# 8 Итерационные методы решения СЛАУ

**Ex. 1.** *Пусть дана система из* $n$ *уравнений с* $n$ *неизвестными:*

$$Ax = b, \quad A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n), \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

*необходимо найти последовательность* $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ *такую, что*

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x^*, \quad Ax^* = b.$$

*Nb.* 1. Предел выше следует понимать в том смысле, что относительно нормы $\|\cdot\|$, заданной в $\mathbb{R}^n$ имеет место

$$\lim_{m\to\infty} \|x^{(m)} - x^*\| = 0.$$

## 8.1 Сжимающие отображения

**Df. 1.** Отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется **сжимающим**, если

$$\exists \alpha \in [0,1) : \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \rho(\varphi x, \varphi y) \leqslant \alpha\rho(x, y).$$

*Nb.* 2. Число $\alpha$ называется *коэффициентом сжатия*.

**Теорема 8.1.** *(о неподвижной точке) У каждого сжимающего отображения существует единственная неподвижная точка:*

$$\varphi : \quad \rho(\varphi x, \varphi y) \leqslant \alpha\rho(x, y) \quad \Rightarrow \quad \exists\, !\, x^* : \quad \varphi x^* = x^*.$$

*Доказательство.* Для начала покажем, что последовательность $\{x^{(m)} = \varphi^m x\}_{m=0}^{\infty}$ является фундаментальной. Действительно,

$$\rho(x^{(m)}, x^{(m+p)}) \leqslant \rho(x^{(m)}, x^{(m+1)}) + \ldots + \rho(x^{(m+p-1)}, x^{(m+p)})$$
$$\leqslant \alpha^m(1 + \alpha + \ldots + \alpha^p)\rho(x, \varphi x) = \frac{\alpha^m(1-\alpha^p)}{1-\alpha}\rho(x, \varphi x) \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x, \varphi x).$$

Таким образом $\rho(x^{(m)}, x^{(m+p)}) \to 0$ при $m \to \infty$ и для любого $p$. В силу *полноты* пространства $\mathbb{R}^n$ существует $x^*$, являющийся пределом последовательности $\{x^m\}_{m=0}^{\infty}$.
Теперь покажем, что $\varphi x^* = x^*$:

$$\rho(x^*, \varphi x^*) \leqslant \rho(x^*, x^{(m)}) + \rho(x^{(m)}, \varphi x^*) = \rho(x^*, x^{(m)}) + \rho(\varphi x^{(m-1)}, \varphi x^*)$$
$$\leqslant \rho(x^*, x^{(m)}) + \alpha\rho(x^{(m-1)}, x^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Наконец, докажем единственность неподвижной точки $x^*$. Предположим от противного, что существуют две точки $x^*$ и $y^*$, такие что

$$\varphi x^* = x^*, \quad \varphi y^* = y^*,$$

тогда сразу получаем

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(\varphi x^*, \varphi y^*) \leqslant \alpha\rho(x^*, y^*) \quad \Rightarrow \quad \alpha \geqslant 1.$$

□

## 8.2 Метод линейных итераций

**Df. 2.** **Линейными итерациями** называется последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ приближений решения $x^*$ системы уравнений $Ax = b$, которые имеют вид

$$x^{(m+1)} = Lx^{(m)} + z, \quad L \in Mat_{\mathbb{R}}(n), \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

**Lm. 1.** *Аффинное отображение $x \to Lx + z$ является сжимающим тогда и только тогда, когда $\|L\|_2 < 1$.*

*Доказательство.* Действительно, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем иметь:

$$\rho(Lx + z, Ly + z) = \|Lx - Ly\|_2 = \|L(x - y)\|_2 \leqslant \|L\|_2 \cdot \rho(x, y).$$

□

**Lm. 2.** *Пусть $A = M - N$, где $M$ - обратимая матрица, а $\|M^{-1}N\|_2 < 1$, тогда последовательность, задаваемая рекуррентным отношением*

$$x^{(m+1)} = Lx^{(m)} + z, \quad L = M^{-1}N, \quad z = M^{-1}b,$$

*сходится к решению $x^*$ уравнения $Ax = b$.*

*Доказательство.* Алгебраическими преобразованиями легко получить, что

$$(M - N)x = b \quad \Rightarrow \quad x = M^{-1}Nx + M^{-1}b = Lx + z.$$

Далее, если $x^*$ - точное решение, тогда $x^* = Lx^* + z$. Отображенние $x \to Lx + z$ является сжимающим, а значит последовательность $x^{(m+1)} = Lx^{(m)} + z$ является искомой. □

## 8.3 Методы Якоби и Гаусса-Зейделя

*Nb.* 3. Рассмотрим представление матрицы $A$ в виде суммы трех матриц: строго нижнетреугольной $(L)$, диагональной $(D)$ и строго верхнетреугольной $(U)$:

$$A = D + L + U.$$

### 8.3.1 Метод Якоби

Для метода линейных итераций используем следующие матрицы:

$$M = D, \quad N = -(L + U).$$

Таким образом

$$Dx = -(L + U)x + b \quad \Rightarrow \quad x^{(m+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{(m)}).$$

*Nb.* 4. Для оценки сходимости заметим, что

$$\det(L - \lambda I) = \det(L + U - \lambda D) = (-1)^n \lambda^n + \frac{\beta_{n-1}}{\det D} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots$$

таким образом, если $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \beta_{n-1}/\det D$, то должно быть выполнено следущее условие *диагонального преобладания элементов:*

$$\max_i \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{a_{ii}} < 1.$$

### 8.3.2 Метод Гаусса-Зейделя

В данном методе матрицы $M$ и $N$ выбираются следующим образом:

$$M = D + L, \quad N = -U,$$

откуда сразу получаем:

$$(D + L)x = -Ux + b, \quad \Rightarrow \quad x^{(m+1)} = (D + L)^{-1}(b - Ux^{(m)}).$$

**Lm. 3.** *Метод сходится при выполнении следующего условия:*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\sum_{j>i} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j<i} |a_{ij}|} < 1.$$

*Доказательство.* Зафиксируем вектор $x$, такой что $\|x\|_\infty = 1$ и положим

$$f = Ux, \quad y = (D + L)^{-1} f \quad \Rightarrow \quad (D + L)y = f,$$
$$a_{ii} y_i + \sum_{j<i} a_{ij} y_j = \sum_{j>i} a_{ij} x_j.$$

Перейдем к модулям и введем следующие обозначения:

$$d_i := |a_{ii}|, \qquad r_i := \sum_{j<i} |a_{ij}|, \qquad s_i := \sum_{j>i} |a_{ij}|,$$

в результате чего получаем следующую оценку:

$$d_i |y_i| \ \leqslant \ s_i + r_i m_{i-1}, \quad m_{i-1} := \max_{1 \leqslant j < i} |y_j|.$$

Следовательно,

$$|y_i| \ \leqslant \ \frac{s_i + r_i m_{i-1}}{d_i}, \quad m_i := \max_{1 \leqslant j \leqslant i} |y_j| \ \leqslant \ \max\left\{ m_{i-1}, \ \frac{s_i}{d_i - r_i} \right\}.$$

С базой $M_0 = 0$ индукцией получаем

$$\|y\|_\infty = M_n \ \leqslant \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{s_i}{d_i - r_i}.$$

Так как $x$ было произвольным с $\|x\|_\infty = 1$, получаем операторную оценку

$$\|(D + L)^{-1} U\|_\infty \ \leqslant \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\sum_{j>i} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j<i} |a_{ij}|}.$$

□

## 8.4 Метод простых итераций

В методе простых итераций последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к решению строится следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \tau \cdot (b - Ax^{(k)}),$$

где $A$ - положительно определенная матрица и $\tau > 0$ - параметр шага. Далее получаем

$$x^{(k+1)} = (I - \tau A)x^{(k)} + \tau b.$$

**Lm. 4.** *Метод простых итераций сходится при* $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{2}{\max|\lambda(A)|}$.

*Доказательство.* Действительно, условие $\max|\lambda(I - \tau A)| < 1$ можно переписать в виде

$$-1 < 1 - \tau\lambda_i < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \tau < \frac{2}{\lambda_i}.$$

□

**Df. 3.** **Скоростью сходимости** метода простых итераций называется величина

$$q(\tau) = \max_i |1 - \tau\lambda_i|$$

**Lm. 5.** *Оптимальный шаг и скорость сходимости алгоритма равны, соответственно*

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}, \quad q_{opt} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}.$$

*Доказательство.* Так как $|1 - \tau\lambda|$ как функция $\lambda$ кусочно-линейна, то ее максимум достигается на одном из концов:

$$q(\tau) = \max\{|1 - \tau\lambda_{\text{min}}|,\ |1 - \tau\lambda_{\text{max}}|\}.$$

Минимизируем максимум, уравнивая модули на концах:

$$1 - \tau\lambda_{min} = -(1 - \tau\lambda_{max}) \quad \Rightarrow \quad \tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}.$$

Далее, подстановка дает

$$q_{opt} = |1 - \frac{2\lambda_{max}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}| = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}.$$

□