

IV. Кольца и поля. Кольцо вычетов. Поле комплексных чисел

1. Постройте таблицы Кэли для колец \mathbb{Z}_5 , \mathbb{Z}_6 . Содержат ли они единицу? Найдите все пары делителей нуля. Является ли какое-либо из них полем?
2. Докажите, что всякое число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр.
3. Найдите признак делимости числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ на 11.
4. Найдите остаток от деления числа 2^{1001} : а) на 3; б) на 5; в) на 13.
5. Докажите, что уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ не имеет целочисленных решений.
6. Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
- 7* Докажите теорему Вильсона: $(p-1)! + 1 : p \Leftrightarrow p$ — простое число.
8. Найдите остаток от деления а) 2^{100} на 101; б) 2^{900} на 29; в) $28!$ на 29; г) $56!!$ на 29.
9. Нарисуйте на плоскости $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ линии, заданные уравнениями: $y = kx$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = -1$.
10. Докажите, что множество $\{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ является полем относительно операций обычного сложения многочленов и умножения, определённого следующим образом: $(a + bx) * (c + dx)$ равно остатку от деления $(a + bx)(c + dx)$ на $1 + x^2$. Найдите элемент, обратный $1 + x$ в этом поле.
11. Вычислите. Ответ запишите в алгебраической форме:
 а) $(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)^{24}$; б) $\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)^{27}$; в) $\left(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{32}$;
 г) $(\sqrt{2} + 1 + i)^8$; д) $((2 + \sqrt{3})i - 1)^{12}$.
12. Найдите корни из комплексных чисел. Ответ запишите в алгебраической форме и изобразите точками на комплексной плоскости:
 а) $\sqrt{1 - i}$; б) $\sqrt[4]{1}$; в) $\sqrt[3]{-64i}$; г) $\sqrt[3]{i}$; д) $\sqrt[6]{1}$.
13. Найдите суммы:
 а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$; б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$
- 14* На вход автомата подаётся карточка с упорядоченной парой чисел, а затем каждую секунду автомат преобразует карточку (x, y) в карточку $(x^2 - y^2, 2xy)$. После минуты работы автомат получил карточку с исходной парой. Найдите все возможные значения чисел на изначальной карточке.