Лекция 9

Системы линейных уравнений

Содержание лекции:
Системы линейных алгебраических уравнений имеют важное прикладное значение в самых различных предметных областях. В настоящей лекции мы построим геометрическую теорию таких систем, научимся опеределять наличие у них решений и их количество. Также мы обсудим наиболее удобное представление данных решений и обсудим структуры на их множестве.

Ключевые слова:
Классификация систем линейных уравнений, геометрическое исследование систем, метод Гаусса, система Крамера, теорема Крамера, однородные системы, теорема Кронеккера-Капелли, альтернатива Фредгольма, фундаментальная система решений, неоднородные системы, общее решение.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

9.1 Основные определения

Система следующего вида

$$\begin{cases} \alpha_1^1\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \ldots + \alpha_n^1\xi^n = \beta^1, \\ \alpha_1^2\xi^1 + \alpha_2^2\xi^2 + \ldots + \alpha_n^2\xi^n = \beta^2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_1^m\xi^1 + \alpha_2^m\xi^2 + \ldots + \alpha_n^m\xi^n = \beta^m. \end{cases}$$

называется **линейной алгебраической системой** из m уравнений и n неизвестных. Набор $\{\alpha_k^i\}_{k=1...n}^{i=1..m}$ называется **коэффициентами системы**, $\{\beta^i\}_{i=1}^m$ **- свободными членами**, $\left\{\xi^k\right\}_{k=1}^n$ **- неизвестными**:

$$\alpha_k^i, \beta^i, \xi^k \in \Bbbk \subset \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Решением системы называется такой набор $\left\{\xi^k\right\}_{k=1}^n$, при подстановке которого в систему его уравнения превращаются в верные равенства.

Система называется **совместной**, если она имеет решение, в противном случае она называется **несовместной**.

Система называется **определенной**, если она совместна и имеет единственное решение, в противном случае она называется **неопределенной**.

Если все свободные члены системы равны нулю, то система называется **однородной**, в противном случае она называется **неоднородной**.

Альтернативные формы записи

1. Матричная форма: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \ldots & \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

2. Векторная форма: $\sum_{i=1}^n a_i\xi^i = b$

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_2^m \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix},$$

при этом $\{a_i\}_{i=1}^n, b \in \Bbbk^m$.

Nota bene Из векторной формы следует следующая интерпретация решения системы уравнений: нахождение коэффициентов $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ линейной комбинации векторов из набора $\{a_i\}_{i=1}^n$, соответствующих вектору b.
В дальнейшем будем использовать векторную форму:

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n = b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\xi^i = b, \tag{9.1}$$

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\xi^i = 0. \tag{9.2}$$

9.2 Система Крамера

Система (9.1) называется **системой Крамера**, если $m = n$ и набор векторов $\{a_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ.

Теорема 9.1. *Система Крамера совместна и определена.*
▶
Из того, что $m = n$ имеем $\{a_i\}_{i=1}^n, b \in \Bbbk^m = \Bbbk^n$ и

$$\dim_{\Bbbk} \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = n = \dim_{\Bbbk} \Bbbk^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \simeq \Bbbk^n,$$

$$\{a_i\}_{i=1}^n \text{ - ЛНЗ} \quad \Rightarrow \quad \text{базис } \Bbbk^n \quad \Rightarrow \quad \forall b \in \Bbbk^n \ \exists!\ \{\xi^k\}_{k=1}^n : \quad b = \sum_{k=1}^{n} \xi^k a_k,$$

◀

Пусть теперь $m \neq n$ и $\dim_{\Bbbk} \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = r \leq m = \dim_{\Bbbk} \Bbbk^m$, тогда

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} \text{ - ЛНЗ} \quad \Rightarrow \quad \text{базис } \mathcal{L}.$$

Коэффициенты $\{\xi^{i_k}\}_{k=1}^r$ называются **базисными** или **главными** неизвестными системы:

$$\xi^{i_1} = \xi^1, \quad \xi^{i_2} = \xi^2, \quad \ldots \quad \xi^{i_r} = \xi^r.$$

Оставшиеся неизвестные называются **свободными** или **параметрическими**:

$$\xi^{i_{r+1}} = \xi^{r+1}, \quad \xi^{i_{r+2}} = \xi^{r+2}, \quad \ldots \quad \xi^{i_n} = \xi^n$$

В новых обозначениях систему (9.1) можно записать в виде:

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \ldots - a_n\xi^n. \tag{9.3}$$

Теорема 9.2. *(Кронекера-Капелли) Чтобы система (9.3) была совместна необходимо и достаточно выполнение условия $b \in \mathcal{L}$. При этом, если $r = n$, то система определена а в противном случае $r < n$ неопределена.*

►
⇒ Пусть (9.3) - совместна, тогда $b \in \mathcal{L}$ и

$$b = a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_r\xi^r.$$

⇐ Пусть $b \in \mathcal{L}$, тогда существует набор $\{\xi^i\}_{i=1}^r$ такой что

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \ldots + a_r\xi^r = b.$$

При этом, если $r = n$, тогда $\{a_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ набор и базис в $\mathcal{L}$, а значит разложение вектора b по этому набору единственно. Если $r < n$, то единственно разложение для

$$b' = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \ldots - a_n\xi^n,$$

что дает неоднозначность в разложении b.
◄

Следствия теоремы Кронекера-Капелли

Однородная система

1. всегда совместна (всегда существует тривиальное решение):

2. имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $r < n$;

3. является неопределенной тогда и только тогда, когда $m < n$.

Nota bene Линейная оболочка $\mathcal{L}$ является подпространством $\mathbb{k}^m$.

Теорема 9.3. *(Альтернатива Фредгольма) Пусть $m = n$, тогда*

1. *или (9.2) имеет единственное тривиальное решение, а (9.1) совместна и определена при любом b;*

2. *или существуют нетривиальные решения (9.2) и система совместна не при любых b.*

►
Из того, что $m = n$ следует $\mathbb{k}^m = \mathbb{k}^n$.

1. Из единственности решения следует $\xi^1 = \xi^2 = \ldots = \xi^n = 0$ и линейная независимость набора $\{a_i\}_{i=1}^n$. Тогда при $m = n$ система (9.1) является системой Крамера.

2. Из существования нетривиальных решений следует $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{L} = r < n = \dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}^m$ и существуют $\mathbb{k}^m \ni b \not\in \mathcal{L}$, такие что система (9.1) несовместна.

◄

Фундаментальная система решений

Обозначим через S множество решений системы (9.2).

Теорема 9.4. *Множество решений S однородной системы (9.2) является линейным подпространством $\Bbbk^n$:*

$$x_1, x_2 \in S \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \in S, \\ x\lambda \in S. \end{cases}$$

▶
Имеем:

$$x_1 \in S \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_1^i = 0, \quad x_2 \in S \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_2^i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_2^i + \xi_2^i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_1^i + \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_2^i = 0 + 0 = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i \lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i \cdot \lambda = 0 \cdot \lambda = 0.$$

◀

Теорема 9.5. *Подпространство $S(\Bbbk)$ изоморфно пространству $\Bbbk^{n-r}$:*

$$\dim_{\Bbbk} S = n - r.$$

▶
Изоморфизм пространств $S(\Bbbk)$ и $\Bbbk^{n-r}$ устанавливается отображением:

$$\Bbbk^{n-r} \ni \left(\xi^{r+1}, \xi^{r+2}, \ldots, \xi^n\right)^T \quad \leftrightarrow \quad \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r; \xi^{r+1}, \ldots, \xi^n\right)^T \in S(\Bbbk).$$

Действительно, вектор

$$-a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \ldots - a_n \xi^n$$

имеет единственное разложение по системе векторов $\{a_i\}_{i=1}^r$ и значит предложенное отображение является биекцией. Кроме того, полагая

$$y_1 = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \eta_1^i \quad \leftrightarrow \quad x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_1^i,$$
$$y_2 = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \eta_2^i \quad \leftrightarrow \quad x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_2^i,$$

будем иметь

$$y_1 + y_2 = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \left(\eta_1^i + \eta_2^i\right) \quad \leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_1^i + \xi_2^i\right),$$
$$y\lambda = \sum_{i=r+1}^{n} \eta^i a_i \cdot \lambda \quad \leftrightarrow \quad x\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i \lambda,$$

◀

Фундаментальной системой решений (ФСР) линейной однородной системы уравнений называется любая система из $n-r$ линейнонезависимых решений этой системы, то есть базис пространтва решений однородной системы:

$$\begin{gathered}
y_1 = (1,0,0,\ldots,0)^T, \quad \leftrightarrow \quad x_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^r; 1,0,0,\ldots,0)^T, \\
y_2 = (0,1,0,\ldots,0)^T, \quad \leftrightarrow \quad x_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^r; 0,1,0,\ldots,0)^T, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
y_{n-r} = (0,0,0,\ldots,1)^T, \quad \leftrightarrow \quad x_{n-r} = (\xi_{n-r}^1, \xi_{n-r}^2, \ldots, \xi_{n-r}^r; 0,0,0,\ldots,1)^T.
\end{gathered}$$

Nota bene Построенная выше ФСР называется нормальной ФСР.

Теорема 9.6. *Любое решение однородной системы (9.2) может быть выражено следующим образом:*

$$x! = x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_{n-r}C_{n-r} = \sum_{i=1}^{n-r} x_iC_i.$$

►
Очевидно.
◄

Решение системы (9.2) выражающееся приведенной выше формулой называется **общим решением однородной системы**.

9.3 Неоднородная система

Рассмотрим случай, когда система (9.1) совместна, то есть:

$$b \in \mathcal{L}, \quad \dim_{\Bbbk} \mathcal{L} = r < n.$$

Пусть $\tilde{S}$ - множество решений системы (9.1), а $S(\Bbbk)$ множество решений соответствующей ей однородной системы (9.2).

Теорема 9.7. *Пусть $z' \in \tilde{S}$ частное (фиксированное) решение, тогда*

$$z = z' + x, \quad \forall z \in \tilde{S}, \quad \forall x \in S(\Bbbk).$$

►
С одной стороны:

$$\begin{gathered}
z' = \left\{\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^n\right\}, \quad x = \left\{\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right\}, \\
z = z' + x = \left\{\zeta^1 + \xi^1, \zeta^2 + \xi^2, \ldots, \zeta^n + \xi^n\right\}: \\
\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\zeta^i + \xi^i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\zeta^i + \sum_{i=1}^{n} a_i\xi^i = b + 0 = b.
\end{gathered}$$

С другой стороны:

$$x = z - z' \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\tilde{\zeta}^i - \zeta^i\right) = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i,$$

и значит $x \in S(\Bbbk)$. ◄

Теорема 9.8. *Любое решение $z \in \tilde{S}$ может быть представлено в виде:*

$$z = z' + \sum_{i=1}^{n} x_i C_i, \quad \{x_j\}_{j=1}^{n} \text{ - ФСР (9.2).}$$

►
Очевидно.
◄

> Приведенный выше вид решения неоднородной системы (9.1) называется ее **общим решением**.

Nota bene Таким образом, общее решение неоднородной системы представляет собой сумму ее частного решения неоднородной и общего решения соответствующей ей однородной системы.

Nota bene Множество решений $\tilde{S}$ имеет структуру линейного многообразия, параллельного линейному пространству $S(\Bbbk)$.