6 Матричные разложения - II

6.1 Спектральное разложение

Def. 1. Разложением Жордана матрицы $A \in Mat_{\mathbb{C}}(n)$ называется представление данной матрицы в виде произведения:

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1},$$

где P - невырожденная матрица, состоящая из собственных и присоединенных векторов матрицы A и $J = diag\{J_1, J_2, \dots, J_m\}$ - матрица, состоящая из жордановых клеток:

$$J_s = \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_s & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_s \end{bmatrix}, \quad \lambda_s \in spec(A).$$

Nb. 1. Разложение Жордана существует для любой квадратной матрицы A.

Def. 2. Спектральным разложением матрицы $A \in Mat_{\mathbb{C}}(n)$ называется представление данной матрицы в виде произведения:

$$A = Q \cdot D \cdot Q^{-1},$$

где $D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ - диагональная матрица с собственными значениями матрицы A и Q - матрица из собственных векторов A.

Th. 6.1. *(Достаточное условие) Матрица $A \in Mat_{\mathbb{C}}(n)$ диагонализуема, если она является нормальной матрицей, то есть:*

$$A^{\dagger} \cdot A = A \cdot A^{\dagger}, \quad A^{\dagger} = \overline{A}^{T}.$$

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ - собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда x - собсвтенный вектор $A^{\dagger}$, отвечающий собственному значению $\overline{\lambda}$. Осталось показать, что $\langle x \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$ - также инвариантное подпространство A. Действительно пусть $y \neq 0$ и $y \in \langle x \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}$, то есть $\langle x, y \rangle = 0$, тогда

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^{\dagger} x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0.$$

□

Ex. 1. *Важные частные случаи нормальных матриц:*

- *эрмитовская (симметричная):* $A^{\dagger} = A, \quad A^{T} = A$*:*

$$spec(A) \subset \mathbb{R}, \quad Q^{\dagger} \cdot Q = I.$$

- *унитарная (ортогональная):* $A^{\dagger} = A^{-1}, \quad A^{T} = A^{-1}$*:*

$$\lambda \in spec(A) \Rightarrow |\lambda| = 1, \quad Q^{\dagger} \cdot Q = I.$$

Th. 6.2. *(Вейля) Пусть* A *и* $\widetilde{A} = A + V$ *- симметричные матрицы, причем* $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ *и* $\{\widetilde{\lambda}_j\}_{j=1}^n$ *- спектры* A *и* $\widetilde{A}$ *соответственно. Тогда:*

$$\forall i \in \overline{1,n} \quad \exists j \in \overline{1,n}: \quad |\widetilde{\lambda}_i - \lambda_j| \leqslant \|V\|_2.$$

Доказательство. Пусть $A = Q \cdot D \cdot Q^T$ - спектральное разложение матрицы A, $W = Q^T \cdot V \cdot Q$ и $M = D + W$ тогда

$$\widetilde{A} = Q \cdot (D + W) \cdot Q^T = Q \cdot M \cdot Q^T.$$

Оценим спектр матрицы M. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$, тогда:

$$x^T M x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + x^T W x,$$

$$\min_i \lambda_i + \min_{\|x\|=1} x^T W x \leqslant x^T M x \leqslant \max_i \lambda_i + \max_{\|x\|=1} x^T W x.$$

Кроме того, имеет место сравнение:

$$|x^T W x| \leqslant \|W\|_2 = \|V\|_2,$$

и тогда

$$x^T M x \in [\min_i \lambda_i - \|V\|_2, \max_i \lambda_i + \|V\|_2].$$

□

Ex. 2. *(Контр-пример) В качестве примера неустойчивости задачи разложения Жордана, рассмотрим матрицы:*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \varepsilon & \lambda \end{bmatrix}.$$

Видно, что $\mathrm{spec}(A) = \{\lambda\}$, *найдем* $\mathrm{spec}(\widetilde{A})$*:*

$$\det(A - \mu I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \lambda \pm \sqrt{\varepsilon}.$$

6.2 Сингулярное разложение

Nb. 2. Пусть $A \in Mat_{\mathbb{R}}(m, n)$ - произвольная прямоугольная $m \times n$ матрица ранга $r = rank(A)$.

Def. 3. Сингулярным разложением матрицы A называется представление матрицы A в форме произведения:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

где $U \in Mat_{\mathbb{R}}(m)$, $V \in Mat_{\mathbb{R}}(n)$ - ортогональные матрицы соответствующих рназмеров и $\Sigma \in Mat_{\mathbb{R}}(m, n)$ - прямоугольная $m \times n$ матрица с сингулярными значениями $\{\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r\}$.

Th. 6.3. *Сингулярное разложение существует всегда.*

Доказательство. Рассмотрим симметричную матрицу $B = A^T \cdot A$ и ее спектральное разложение:

$$B = A^T \cdot A = V \cdot \Lambda \cdot V^T, \quad \Lambda = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in \overline{1, m}.$$

Определим сингулярные числа матрицы A:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \geqslant 0.$$

Формируем матрицу $\Sigma \in Mat_{\mathbb{R}}(m, n)$ по следующему правилу:

$$\Sigma_{i,j} = 0, \quad \Sigma_{i,i} = \sigma_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Сформируем матрицу U, пусть

$$A \cdot V = A \cdot [v_1, v_2, \quad, v_n] = [Av_1, Av_2, \cdot, Av_n].$$

Далее, положим $u_i = Av_i/\sigma_i$, тогда $Av_i = \sigma_i u_i$, $\|u_i\| = 1$. Для $i > r$ возьмем такие u_i, чтобы дополнить набор $\{u_1, \ldots, u_r\}$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^m$. Тогда матрица U получается следующим образом:

$$U = [u_1, u_2, \ldots, u_m] \in Mat_{\mathbb{R}}(m), \quad U^T \cdot U = I.$$

□

Ex. 3. *Пример сингулярного разложения матрицы:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3-\sqrt{5}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

6.3 Скелетное разложение

Nb. 3. Пусть снова $A \in Mat_{\mathbb{R}}(m, n)$ - произвольная матрица ранга $r = rank(A)$.

Def. 4. **Скелетным разложением** матрицы A называется представление матрицы A в виде следующего произведения:

$$A = C \cdot U \cdot R,$$

где $C \in Mat_{\mathbb{R}}(m, k)$ - матрица, составленная из $k \geqslant r$ столбцов матрицы A, $R \in Mat_{\mathbb{R}}(l, n)$ - матрица, составленная из $l \geqslant r$ строк матрицы A и $U \in Mat_{\mathbb{R}}(k, l)$ - матрица коэффициентов.

Th. 6.4. *Скелетное разложение существует всегда.*

Доказательство. Пусть $r = rank(A)$, тогда существует множество индексов $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$, таких что набор столбцов $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}\}$ - линейно независимый и образует базис оболочки столбцов матрицы A. Введем обозначение:

$$C = A_{:,J} = [a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}] \in Mat_{\mathbb{R}}(m, r).$$

Аналогично, существует множество индексов $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, таких что набор строк $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_r}\}$ - линейно независим и образует базис оболочки строк матрицы A. Введем обозначение:

$$R = A_{I,:} = [b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_r}]^T \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(r, n).$$

Пусть $A_{I,J} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(r)$ - матрица, находящаяся на пересечении строк I и столбцов J. Данная матрица имеет ранг r и, значит, обратима. Пусть далее $A = C \cdot Z$, тогда

$$A_{I,:} = C_{I,:} \cdot Z,$$

но $A_{I,:} = R$, $C_{I,:} = A_{I,J}$, и значит:

$$R = A_{I,J} \cdot Z \quad \Rightarrow \quad Z = A_{I,J}^{-1} \cdot R,$$

откуда сразу следует, что $U = A_{I,J}^{-1}$. $\square$

Ex. 4. *Пример скелетного разложения:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ex. 5. *Рассмотрим матрицу оценок студентов по проектам. Необходимо аппроксимировать A представлением вида $\widetilde{A} = CUR$, где C и R состоят из запданных подмножеств строк и столбцов матрицы A соответственно:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = A_{:,\{1,3\}} \quad R = A_{\{1,5\},:}$$

Имеем:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{I,J} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу U:

$$U = A_{I,J}^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 5 - 1 \cdot 4} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Тогда аппроксимация исходной матрицы:

$$\widetilde{A} = CUR = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 29/21 & 2 & 16/7 \\ 4 & 68/21 & 4 & 24/7 \\ 3 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$