Лекция 8

Квадратичные формы в евклидовом пространстве

Содержание лекции:

В этой лекции мы обсудим вопрос диагонализации квадратичной формы в евклидовом пространстве. Евклидова страктура дает возможность ввести линейный оператор, связанный с квадратичной формой и свести задачу диагонализации данной формы к спектральной задаче для оператора. Позвожности и границы применимости этого метода мы изучим в настоящей лекции.

Ключевые слова:

Присоединенный оператор, собственные векторы ПО, собственные значения ПО, диагонализация КФ унитарным преобразованием, диагонализация пары квадратичных форм.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

`mathdep.ifmo.ru/geolin`

8.1 Присоединенный оператор

Nota bene Пусть $X_E(\mathbb{R})$ - вещественное евклидово пространство и $b : X_E \to X_E$ - билинейная форма, заданная на нем.

> Будем говорить, что линейный оператор $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(X_E)$ **присоединен к билинейной форме** b, если
> $$\forall x, y \in X_E \quad b(x,y) = \langle x, \varphi y \rangle.$$

Лемма 8.1. *Если b симметрична, тогда оператор φ - самосопряжен.*

▶

Действительно, прямой проверкой легко убедиться, что

$$\langle x, \varphi y \rangle = b(x,y) = b(y,x) = \langle y, \varphi x \rangle = \langle \varphi x, y \rangle.$$

◀

Nota bene Пусть далее q - квадратичная форма на $X_E(\mathbb{R})$.

> Оператор φ называется **присоединенным** к квадратичной форме q, если
> $$\forall x \in X_E(\mathbb{R}) \quad q(x,x) = \langle x, \varphi x \rangle \, .$$

Лемма 8.2. *В произвольном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ евклидова пространства X_E имеет место следующее выражение, связывающее матрицу A оператора φ и матрицу Q квадратичной формы q:*

$$Q = A^T G = AG.$$

▶

Действительно,

$$q(x,x) = \xi^T Q \xi = \xi^T A^T G \xi = \langle \varphi x, x \rangle \, , \quad \forall x \in X_E, \quad x \leftrightarrow \xi.$$

◀

Nota bene Оператор φ рассматриваемый как тензор типа $(1,1)$ является результатом процедуры поднятия индекса тензора типа $(2,0)$, который соответствует квадратичной форме q:

$$a^i_j = g^{ik} q_{kj}.$$

Nota bene В случае ортонормированного базиса имеет место равенство

$$a^i_j = q_{ij}.$$

8.2 Диагонализация КФ в X_E

Теорема 8.1. *В базисе и собственных векторов оператора φ матрица квадратичной формы q имеет диагональный вид.*

►
Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора φ:

$$\varphi e_j = \lambda_j e_j, \quad \forall x \in X_E \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i.$$

Тогда будем иметь

$$q(x, x) = \langle x, \varphi x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \xi^i \xi^j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \left| \xi^j \right|^2.$$

◄

Лемма 8.3. *Собственные числа оператора φ, присоединенного к квадратичной форме q определяются соотношением*

$$\det(Q - \lambda G) = 0.$$

►
Спектр оператора φ - это корни его характеристического полинома

$$\det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = 0,$$

но $A = QG^{-1}$ и поэтому

$$\det(QG^{-1} - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(Q - \lambda G) = 0.$$

◄

Nota bene Аналогично, собственные векторы оператора φ вычисляются из системы

$$(A - \lambda G)\xi = 0, \quad \lambda \in \sigma_\varphi.$$

Лемма 8.4. *Любая квадратичная форма может быть приведена к диагональному виду унитарным (ортогональным) преобразованием.*

8.3 Диагонализация пары КФ

Теорема 8.2. *Пусть q и p - квадратичные формы в линейном пространстве X и одна из форм (например p) положительно определена. Тогда в пространсве X можно указать такой базис, в котором форма p будет иметь канонический вид, а форма q - диагональный.*

►

Так как квадратичная форма p положительно определена, то пространство X может быть наделено евклидовой структурой, именно:

$$p(x) = g(x, x) \quad \to \quad g^{(s)}(x, y) > 0.$$

Форма g удовлетворяет аксиомам скалярного произведения и значит (X, g) - евклидово пространство. Находя ортонормированный базис, в котором форма q имеет диагональный вид, мы в силу определения скалярного произведения получаем канонический вид формы p (матрица Грама в ортонормированном базисе - единичная).

◄