Домашняя работа 2 : ортогональность

Задача 2.1. *При каких значениях параметра α данная матрица может служить матрицей Грама в евклидовом пространстве:*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Задача 2.2. *Найти матрицу Грама стандартного базиса пространства квадратных матриц второго порядка с заданным скалярным произведением:*

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} A^T P B, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.3. *Координаты базисных векторов подпространства L евклидова пространства X образуют матрицу A. Дана матрица Грама Γ базиса X. Найти базис $L^\perp$ и систему уравнений для подпространства $L^\perp$, если*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.4. *В пространстве квадратных матриц со стандартным скалярным произведением найти ортогональное дополнение подпространства верхних треугольных матриц.*

Задача 2.5. *Найти ортогональную проекцию многочлена*

$$35t^4 - 15t^3 - 15t^2 - 8t + 4$$

на подпространство многочленов степени не выше 2 в пространстве многочленов со стандартным скалярным произведением

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Задача 2.6. *Используя процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, получить ортогональную систему векторов для линейной оболочки, натянутой на векторы*

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$