δ

Лекция 4

Произведения ПЛФ

Содержание лекции:

В лекции рассматривается операция произведения двух ПЛФ и ее алгебраические свойства, вводится определение новой структуры - внешней алгебры ПЛФ. Широкое практическое приложение имеет алгебра антисимметричных форм, однако введенная операция произведения ПЛФ не сохраняет антисимметричность результата. В связи с этим вводится операция внешнего произведения антисимметричных форм, которая индуцирует новую алгебраическую структуру - алгебру Грассмана.

Ключевые слова:

Произведение ПЛФ, свойства произвдения ПЛФ, внешняя алгебра форм, внешнее произведение антисимметричных ПЛФ, свойства внешнего произведения, алгебра антисимметричных форм, алгебра Грассмана.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

4.1 Произведение ПЛФ

Пусть $U \in \Omega_{q_1}^{p_1}(\Bbbk)$ и $V \in \Omega_{q_2}^{p_2}(\Bbbk)$. Отображение $W = U \cdot V$ называется **произведением** ПЛФ U на ПЛФ V, если

$$W\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_1+p_2}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \ldots, y^{q_1+q_2}\right) =$$
$$U\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_1}\right) \cdot V\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p_2}; y^1, y^2, \ldots, y^{q_2}\right)$$

Лемма 4.1. *Отображение W - ПЛФ, причем $W \in \Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}(\Bbbk)$.*
▶
Очевидно. ◀

Свойства произведения ПЛФ

1. Некоммутативность: $U \cdot V \neq V \cdot U$:

$$W_1(x_1, x_2) = \left(f^1 \cdot f^2\right)(x_1, x_2) = f^1(x_1) f^2(x_2),$$
$$W_2(x_1, x_2) = \left(f^2 \cdot f^1\right)(x_1, x_2) = f^2(x_1) f^1(x_2).$$

2. Ассоциативность: $U \cdot (V \cdot W) = (U \cdot V) \cdot W = U \cdot V \cdot W$;

3. Дистрибутивность по сумме: $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

4. Нуль-форма: $U \cdot \Theta_{\Omega_{q_2}^{p_2}} = \Theta_{\Omega_{q_1}^{p_1}} \cdot V = \Theta_{\Omega_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}}$;

5. Дистрибутивность по произведению: $(\alpha \cdot U) \cdot V = U \cdot (\alpha \cdot V)$;

6. Пусть $U \in \Omega_0^p$, тогда набор

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p},$$

образует базис в Ω_0^p, если $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ образует базис в X^*.
▶
Для произвольного набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^p$ имеем:

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}W(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2} \ldots \xi_p^{s_p} =$$
$$f^{s_1}(x_1) \cdot f^{s_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f^{s_p}(x_p) = \left(f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

◀

Nota bene Пусть $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ - базис X^* и $\{\hat{x}_j\}_{j=1}^n$ - дуальный базис X^{**}, тогда базис $\Omega_q^p(\Bbbk)$ образуют ПЛФ вида

$$^{s_1, s_2, \ldots, s_p}_{t_1, t_2, \ldots, t_q}W = f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \ldots \cdot f^{s_p} \cdot \hat{x}_{t_1} \cdot \hat{x}_{t_2} \cdot \ldots \cdot \hat{x}_{t_q}.$$

7. Пусть $U \in \Omega^p$ и $V \in \Omega^q$, тогда

$$\operatorname{Sym}(U \cdot V) = \operatorname{Sym}(\operatorname{Sym} U \cdot V) = \operatorname{Sym}(U \cdot \operatorname{Sym} V),$$
$$\operatorname{Alt}(U \cdot V) = \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} U \cdot V) = \operatorname{Alt}(U \cdot \operatorname{Alt} V).$$

►

Докажем данное свойство для операции Alt:

$$[\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} U \cdot V)](x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} \ldots x_{p+q}) =$$
$$\operatorname{Alt}\left[\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} (U \cdot V)\right] \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right) =$$
$$\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Alt}(U \cdot V) \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right).$$

В силу антисимметричности формы имеем

$$\operatorname{Alt}(U \cdot V) \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}\right) =$$
$$= (-1)^{[\sigma]} \operatorname{Alt}(U \cdot V)(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}),$$

и тогда получаем

$$\frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma} \operatorname{Alt}[U \cdot V](x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}) =$$
$$\operatorname{Alt}(U \cdot V)(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}).$$

◄

4.2 Антисимметричное произведение ПЛФ

Антисимметричным произведением ПЛФ $U \in \Lambda^p$ на ПЛФ $V \in \Lambda^r$ называется отображение

$$U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Alt}(U \cdot V).$$

Лемма 4.2. *Отображение $U \wedge V$ - антисимметричная ПЛФ, причем*

$$U \wedge V \in \Lambda^{p+r}.$$

►

Очевидно. ◄

Nota bene Имеет место следующее свойство:

$$p + r > n = \dim X \quad \Rightarrow \quad U \wedge V = \Theta.$$

Свойства антисимметричного произведения

1. Антикоммутативность:
$$U \wedge V = (-1)^{pr} V \wedge U$$

▶

Имеет место:

$$(U \wedge V)(x_1, \ldots x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+r}) =$$
$$\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} U\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) \cdot V\left(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+r)}\right)$$

Хотим получить:

$$(\sigma(1), \ldots, \sigma(p), \sigma(p+1), \ldots, \sigma(p+r)) \to (\sigma(p+1), \ldots, \sigma(p+r), \sigma(1), \ldots, \sigma(p))$$

для этого необходимо
$$p + p + p + \ldots + p = p \cdot r$$
транспозиций. И значит

$$(U \wedge V)(x_1, \ldots x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+r}) = (-1)^{p \cdot r} (V \wedge U)(x_1, \ldots x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+r}).$$

◀

2. Вынесение скаляра:

$$(\alpha U) \wedge V = U \wedge (\alpha V) = \alpha (U \wedge V).$$

▶
Очевидно. ◀

3. Ассоциативность:

$$U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Alt}(U \cdot V \cdot W).$$

▶

По определению:

$$(U \wedge V) \wedge W = \left(\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Alt}(U \cdot V)\right) \wedge W =$$
$$\frac{((p+r)+s)!}{(p+r)! \cdot s!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(p+r)!}{p! \cdot r!} \operatorname{Alt}((U \cdot V) \cdot W)\right) =$$
$$\frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(U \cdot V) \cdot W) = \frac{(p+r+s)!}{p! \cdot r! \cdot s!} \operatorname{Alt}(U \cdot V \cdot W).$$

◀

4. Дистрибутивность:

$$U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W.$$

►

Следует из дистрибутивности умножения и линейности Alt. ◄

5. Нуль-форма:

$$U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta.$$

6. Пусть $\{f^i\}_{i=1}^n$ базис X^*, тогда

$${}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}F = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$$

►

Из определения следует:

$${}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}F = p! \operatorname{Alt}\left({}^{i_1,i_2,\ldots,i_p}W\right) = p! \operatorname{Alt}\left(f^{i_1} \cdot f^{i_2} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) =$$
$$p! \operatorname{Alt}\left(\operatorname{Alt}\left(f^{i_1} \cdot f^{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \frac{p!}{2!} \operatorname{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) =$$
$$\frac{p!}{2!} \operatorname{Alt}\left(\operatorname{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \cdot f^{i_3}\right) \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) =$$
$$\frac{p!}{3!} \operatorname{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge f^{i_3} \cdot \ldots \cdot f^{i_p}\right) = \ldots =$$
$$\operatorname{Alt}\left(f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}\right) = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}.$$

◄