Prueba de Oposición - Área Algoritmos

Gonzalo Ciruelos

14 de septiembre de 2015

Presentación

- Materia : *Algoritmos y Estructuras de Datos II*
- Práctica : *Segunda práctica - Demostración de propiedades*

Presentación

- Primera parte
  - Especificación con Tipos Abstractos de Datos
  - **Demostración de propiedades**
  - Diseño: invariante de representación y función de abstracción
- Segunda Parte
  - Complejidad Algorítmica
  - Diseño: elección de estructuras de datos
  - Ordenamiento
  - Dividir y Conquistar

Contexto

- El ejercicio podría formar parte de una práctica o de una clase introductoria al tema.
- Es bueno como introducción al tema porque para resolverlo se utilizan técnicas comunes en todos los problemas de inducción estructural.
- Los alumnos terminaron la práctica de TADs, asistieron a la teórica del tema y empezaron a ejercitarlos.

Enunciado

Demuestre por inducción estructural que:

$$(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))(\mathrm{Reverso}(\mathrm{Reverso}(s)) =_{obs} s)$$

Plantee claramente los lemas necesarios y demostrarlos antes de usarlos en la demostración principal.

Solución

Recordemos el esquema de inducción del TAD $\texttt{secu}(\alpha)$.

$$P(\mathrm{nil}) \wedge ((\forall a : \alpha)(\forall s : \texttt{secu}(\alpha)P(s)) \implies P(a \bullet s))$$

Si probamos esto, probamos que $(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))P(s)$.

Solución

Recordemos el esquema de inducción del TAD $\mathtt{secu}(\alpha)$.

$$P(\text{nil}) \wedge ((\forall a : \alpha)(\forall s : \mathtt{secu}(\alpha)P(s)) \implies P(a \bullet s))$$

Si probamos esto, probamos que $(\forall s : \mathtt{secu}(\alpha))P(s)$.
En este caso, P (el *predicado unario*) es

$$P(s) \equiv \text{Reverso}(\text{Reverso}(s)) = s$$

Lema

$$(\forall s : \mathtt{secu}(\alpha))(\forall a : \alpha)(\mathsf{Reverso}(s \circ a) = a \bullet \mathsf{Reverso}(s))$$

Para probarlo vamos a usar también inducción estructural, con

$$P(s) \equiv (\forall a : \alpha)(\mathsf{Reverso}(s \circ a) = a \bullet \mathsf{Reverso}(s))$$

Lema: Caso base

$P(\mathrm{nil}) \equiv (\forall a : \alpha)(\mathrm{Reverso}(\mathrm{nil} \circ a) = a \bullet \mathrm{Reverso}(\mathrm{nil}))$
Sea $a : \alpha$, veamos que $\mathrm{Reverso}(\mathrm{nil} \circ a) = a \bullet \mathrm{Reverso}(\mathrm{nil})$.

$$\overset{\mathrm{snoc}}{\equiv} \mathrm{Reverso}(a \bullet \mathrm{nil}) = a \bullet \mathrm{Reverso}(\mathrm{nil})$$

Lema: Caso base

$P(\text{nil}) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}))$
Sea $a : \alpha$, veamos que $\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$.

$$\overset{\text{snoc}}{\equiv} \text{Reverso}(a \bullet \text{nil}) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$$
$$\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{nil}) \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$$

Lema: Caso base

$P(\text{nil}) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}))$
Sea $a : \alpha$, veamos que $\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$.

$$\overset{\text{snoc}}{\equiv} \text{Reverso}(a \bullet \text{nil}) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$$
$$\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{nil}) \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$$
$$\overset{\text{rev1}}{\equiv} \text{nil} \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$$

Lema: Caso base

$P(\text{nil}) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}))$
Sea $a : \alpha$, veamos que $\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$.

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} \text{Reverso}(a \bullet \text{nil}) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{nil}) \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} \text{nil} \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet \text{nil} = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})
\end{aligned}
$$

Lema: Caso base

$P(\text{nil}) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}))$
Sea $a : \alpha$, veamos que $\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$.

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} \text{Reverso}(a \bullet \text{nil}) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{nil}) \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} \text{nil} \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet \text{nil} = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} a \bullet \text{nil} = a \bullet \text{nil}
\end{aligned}
$$

Lema: Caso base

$P(\text{nil}) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}))$
Sea $a : \alpha$, veamos que $\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$.

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} \text{Reverso}(a \bullet \text{nil}) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{nil}) \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} \text{nil} \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet \text{nil} = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} a \bullet \text{nil} = a \bullet \text{nil} \\
&\equiv \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Lema: Caso inductivo

Queremos ver que

$$(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))(\forall e : \alpha)(P(s) \implies P(e \bullet s))$$

Sean $s : \texttt{secu}(\alpha)$ y $e : \alpha$, y supongamos $P(s)$, es decir,

$$(\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(s \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(s))$$

Veamos entonces que sucede con

$$P(e \bullet s) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s))$$

Lema: Caso inductivo (cont.)

Sea $a : \alpha$, $\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)$

$$\equiv \ \text{Reverso}(e \bullet (s \circ a)) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)$$

Lema: Caso inductivo (cont.)

Sea $a : \alpha$, $\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \text{Reverso}(e \bullet (s \circ a)) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(s \circ a) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)
\end{aligned}
$$

Lema: Caso inductivo (cont.)

Sea $a : \alpha$, $\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \ \text{Reverso}(e \bullet (s \circ a)) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \ \text{Reverso}(s \circ a) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{HI}}{\equiv} \ (a \bullet \text{Reverso}(s)) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)
\end{aligned}
$$

Lema: Caso inductivo (cont.)

Sea $a : \alpha$, $\mathrm{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \mathrm{Reverso}(e \bullet s)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \mathrm{Reverso}(e \bullet (s \circ a)) = a \bullet \mathrm{Reverso}(e \bullet s)\\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \mathrm{Reverso}(s \circ a) \circ e = a \bullet \mathrm{Reverso}(e \bullet s)\\
&\overset{\text{HI}}{\equiv} (a \bullet \mathrm{Reverso}(s)) \circ e = a \bullet \mathrm{Reverso}(e \bullet s)\\
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet (\mathrm{Reverso}(s) \circ e) = a \bullet \mathrm{Reverso}(e \bullet s)
\end{aligned}
$$

Lema: Caso inductivo (cont.)

Sea $a : \alpha$, $\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \text{Reverso}(e \bullet (s \circ a)) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(s \circ a) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{HI}}{\equiv} (a \bullet \text{Reverso}(s)) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) = a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e)
\end{aligned}
$$

Lema: Caso inductivo (cont.)

Sea $a : \alpha$, $\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s)$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \text{Reverso}(e \bullet (s \circ a)) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(s \circ a) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{HI}}{\equiv} (a \bullet \text{Reverso}(s)) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) = a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) \\
&\equiv \textit{true}
\end{aligned}
$$

¡Gracias!

¿Preguntas?