Алгебра. Семестр II. Векторные пространства

I. Геометрия подпространств

1. Найдите размерности и базисы суммы и пересечения подпространств U и V в пространстве $\mathbb{R}^n$:

   а) $U = \left\langle (4,2,1)^T, (-3,2,0)^T, (-1,4,0)^T \right\rangle$,

   $V = \left\langle (2,-3,1)^T, (5,3,13)^T, (7,0,12)^T \right\rangle$;

   б) $U = \left\langle (1,2,3)^T, (4,3,1)^T, (2,-1,-5)^T \right\rangle$,

   $V = \left\langle (1,1,1)^T, (-3,2,0)^T, (-2,3,1)^T \right\rangle$;

   в) $U = \left\langle (1,2,3,1,1)^T, (1,0,1,-2,-2)^T, (2,0,1,-1,0)^T, (0,1,1,0,0)^T \right\rangle$,

   $V = \left\langle (1,2,0,0,2)^T, (0,1,-2,3,-3)^T, (-1,2,1,2,0)^T, (1,1,-2,0,0)^T \right\rangle$;

   г) $U:\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$,

   $V = \left\langle (1,1,1,1,1)^T, (1,0,-1,1,-1)^T, (0,1,-1,-1,1)^T, (-2,1,0,1,-1)^T \right\rangle$;

   д) $U:\ \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0; \\ x_2 - x_4 &= 0; \end{cases}$

   $V:\ \begin{cases} x_3 + 2x_4 &= 0; \\ x_1 - x_2 - x_5 &= 0; \end{cases}$

   е) $U = \left\langle (1,2,-2,2,1)^T, (2,4,-5,4,1)^T, (2,3,-3,3,2)^T \right\rangle$,

   $V:\ \begin{cases} x_3 + 2x_4 &= 0; \\ x_1 - x_2 + x_5 &= 0. \end{cases}$

2. Найдите базис и размерность $U+V$ и $U \cap V$:

   а) $U = \left\langle t^2 + t - 1,\ t + 3 \right\rangle \leqslant \mathbb{R}[t]_2$, $V = \left\langle 2t^2 + 2,\ t^2 + 3t + 3 \right\rangle \leqslant \mathbb{R}[t]_2$;

   б) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant M_2(\mathbb{R})$,

   $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant M_2(\mathbb{R})$.

3. Пусть заданы два подпространства в $\mathbb{R}^4$:

   $$U = \left\langle (1,1,1,1)^T, (-1,-2,0,1)^T \right\rangle,\ V = \left\langle (-1,-1,1,-1)^T, (2,2,0,1)^T \right\rangle.$$

   Докажите, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ и найдите проекцию вектора $(4,2,4,4)^T$ на подпространство U параллельно подпространству V.

4. $U = \left\langle 3t^3 - 2t,\ 5t^3 + 7t \right\rangle$, $V = \left\langle 4 - t^2,\ 9t^2 + 1 \right\rangle$. Докажите, что $\mathbb{R}[t]_3 = U \oplus V$, и найдите проекцию многочлена $9t^3 - t^2 + 5t + 3$ на подпространство U параллельно V.

5. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Докажите, что $M_2(\mathbb{Q}) = U \oplus V$, и найдите проекцию матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ на подпространство V параллельно U.

6.* Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы два подпространства:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\},\ V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}.$$

Докажите, что $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ и найдите проекции векторов стандартного базиса $\mathbb{R}^n$ на U и на V.

7.* В пространстве $\mathbb{R}[x]_7$ заданы два подпространства:

$$V_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_7 \mid f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = 0\},$$

$$V_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_7 \mid f(2) = f'(2) = f''(2) = 0\}.$$

Найдите базисы суммы и пересечения этих подпространств.

8.* В пространстве $\mathbb{R}[x]_8$ заданы два подпространства:

$$V_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_8 \mid f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0\},$$

$$V_2 = \left\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_8 \mid f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = f'''(-1) = f^{IV}(-1) = 0\right\}.$$

Найдите базисы суммы и пересечения этих подпространств.

9.* Пусть U, V, W — подпространства в $M_n(\mathbb{R})$, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц соответственно. Докажите, что V и W — различные прямые дополнения к U в $M_n(\mathbb{R})$, и найдите проекции стандартных матричных единиц на U параллельно V и на U параллельно W.

10.* Пусть U — подпространство пространства $M_4(F)$ размерности 7. Докажите, что U содержит ненулевую симметрическую матрицу.

11.* Пусть $A \in M_n(F)$, $\mathrm{rk}(A) \leqslant \frac{n}{2}$. Докажите, что среди решений уравнения $AX = 0$ есть ненулевая симметрическая матрица.

12.* Приведите пример такого пространства V, что $V = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, где U_1, U_2, U_3 — собственные подпространства в V.