Алгебра. КТ. Весенний семестр

II. Подпространства, связанные с эндоморфизмом

1. $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, $V \geqslant U = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Докажите, что U инвариантно относительно $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}(x_1), \dots, \mathscr{A}(x_k) \in U$.

2. Инвариантно ли подпространство U пространства V относительно $\mathscr{A}$? Если да, найдите матрицу оператора $\mathscr{A}|_U$ в каком-нибудь базисе:

   а) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{A}\colon X \mapsto X - X^{\mathrm{T}}$;

   б) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = M_2^-(\mathbb{R})$, $\mathscr{A}\colon X \mapsto X - X^{\mathrm{T}}$;

   в) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$, $\mathscr{A}\colon f \mapsto f(1-x)$;

   г) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f''' = 0\}$, $U = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$, $\mathscr{A}\colon f \mapsto f(1-x)$;

3. Инвариантно ли подпространство U пространства $\mathbb{R}^n$ относительно оператора $\mathscr{A}$, заданного в стандартном базисе матрицей:

   а) $n = 3$, $U\colon x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

   б) $n = 4$, $U = \langle (4, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}},\ (-2, 2, 3, 1)^{\mathrm{T}},\ (0, 4, 5, 3)^{\mathrm{T}} \rangle$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   в) $n = 4$, $U = \langle (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}},\ (1, -1, 3, 5)^{\mathrm{T}},\ (3, 2, 4, 5)^{\mathrm{T}} \rangle$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найдите все инвариантные подпространства оператора $\mathscr{A}(f) = e^{-1} \cdot f(x+1)$ в вещественном пространстве $V = \langle e^x \cos x,\ e^x,\ e^x \sin x,\ e^{2x} \rangle$.

5. Найдите собственные значения и собственные подпространства линейных операторов в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$, заданных в стандартном базисе матрицами:

   а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

   г) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов в трёхмерном пространстве геометрических векторов:

   а) $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$; б) $x \mapsto (x, \mathbf{i})\mathbf{i}$; в) $x \mapsto \mathbf{i} \times x$.

7. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$:

   а) $f \mapsto xf'$; б) $f \mapsto \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt$.

8. Пусть f — произвольный фиксированный вещественный многочлен, отличный от константы. Преобразование $\mathscr{A}$ пространства $\mathbb{R}[x]$ сопоставляет произвольному многочлену его остаток от деления на f.

   а) Докажите, что $\mathscr{A}$ является линейным оператором, причём проектором. Проектором на какое подпространство?

   б) Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора $\mathscr{A}$;

   в) В подпространстве $\mathbb{R}[x]_3$ найдите собственный базис и запишите матрицу оператора $\mathscr{A}$ в этом базисе, если 1) $f = x$, 2) $f = x^2 + 1$, 3) $f = (x-1)^3$.

9. Операторы заданы матрицами в стандартном базисе. Выясните, какие из них диагонализируемы над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$. Если оператор диагонализируем над $\mathbb{R}$, найдите собственный базис, соответствующую диагональную матрицу и спектральное разложение оператора:

   а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10.* $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, $\dim V < \infty$. Докажите, что если $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \neq \operatorname{Ker}\mathscr{A}^2$, то $\mathscr{A}$ не диагонализируем.

11. Найдите $(n-1)$-мерные инвариантные подпространства оператора $\mathscr{A} \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, заданного матрицей в стандартном базисе:

   а) $n = 3$, $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix}$; б) $n = 3$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; в) $n = 4$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Указание: вспомните о связи U, U^0 и инвариантности.

12.* Последовательность (x_n) задана рекуррентно $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}$, $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $x_1 = b \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность сходится и найдите её предел.