Prueba de Oposición - Área Algoritmos

Gonzalo Ciruelos

14 de septiembre de 2015

Ejercicio

Demuestre por inducción estructural que:

$$(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))(\text{Reverso}(\text{Reverso}(s)) =_{obs} s)$$

Plantee claramente los lemas necesarios y demostrarlos.

Solución

Primero recordemos la definición de Reverso.

$$\text{Reverso}(\text{nil}) \equiv \text{nil} \tag{rev1}$$

$$\text{Reverso}(a \bullet s) \equiv \mathit{Reverso}(s) \circ a \tag{rev2}$$

Además,

$$s \circ e \equiv \textbf{ if } \text{vacia?}(s) \textbf{ then } e \bullet \text{nil} \textbf{ else } \text{prim}(s) \bullet (\text{fin}(s) \circ e) \tag{snoc}$$

Recordemos el esquema de inducción del TAD $\texttt{secu}$.

$$P(\text{nil}) \ \wedge \ (\forall a : \alpha)(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))(P(s) \implies P(a \bullet s))$$

Si probamos esto, probamos que $(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))P(s)$.

En este caso, P (el *predicado unario*) es

$$P(s) \equiv \text{Reverso}(\text{Reverso}(s)) = s$$

Caso base

El caso base en este caso es $P(\text{nil})$

$$\begin{aligned}
P(\text{nil}) \quad &\equiv \text{Reverso}(\text{Reverso}(\text{nil})) = \text{nil} \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{nil}) = \text{nil} \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} \text{nil} = \text{nil} \\
&\equiv \mathit{true}
\end{aligned}$$

Caso inductivo

El caso inductivo en este caso es $(\forall a : \alpha)(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))(P(s) \implies P(a \bullet s))$

Sean $a : \alpha$ y $s : \texttt{secu}(\alpha)$. Supongo $P(s)$ y quiero llegar a $P(a \bullet s)$

$$\begin{aligned}
P(a \bullet s) &\equiv \text{Reverso}(\text{Reverso}(a \bullet s)) = a \bullet s \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{Reverso}(s) \circ a) = a \bullet s \\
&\overset{\text{lema}}{\equiv} a \bullet \text{Reverso}(\text{Reverso}(s)) = a \bullet s \\
&\overset{\text{HI}}{\equiv} a \bullet s = a \bullet s \\
&\equiv \mathit{true}
\end{aligned}$$

Lema

$$(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))(\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(s \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(s))$$

Para probarlo vamos a usar también inducción estructural, con

$$P(s) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(s \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(s))$$

Caso base

$P(\text{nil}) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}))$

Sea $a : \alpha$, veamos que $\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil})$.

$$\begin{aligned}
\text{Reverso}(\text{nil} \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) &\overset{\text{snoc}}{\equiv} \text{Reverso}(a \bullet \text{nil}) = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(\text{nil}) \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} \text{nil} \circ a = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet \text{nil} = a \bullet \text{Reverso}(\text{nil}) \\
&\overset{\text{rev1}}{\equiv} a \bullet \text{nil} = a \bullet \text{nil} \\
&\equiv \mathit{true}
\end{aligned}$$

Caso inductivo

Queremos ver que

$$(\forall s : \texttt{secu}(\alpha))(\forall e : \alpha)(P(s) \implies P(e \bullet s))$$

Sean $s : \texttt{secu}(\alpha)$ y $e : \alpha$, y supongamos $P(s)$, es decir,

$$(\forall a : \alpha)(\text{Reverso}(s \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(s))$$

.

Veamos entonces que sucede con

$$P(e \bullet s) \equiv (\forall a : \alpha)(\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s))$$

Sea $a : \alpha$,

$$
\begin{aligned}
\text{Reverso}((e \bullet s) \circ a) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \quad & \equiv \text{Reverso}(e \bullet (s \circ a)) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
& \overset{\text{rev2}}{\equiv} \text{Reverso}(s \circ a) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
& \overset{\text{HI}}{\equiv} (a \bullet \text{Reverso}(s)) \circ e = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
& \overset{\text{snoc}}{\equiv} a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) = a \bullet \text{Reverso}(e \bullet s) \\
& \overset{\text{rev2}}{\equiv} a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) = a \bullet (\text{Reverso}(s) \circ e) \\
& \equiv \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración.