas de função de pertinência para o conjunto das proporções de ocorrência de um evento quando ele é usual e quando ele ocorre na maioria das vezes.



- Gaussiana: requer a definição de seu centro e de sua abertura (ver redes neurais RBF).



- Veja como fica uma proposta de função de pertinência para o conjunto dos números próximos ao valor 35.

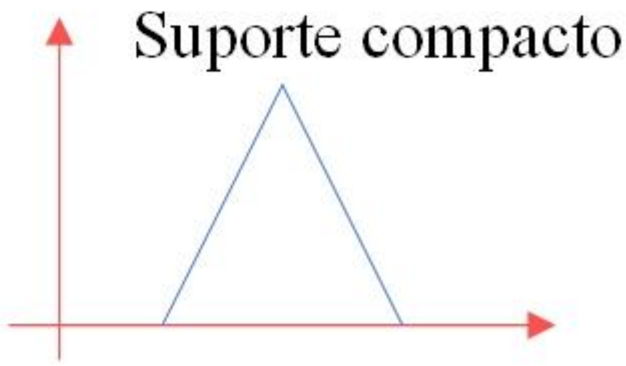


2.3.7 Suporte de um conjunto nebuloso

- O suporte é formado pelos elementos do universo de discurso que apresentam pertinência não-nula ao conjunto nebuloso:

$$S_A = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

- O suporte é dito ser compacto se o seu tamanho é menor que o universo de discurso.



2.3.8 Altura de um conjunto nebuloso

- A altura H_A de um conjunto nebuloso A é definida na forma:

$$H_A = \max_{x \in X} \{\mu_A(x)\}$$

onde X é o universo de discurso.

- Um conjunto é definido como normal se $H_A = 1$ e subnormal se $H_A < 1$.

2.3.9 Cardinalidade de um conjunto nebuloso

- A cardinalidade $|A|$ de um conjunto nebuloso A é definida na forma:

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \quad \text{ou} \quad |A| = \int_X \mu_A(x)dx$$

  respectivamente para universos de discurso X discreto e contínuo.

- Exemplo: considere o seguinte conjunto

$$A = \{(6.5, 0.25), (7, 0.5), (7.5, 0.75), (8, 1), \\ (8.5, 0.75), (9, 0.5), (9.5, 0.25)\}$$

definido no universo de notas de 0 até 10 com notas de 0,5 em 0,5. A cardinalidade de A vale:

$$|A| = 0.25 + 0.5 + 0.75 + 1 + 0.75 + 0.5 + 0.25 = 4.0$$

e a cardinalidade relativa assume a forma: $|A| = \dfrac{4,0}{20} = 0,2$.

2.3.10 Conjunto corte

- O conjunto clássico A_α de elementos que pertencem ao conjunto nebuloso A até pelo menos o grau $\alpha \in [0,1]$ é chamado de conjunto corte α e é definido como segue (na figura abaixo, considere $A(x) \equiv \mu_A(x)$):

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

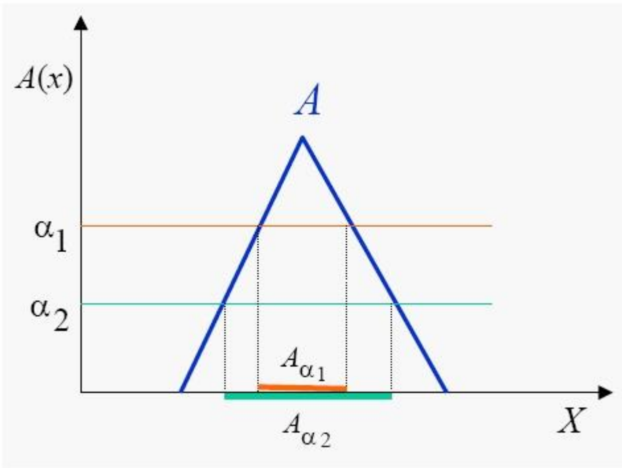
α-cortes

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$$ **Fraco**

$$A_{\alpha^+} = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\}$$ **Forte**

$$\alpha_1 > \alpha_2 \quad \rightarrow \quad A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$$

$$A_{\alpha^+} \subset A_\alpha$$



2.3.11 Pertinência gradual e probabilidade

- Pertinência a mais de um conjunto: um elemento pode apresentar graus de pertinência acima de zero a múltiplos conjuntos.
- Exemplo:
  - ✓ *crianças = {Pedro, Ana, Paulo, Marta}*
  - ✓ *adolescentes = {Pedro, Mateus, Joaquim}*
  - ✓ *crianças(Pedro) = 0,2*
  - ✓ *adolescentes(Pedro) = 0,8*
- O grau de pertinência de 0,25 não significa que o elemento possa ser encontrado com probabilidade 0,25 no conjunto.
- A soma dos graus de pertinência de um elemento a diversos conjuntos não precisa ser unitária. Pode ser menor, maior ou igual a 1.
- Exemplo prático da distinção entre pertinência e probabilidade:

- ✓ Situação 1: Um líquido em uma garrafa tem 95% de probabilidade de ser água pura e 5% de ser veneno puro;
- ✓ Situação 2: Um líquido em uma garrafa tem pertinência 0,95 ao conjunto das garrafas com água pura e 0,05 ao conjunto das garrafas com veneno puro.
- ✓ Veneno na concentração de 5% não mata, mas você irá passar muito mal.
- ✓ De qual garrafa você beberia? Quem quer viver e sabe responder a essa pergunta, aprendeu a diferença entre pertinência e probabilidade.

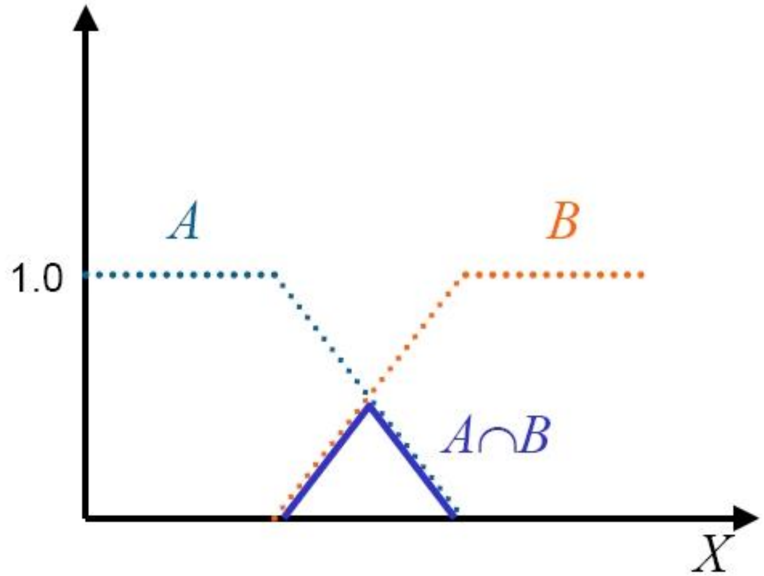
2.3.12 Subconjuntos nebulosos

- Se o grau de pertinência de todos os elementos de um conjunto nebuloso A é menor que ou igual ao grau de pertinência a um conjunto nebuloso B, então A é dito ser subconjunto nebuloso de B.

$$A \subseteq B \quad if \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

2.3.13 Operações com conjuntos nebulosos

Interseção



$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x) \qquad \forall x \in X$$

t-normas: Generalização da Interseção

$$\mathrm{t}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$x\mathrm{t}y = y\mathrm{t}x$	Comutativa
$x\mathrm{t}(y\mathrm{t}z) = (x\mathrm{t}y)\mathrm{t}z$	Associativa
Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x\mathrm{t}w \leq y\mathrm{t}z$	Monotônica
$x\mathrm{t}1 = x \quad e \quad 0\mathrm{t}x = 0$	Contorno

t-normas: Exemplos

$1 - x\mathrm{t}_4 y = xy$ Produto Algébrico

$2 - x\mathrm{t}_2 y = \max[0, (1+p)(x+y-1) - pxy), \quad p \geq -1$ Dif. Limitada $(p = 0)$

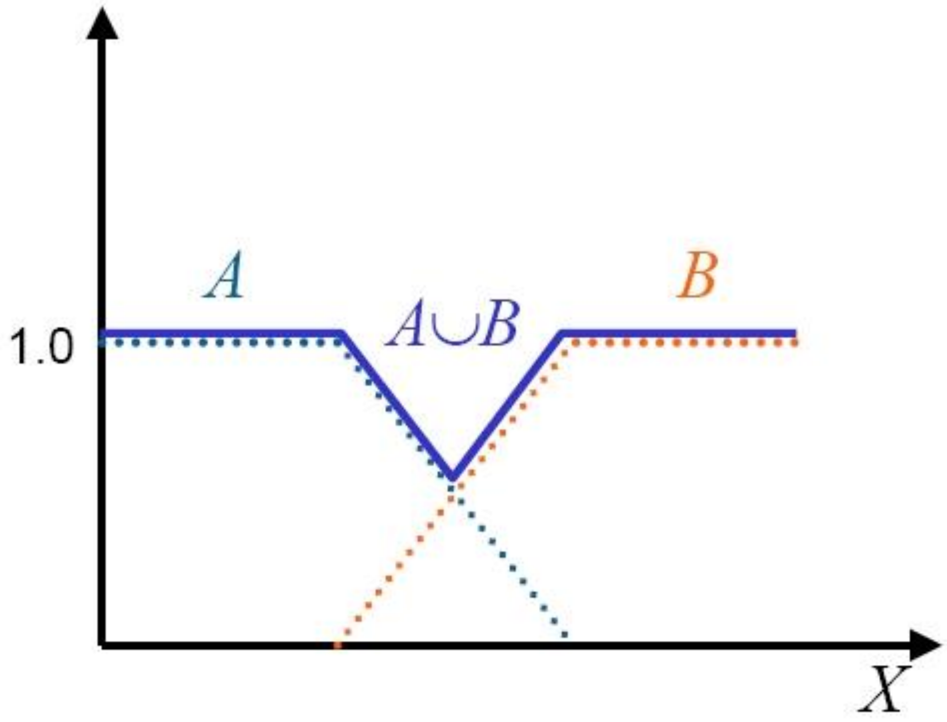
$$3 - x\mathrm{t}_{11} y = \begin{cases} x & \text{se } y = 1 \\ y & \text{se } x = 1 \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$ Produto Drástico

t-normas: Propriedades

$x\mathrm{t}_{11} y \leq x\mathrm{t}y \leq \min(x, y)$

$\min(x,x) = x$ única t − norma idempotente

União



$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x) \qquad \forall x \in X$$

s-normas: Generalização da União

$$\mathrm{s} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$x \mathrm{s} y = y \mathrm{s} x$	Comutativa
$x \mathrm{s}(y \mathrm{s} z) = (x \mathrm{s} y) \mathrm{s} z$	Associativa
Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \mathrm{s} w \leq y \mathrm{s} z$	Monotônica
$x \mathrm{s} 1 = 1 \;\; e \;\; 0 \mathrm{s} x = x$	Contorno

s-normas: Exemplos

$1 - x s_4 y = x + y - xy$ Soma Probabilística

$2 - x s_2 y = \min[1, (x + y + pxy), \; p \geq 0$ Soma Limitada $(p = 0)$

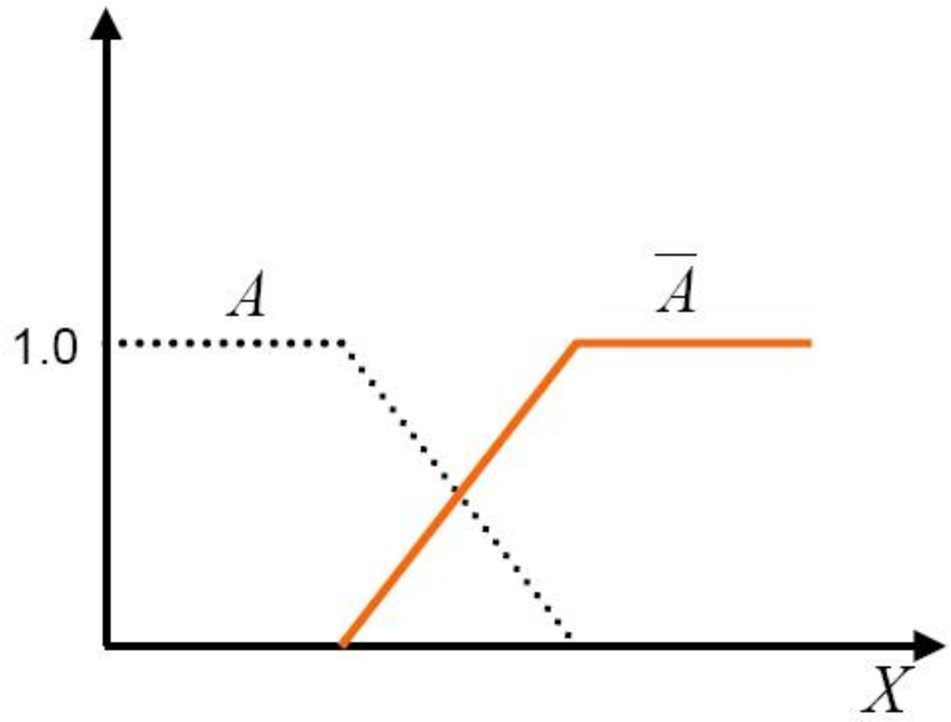
$$3 - x s_{11} y = \begin{cases} x & \text{se } y = 0 \\ y & \text{se } x = 0 \\ 1 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$ Soma Drástica

s-normas: Propriedades

$$\max(x, y) \leq x s y \leq x s_{11} y$$

$\max(x,x) = x$ única s – norma idempotente

Complemento



$$\overline{A}(x) = 1 - A(x) \qquad \forall x \in X$$

Normas Duais com Relação ao Complemento

t-norma e s-normas duais:

$$x \mathrm{s} y = 1 - (1 - x)\mathrm{t}(1 - y)$$

$$x \mathrm{t} y = 1 - (1 - x)\mathrm{s}(1 - y)$$

Generalização do seguinte:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Operações de Comparação

1-Medidas de Distância

$$d(A,B) = \left[\int_X |A(x) - B(x)|^p \, dx\right]^{1/p}, \quad p \geq 1$$

$$1 - \text{Hamming} \quad (p=1) \quad d(A,B) = \int_X |A(x) - B(x)| \, dx$$

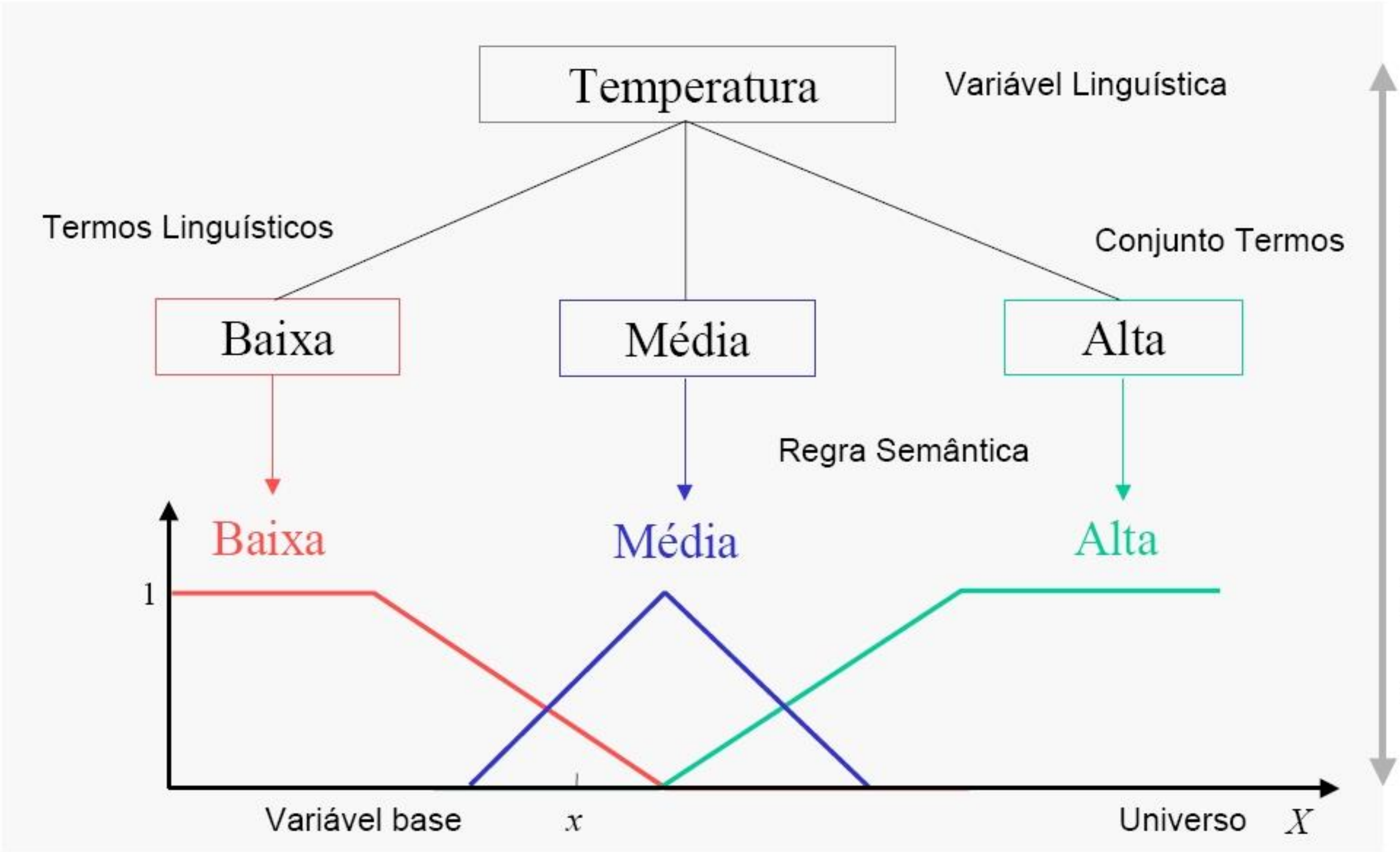
$$2 - \text{Euclideana} \quad (p=2) \quad d(A,B) = \left[\int_X |A(x) - B(x)|^2 \, dx\right]^{1/2}$$

$$3 - \text{Tchebyschev} \quad (p \to \infty) \quad d(A,B) = \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|$$

3 Produtos comerciais

- Metro Sendai: 16 estações e 13,5 km de trilhos, desenvolvido pela Hitachi.
- Lavadoras de roupa medem peso e sujeira das roupas para avaliar programa de lavagem.
- Máquinas para filmagens comparam imagens para diminuir tremidas.
- Aspiradores de pó medem quantidade de pó para variar potência de sucção.
- Fornos de microondas medem temperatura, umidade e forma dos alimentos para controlar tempo.
- Ar condicionado mede a temperatura ambiente e preferências dos usuários.
- Sistemas ABS medem deslizamento e travamento das rodas para controlar freios.
- Mitsubishi desenvolveu sistema que controla suspensão, tração, transmissão e ar.
- Hitachi usa 150 regras para negociar *bonds* e mercados futuros.
- Yamaichi usa sistema com centenas de regras para negociar ações.
- Fujitec desenvolveu um controle de elevadores para reduzir tempo de espera.

4 Variáveis linguísticas



Variável linguística: $(\mathrm{X}, T(\mathrm{X}), X, G, M)$

- X — nome
- $T(\mathrm{X})$ — conjunto de termos linguísticos de X
- X — universo
- $M : T(\mathrm{X}) \rightarrow F(X)$ — regra semântica
- $G = < V, \Sigma, P, S >$ — gramática que gera termos de T

Exemplo: $G = < V, \Sigma, P, S >$

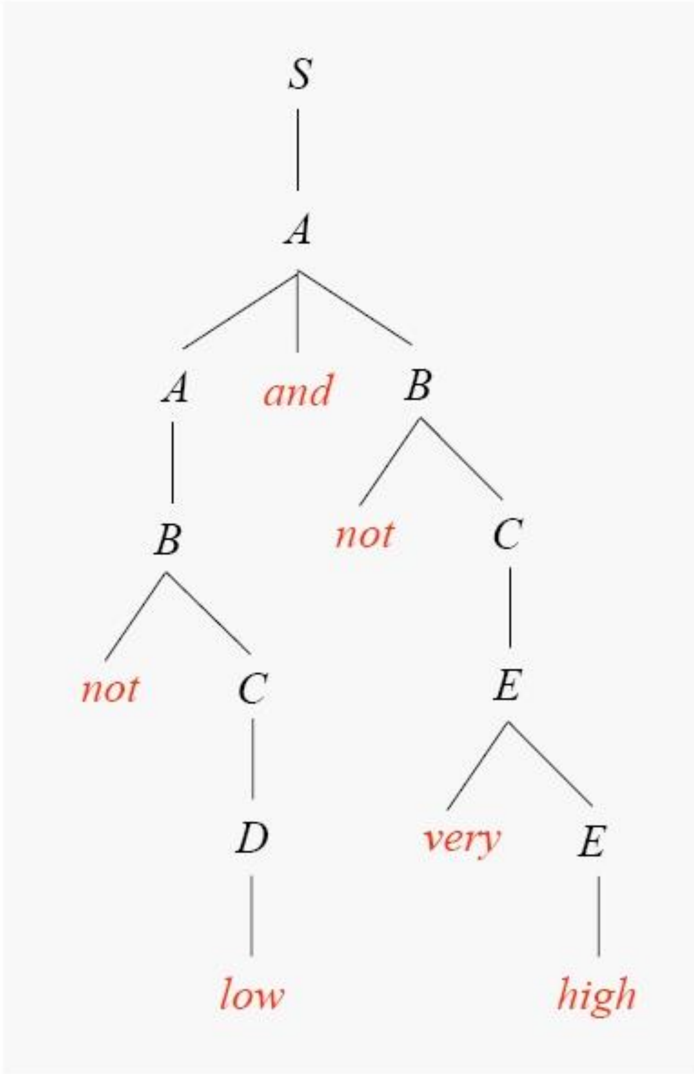
$V = \{$ *low, high, medium, very, not, and, ...* $\}$
$\Sigma = \{S, A, B, C, D, E, F, ...\}$
$P =$ produções (sintaxe)
$S =$ símbolo inicial

not low and not very high

very high

Produções de P

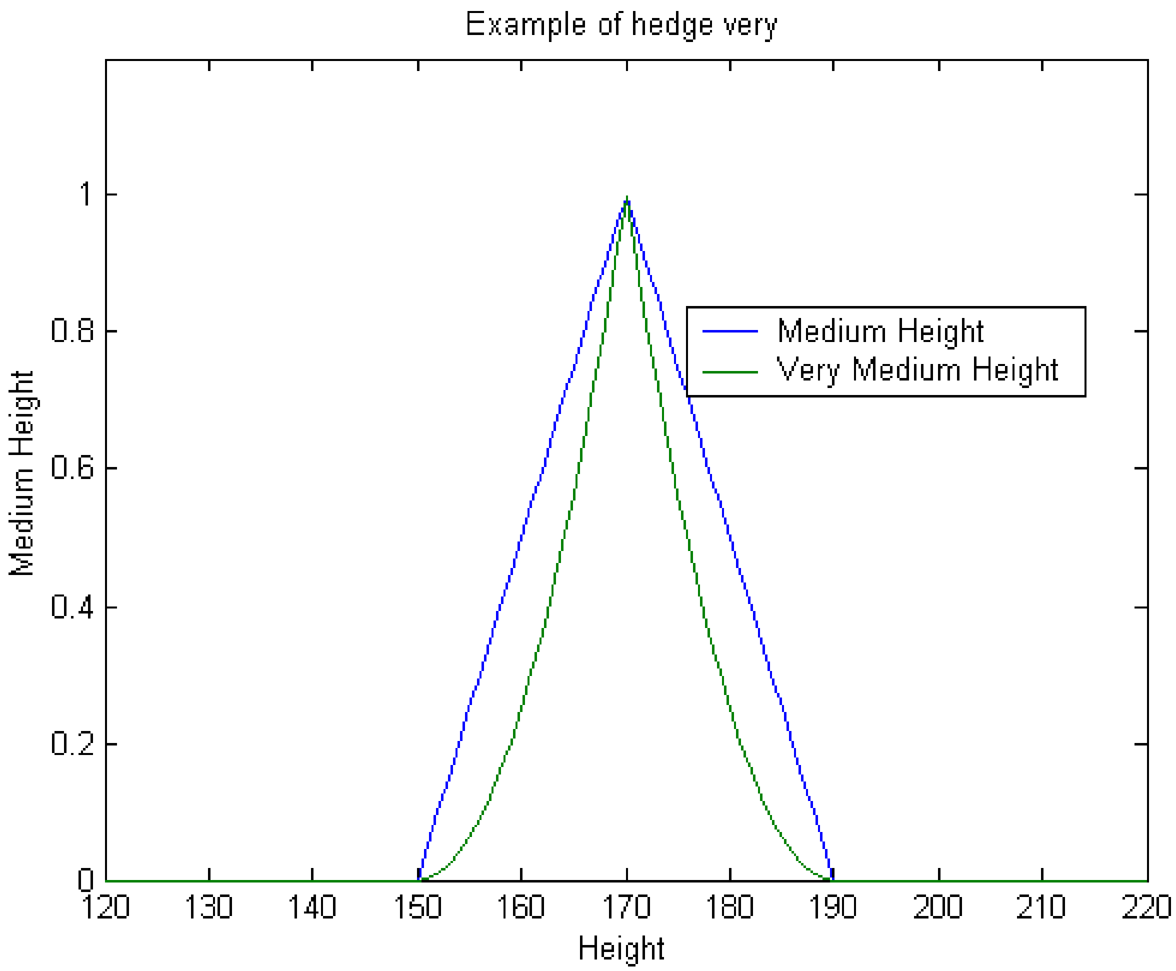
$S \to A$
$C \to E$
$A \to B$
$A \to A \text{ and } B$
$B \to C$
$B \to \text{not } C$
$C \to D$
$C \to F$
$D \to \text{very } D$
$E \to \text{very } E$
$D \to \text{low}$
$E \to \text{high}$
$F \to \text{medium}$



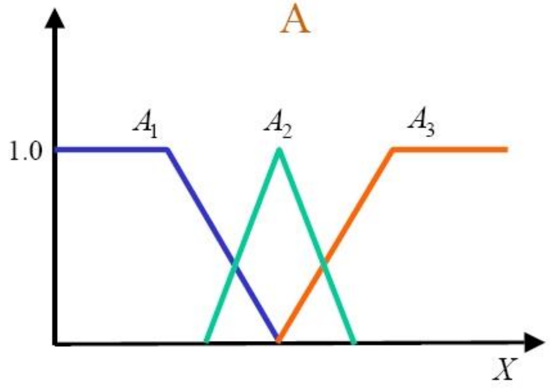
not low and not very high

Árvore Sintática

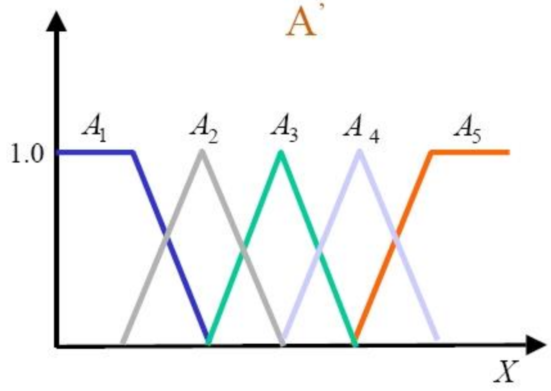
4.1Exemplo de efeito dos modificadores



4.2 Granularidade



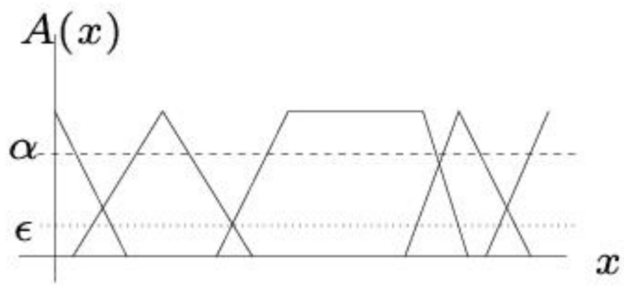
Partição Grossa de X



Partição Fina de X

4.3 Completude e sobreposição

Critérios de ϵ-*completude* e α-*sobreposição.*



5 Relações clássicas

- Funções e Relações são mapeamentos.
- Funções fazem mapeamentos de muitos para um.
- Relações podem fazer mapeamentos de muitos para muitos.
- Portanto, toda função é uma relação.
- O produto cartesiano de dois conjuntos *X* e *Y* é definido como:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \; e \; y \in Y\}$$

- Para *n* conjuntos A_i, i=1,...,n, o produto cartesiano é definido como:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \,, i = 1..n\}$$

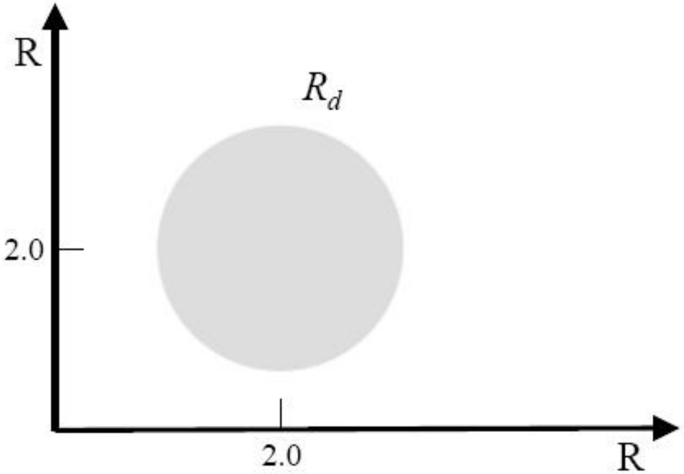
- Uma relação é um subconjunto do produto cartesiano, de modo que o produto cartesiano pode ser considerado uma relação sem restrições:

$$R(A_1, A_2, \ldots, A_n) \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

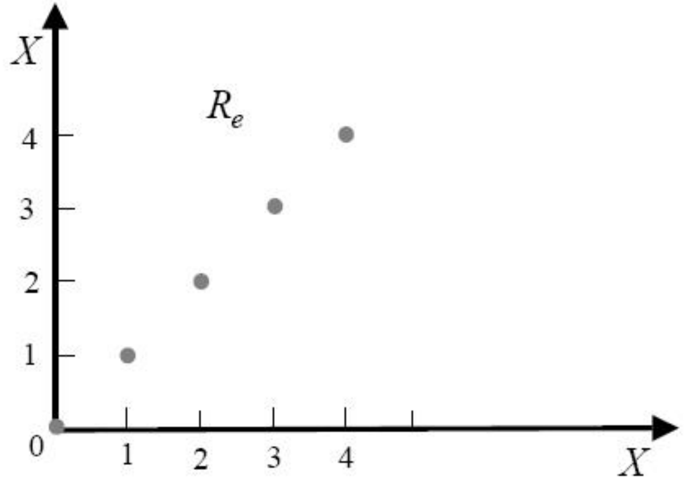
Relações

$$R : X \times Y \to \{0,1\}$$

$$R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (x,y) \in R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$R_d(x,y) = \{x \in \mathrm{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le 1$$



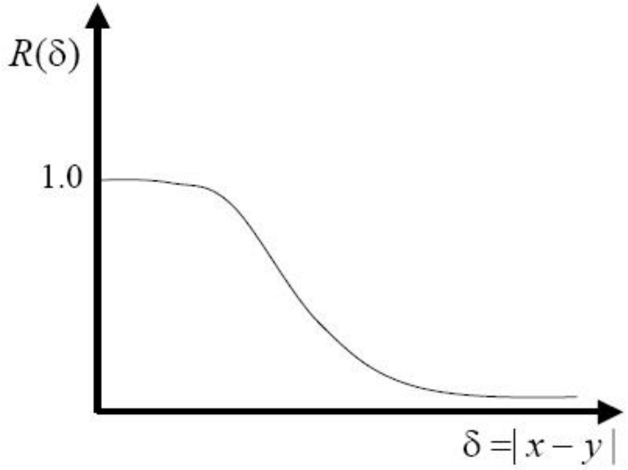
$$R_e = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}, \;\; X = \{0,1,2,3,4\}$$

6 Relações nebulosas

Relações Nebulosas

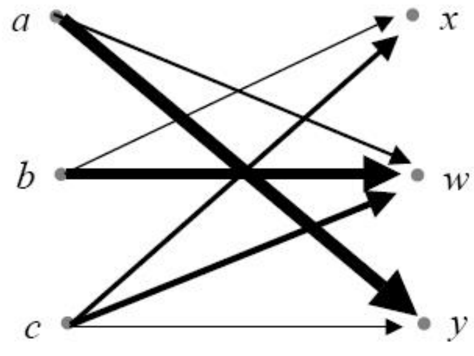
$$R : X \times Y \rightarrow [0,1]$$

$$R(x,y) = \frac{1}{(1+(x-y)^2)}$$



R: x aproximadamente igual a y

$$X = \{a, b, c\}$$
$$Y = \{x, w, y\}$$



$$R(x,y) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & w & y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ 0.3 & 0.9 & 0.0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

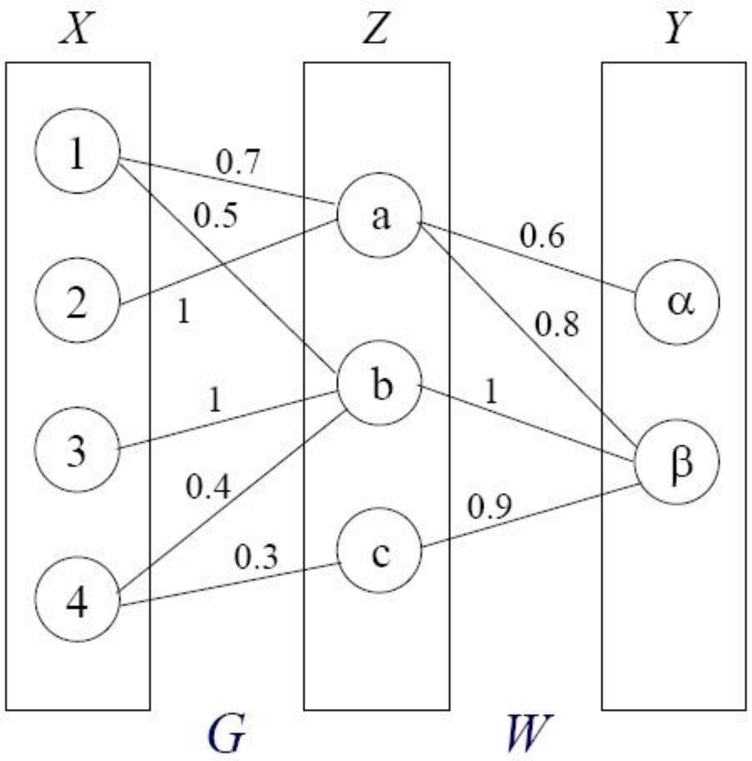
6.1 Função característica

- Mede a força da relação entre pares.
- Sejam $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$ os graus de pertinência dos elementos *x* e *y* nos conjuntos *A* e *B*, respectivamente.
- Então tem-se que: $\mu_R(x,y) = \mu_{A\times B}(x,y) \Rightarrow \mu_R(x,y) = \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right]$
- Exemplo:

  - Conjunto $A=\{(x_1,0.2),(x_2,0.5),(x_3,1)\}$
  - Conjunto $B=\{(y_1,0.3),(y_2,0.9)\}$.
  - $R=A\times B$

$$R = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.2 & 0.2 \\ x_2 & 0.3 & 0.5 \\ x_3 & 0.3 & 0.9 \end{array}$$

7 Composição de relações nebulosas

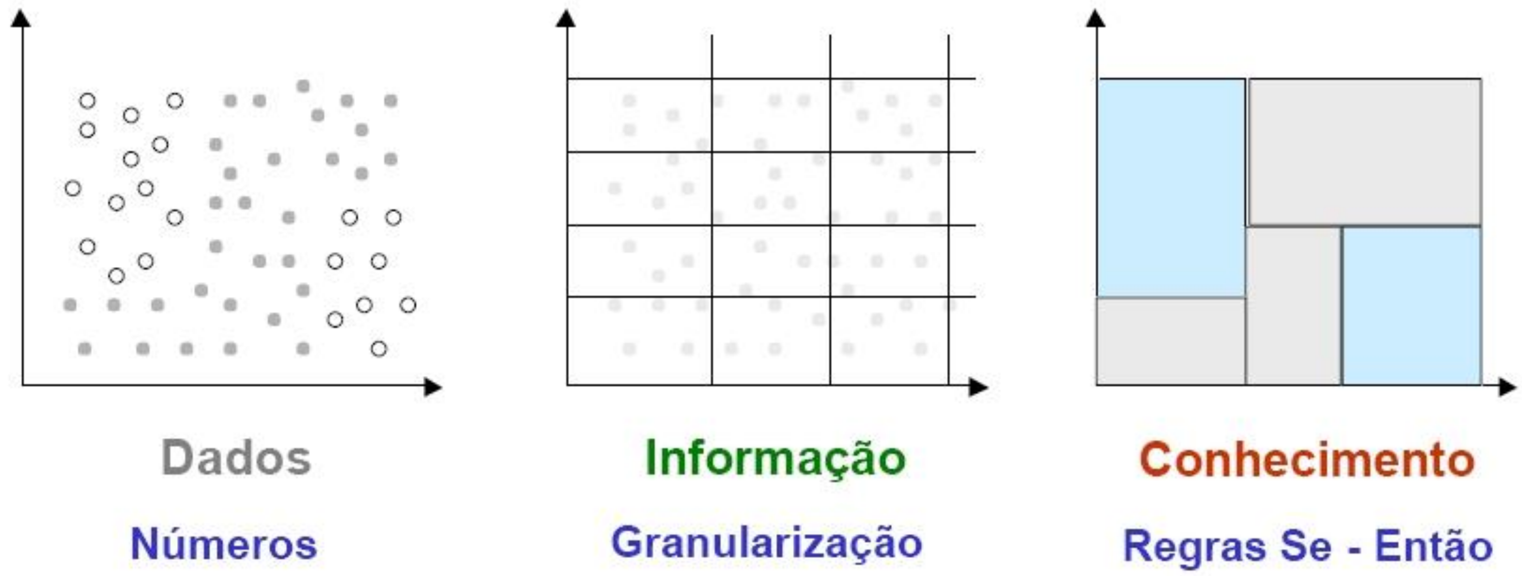


$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$G \circ W = R$$

8 Computação com regras

Introdução



Conhecimento: coleção de proposições em uma linguagem

8.1 Sintaxe

Sintaxe

Proposição básica: The (attribute) of (object) is (value)

Forma canônica: p : X is A

Exemplo: Temperatura do forno é alta

temperatura (*forno*) é *alta*

p : T is H

variável com valor restrito:	*temperatura*
restrição induzida:	*alta*
caracterização:	conjunto nebuloso *alta* (H)

8.2 Proposições condicionais

Proposições Condicionais ≡ Regras Se - Então

Forma canônica: **Se <antecedente> Então <consequente>**

antecedente: proposição nebulosa

consequente: proposição nebulosa

Exemplos

p : Se X_1 is A_1 and X_2 is A_2 ..... and X_n is A_n Então Y_1 is B_1 and Y_2 is B_2 ... And Y_m is B_m

q : Se X_1 is A_1 or X_2 is A_2 ..... or X_n is A_n Então Y_1 is B_1 or Y_2 is B_2 ..... or Y_m is B_m

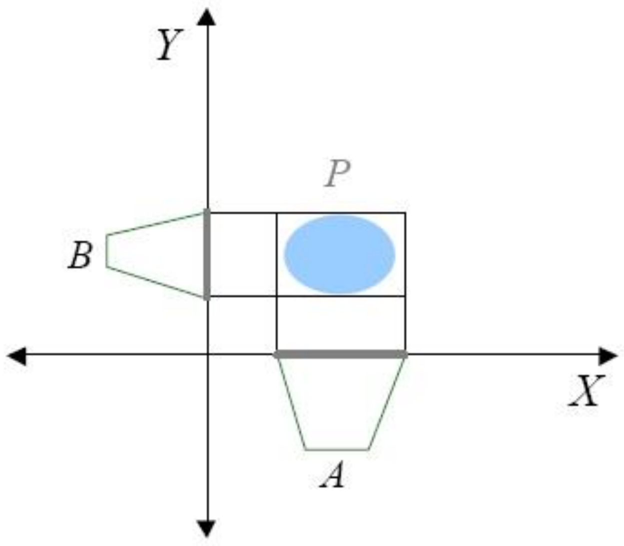
A_1, A_2 ..... A_n conjuntos nebulosos em $X_1, X_2, \ldots, X_n$

B_1, B_2 ..... B_m conjuntos nebulosos em $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$

p e q induzem relações P e Q em $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m$

8.3 Grafos nebulosos

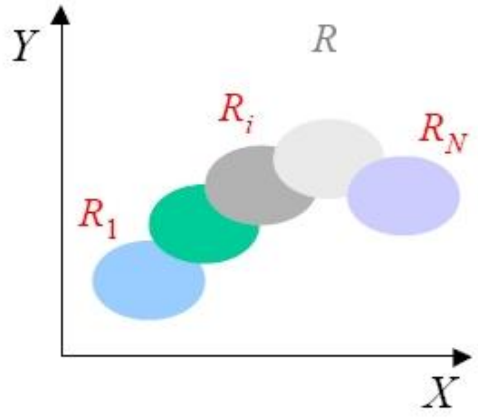
P : Se X is A Então Y is B



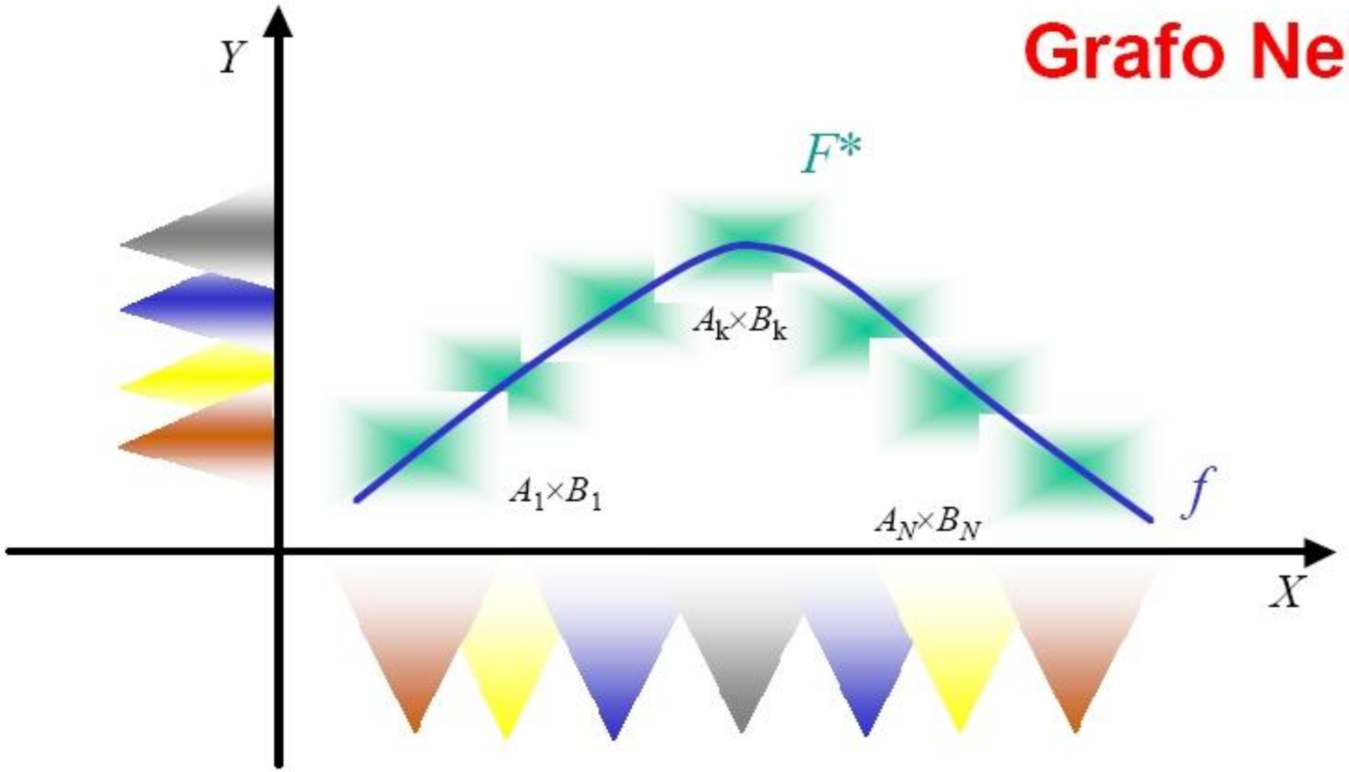
Se X is A_1 Então Y is B_1

R : Se X is A_2 Então Y is B_2

Se X is A_N Então Y is B_N



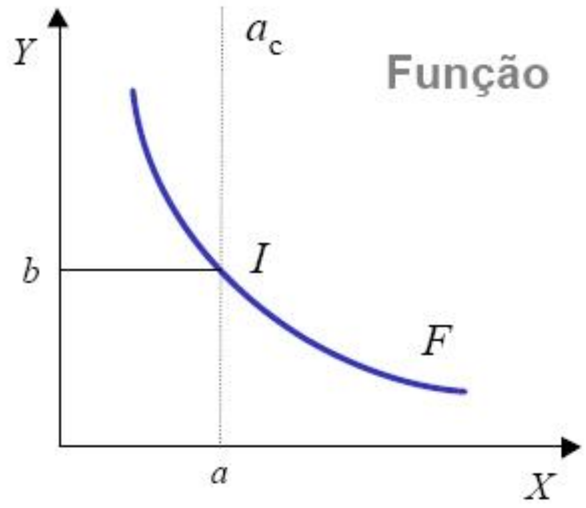
Grafo Nebuloso

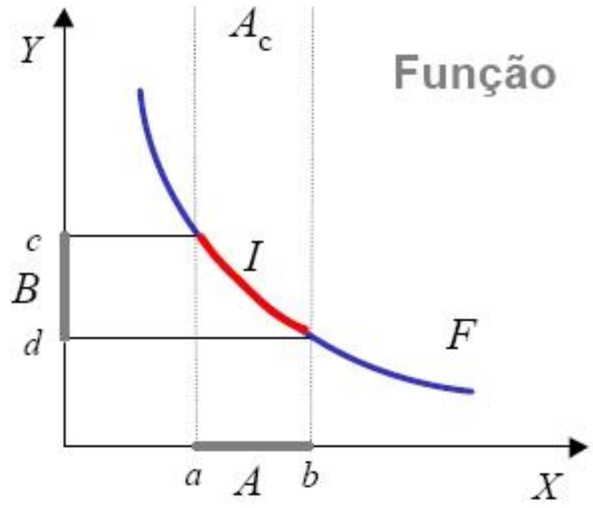


$F^* = \sum_k A_k \times B_k \;\rightarrow\;$ grafo nebuloso $\;\rightarrow\;$ relação nebulosa em $X \times Y$

F* é uma **aproximação granular** de *f*

8.4 Inferência e raciocínio aproximado

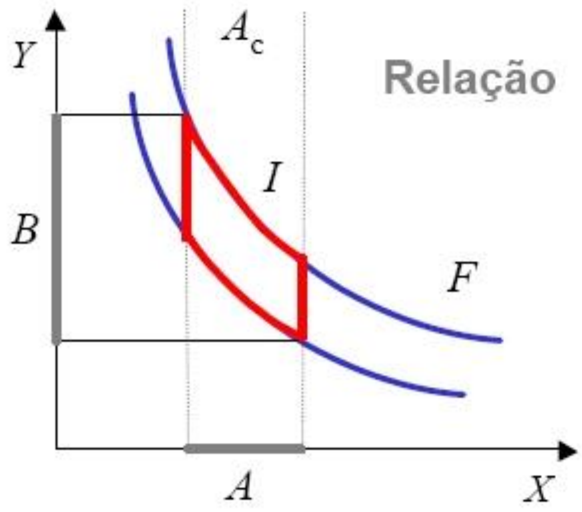


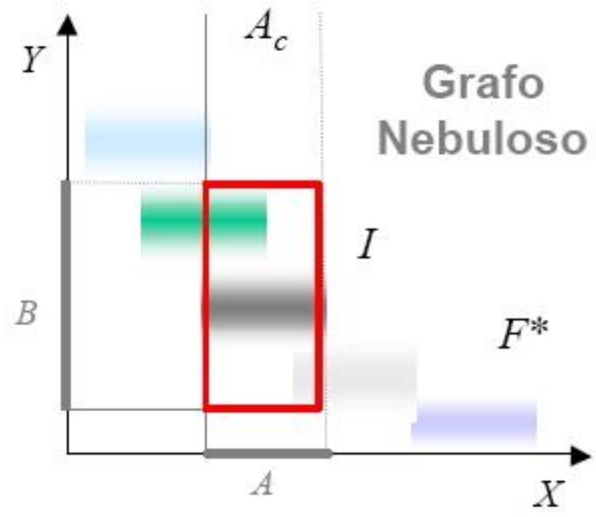


$$\frac{\begin{array}{l} x = a \\ y = f(x) \end{array}}{y = b}$$

$$\frac{\begin{array}{l} x \text{ is } A \\ (x, y) \text{ is } F \end{array}}{y \text{ is } B}$$

Inferência e Raciocínio Aproximado





$$\frac{\begin{array}{l} x \text{ is } A \\ (x, y) \text{ is } F \end{array}}{y \text{ is } B}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \text{X is } A \\ (\text{X}, \text{Y}) \text{ is } F^* \end{array}}{\text{Y is } B}$$

8.5Modus Ponens generalizado

$$
\textit{Modus Ponens} \quad \begin{array}{ll} \text{(fato):} & X \text{ é } A \\ \text{(regra):} & \text{se } X \text{ é } A \text{ então } Y \text{ é } B \\ \hline \text{(conclusão):} & Y \text{ é } B\ . \end{array}
$$

- Se $\langle X$ é A$\rangle$ então $\langle Y$ é B$\rangle$
- Sabendo que $\langle X$ é A$\rangle$ é verdade, então pode-se inferir que $\langle Y$ é B$\rangle$ seguramente.

  ✓ Todos os *homens* são *mortais* (regra)

  ✓ *Sócrates* é *homem.* (verdade)

  ✓ Portanto *Sócrates* é *mortal.* (como consequência)

Modus Ponens Generalizado

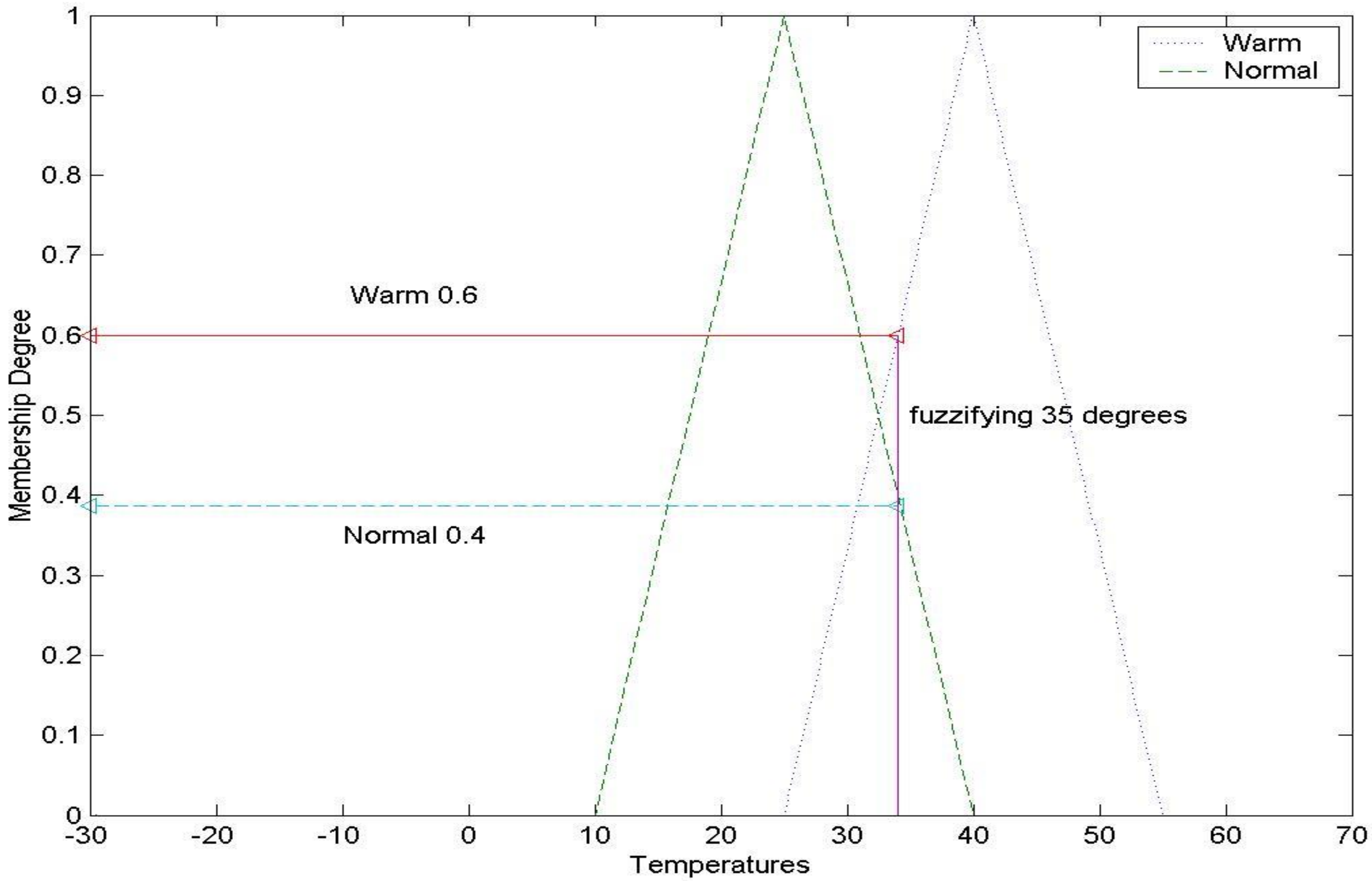
$$
\begin{array}{ll}
\text{(fato):} & X \text{ é } A' \\
\text{(regra):} & \text{se } X \text{ é } A \text{ então } Y \text{ é } B \\
\hline
\text{(conclusão):} & Y \text{ é } B' \,.
\end{array}
$$

- Se ⟨*X* é A⟩ então ⟨*Y* é B⟩
- Sabemos que ⟨*X* é A⟩ é parcialmente verdade (ou seja ⟨*X* é A’⟩), então podemos inferir que ⟨*Y* é B⟩ parcialmente (ou seja, ⟨*Y* é B’⟩)

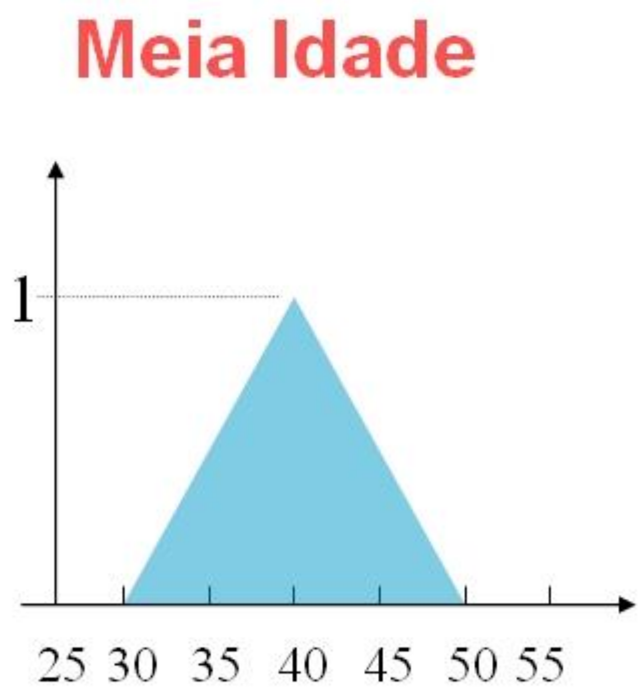
✓ Homens *altos* são *pesados*. (regra)
✓ *João* é *alto* (isto é parcialmente verdade)
✓ Portanto *João* é parcialmente *pesado* (como consequência)

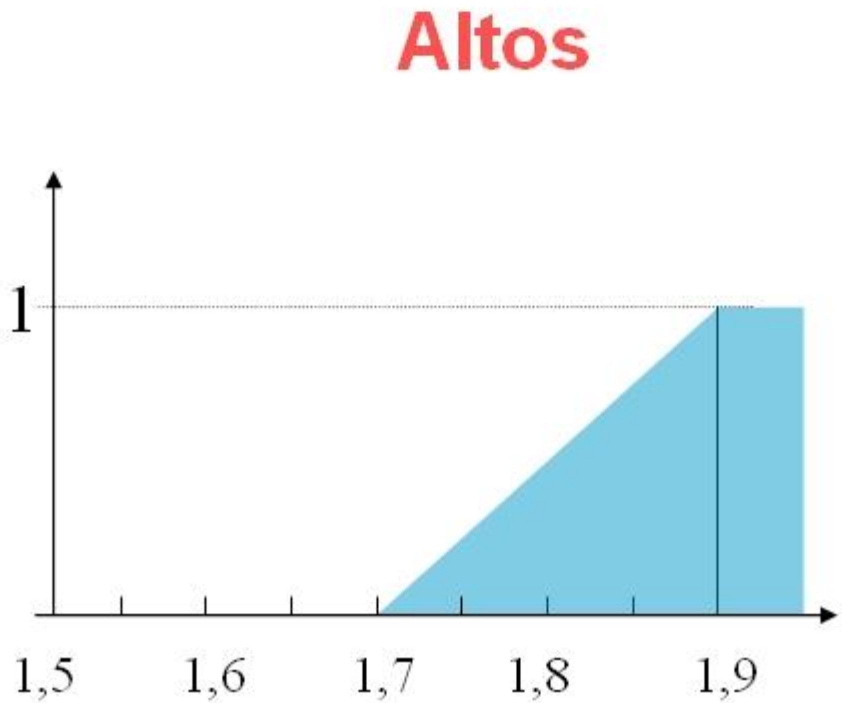
8.6 Conjunção nebulosa: Métodos de Mamdani e Larsen

- Processo de fuzificação: aplicado ao antecedente das regras nebulosas.



Definições Nebulosas para as Classes





Resposta Nebulosa

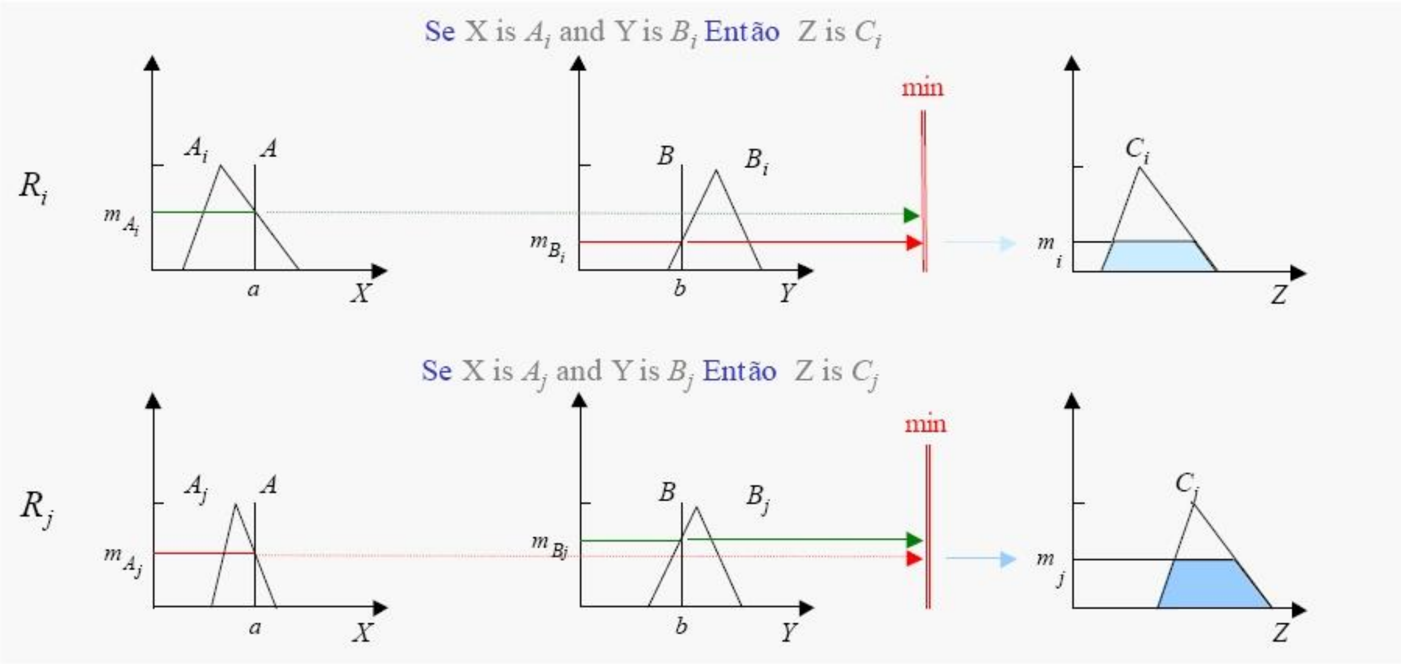
Nome	Altura	μ	Idade	μ	Alto e Meia
Ana	1,74	0.20	36	0,6	0,2
Antonio	1,83	0,65	58	0,0	0,0
João	1,69	0,00	64	0,0	0,0
José	1,87	0,85	32	0,2	0,2
Luiz	1,84	0,70	40	1,0	0,7
Maria	1,59	0,00	22	0,0	0,0
Paulo	1,79	0,45	47	0,3	0,3
Pedro	1,83	0,65	25	0,0	0,0

Conjunção nebulosa: $f_t : [0,1]^2 \to [0,1]$; $f_t(A(x), B(y)) = A(x) \text{ t } B(y), \forall(x,y) X \times Y$

- $f_c(A(x), B(y)) = A(x) \wedge B(y)$ **Mamdani**
- $f_p(A(x), B(y)) = A(x) \,.\, B(y)$ **Larsen**

Inferência: Método de Mamdani

X is A and Y is B

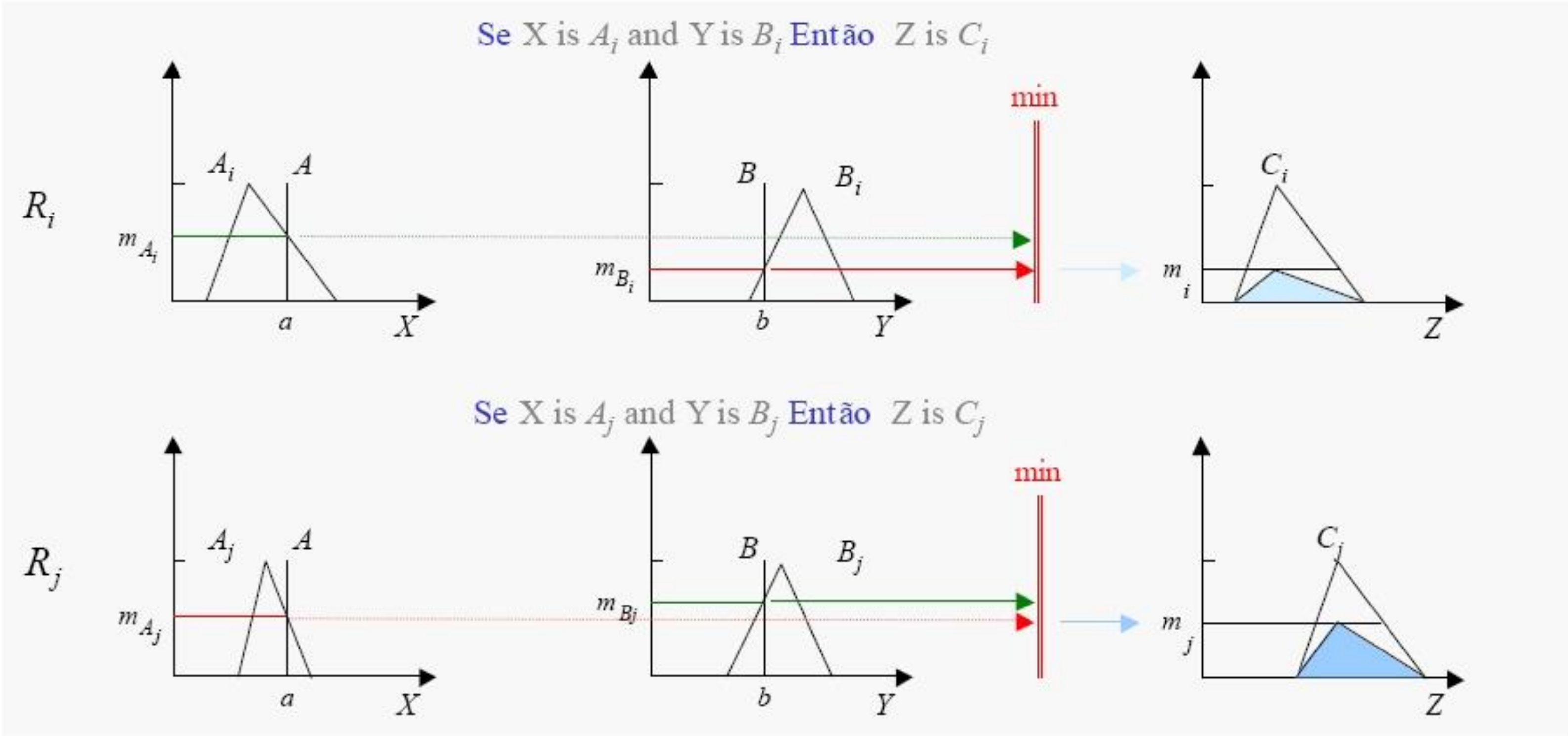


Conjunção nebulosa: $f_t : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$; $f_t(A(x), B(y)) = A(\mathrm{x})\ \mathrm{t}\ B(y)$, $\forall(x,y)\ X \times Y$

- $f_c(A(x), B(y)) = A(\mathrm{x}) \wedge B(y)$ **Mamdani**
- $f_p(A(x), B(y)) = A(\mathrm{x})\ .\ B(y)$ **Larsen**

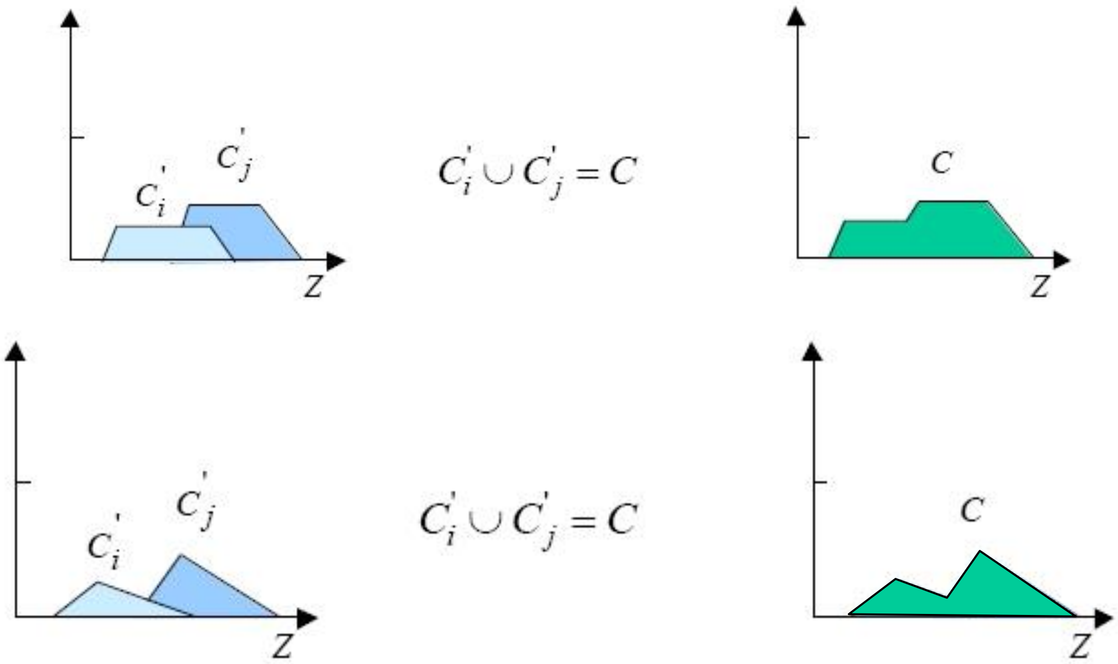
Inferência: Método de Larsen

X is A and Y is B

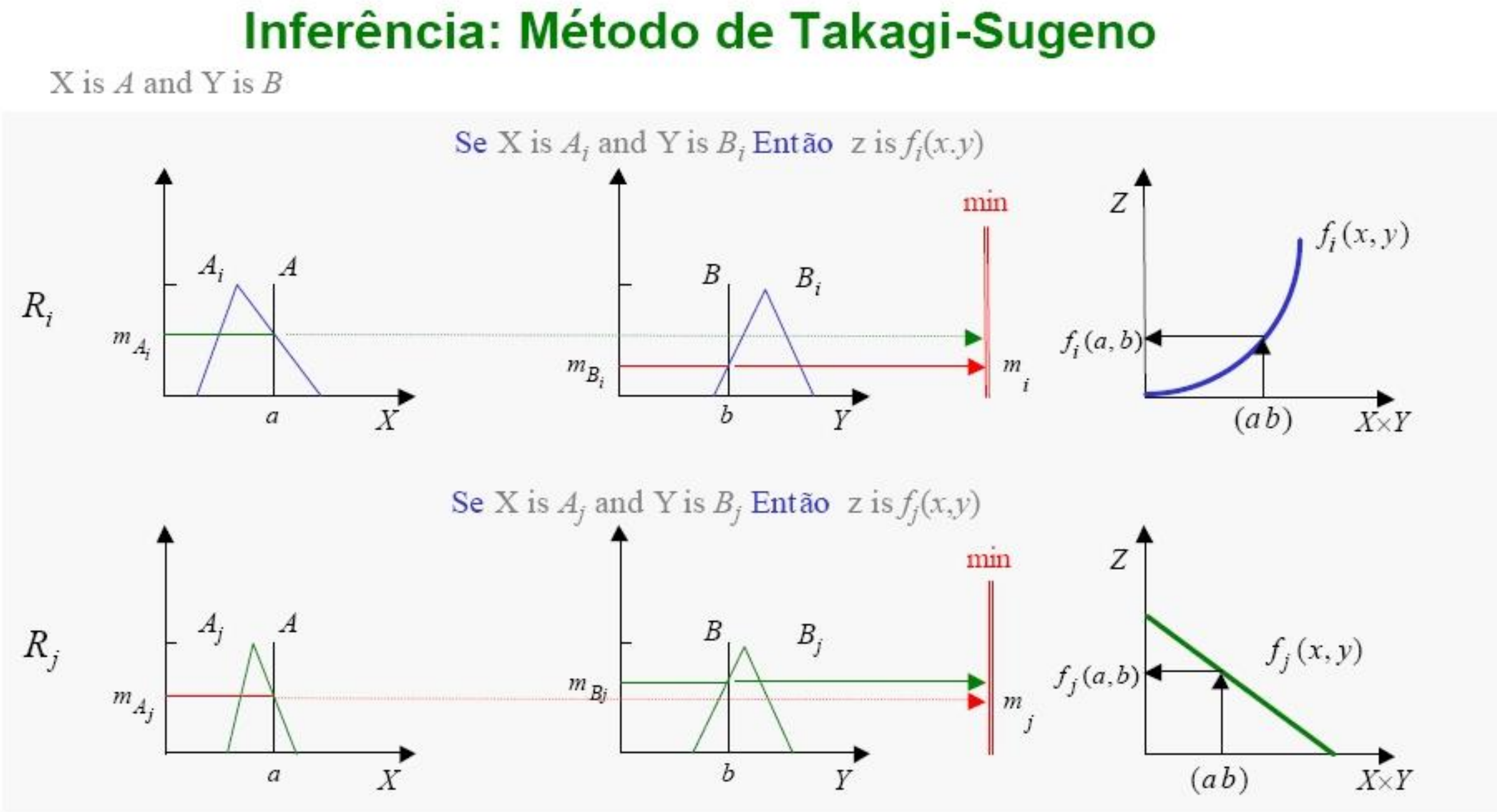


8.7 Máximo dos mínimos

- O mínimo dentre os graus de pertinência dos antecedentes define a força ou nível de ativação de cada regra.
- A <u>consistência</u> de um conjunto de regras se dá quando as regras que ativam simultaneamente (particularmente aquelas com maior grau de ativação) têm consequentes 'não-contraditórios'.



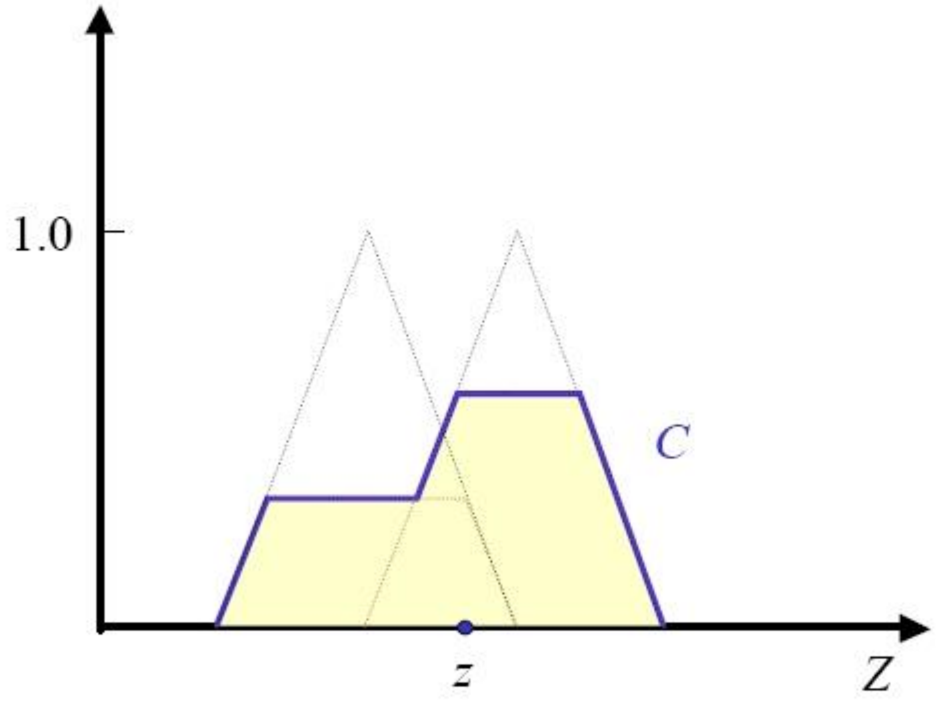
8.8 Conjunção nebulosa: método de Takagi-Sugeno



$$z = \frac{m_i f_i(a,b) + m_j f_j(a,b)}{m_i + m_j}$$

8.9 Defuzificação: Centro de Gravidade

Defuzificação: Centro de Gravidade



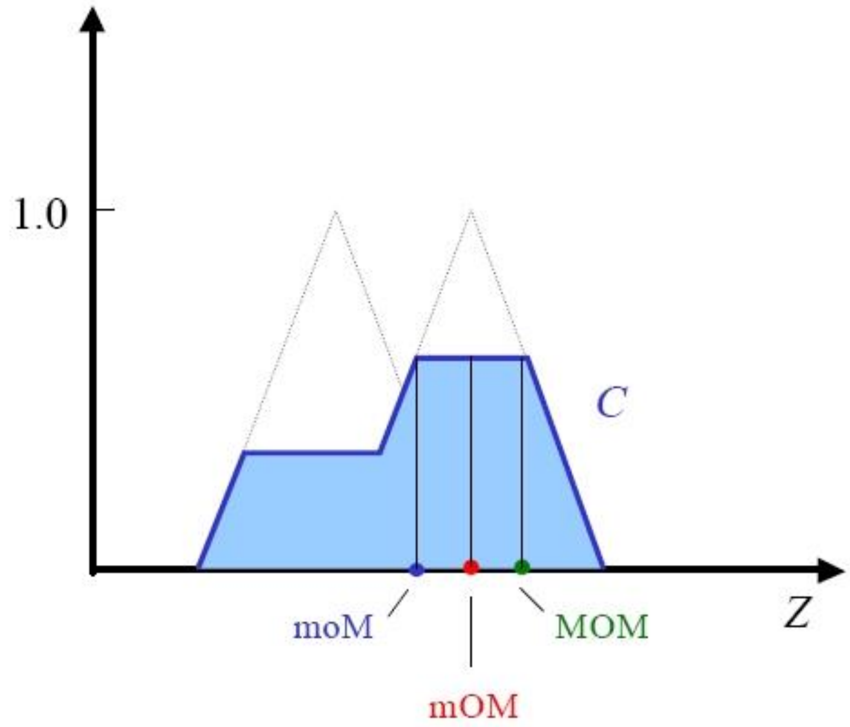
$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i C(z_i)}{\sum_{i=1}^{n} C(z_i)}$$

$$Z = [z_1, \ldots\ldots, z_n]$$

$$C = \bigcup_{k=1}^{N} C_k^{'}$$

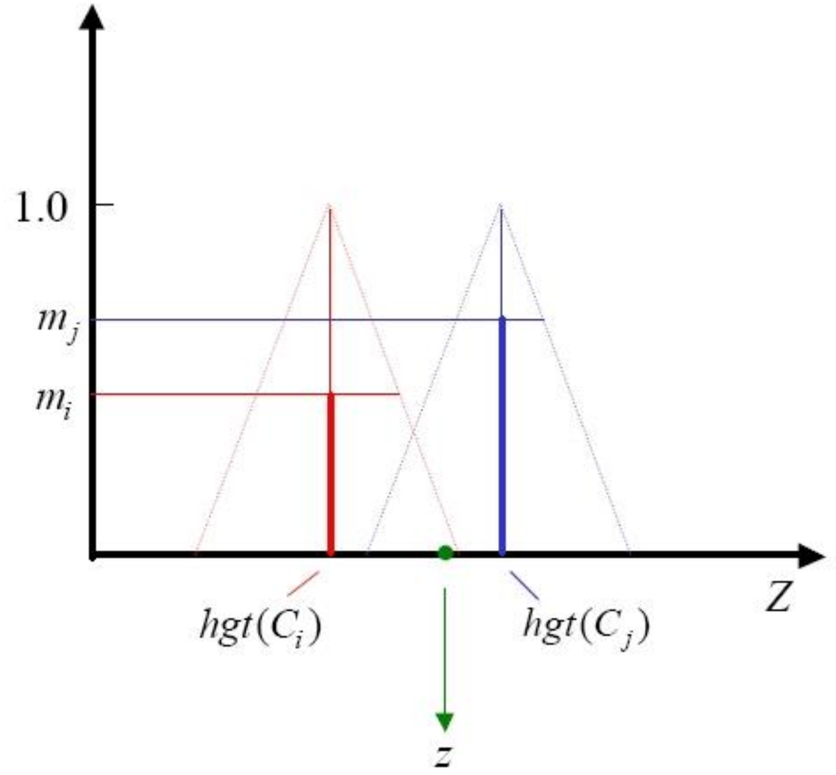
8.10 Defuzificação: Método dos máximos

Defuzificação: Método dos Máximos



8.11 Defuzificação: Método das alturas

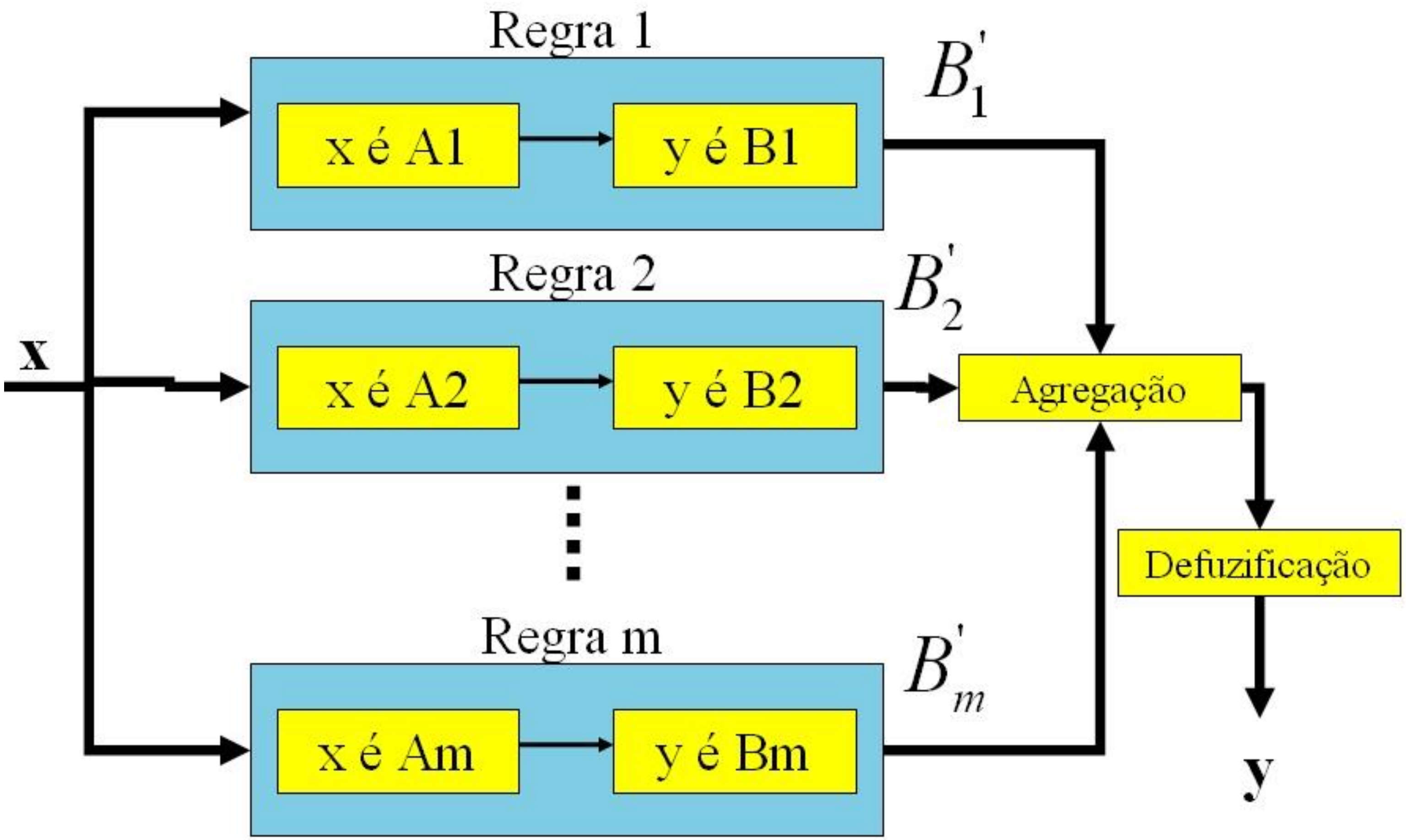
Defuzificação: Método das Alturas



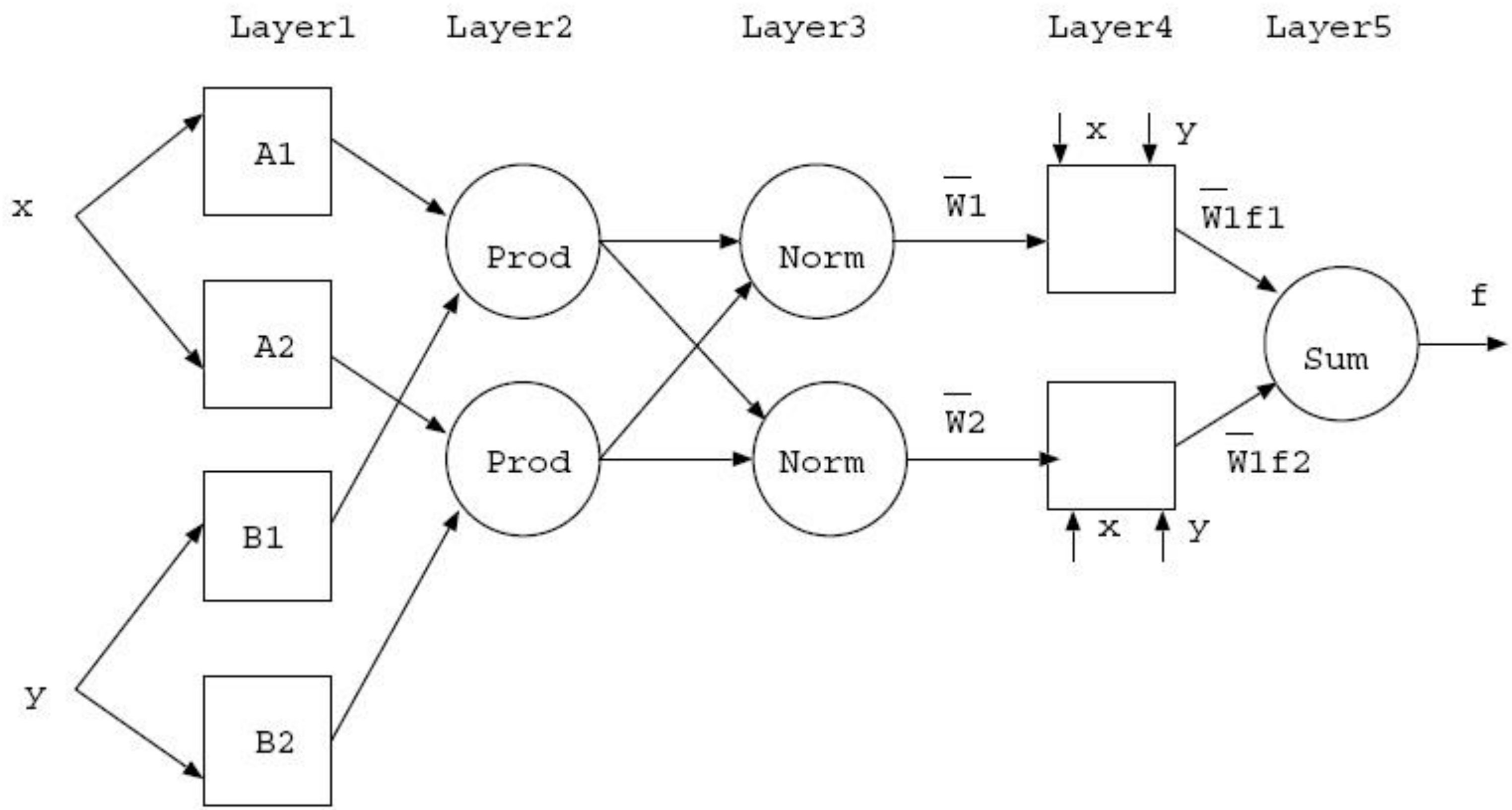
$$z = \frac{\sum_{k=1}^{N'} m_k hgt(C_k)}{\sum_{k=1}^{N'} hgt(C_k)}$$

N' = número de regras ativas

9 Sistema de Inferência Nebulosa



10 ANFIS: Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System



11 Genetic Fuzzy Systems

- Problema de classificação: Iris (4 atributos, 3 classes, 50 amostras por classe)

R_1 : Se x_3 é *baixo* E x_4 é *baixo* então $y = 0.86 - 0.3x_1 + 0.19x_2 + 0.31x_3 + 0.09x_4 - 0.14x_1^2 - 0.23x_2^2 - 2.86x_3^2$

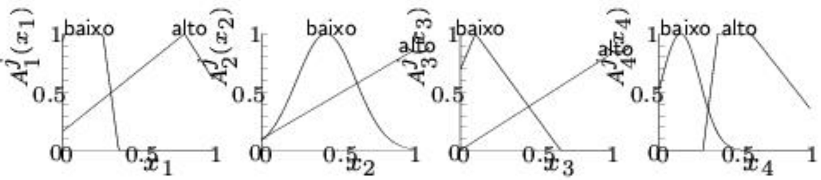
R_2 : Se x_1 é *baixo* E x_2 é *baixo* E x_3 é *alto* então $y = 1.15 - 1.97x_1 - 6.06x_2 + 1.82x_3 + 3.41x_4 + 5.18x_2^2$

R_3 : Se x_1 é *alto* E x_3 é *baixo* E x_4 é *alto* então $y = 9.7 - 0.17x_1 + 1.97x_2 + 2.65x_3 - 33.7x_4 + 0.36x_1^2 - 3.44x_2^2 - 0.8x_3^2 + 31x_4^2$

R_4 : Se x_1 é *alto* E x_2 é *alto* E x_4 é *baixo* então $y = 1.52 - 0.49x_1 + 0.2x_2 + 3.83x_3 + 0.32x_4 + 0.29x_1^2 - 0.42x_2^2 - 2.42x_3^2 - 0.24x_4^2 + 0.33x_1x_2x_3x_4$

E $\rightarrow$ t_1 com $p_t = 1.66$

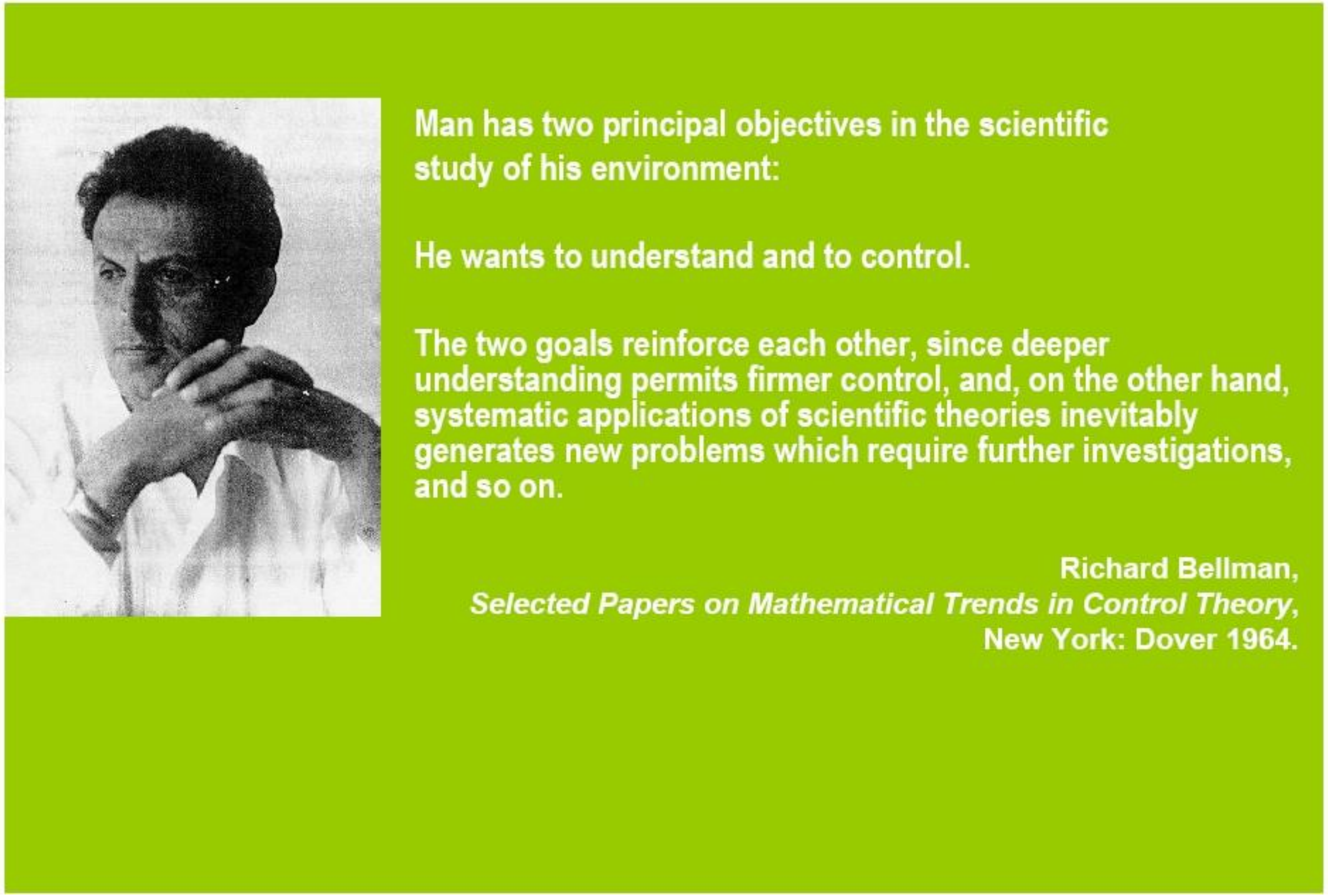
- parâmetros do melhor SN (partições nebulosas)



12 Controle Nebuloso

- Veja material anexo (Estacionamento de um caminhão e Pêndulo invertido)

Richard Bellman,1964



13 Referência bibliográfica

- Pedrycz, W. & Gomide, F. "Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing", Wiley-IEEE Press, 2007.