ζ

Лекция 6

Унитарный оператор

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы продолжаем рассматривать специального вида операторы в евклидовом пространстве. Унитарный оператор играет ведущую роль при исследовании эволюции любой динамической системы, так как любое преобразование во времени состояния динамической системы описывается непрерывным семейством унитарных операторов. На множестве унитарных операторов можно определить структуру группы, что имеет далеко идущие следствия, обсуждение которых, однако, выходит за рамки нашего курса.

Ключевые слова:
Изометрия, унитарный оператор, определитель унитарного оператора, матрица унитарного оператора, спектральные свойства унитарного оператора, ортогональный оператор, спектральная теорема, диагонализация эрмитовой матрицы.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

6.1 Определение унитарного оператора

Лемма 6.1. *Пусть* $\upsilon \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X_E)$ *- эндоморфизм пространства* $X_E(\Bbbk)$*, тогда следующие свойства эквиваентны:*

1. *изометрия:* $\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle = \langle x, y\rangle$*;*
2. *сохранение нормы:* $\|\upsilon x\| = \|x\|$*;*
3. *свойство сопряженного:* $\upsilon^\dagger = \upsilon^{-1}$

►
Проверим следующие импликации:

- Опр.(1) ⇒ Опр.(2):
$$\|\upsilon x\|^2 = \langle \upsilon x, \upsilon x\rangle = \langle xx\rangle = \|x\|^2;$$
- Опр.(2) ⇒ Опр.(1):
$$\|\upsilon(x+y)\|^2 = \|\upsilon x\|^2 + \|\upsilon y\|^2 + 2\Re\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle,$$
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\Re\langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \Re\langle x, y\rangle = \Re\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle$$
  Для $\Im$ аналогично рассматриваем $\|\upsilon(x + i\cdot y)\|^2$
- Опр.(1) ⇒ Опр.(3):
$$\langle \upsilon x, \upsilon y\rangle = \langle x, \upsilon^\dagger \upsilon y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad \upsilon^\dagger\upsilon = \mathcal{I}.$$
- Опр.(3) ⇒ Опр.(1):
$$\langle x, y\rangle = \langle x, \mathcal{I}y\rangle = \langle x, \upsilon^\dagger\upsilon y\rangle = \langle \upsilon x, \upsilon y\rangle.$$

◄

Унитарным называется оператор $\upsilon \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X_E)$, обладающий одним из перечисленных выше свойств (и, как следствие, всем остальными).

Лемма 6.2. *Определитель оператора* υ *имеет следующее свойство:*
$$|\det \upsilon| = 1.$$

►
Прямой проверкой можно убедиться, что
$$\det \mathcal{I} = \det\left(\upsilon^\dagger\upsilon\right) = \det \upsilon^\dagger \det \upsilon = \overline{\det \upsilon}\cdot \det \upsilon = |\det \upsilon|^2 = 1.$$

◄

Nota bene Унитарный оператор в вещественном евклидовом пространстве X_E называется **ортогональным** оператором.

6.2 Матрица унитарного оператора

Nota bene Матрицы унитарного и ортогонального операторов имеют свойсва:

$$\mathbb{C}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad \overline{U^T} = U^{-1};$$
$$\mathbb{R}: \quad \upsilon \leftrightarrow U, \quad U^T = U^{-1}.$$

Nota bene В вещественном случае

$$\det \upsilon = \det U = \pm 1$$

Лемма 6.3. *Пусть $U = \|u_{ik}\|$ - матрица унитарного оператора, тогда:*

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{u}_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}.$$

Nota bene Столбцы матрицы унитарного оператора ортогональны.

Пример 6.1. Матрица Эйлера - пример ортогональной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Лемма 6.4. *Множество унитарных операторов, действующих на пространстве X_E образует мультипликативную группу:*

$$U(n) = \left\{\upsilon : \quad \upsilon^\dagger \upsilon = \mathcal{I}\right\}, \quad \dim_{\Bbbk} X_E = n.$$
$$SU(n) = \left\{\upsilon : \quad \upsilon^\dagger \upsilon = \mathcal{I}, \quad \det \upsilon = 1\right\}.$$

►
Пусть $\upsilon_1, \upsilon_2 \in U(n)$, тогда $\upsilon_1\upsilon_2 \in U(n)$. Действительно:

$$\langle \upsilon_1\upsilon_2 x, \upsilon_1\upsilon_2 y\rangle = \langle \upsilon_2 x, \upsilon_2 y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

◄

6.3 Спектральные свойства унитарного оператора

Лемма 6.5. *Все собственные значения оператора υ по модулю равны единице:*

$$|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = e^{i\chi}.$$

►
Пусть $\upsilon x = \lambda x$, тогда

$$\langle \upsilon x, \upsilon x\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

◄

Лемма 6.6. *Собственные векторы унитарного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны:*

$$\upsilon x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \upsilon x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

►
Убедимся прямой проверкой:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \upsilon x_1, \upsilon x_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = e^{-i\chi_1} e^{i\chi_2} \langle x_1, x_2 \rangle = e^{i(\chi_2 - \chi_1)} \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Откуда сразу следует:

$$\left(e^{i(\chi_1 - \chi_2)} - 1\right) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

◄

Лемма 6.7. *Любое инвариантное подпространство υ является ультраинвариантным.*
►
Для любых $x \in L$ и $y \in L^{\perp}$ имеем:

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle \upsilon x, \upsilon y \rangle \quad \Rightarrow \quad \upsilon x \perp \upsilon y \quad \Rightarrow \quad \upsilon y \in M.$$

◄

Теорема 6.1. *Унитарный оператор является опертором скалярного типа.*
►
Доказательство как для случая эрмитова оператора. ◄

Nota bene Ортогональный оператор, вообще говоря, не является скалярным.

Теорема 6.2. *(Спектральная теорема для унитарного оператора) Пусть $\upsilon : X_E \to X_E$ - унитарный оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ X_E, состоящий из собственных векторов υ, тогда:*

$$\upsilon * = \sum_{j=1}^{n} e^{i\chi_j} \langle e_j, * \rangle e_j.$$

Лемма 6.8. *Любая эрмитова матрица может быть приведена к диагональной форме унитарным преобразованием.*

Лемма 6.9. *Для любого унитарного оператора υ найдется такой самосопряженный оператор φ, что:*

$$\upsilon = e^{i\varphi}.$$