γ

Лекция 3

Ортогональный проектор

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы продолжим изучать ортогональные системы векторов. Здесь будут определены ортогональное дополнение подпространства и ортогональный проектор - те понятия, которыми наиболее часто оперирует геометрия. Также мы сформулируем и решим одну из самых важных задач геометрии - задачу о перпендикуляре.

Ключевые слова:
Ортогональная сумма подпространств, ортогональный проектор, задача о перпендикуляре, коэффициенты Фурье, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

3.1 Ортогональная сумма подпространств

Nota bene Пусть $X_E(\mathbb{C})$ - комплексное евклидово пространство и $L \leqslant X_E$ - его подпространство. Введем следующие определения:

> Говорят, что элемент $x \in X_E(\mathbb{C})$ **ортогонален подпространству** L, если
> $$\forall y \in L \quad x \perp y.$$

Nota bene Тот факт, что x ортогонален L принято обозначать $x \perp L$.

> **Ортогональным дополнением** подпространства L в X_E называется множество:
> $$M = L^{\perp} = \{x \in X_E : \quad x \perp L\}.$$

Лемма 3.1. *Множество $M = L^{\perp}$ является подпространством в $X_E(\mathbb{C})$.*

Лемма 3.2. *На множестве подпространств евклидова пространства X_E операция $L \mapsto L^{\perp}$ обладает следующими свойствами:*

$$(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}, \quad (L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}.$$

Теорема 3.1. *Пусть L - подпространство линейного пространства X_E, тогда*

$$X_E = L \dot{+} M \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X_E \quad \exists! z \in L,\ h \in L^{\perp} : \quad x = z + h.$$

►

1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ - ортонормированный базис в L,
2. Дополним $\{e_j\}_{j=1}^{k}$ до базиса X_E : $\quad \{e_1, e_2, \dots, e_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$
3. Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта
$$\{e_1, e_2, \dots, e_k; e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\},$$
4. $\forall x = \sum_{i=1}^{k} \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i e_i = z + h \quad \Rightarrow \quad E = L + M.$
5. Пусть $x = h_1 + z_1 = h_2 + z_2$, тогда $h_2 - h_1 = z_1 - z_2$ и
$$\|h_2 - h_1\|^2 = \langle z_1 - z_2, h_2 - h_1 \rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = 0.$$

◄

Nota bene В данном случае прямая сумма $E = L \dot{+} M = L \oplus M$ называется также *ортогональной суммой* подпространств L и M.

Nota bene В более общем случае, сумма попарно ортогональных подпространств $L_i \perp L_{j \neq i}$ называется ортогональной суммой подпространств:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} L_i.$$

3.2 Ортогональный проектор

Ортогональным проектром на подпространство L называется линейный оператор, обладающий следующим свойством:

$$\mathcal{P}_L^{\perp}(x) = z, \quad x = z + h, \quad z \in L, \quad h \in M = L^{\perp}.$$

Nota bene При этом вектор z называется *ортогональной проекцией* x на L.

Теорема 3.2. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^m$ - ортонормированный базис в X_E. Тогда вид ортогонального проектора в этом базисе:*

$$\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \forall x \in E.$$

►
Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что

$$x = z + h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_L^{\perp} z = z, \quad \mathcal{P}_L^{\perp} h = 0.$$

Действительно, пусть e_j - элемент базиса, лежащий в L, тогда

$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_j = \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, e_i \rangle e_i = e_j.$$

Если e_l - элемент базиса, лежащий в M $(k < l \leq n)$, тогда

$$\mathcal{P}_L^{\perp} e_l = \sum_{i=1}^{k} \langle e_l, e_i \rangle e_i = 0.$$

◄

3.3 Задача о перпендикуляре

Задачей о перпендикуляре называется задача об отыскании компонент произвольного вектора x в подпространствах L и M.

Nota bene Алгоритм решения задачи о перпендикуляре:

1. Найти ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^k$ подпространства L;
2. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$,
3. Найдем ортогональную проекцию $\mathcal{P}_M^{\perp} = x - \mathcal{P}_L^{\perp}$.

Лемма 3.3. *Имеет место следующее сравнение:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\| \leq \|x\|$$

►

Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\|^2 + \left\|\mathcal{P}_M^{\perp} x\right\|^2 = \|x\|^2 .$$

◄

> Коэффициенты $\alpha_i = \langle e_i, x\rangle$ ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ пространства X_E называются **коэффициентами Фурье** вектора x относительно этого базиса.

Лемма 3.4. *Справедливо следующее равенство:*

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle e_i, x\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 .$$

►

Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\left\|\mathcal{P}_L^{\perp} x\right\|^2 = \left\langle \mathcal{P}_L^{\perp} x, \mathcal{P}_L^{\perp} x\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{m} \langle\langle e_i, x\rangle e_i, \langle e_j, x\rangle e_j\rangle =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} \langle e_i, x\rangle\langle e_j, x\rangle\langle e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} |\langle e_i, x\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2$$

◄

Лемма 3.5. *(Следствие предыдущих лемм) Неравенство Бесселя:*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 , \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L.$$

Теорема 3.3. *Система ортонормированных векторов $\{e_i\}_{i=1}^k$ является полной в X_E тогда и только тогда, когда для любого $x \in X_E$ имеет место равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 , \quad \alpha_i = \langle e_i, x\rangle, \quad \forall x \in X_E.$$

►

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть для любого x выполняется равенство Парсеваля. Предположим, что

$$x = z + h, \quad z = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, x\rangle\, e_i, \quad h \perp z,$$

тогда по теореме Пифагора

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2, \quad \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 + \|h\|^2,$$

откуда следует, что $h = 0$ и система $\{e_i\}_{i=1}^m$ - полная в X_E.

◄