

  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DA  
COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
& COMPUTAÇÃO


  
UNICAMP

## Sistemas Complexos e Redes Complexas

  
Laboratório de Biorrobótica e Computação Inteligente

Fernando J. Von Zuben & Alan Godoy Souza Mello

CAMPINAS - BRASIL


  
Laboratório de Biorrobótica e Computação Inteligente

## Resumo

### Sistemas Complexos

- Definição de um Sistema Complexo
- Sistemas Complexos e Inteligência Artificial
- Reduccionismo x Holismo
- Auto-organização e comportamento emergente
- Exemplo: Escalamento metabólico
- Referências Bibliográficas para Sistemas Complexos
- Extensões para Sistemas Complexos


2

  
Laboratório de Biorrobótica e Computação Inteligente

### Definição de um sistema complexo

- Um sistema no qual grandes redes de componentes sem controle central e com regras de operação simples levam a um comportamento coletivo complexo, processamento sofisticado de informação e adaptação via aprendizado ou evolução (Mitchell, 2011).
- O estudo de sistemas complexos representa um novo ramo de atuação científica que investiga como as relações entre partes sustenta o comportamento coletivo do sistema e como o sistema interage e estabelece relações com o ambiente.

3

  
Laboratório de Biorrobótica e Computação Inteligente

### Definição de um sistema complexo

- Um sistema é complexo quando ele não pode ser apropriadamente descrito "em poucas palavras" ou "em poucos bits".
- Os modelos matemáticos de sistemas complexos são geralmente fundamentados em mecânica estatística, teoria de informação, dinâmica não-linear e teoria de grafos.
- A funcionalidade de um sistema complexo está intrinsecamente vinculada às relações estabelecidas entre as partes e não apenas ao papel individual das partes que o constituem.


4

  
Laboratório de Biorrobótica e Computação Inteligente

### Sistemas complexos e Inteligência Artificial

- Promovem o estudo do surgimento de consciência e de inteligência a partir de elementos simples.
- Permitem entender inteligência como um comportamento emergente.
- Sustentam o estudo de sistemas autônomos em interação, que podem levar a comportamentos globais complexos a partir de agentes mais simples:
  - Robótica coletiva;
  - Sistemas multiagentes;
  - Sistemas distribuídos.

5

  
Laboratório de Biorrobótica e Computação Inteligente

### Reduccionismo x Holismo

- Reduccionismo: Fundamentado na estratégia de particionar sistemas de elevada complexidade em sub-sistemas cada vez menores e mais simples, até que seja possível resolver cada um dos sub-sistemas ou enquanto o custo-benefício do particionamento se mostrar compensador.
- A solução para o sistema completo vai consistir então na combinação/agregação das soluções dos sub-sistemas.
- Modelo predominante na ciência, mas que vem encontrando mais e mais dificuldade em tratar problemas de interesse prático. As novas tendências são denominadas de *network science*.

6



## Reduccionismo x Holismo

- Holismo: visão sistêmica.
- O holismo está fundamentado em qualquer ponto de vista segundo o qual as propriedades dos elementos constituintes de um todo são determinadas pelas relações que eles sustentam com outros elementos.
- Neste caso, um elemento em um sistema holístico não pode existir isolado do todo. Exemplo: O significado de uma palavra em um texto depende de seu relacionamento com outras palavras do texto.
- Referência: Oshry, B. Seeing Systems: Unlocking the Mysteries of Organizational Life, ReadHowYouWant, 2012.

7



## Auto-organização e comportamento emergente

- Auto-organização: Fenômeno derivado da interação de múltiplos agentes, caracterizado pela presença de realimentação positiva, realimentação negativa e interação local.
- Comportamento emergente em sistemas complexos: O todo é mais do que a soma das partes. É a essência do holismo.
- A interação (local) diz muito acerca do comportamento do sistema como um todo, inviabilizando abordagens reducionistas.
- Leitura relevante:
  - Kauffman, S. At home in the universe: The search for the laws of self-organization and complexity, Oxford University Press, 1995.

8



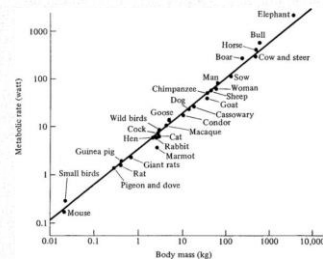
## Exemplo: Escalamento metabólico

- Teoria de escalamento metabólico em animais:
  - Enquanto a superfície de um animal escala, aproximadamente, de acordo com o quadrado de seu tamanho, seu volume escala pelo cubo do tamanho
  - Se a taxa metabólica (watts) aumentasse de acordo com a massa dos animais, os animais grandes superaqueceriam!

9



## Exemplo: Escalamento metabólico



Labra, F.A., Marquet, P.A. & Bozinovic, F. Scaling metabolic rate fluctuations, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, vol. 104, no. 26, pp. 10900-10903, 2007.

10



## Exemplo: Escalamento metabólico

- Teoria de escalamento metabólico em animais:
  - O metabolismo, porém, cresce de forma sublinear com a massa do animal, com um expoente de 3/4
  - O denominador 4, porém, não tinha nenhuma explicação!
  - Usando as ideias de Sistemas Complexos, foi desenvolvida a teoria de escalamento metabólico, que afirma que o sistema circulatório aproximaria uma quarta dimensão e, daí, vem a origem do denominador 4
  - Essa mesma ideia também é aplicada para além de indivíduos, para cidades – estimação do gasto de recursos que uma cidade teria!

11



## Referências Bibliográficas para Sistemas Complexos

- Holland, J. Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity, Basic Books, 1996.
- Johnson, N. Simply Complexity: A clear guide to complexity theory, Oneworld Publications, 2010.
- Kauffman, S.A. The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution. Oxford University Press, 1992.
- Mitchell, M. Complexity: A Guided Tour, Oxford University Press, 2011.
- Waldrop, M.M. Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos, Simon & Schuster, 1993.
- Wolfram, S. A New Kind of Science, Wolfram Media Inc., 2002.

12



## Extensões para sistemas complexos

- Interdependência de sistemas complexos (Gao, J., Dudyrev, S.V., Stanley, H.E. & Havlin, S. Networks formed from interdependent networks, Nature Physics, vol. 8, no. 1, pp. 40-48, 2012.)
- Sistemas de sistemas (SoS, System of Systems) (Jamshidi, M. System-of-Systems Engineering - A Definition, IEEE SMC, 2005. / Gorod, A., Sauser, B. & Boardman, J. System-of-Systems Engineering Management: A Review of Modern History and a Path Forward, IEEE Systems Journal, vol. 2, no. 4, pp. 484-499, 2008.)
- Cyberphysical systems (Lee, E.A. "Cyber Physical Systems: Design Challenges", University of California, Berkeley Technical Report No. UCB/EECS-2008-8, 2008.)

13



## Resumo

### Redes Complexas

- Introdução
  - Contextualização
  - Histórico
  - Onde estão presentes?
- Redes aleatórias
- Redes small world
- Redes livres de escala (*scale-free*)
- Distribuição em lei de potência
- Métodos de Crescimento
- Propriedades estruturais
- Referências Bibliográficas para Redes Complexas

14



## Introdução

### Contextualização

- Em diversos ramos da ciência, é comum a formulação de problemas valendo-se de estruturas em redes (grafos).
- Essa abordagem contrapõe-se às abordagens mais reducionistas, uma vez que ela considera não apenas as partes formantes como também as interações dessas partes.
- Capaz de explicar o surgimento de efeitos advindos de comportamento emergente.

15



## Introdução

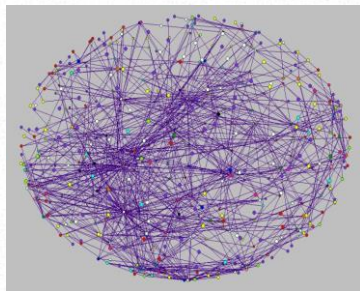
### Histórico

- Início das pesquisas no meio do século passado.
- Pesquisa com Redes Complexas vem ganhando força com o aumento do poder de processamento, o que permite a análise de dados de redes reais.
- Pesquisa inicial de redes reais pautava-se pelos modelos aleatórios (Erdős & Rényi, 1959).
- Modelos mais realistas aparecem com as redes *small world* (Watts & Strogatz, 1998).
- Proposta das redes *scale-free* (Barabási & Albert, 1999).

16



## Introdução



Extraído de <http://necsi.edu/affiliates/braha/StructureandDynamics.htm>

17



## Introdução

### Onde estão presentes?

- Ciências Sociais: redes de interação social, redes de relações entre palavras de uma língua, redes de colaboração científica, redes de contato sexual.
- Ciências Econômicas: sistema de interação de consumidores com produtores, rede de fornecedores para a síntese de produtos de alta tecnologia e alto valor agregado.
- Ciências Biológicas: na ecologia, em redes tróficas e redes sociais intra e inter-específicas, na genética, em redes de interações gênicas, e na medicina, na dispersão de doenças infecciosas, em redes metabólicas e em redes neurais reais.

18





## Introdução

### Onde estão presentes?

- Como exemplo de redes de interações sociais, temos o experimento de Stanley Milgram (6 níveis de distância).
- As redes de relações entre palavras de uma língua envolvem tanto as palavras com as quais outras palavras se relacionam (como elas se conectam em uma frase), como a rede de palavras em um dicionário;
- Redes de citações foram as primeiras a serem estudadas nesse contexto de redes complexas (Newman, 2001a,b);
- A rede neural do verme *Caenorhabditis elegans* é livre de escala e forma uma rede mundo pequeno (*small world*).

19



## Introdução

### O experimento de Milgram

- O efeito de mundo pequeno ganha atenção a partir do trabalho de Milgram (1967), que realizou um experimento no qual um conjunto de pessoas deveria enviar cartas a seus conhecidos e estes a seus contatos, recursivamente, até que estas cartas chegassem a um conjunto de indivíduos alvos.
- Muitas das cartas se perderam, porém aquelas que chegaram a seu destino passaram, em média, pela mão de seis pessoas, uma distância pequena quando comparada à quantidade de pessoas existentes no planeta e à pequena quantidade de conexões sociais entre essas pessoas.

20



## Introdução

### O experimento de Milgram

- No experimento de Milgram (1967), os envolvidos possuíam apenas informações como primeiros nomes, cidades em que residem e emprego dos destinatários.
- Logo, cada pessoa podia repassar a carta a outro indivíduo que ela imaginava estar mais próximo do alvo, sem qualquer conhecimento mais profundo sobre a topologia da rede social.
- Mesmo assim, os participantes foram capazes de encontrar caminhos eficientes, conectando as pessoas de origem e de destino.

21



## Introdução

### *Caenorhabditis elegans*

- É um nematelminto (verme cilíndrico).



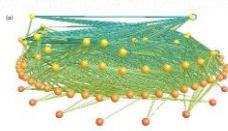
*C. elegans*

22

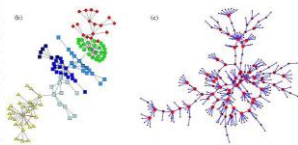


## Introdução

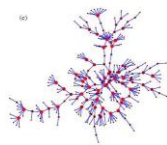
Rede trófica inter-espécies em um lago (inclui relações presa-predador)



Colaboração entre cientistas em uma instituição de pesquisa



Rede de contato sexual



Newman, M.E.J. The structure and function of complex networks, SIAM Review, vol. 45, pp. 167-256, 2003.

23



## Introdução

### Onde estão presentes?

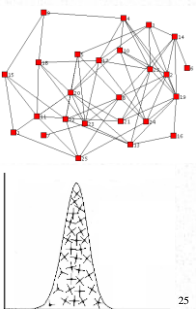
- Ciências Exatas: representação de redes elétricas, *backbone* da Internet, *links* entre páginas na Web, representação de circuitos integrados, modelagem de mecânica estatística, organização de redes *peer-to-peer*, redes de preferências em um sistema de recomendação, rede ferroviária e redes de dependência entre softwares.
- Uma área de destaque no estudo de redes complexas é a Física.

24

**Redes aleatórias**

Modelo de Erdős e Rényi

- Links são adicionados com igual probabilidade entre os nós.
- Conectividade segue uma curva de distribuição normal.
- Para redes grandes, todos os nós terão aproximadamente o mesmo número de links.

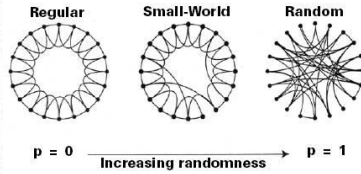


25

**Redes small world**

Modelo de Watts-Strogatz

- Redes fortemente clusterizadas.
- Algumas conexões aleatórias.



26

**Redes small world**

Modelo de Watts-Strogatz

- Início:** a rede é iniciada como um anel com  $N$  vértices, cada qual conectado a seus  $K$  vizinhos mais próximos.
- Aleatoriedade:** cada aresta do grafo original é reconectada com probabilidade  $p$ , sem a possibilidade da criação de laços ou multi-arestas. A reconexão de uma aresta é feita ao desligá-la de um de seus extremos, conectando-a a um vértice selecionado aleatoriamente da rede.
- Pode-se observar que, quando  $p = 0$ , a rede final mantém-se como um anel ordenado, enquanto que quando  $p = 1$ , a rede torna-se plenamente aleatória.

27

**Redes livres de escala (scale-free)**

Em busca de redes que reflipam a realidade

- Modelos anteriores, como o modelo de grafo aleatório de Erdős & Rényi e o modelo de redes small-world de Watts & Strogatz, propunham formas de geração de grafos em que a quantidade de vértices no sistema era definida a priori, sendo permitida a criação apenas de novas ligações no decorrer do tempo.
- Apesar de suprir algumas das características comuns às redes complexas, esses modelos mostraram-se insuficientes para explicar a origem de tais sistemas. Em ambos os casos, por exemplo, a distribuição de graus segue uma distribuição de Poisson.

28

**Redes livres de escala (scale-free)**

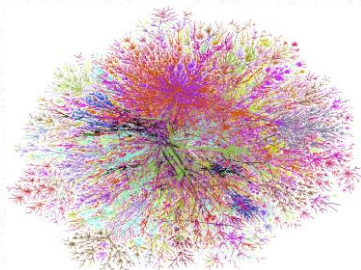
Em busca de redes que reflipam a realidade

- Através da análise das redes reais, é possível observar que, em geral, elas não são fechadas a novos nós.
- Em redes de interação social é comum o aparecimento de novos membros – através do nascimento ou da mudança de pessoas, por exemplo –, assim como de tempos em tempos surgem novas espécies em redes biológicas, alterando sua estrutura de relações.
- Também é possível verificar que, em algumas redes, para cada nova relação criada há uma probabilidade maior de que o nó que a receba seja um nó altamente conectado. Tal característica pode ser vista na rede de citações científicas, onde artigos já bastante citados apresentam maior probabilidade de receber novas citações.

29

**Redes livres de escala (scale-free)**

Mapeando a Internet



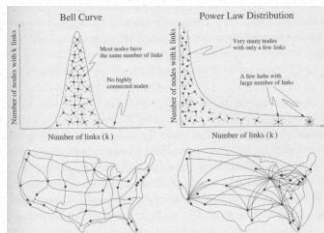
30



## Redes livres de escala (scale-free)

### Características

- **Conectividade segue lei da potência  $p(k)=k^{-\lambda}$**
- **Hubs**
- **Hierarquia**
- **Small world**



## Exemplos de redes scale-free

- Internet
- Redes de interações de espécies
- Redes neurais
- Redes gênicas e proteicas
- Sistemas de tráfego aéreo
- Sistemas de distribuição de energia elétrica
- Redes de interações sociais
- Redes de relações comerciais

32

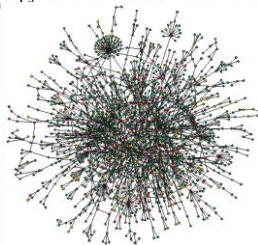


## Redes gênicas e proteicas

### Características:

- Power law distribution  $P(k) \sim k^{-\lambda}$
- Formação de módulos
- Small world

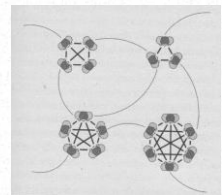
Seung, H.S. Towards functional connectomics, Nature, vol. 471, no. 10, pp. 7-9, 2011.



## Redes Sociais

### Grande relevância em seu estudo

- Orkut, Facebook, LinkedIn
- **Redes sociais tendem a ser clusterizadas.**
- **Importância dos links fracos.**

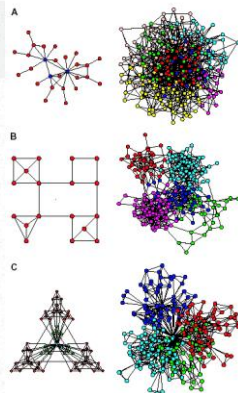


34

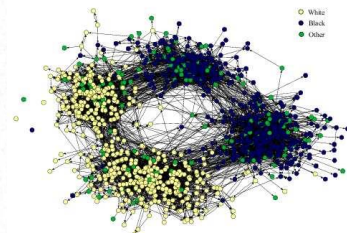


- A) Scale-free network
- B) Rede modular
- C) Modularização hierárquica

Friedman, E.J. and Landsberg, A.S. Hierarchical networks, power laws, and neuronal avalanches, Chaos, 23(1):013135, 2013.



## Redes sociais



36



## Distribuição em lei de potência

- Ao contrário do que ocorre em um grafo aleatório, onde espera-se uma distribuição de graus binomial ou de Poisson, nas redes complexas a distribuição de graus se dá segundo a seguinte equação:

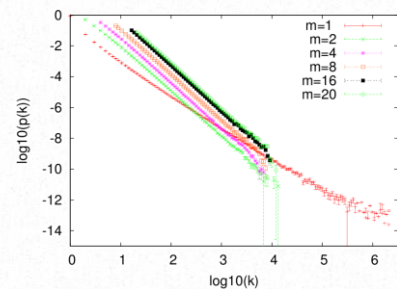
$$p(k) \propto k^{-\gamma}$$

sendo  $k$  o grau do nó e  $\gamma$  uma constante positiva.

- Essa distribuição é chamada de lei de potência.

37

## Distribuição em lei de potência



38

## Distribuição em lei de potência

- Apesar de serem esparsas, redes complexas apresentam baixa distância média entre seus nós.
- Essa distância é proporcional a  $\log(N)$ , onde  $N$  é o número de nós na rede, em oposição à relação linear esperada entre o diâmetro da rede e  $N$ .
- Essa propriedade é chamada de propriedade de mundo pequeno (ou *small world*).
- Essas redes também apresentam um alto agrupamento (clusterização) e seus nós formam comunidades.

39

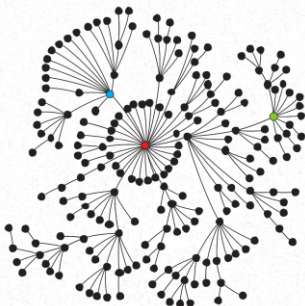
## Métodos de Crescimento

### Modelo Livre de Escala (Modelo BA)

- Mecanismo proposto por Barabási & Albert, em seu artigo "Emergence of scaling in random networks", de 1999.
- Principais modelos anteriores (o grafo aleatório de Erdős & Rényi e as redes *small world* de Watts & Strogatz) explicavam parcialmente as propriedades de redes complexas.
- Modelos anteriores apresentavam número fixo de nós, alterando apenas a forma como esses estabelecem ligações.

40

## Métodos de Crescimento



41

## Métodos de Crescimento

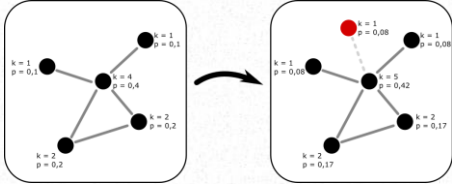
### Modelo Livre de Escala (Modelo BA)

- O modelo pode ser dividido em duas etapas:
  - Crescimento: a rede deve ser iniciada com uma quantidade  $m_0$  de nós, sendo um novo nó adicionado a cada passo. Junto do nó são adicionadas  $m$  ( $m \leq m_0$ ) arestas
  - Conexão preferencial (*preferential attachment*): cada nova aresta deve ligar o novo nó a um nó  $i$  existente na rede, escolhido com probabilidade

$$p(i) = \frac{k_i}{\sum k_j}$$

42

**Métodos de Crescimento**



43

**Métodos de Crescimento**

**Modelo Livre de Escala (Modelo BA)**

- De acordo com Barabási & Albert, essas duas características são necessárias e suficientes para garantir as características livres de escala.
- De fato, o modelo BA oferece um modelo mais realista, uma vez que, ao contrário das antigas propostas, grande parte das redes reais são abertas ao aparecimento de novos nós.
- Após alguns passos, as propriedades estatísticas da rede tornam-se independentes de tempo e tamanho da rede.

44

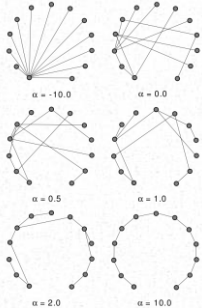
**Métodos de Crescimento**

**Variantes do Modelo Livre de Escala**

- Adição e remoção de arestas: possibilidade de adição ou remoção de uma ligação não necessariamente relacionada com o nó adicionado.
- Fitness*: sugere que, em alguns casos, a distribuição de graus é devida à qualidade intrínseca dos nós:
  - Influência multiplicativa;
  - Influência aditiva – importante em modelos que permitam que vértices sejam criados sem arestas.
- Envelhecimento de vértices: atratividade de um nó depende também de sua idade.

45

**Métodos de Crescimento**



Exemplos de redes onde há o envelhecimento de nós. No primeiro caso o nó ganha atratividade, no segundo caso é o caso usual e nos outros o nó vai perdendo atratividade.

46

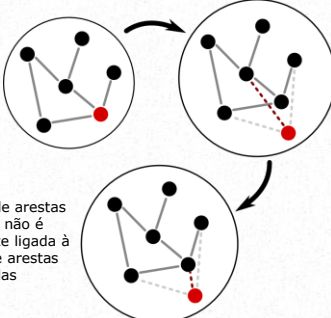
**Métodos de Crescimento**

**Modelo de Crescimento Proteômico**

- Pode ser dividido nas seguintes etapas (Solé et al., 2002):
  - Início: rede é iniciada com um conjunto pré-existente de vértices e arestas;
  - Crescimento: a cada passo um nó é duplicado;
  - Remoção: as arestas do novo nó são removidas com probabilidade  $\delta$ ;
  - Adição: novas arestas são criadas a partir do novo nó com probabilidade  $\alpha$ .
- Utiliza a ideia de *preferential attachment* de forma indireta: quanto maior o grau de um nó, maior a chance de ter uma aresta duplicada.

47

**Métodos de Crescimento**



A quantidade de arestas adicionadas não é necessariamente ligada à quantidade de arestas removidas

48





## Métodos de Crescimento

### Modelo "good gets richer"

- Cada nó possui uma *fitness*  $\eta_i$ , sendo que a cada aresta criada os nós relacionados são escolhidos com probabilidade proporcional a esse *fitness*, segundo a seguinte equação:

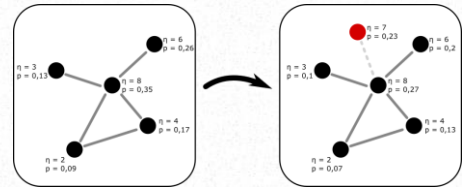
$$p(i) = \frac{\eta_i}{\sum \eta_j}$$

- Apenas algumas distribuições de *fitness* levarão a uma rede livre de escala: uma distribuição de *fitness* em lei da potência é uma forma trivial de obter redes com características livres de escala

49



## Métodos de Crescimento



50



## Métodos de Crescimento

### Modelo Connecting Nearest Neighbors (CNN)

- Modelo baseado em redes sociais: os nós têm maior probabilidade de conectar-se aos nós que se relacionam com seus vizinhos.
- O modelo pode ser descrito da seguinte forma:
  - As arestas podem ser conectadas por uma aresta real ou por uma aresta potencial;
  - Dois nós são conectados por arestas potenciais se não há arestas reais entre os nós, mas há um vizinho em comum com o qual os dois nós se conectam por uma aresta real.

51



## Métodos de Crescimento

### Modelo Connecting Nearest Neighbors (CNN)

- Passo a passo, o modelo pode ser explicado da seguinte forma:
  - A rede começa com um único vértice;
  - A cada passo, deve-se criar um novo vértice com probabilidade  $1 - u$ , sendo esse vértice ligado a um outro vértice escolhido aleatoriamente;
  - Com probabilidade  $u$  uma aresta potencial é convertida em uma aresta real.

52



## Métodos de Crescimento

### Modelo Connecting Nearest Neighbors (CNN)

- Redes geradas por esse modelo apresentam alto grau de clusterização.
- É possível verificar a ocorrência de *preferential attachment* nesse modelo: nós com mais vizinhos diretos (a uma aresta de distância) costumam possuir mais vizinhos a duas arestas de distância.
- O valor do expoente  $\gamma$  da lei de potência é determinado pelo valor de  $u$ .

53



## Propriedades estruturais

- Em termos práticos, a representação do conhecimento empregando modelos de redes complexas permite que propriedades estruturais das redes determinem funcionalidades do sistema.
- Quando as redes apresentam metadinâmica, ou seja, quando nós e conexões são criados e eliminados ao longo do tempo, a emergência de certos tipos de estrutura (topologia da rede) é um resultado de fenômenos de auto-organização.
- Referência relevante: Ruths, J. and Ruths, D. Control profiles of complex networks, Science, vol. 343, pp. 1373-1376, 2014.

54



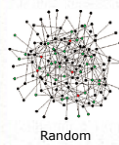
## Propriedades estruturais

- Propriedades estruturais de redes complexas podem ser obtidas a partir do cômputo de índices como (Costa et al. 2007):
  - Distribuição de grau dos nós;
  - Grau de agrupamento ou formação de comunidades;
  - Grau de intermediação;
  - Grau de modularidade;
  - Grau de conectividade.

55



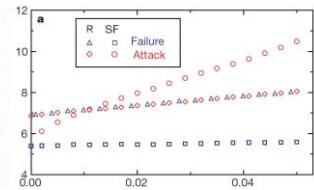
## Tolerância a Falhas



Random



Scale-Free



- Cohen, R., Erez, K., Bem-Avraham, D. and Havlin, S. Resilience of the Internet to random breakdowns, *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 21, pp. 4626-4628, 2000.
- Cohen, R., Erez, K., Bem-Avraham, D. and Havlin, S. Breakdown of the Internet under intentional attack, *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 16, pp. 3682-3685, 2001.

56



## Referências Bibliográficas para Redes Complexas

- Barabási, A.-L. The network takeover, *Nature Physics*, vol. 8, pp. 14-16, 2012.
- Barabási, A.-L. and Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, vol. 286, pp. 509-512, 1999.
- Barrat, A., Barthélemy, M. and Vespignani, A. *Dynamical processes on complex networks*, Cambridge University Press, 2012.
- Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M. and Hwang, D.U. Complex networks: Structure and dynamics, *Physics Reports*, vol. 424, no. 4, pp. 175-308, 2006.
- Costa, L. F., Oliveira Jr., O.N., Travieso, G., Rodrigues, F. A., Villas Boas, P. R., Antiquiera, L., Viana, M.P. and Rocha, L.E.C. Analyzing and modelling real-world phenomena with complex networks: A survey of applications, *Advances in Physics*, vol. 60, no. 3, pp. 329-412, 2011.
- Costa, L. F., Rodrigues, F. A., Travieso, G. and Villas Boas, P. R. Characterization of complex networks: A survey of measurements, *Advances in Physics*, vol. 56, no. 1, pp. 167-242, 2007.
- Dorogovtsev, S.N. and Mendes, J.F.F. *Evolution of networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, 2014.
- Erdős, P. and Rényi, A. On random graphs. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, vol. 6, pp. 290-297, 1959.

57



## Referências Bibliográficas para Redes Complexas

- Milgram, S. The small world problem. *Psychology Today*, 1:61-67, 1967.
- Newman, M.E.J. *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, 2010.
- Newman, M.E.J. Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. *Physical Review E*, 64(1):016131, 2001a.
- Newman, M.E.J. Scientific collaboration networks. II. Shortest paths, weighted networks, and centrality. *Physical Review E*, 64(1):016132, 2001b.
- Newman, M.E.J., Barabási, A.-L., Watts, D.J. *The Structure and Dynamics of Networks*, Princeton University Press, 2006.
- Newman, M.E.J. The structure and function of complex networks, *SIAM Review*, vol. 45, no. 2, pp. 167-256, 2003.
- Solé, R.V., Satorras, P.R., Smith, E. and Kepler, T.B. A model of large-scale proteome evolution, *Advances in Complex Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 43-54, 2002.
- Van Mieghem, P. *Graph spectra for complex networks*, Cambridge University Press, 2011.
- Watts, D.J. & Strogatz, S.H. Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature*, vol. 393, pp. 440-442, 1998.

58



## Leitura Adicional Recomendada

- Barabási, A.-L. "Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means for Business, Science, and Everyday Life", Plume Books, 2003.
- Buchanan, M. "Nexus: Small Worlds and the Groundbreaking Theory of Networks", W. W. Norton & Company, 2003.
- Johnson, S. "Emergence: The Connected Lives of Ants, Brains, Cities, and Software", Scribner, 2002.
- Strogatz, S. "Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order", Hyperion, 2003.
- Watts, D.J. "Six Degrees: The Science of a Connected Age", W. W. Norton & Company, 2003.
- Watts, D.J. "Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness", Princeton Studies in Complexity, Princeton University Press, 2003.
- Notas de aula em: <http://www.cs.uoi.gr/~tsap/teaching/MACN2006/references.ftml>