Лекция 10

Прямая в пространстве

Содержание лекции:

В лекции мы рассматриваем основные способы задания прямой в пространстве. Следуя установленному алгоритму, мы даем инваринатное уравнение прямой, а затем последовательно выводим уравнения прямой в различных формах и устанавливаем взаимосвязи между ними.

Ключевые слова:
Инвариантное определение прямой в пространстве, уравнение прямой в форме двух пересекающихся плоскостей, векторное параметрической уравнение прямой, параметрические уравнения прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение прямой через две точки, векторное уравнение прямой.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

10.1 Уравнение прямой в пространстве

Прямой в пространстве называется геометрическое место точек L, равноудаленных от трех заданных точек P_1, P_2, P_3, лежащих только в одной плоскости:

$$L = \{M : \quad |P_1M| = |P_2M| = |P_3M|\}\,.$$

Nota bene Пусть $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, $\vec{r}$ - радиусы-векторы точек P_1, P_2, P_3 и P соответственно, тогда определение геометрического места можно сформулировать следующим образом:

$$|\vec{r}-\vec{r}_1| = |\vec{r}-\vec{r}_2| = |\vec{r}-\vec{r}_3|,$$

что эквивалентно следующим уравнениям:

$$\left(\vec{r}-\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_3}{2}, \vec{r}_1-\vec{r}_3\right) = 0, \quad \left(\vec{r}-\frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3}{2}, \vec{r}_2-\vec{r}_3\right) = 0,$$

которые, как мы видели, задают пару плоскостей.

Уравнение прямой в виде **в форме двух пересекающихся плоскостей** имеет следующий вид:

$$(\vec{r}, \vec{n}_1) = -D_1, \quad (\vec{r}, \vec{n}_2) = -D_2,$$

где

$$\vec{n}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \quad \vec{n}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_3,$$

- нормали определяющих плоскостей $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно.

Nota bene Из предположения о единственности плоскости, содержащей точки P_1, P_2, P_3 вытекает свойство

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_3 \nparallel \vec{r}_2 - \vec{r}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq 0$$

Уравнение прямой в форме **системы двух уравнений** имеет вид:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

- координаты векторов нормали в декартовой прямоугольной системе координат.

Nota bene Условие $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ в этом случае дает:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Уравнение прямой в форме **векторного параметрического уравнения** имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s},$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор опорной точки, $\vec{s}$ — направляющий вектор прямой.

Nota bene Из геометрических соображений сразу следует, что имеет место следующее соотношение между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ и направляющим вектором $\vec{s}$:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$x = x_0 + t \cdot s_x, \quad y = y_0 + t \cdot s_y, \quad z = z_0 + t \cdot s_z.$$

где

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{s} = (s_x, s_y, s_z).$$

Nota bene Параметрические уравнения прямой есть векторное параметрическое уравнение, записанное в декартовой прямоугольной системе координат.

Каноническим уравнением прямой называется уравнение вида:

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z}.$$

Nota bene Каноническое уравнение получается из параметрических уравнений в результате исключения параметра t.

Nota bene В знаменателях канонического уравнения допускается наличие нулей.

Уравнением прямой, проходящей через две точки называется уравнение вида:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t = \vec{r}_1(1 - t) + \vec{r}_2 t,$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиус-векторы точек P_1 и P_2, принадлежащих прямой.

Nota bene В декартовой прямоугольной системе координат уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Векторным уравнением прямой называется уравнение вида

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{b}.$$

где $\vec{b}$ - некоторый вектор, ортогональный прямой L.

Nota bene Векторное уравнение прямой получается из векторного параметрического уравнения при умножении обеих частей последнего векторно на вектор $\vec{s}$:

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{r}_0 \times \vec{s} + \vec{s} \times \vec{s}t = \vec{r}_0 \times \vec{s} \equiv \vec{b}.$$

Nota bene Покажем, как из векторной формы уравнения прямой получается векторная параметрическая форма. Для начала заметим, что радиус-вектор $\vec{r}_0$ опорной точки прямой удовлетворяет векторному уравнению:

$$\vec{r}_0 \times \vec{s} = \vec{b}.$$

Домножим обе части полученного уравнения справа векторно на $\vec{s}$, получим

$$\vec{s} \times [\vec{r}_0 \times \vec{s}] = \vec{s} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_0 \cdot |\vec{s}|^2 - \vec{s} \cdot (\vec{s}, \vec{r}_0) = \vec{s} \times \vec{b}.$$

Выберем теперь радиус-вектор $\vec{r}_0$ таким образом, чтобы он был ортогонален направляющему вектору $\vec{s}$. В результате получим

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{s} \times \vec{b}}{|\vec{s}|^2}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{s} \times \vec{b}}{|\vec{s}|^2} + \vec{s} \cdot t$$

Nota bene Покажем теперь как из уравнения прямой в форме двух пересекающихся плоскостей получается векторное уравнение. Домножим обе части данного векторного уравнения векторно на $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, получим:

$$\vec{r} \times [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \vec{b} \times [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \vec{b} \times \vec{s}.$$

Рассмотрим левую часть равенства:

$$\vec{r} \times [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \vec{n}_1 \cdot (\vec{r}, \vec{n}_2) - \vec{n}_2 \cdot (\vec{r}, \vec{n}_1) = \vec{n}_2 \cdot D_1 - \vec{n}_1 \cdot D_2.$$

Вектор $\vec{b}$ получается тогда, например, фиксацией условия $(\vec{b}, \vec{s}) = 0$ и векторным умножением обеих частей полученного равенства слева на $\vec{s}$:

$$\vec{b} = \frac{\vec{n}_2 \cdot D_1 - \vec{n}_1 \cdot D_2}{|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2|}.$$

Имея данный результат легко получить также векторное параметрическое уравнение прямой из уравнения в форме пересекающихся плоскостей.