11 Локализация спектра

11.1 Множество Гершгорина

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ - комплексная матрица.

Df. 1. Кругом Гершгорина для i-й строки матрицы A называется множество:

$$G_i = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - a_{ii}| \leqslant R_i\}, \quad R_i = \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Df. 2. Множеством Гершгорина для матрицы A называется

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i.$$

Th. 11.1. *Каждое собственное значение матрицы A лежит хотя бы в одном круге Гершгорина:*

$$\sigma(A) \subset G(A).$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$, тогда

$$\exists\, x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0 : \quad Ax = \lambda x.$$

Полагая $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, рассмотрим индекс k, такой что

$$|x_k| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Далее, распишем компоненту с индексом k в уравнении $Ax = \lambda x$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k \quad \Rightarrow \quad a_{kk} x_k + \sum_{j \neq k}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_j \quad \Rightarrow \quad (\lambda - a_{kk}) x_k = \sum_{j \neq k}^{n} a_{kj} x_j.$$

Так как $x \neq 0$ то $x_k = \neq 0$ и значит

$$\lambda - a_k k = \sum_{j \neq k}^{n} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \quad \Rightarrow \quad |\lambda - a_k k| \leqslant \sum_{j \neq k}^{n} |a_{kj}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_k|} \leqslant \sum_{j \neq k}^{n} |a_{kj}| = R_k.$$

□

Nb. 1. Теорема позволяет получить следующую оценку для спектрального радиуса:

$$\rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|a_{ii}| + R_i).$$

11.2 Спектр возмущенной матрицы

Df. 3. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется диагонализуемой, если

$$\exists\, V \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}: \quad A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}.$$

Lm. 1. *Обусловленность диагонализуемой невырожденной матрицы A имеет следующую оценку:*

$$\kappa(A) \leqslant \kappa^2(V) \cdot \kappa(\Lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим разложения:

$$\|A\| = \|V^{-1}\Lambda V\| \leqslant \|V^{-1}\| \cdot \|V\| \cdot \|\Lambda\| = \kappa(V) \cdot \|\Lambda\|,$$
$$\|A^{-1}\| = \|V^{-1}\Lambda^{-1}V\| \leqslant \|V^{-1}\| \cdot \|V\| \cdot \|\Lambda^{-1}\| = \kappa(V) \cdot \|\Lambda^{-1}\|$$

Умножая оба равенства, получим необходимую оценку. □

Nb. 2. Если A - нормальная матрица, то есть $A^\dagger A = AA^\dagger$, то V - унитарная ($V^\dagger = V^{-1}$), откуда следует, что $\|V\|_2 = \|V^{-1}\| = 1$ и значит $\kappa_2(A) = \kappa_2(\lambda)$.

Df. 4. Матрица E называется **возмущением** матрицы A, а $\widetilde{A}$ - **возмущенной матрицей**, если

$$\widetilde{A} = A + E, \quad \|E\| \ll \|A\|.$$

Th. 11.2. *(Бауэр-Файке) Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ - диагонализуемая комплексная матрица. Для любого возмущения $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеется следующая оценка:*

$$\forall \mu \in \sigma(A+E) \quad \exists\, \lambda \in \sigma(A): \quad |\mu - \lambda| < \kappa(V) \cdot \|E\|.$$

Доказательство. Пусть собственному значению $\mu \in \sigma(A+E)$ соответствует собственный вектор $x \neq 0$, так что:

$$(A+E)x = \mu x \quad \Leftrightarrow \quad (V^{-1}\Lambda V + E)x = \mu x \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda y + Fy = \mu y,$$

где $y = Vx$ и $F = VEV^{-1}$. Далее, пусть $\mu \notin \sigma(A)$, тогда

$$(\mu I - \Lambda)y = Fy \quad \Rightarrow \quad y = (\mu I - \Lambda)^{-1}Fy \quad \Rightarrow \quad \|y\| \leqslant \|(\mu I - \Lambda)^{-1}\| \cdot \|F\| \cdot \|y\|.$$

и так как $x \neq 0$, то $\|y\| \neq 0$ и значит

$$1 \leqslant \|(\mu I - \Lambda)^{-1}\| \cdot \|F\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|(\mu I - \Lambda)^{-1}\|} \leqslant \|F\|.$$

Оценим левую часть полученного неравенства:

$$(\mu I - \Lambda)^{-1} = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\mu - \lambda_1}, \frac{1}{\mu - \lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\mu - \lambda_1}\right\},$$
$$\|(\mu I - \Lambda)^{-1}\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{|\mu - \lambda_i|} = \frac{1}{\min_{1\leqslant i\leqslant n} |\mu - \lambda_i|}.$$

Собирая полученные результаты, получим:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} |\mu - \lambda_i| \leqslant \frac{1}{\|(\mu I - \Lambda)^{-1}\|} \leqslant \|F\| = \|VEV^{-1}\| \leqslant \kappa(V) \cdot \|E\|.$$

□

Nb. 3. Если A - нормальная матрица, тогда $\kappa_2(V) = 1$ и мы получаем частный случай - теорему Вейля:

$$|\mu - \lambda_i| \leqslant \|E\|_2.$$

11.3 Псевдоспектр

Df. 5. Псведоспектром матрицы A называется множество

$$\sigma_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \quad \|(zI - A)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon \ \vee z \in \sigma(A)\}.$$

Th. 11.3. *Для любой индуцированной матричной нормы выполняется равенство:*

$$\sigma_\varepsilon(A) = \bigcup_{\|E\|\leqslant\varepsilon} \sigma(A + E) = S_E.$$

Доказательство. Покажем, что $\sigma_\varepsilon(A) \subseteq S_E$, то есть

$$z \in \sigma_\varepsilon(A) \quad \Rightarrow \quad z \in S_E.$$

Если $z \in \sigma(A)$, тогда условие выполняется при $E = 0$. Пусть $z \notin \sigma(A)$, и при этом

$$\|(zI - A)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon.$$

Пусть $B = (zI - A)^{-1}$, $\|B\| > 1/\varepsilon$. Пусть $x \in \mathbb{C}^n$ - собственный вектор B, такой что:

$$\|x\| = 1, \quad \|Bx\| \geqslant 1/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad Bx = \mu x, \quad |\mu| > 1/\varepsilon.$$

Далее, рассмотрим матрицу

$$E = (zI - A)xx^\dagger, \quad \|E\| \leqslant \|zI - A\| \cdot \|x^\dagger\| \cdot \|\|,$$

для которой будем иметь:

$$\|E\| \leqslant \|zI - A\| \cdot \|x\| \cdot \|x^\dagger\| = \|zI - A\|.$$

Осталось показать, что соответствующая матрица $A + E$ имеет собственное значение z:

$$(A + E)x = Ax + Ex = Ax + (zI - A)x(x^\dagger x) = zx, \quad x^\dagger x = 1.$$

Тем самым, мы показали, что $z \in S_E$.

Теперь покажем, что $S_E \subseteq \sigma_\varepsilon(A)$, то есть

$$\exists\, E: \quad \|E\| \leqslant \epsilon, \quad z \in \sigma(A+E).$$

Матрица $zI - (A + E)$ - необратима. Имеем:

$$zI - (A+E) = (zI - A) - E.$$

Если $z \notin \sigma(A)$, то матрица $zI - A$ обратима. Тогда предположим, что

$$\|(zI - A)^{-1}\| < 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|(zI - A)^{-1}E\| \leqslant \|(zI - A)^{-1}\| \cdot \|E\| < 1.$$

Отсюда следует, что матрица $I - (zI - A)^{-1}E$ - обратима, как и обратима матрица

$$zI - (A+E) = (zI - A)(I - (zI - A)^{-1}E),$$

что противоречит исходному предположению $z \in \sigma(A + E)$. Следовательно,

$$\|(zI - A)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad z \in \sigma_\epsilon(A).$$

Если $z \in \sigma(A)$, тогда $z \in \sigma_\varepsilon(A)$ по определению. Таким образом, $\sigma_\varepsilon(A) = S_E$ $\square$