α

Лекция 1

Понятие линейного оператора

Содержание лекции:
Настоящая лекция посвящена обсуждению линейных отображений между линейными пространствами. Мы введем основные понтия и объекты, связанные с линейными операторами, а также сформулируем наиболее важные их свойства. В конце мы докажем, что множество линейных операторов может быть наделено структурой линейного пространства.

Ключевые слова:
Линейный оператор, ядро, образ, теорема об изоморфизме, относительный базис, теорема о ядре и образе, равенстро операторов, сумма, умножение на число, линейное пространство операторов.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Определение линейного оператора

Отображение $\varphi : X \to Y$ линейного пространства X в линейное пространство Y называется **линейным оператором**, если $\forall\, x, x_1, x_2 \in X, \quad \forall \alpha \in \Bbbk$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x).$$

Nota bene Множество линейных операторов из $X(\Bbbk)$ в $Y(\Bbbk)$ обозначается $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$.

Nota bene Оператор $\varphi : X \to X$, отображающий X в себя, называют *эндоморфизмом* и пишут $\varphi \in \mathrm{End}(X)$, а в случае отображения на себя - *автоморфизмом* и пишут $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$.

Пример 1.1. Примеры линейных операторов

1. $\Theta : X \to Y, \quad \Theta x = 0_Y$ - нулевой оператор;
2. $\mathcal{I} : X \to X, \quad \mathcal{I}x = x$ - тождественный оператор;
3. $\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to X, \quad X = L_1 \oplus L_2 \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = x_1, \quad x_1 \in L_1$ - проектор;
4. $\varphi : X \to X, \quad X = C^1[-1, 1]$ - интегральный оператор:

$$(\varphi f)\,(t) = \int_{-1}^{1} A(t, s) f(s) ds.$$

   $A(s, t)$ -непрерывная функция на $C^1(-1, 1) \times C^1(-1, 1)$ - интегральное ядро.

5. $D : X \to X, \quad X = \mathcal{P}_n$ - дифференциальный оператор:

$$(Dp)\,(t) = \frac{d}{dt} p(t).$$

Ядром линейного оператора $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ называется подмножество X:

$$\ker \varphi = \{x \in X : \quad \varphi(x) = 0\}$$

Лемма 1.1. *Ядро* $\ker \varphi$ *- линейное подпространство* $X(\Bbbk)$.

Образом линейного отображения $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ называется подмножество Y:

$$\mathrm{Im}\, \varphi = \{y \in Y : \quad \exists\, x \in X \quad \varphi(x) = y\} = \varphi(X).$$

Лемма 1.2. *Образ* $\mathrm{Im}\, \varphi$ *- линейное подпространство* $Y(\Bbbk)$.

1.2 Теорема о ядре и образе

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$, *тогда имеет место изоморфизм*

$$X/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi.$$

▶
Отображение $\bar{\varphi} : X/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$, заданное как

$$x + \ker\varphi \mapsto \varphi(x).$$

Гомоморфно, сюрьективно и инъективно, а значит является изоморфизмом.
◀

Пусть $L \leq X$ - линейное подпространство X. Набор $\{v_j\}_{j=1}^m$ из X называется **линейно независимым над $\Bbbk$ относительно** L, Если

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_m v_m \in L \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Nota bene Приведенное в определение условие эквивалентно следующему:

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \ldots + \lambda_m \bar{v}_m = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Говорят, что $\{v_j\}_{j=1}^m$ **порождает** X *относительно* L, если

$$X = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle_{\Bbbk} + L.$$

Набор $\{v_j\}_{j=1}^m$ называется **базисом** X **относительно** L, если он линейно независим относительно L и порождает X относительно L.

Лемма 1.3. *Следующие условия эквивалентны:*

- $\{v_j\}_{j=1}^m$ *- базис* X *относительно* L*;*
- $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m\}$ *- базис* X/L*;*
- $X = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle_{\Bbbk} \oplus L.$

▶
Доказательство всех импликаций следует прямо из определений.
◀

Лемма 1.4. *Если* $L \leq X$ *тогда имеет место:*

$$\dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk} L + \dim_{\Bbbk} X/L$$

▶
Доказательство прямо следует их предыдущей леммы.
◀

Теорема 1.2. *(о ядре и образе) Пусть* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$, *тогда имеет место*

$$\dim_{\Bbbk} \ker \varphi + \dim_{k} \operatorname{Im} \varphi = \dim_{\Bbbk} X.$$

►
Используем теорему об изоморфизме, а потом лемму об относительных базисах.
◄

1.3 Пространство линейных операторов

Говорят, что операторы $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ **равны**, если

$$\varphi x = \psi x, \quad \forall x \in X.$$

Отображение χ называется **суммой** линейных операторов $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$, если

$$\forall x \in X \quad \chi(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Лемма 1.5. *Имеет место* $\chi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$.

$$\chi(x_1 + x_2) = \chi(x_1) + \chi(x_2),$$
$$\chi(\lambda x) = \lambda \chi(x)$$

►
Докажем первое утверждение:

$$\chi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1 + x_2) + \psi(x_1 + x_2) = (\varphi + \psi)x_1 + (\varphi + \psi)x_1 = \chi(x_1) + \chi(x_2).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. ◄

Отображение ζ называется **умножением** линейного оператора φ на число λ, если

$$\forall x \in X \quad \zeta x = \lambda \varphi(x)$$

Лемма 1.6. *Имеет место* $\zeta \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$.
►
Аналогично доказательству для суммы.
◄

Теорема 1.3. *Множество* $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ *- линейное пространство над полем* $\Bbbk$.
►
Прямая проверка аксиом линейного пространства.
◄