Лекция 6

Ранг матрицы

Содержание лекции:

Лекция посвящена вопросам линейной зависимости и линейной независимости стобцов и строк матриц. Удобным здесь служит понятие ранга матрицы. Мы увидим для каких матричных преобразований ранг является инвариантом, а также дадим альтернативные формулировки основных теорем о системах линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова:
Признак линейной зависимости, ранг матрицы, базисный минор матрицы, базисные строки, базисные стобцы, элементарные преобразования, теорема Крамера, расширенная матрица СЛАУ, альтернативная формулировка теоремы Кронеккера-Капелли.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

6.1 Критерий линейной зависимости

Теорема 6.1. *(Признак линейной зависимости набора векторов) Чтобы набор векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ был линейно-зависимым необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall V \in \Lambda^p \quad V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \quad p \leq \dim_{\Bbbk} X = n.$$

►

$\Rightarrow$ Очевидно по свойству антисимметричных ПЛФ.

$\Leftarrow$ Докажем от противного: пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ - линейно-независимый набор, такой что

$$\forall V \in \Lambda^p \quad V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0.$$

Дополним набор $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ до базиса $\{x_i\}_{i=1}^n$ линейного пространства X и построим сопряженный ему базис $\{y^j\}_{j=1}^n$ линейного пространства X^*:

$$\left(y^j, x_i\right) = \delta_i^j.$$

Далее, рассмотрим внешнее произведение линейных форм $y^1 \wedge y^2 \wedge \ldots \wedge y^p$, именно:

$$y^1 \wedge y^2 \wedge \ldots \wedge y^p\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = C \cdot \left[\operatorname{Alt}\left(y^1 \cdot y^2 \cdot \ldots \cdot y^p\right)\right]\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) =$$
$$\tilde{C} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} y^1 \cdot y^2 \cdot \ldots \cdot y^p \left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = \tilde{C} \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \delta^1_{\sigma(1)} \delta^2_{\sigma(2)} \ldots \delta^p_{\sigma(p)} =$$
$$= \tilde{C} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \neq 0.$$

Противоречие! Значит $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ - линейно-зависимый набор.

◄

Nota bene Чтобы набор векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ был линейно-зависимым необходимо и достаточно, чтобы он аннулировал все базисные ПЛФ пространства Λ^p:

$$\{x_i\}_{i=1}^p - \text{ЛЗ} \quad \Leftrightarrow \quad {}^{i_1 i_2 \ldots i_p}F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \quad \forall\, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n.$$

Nota bene Так как известно, что

$$\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} =^{1,2,\ldots,n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то для поднаборов $\{x_i\}_{i=1}^p$ будем иметь

$${}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi^{i_1}_{\sigma(1)} \xi^{i_2}_{\sigma(2)} \ldots \xi^{i_p}_{\sigma(p)} = L^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{1,2,\ldots,p}.$$

Таким образом, чтобы набор $\{x_i\}_{i=1}^p$ был линейно зависимым необходимо и достаточно, чтобы значение всех миноров порядка p на нем равнялось нулю:

$$L^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{1,2,\ldots,p} = 0.$$

> Пусть $A = \|\alpha^i_k\|$ - $m \times n$ - матрица и $L^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ - ее наибольшего порядка минор, отличный от нуля. Тогда говорят, что матрица A имеет **ранг** r.

Nota bene Обозначения:

$$rg(A), \quad rk(A), \quad \mathrm{rank}(A).$$

Nota bene Пусть

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & b_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

и $b_i \neq 0$, тогда

1. $L_1^1 = b_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) \geq 1;$
2. $L_{1,2}^{1,2} = b_1 b_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) \geq 2;$

   $\dots \quad \dots \quad \dots;$

r. $L_{1,2,\dots,r}^{1,2,\dots,r} = \Pi_{i=1}^r b_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A) \geq r;$

r+1. Все миноры порядка $(r+1)$ и выше равны нулю. Значит $\mathrm{rank}(A) = r$.

> Пусть ранг матрицы равен r, тогда любой ненулевой его минор порядка r называется **базисным минором**, а соответствующие ему строки и столбцы называются **базисными строками** и **базисными столбцами**.

Теорема 6.2. *(О базисном миноре)*

1. *Число линейно-независимых строк (столбцов) матрицы A равно* $\mathrm{rank}(A)$.
2. *Любая строка (столбец) матрицы A может быть представлена в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов).*

►

1. Пусть $\mathrm{rank}\, A = r$, тогда существует базисный минор

   $$L_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r} \neq 0,$$

   и значит найдется линейно-независимый набор $\{a_k\}_{k=1}^r$ из r векторов, образующий базис пространства столбцов матрицы A, так как любой набор из $r+1$ вектора будет линейно-зависимым. Аналогично доказывается утверждение для строк, так как $\det A^T = \det A$.

2. Доказательство следует прямо из того, что

   $$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{L} \left\{ a_1 a_2, \dots, a_n \right\}.$$

◄

Элементарными (гауссовыми) преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. транспозиция строк (столбцов);
2. почленное сложение/вычитание строк (столбцов);
3. умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.

Теорема 6.3. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

►

Следует из свойств определителей. ◄

6.1.1 Альтернативные формулировки теорем Крамера и Кронекера-Капелли

Теорема 6.4. *(Теорема Крамера) Рассмотрим систему уравнений:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i \xi^k = \beta^i, \quad i = 1 \dots n, \quad A = A_{n\times n}, \quad \det A \neq 0.$$

Тогда

1. *система совместна и определена;*
2. *решение системы задается выражениями:*

$$\xi^k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad \Delta = \det A, \quad \Delta_k = \det\{a_1, a_2, \dots, b, \dots, a_n\}, \quad a_k \to b.$$

►

1. Из условия имеем:

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ - ЛНЗ},$$

   и значит $\{a_j\}_{j=1}^n$ образует базис всего пространства $\Bbbk^n$.

2. Найдем вид решения системы:

$$\Delta_k = \det\{a_1, a_2, \dots, b, \dots, a_n\} = \det\left\{a_1, a_2, \dots, \sum_{k=1}^{n} \xi^k a_k, \dots, a_n\right\} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^k \det\{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n\} = \xi^k \cdot \det\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \xi^k \cdot \Delta.$$

◄

Расширенной матрицей системы $\sum_{k=1}^{n} a_k \xi^k = b$ называется матрица вида

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n \mid b).$$

Теорема 6.5. *(Кронекера-Капелли) Чтобы система была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц A и $\tilde{A}$ совпадали.*

►

$\Rightarrow$ Пусть система $\sum_{k=1}^{n} a_k \xi^k = b$ - совместна, тогда

$$b \in \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}.$$

$\Leftarrow$ Имеем:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} \quad \Rightarrow \quad b \in \mathcal{L}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

◄