8 Проекционный метод решения СЛАУ

В дальнейшем договоримся использовать следующие обозначения:

- x_* - точное решение системы линейных уравнений $Ax = b$;
- x_0 - начальное приближение к точному решению x_*;
- r_x - невязка:

$$r_x = Ax_0 - b = Ax_0 - Ax_* = A(x_0 - x_*).$$

8.1 Описание метода

Пусть L и K - подпространства евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. **Решениием относительно подпространства** L будем называть вектор $x' \in K$, такой что для любого $y \in L$:

$$\langle y, Ax' \rangle = \langle y, b \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle y, Ax' - b \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle y, r' \rangle = 0.$$

Определение 2. **Поправкой** приближения x_0 к решению x_* *относительно подпространства* L называется вектор $\delta_0 \in K$, такой что

$$A(x_0 + \delta_0) - b \in L^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in L \quad \langle y, r_0 - A\delta_0 \rangle = 0.$$

Замечание 1. Положим $\dim K = \dim L = m$ и пусть $\{v_i\}_{i=1}^m$ - базис K и $\{w_j\}_{j=1}^m$ - базис L, так что

$$V = [v_1, v_2, \ldots v_m], \quad W = [w_1, w_2, \ldots, w_m].$$

Тогда уловие на поправку $\delta_0 = Vy$ может быть записано в следующей форме:

$$W^T(r_0 - AVy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = (W^T AV)^{-1} W^T r_0.$$

Лемма 1. *Имеет место* $\delta_0 = \mathrm{pr}_L^{\perp}(x_0 - x_*)$.

Доказательство. Действительно, в подпространстве $L^{\perp}$ имеем

$$\delta_0 = Vy = A^{-1} r_0 = x_0 - x_*.$$

□

Теорема 8.1. *Пусть* $\{(K_j, L_j)\}_{j=1}^q$ *- набор пар подпространств* $\mathbb{R}^n$*, таких, что*

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_q = \mathbb{R}^n, \quad L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_q = \mathbb{R}^n,$$

тогда последовательноть

$$x_{j+1} = x_j + V_j y_j, \quad y_j = (W_j^T A V_j)^{-1} W_j^T r_j, \quad r_j = Ax_j - b.$$

сходится к точному решению x_*.

8.2 Одномерные приближения

Пусть $\dim K_j = \dim L_j = 1$, так что $K_j = \langle v_j \rangle$ и $L_j = \langle w_j \rangle$, тогда

$$x_{j+1} = x_j + \gamma_j v_j,$$

где коэффициент γ_i находится из условия $(r_i - A\delta_i) \perp w_i$:

$$\langle w_i, r_i + A(\gamma_i v_i) \rangle = \langle w_i, r_i \rangle + \gamma_i \langle w_i, A v_i \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_j = \frac{\langle r_j, w_j \rangle}{\langle A v_j, w_j \rangle}.$$

8.2.1 Метод наискорейшего спуска

Пусть рамках одномерного приближения A - SPD-матрица и $v_i = w_i = r_i$. Тогда формула для итераций примет следующий вид:

$$x_{j+1} = x_j + \frac{\langle r_j, r_j \rangle}{\langle A r_j, r_j \rangle} r_j.$$

Лемма 2. *Каждый шаг итерации минимизирует функционал $\Phi(x)$ в направлении $-\nabla\Phi(x)$:*

$$\Phi(x) = \|x - x_*\|_A^2 = \langle (x - x_*), A(x - x_*) \rangle.$$

Доказательство. Перепишем функционал в следующей форме:

$$\Phi(x) = \langle x, Ax \rangle - \langle x_*, Ax \rangle - \langle x, b \rangle + \langle x_*, b \rangle = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle + \langle x_*, b \rangle.$$

Последнее равенство справедливо в силу симетричности матрицы A. Далее:

$$\nabla\Phi(x) = 2Ax - 2b = 2r_x \quad \Rightarrow \quad -\nabla\Phi(x) \upuparrows r_x.$$

Теперь покажем, что выбор γ дает минимум финкционала Φ в направлении $-\nabla\Phi$. Рассмотрим функцию:

$$f(\gamma) = \Phi(x + \gamma r) = \langle (x + \gamma r), A(x = \gamma r) \rangle - 2\langle (x + \gamma r), b \rangle + \langle x_*, b \rangle.$$

Выпуклость $\Phi(x)$ дает ее минимум в стационарной точке $f(\gamma)$:

$$f'(\gamma) = 2\gamma\langle r, Ar \rangle - 2\langle r, r \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\langle r, r \rangle}{\langle r, Ar \rangle}.$$

□

8.2.2 Метод наискорейшего уменьшения невязки

Пусть рамках одномерного приближения A - невырожденная матрица и $v_i = A^T r_i$ и $w_i = A v_i = AA^T r_i$. Тогда формула для итераций примет следующий вид:

$$x_{j+1} = x_j + \frac{\langle r_j, AA^T r_j \rangle}{\langle AA^T r_j, AA^T r_j \rangle} A^T r_j = x_j + \frac{\langle A^T r_j, A^T r_j \rangle}{\langle AA^T r_j, AA^T r_j \rangle} A^T r_j$$

Замечание 2. Метод наискорейшего уменьшения невязки совпадает с методом наискорейшего спуска, примененным к системе $A^T A x = A^T b$.

Лемма 3. *Каждый шаг итерации минимизирует функционал* $\Psi(x)$ *в направлении* $-\nabla\Psi(x)$*:*

$$\Psi(x) = \|b - Ax\|_2^2 = \|r_x\|_2^2 = \langle r_x, r_x \rangle.$$

8.3 Обобщение результатов

Приведем два утверждения, обобщающие полученные ранее результаты, именно:

Теорема 8.2. *Пусть* $L = K$ *и* A *- SPD-матрица. Тогда задача ортогонального проектирования решения системы* $Ax = b$ *на подпространство* K *эквивалентна задаче минимизации функционала* Φ *на пространстве* K*:*

$$\Phi(x) = \|x - x_*\|_A^2.$$

Доказательство. Так как $L = K$, то без ограничения общности будем считать, что $V = W$ и функционал $\Phi(x)$ - строго выпуклый. Тогда задача оптимизации сводится к нахождению минимума:

$$y = \arg\min_y \Phi(x_0 + Vy).$$

Нам достаточнго найти стационарную точку функционала $f(y) = \Phi(x_0 + Vy)$, именно:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \langle (x_0 + Vy), A(x_0 + Vy) \rangle - 2\langle b, (x_0 + Vy) \rangle = \\ &= \langle y, (V^T A V) y \rangle - \langle r_0, x_0 \rangle - \langle b, x_0 \rangle - 2\langle r_0, Vy \rangle б \end{aligned}$$

Далее, находим градиент и значение y:

$$\nabla\Phi(y) = 2V^T A V y - 2V^T r_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (V^T a V)^{-1} V^T r_0.$$

□

Теорема 8.3. *Пусть* $L = AK$ *и* A *- невырожденнаяя матрица. Тогда задача проектирования решения системы* $Ax = b$ *на подпространство* K *ортогонально к подпространству* L *эквивалентна задаче минимизации функционала* $\Psi(x) = \|r_x\|_2^2$ *на пространстве* K.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Подставив в выражение для y соотношения для базисов $W = AV$, получим:

$$y = (V^T A^T A V)^{-1} V^T A^T r_0.$$

□