β

Лекция 2

Ортогональные системы векторов

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы подробно обсудим ортогональные системы векторов и методы работы с ними. Здесь будут сформулированы основные свойства разложения векторов по ортогональным системам, а также важный алгоритм нахождения ортогонального базиса в заданной линейной оболочке.

Ключевые слова:
Ортогональные векторы, теорема Пифагора, ортогональное дополнение, ортогонализация Грама-Шмидта, ортогональный и ортонормированный базис.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Ортогональные векторы

Говорят, что векторы x и y пространства E **ортогональны** (пишут $x \perp y$), если

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Ортогональным набором векторов называется набор $\{x_i\}_{i=1}^m$, такой что любые два его вектора ортогональны.

Лемма 2.1. *Всякий ортогональный набор векторов является линейно-независимым.*

▶

Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0, \quad \|x_j\| \neq 0,$$

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle = \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = \alpha_j \|x_j\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0.$$

◀

Теорема 2.1. *(Пифагора) Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ - набор ненулевых попарно ортогональных векторов, тогда*

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 .$$

▶

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m x_i, \sum_{j=1}^m x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^m \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 .$$

◀

Лемма 2.2. *Пусть вектор x ортогонален каждому вектору из набора $\{y_i\}_{i=1}^m$, тогда*

$$\forall z \in \langle y_1, \ldots, y_m \rangle_{\mathbb{C}} \quad \langle x, z \rangle = 0.$$

▶

Действительно, имеем

$$z = \sum_{i=1}^m \alpha^i y_i, \quad \langle x, z \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle x, y_i \rangle .$$

◀

Говорят, что x **ортогонален подпространству** $L \le E(\mathbb{C})$, если

$$\forall y \in L \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Nota bene Для обозначения данного факта обычно пишут $x \perp L$.

Ортогональным дополнением пространства L называется множество

$$M = \{x \in X : \quad x \perp L\}.$$

Лемма 2.3. *Ортогональное дополнение является подпространством* $E(\mathbb{C})$.

▶

В этом легко убедиться прямой проверкой.

◀

2.2 Ортогональный базис

Теорема 2.2. *Пусть* $\{x_j\}_{j=1}^m$ *- линейно-независимый набор в евклидовом пространстве* $E(\mathbb{C})$, *тогда* $\{x_j\}_{j=1}^m$ *можно преобразовать в ортогональный набор* $\{e_j\}_{j=1}^k$.

▶

Используем процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

1. $e_1 = x_1$,
2. $e_2 = x_2 + \alpha_2^1 e_1, \quad e_2 \perp e_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\langle e_1, x_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$,
3. $e_3 = x_3 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^1 e_1, \quad e_3 \perp e_1 \quad e_3 \perp e_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\langle e_1, x_3 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}, \quad \alpha_3^2 = -\frac{\langle e_2, x_3 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle}$,

⋮ ...

m. $e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1, \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^j = -\frac{\langle e_j, x_m \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle}$.

◀

Nota bene Для $\{x_j\}_{j=1}^k$ процесс ортогонализации не оборвется, то есть все $e_j \neq 0$.

▶

От противного. Пусть

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} e_{m-1} + \ldots + \alpha_m^2 e_2 + \alpha_m^1 e_1 = 0,$$

тогда

$$e_m = x_m + \alpha_m^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m-1}^i x_i + \ldots + \alpha_m^2 \sum_{i=1}^{2} \alpha_2^i x_i + \alpha_m^1 x_1 = 1 \cdot x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i x_i = 0,$$

но это означает, что $\{x_j\}_{j=1}^k$ - линейно зависимый набор. Противоречие.

◀

Nota bene Пусть $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ - линейно независимый набор, а $\{x_j\}_{j=1}^{k+1}$ - линейно-зависимый, тогда $e_{k+1} = 0$.

Nota bene Имеет место следующее неравенство: $\|e_m\| \leq \|x_m\|$

▶

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle e_m, e_m \rangle = \langle e_m, x_m \rangle + 0 + \ldots + 0, \quad \Rightarrow \quad \|e_m\|^2 = \langle e_m, x_m \rangle \leq \|x_m\| \cdot \|e_m\| .$$

◀

Базис $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ евклидова пространства $E(\mathbb{C})$ называется

- **ортогональным**, если $\langle e_i, e_{j\neq i} \rangle = 0$.
- **ортонормированным**, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Теорема 2.3. *Любой базис евклидова пространства $E(\mathbb{C})$ может быть преобразован к ортонормированному базису.*

▶

Ортогонализация Грама-Шмидта с последующей нормировкой.

◀

Лемма 2.4. *Базис $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ в $E(\mathbb{C})$ ортонормирован тогда и только тогда, когда*

$$\forall x, y \in E(\mathbb{C}): \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \eta^j e_j, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi^i} \eta^i .$$

Nota bene Матрица Грама скалярного произведения ортогональном базисе имеет диагональный вид, а в ортонормированном базисе имеет вид единичной матрицы.