β

Лекция 2

Координаты в аффинном пространстве

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы вводим в аффинное пространство координаты. Репер, или система координат может быть введена непосредственно применением векторизации аффинного пространства, однако есть более естественный способ это сделать.

Ключевые слова:
Система координат, барицентрическая комбинация, центр тяжести, аффинная независимость, барицентрические координаты.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Координаты в аффинном пространстве

> **Системой координат в аффинном пространстве** $\mathbb{A}_\Bbbk$ называется пара $C_O = \left(O, \{\vec{e}_j\}_{j=1}^n\right)$, состоящая из произвольно выбранной точки $O \in \mathbb{S}$ и произвольно выбранного базиса $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ пространства $\mathbb{V}$.

Nota bene При векторизации vect_O пространства относительно точки O координатами точки P будет набор $\{\xi^j\}_{j=1}^n$, такой что

$$P \to \mathrm{vect}_O(P) = \overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^n \xi^j \vec{e}_j.$$

Nota bene Пусть $\{\xi^j\}_{j=1}^n$ - координаты точек P в системе координат C_O и $\{\eta^j\}_{j=1}^n$ - координаты точки Q в той же системе. Тогда из соотношения

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{v},$$

следует выражение для координат вектора $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n \left(\eta^j - \xi^j\right) \vec{e}_j.$$

2.2 Барицентрическая комбинация

> **Барицентрической линейной комбинацией** точек $\{P_i\}_{i=0}^m \in \mathbb{A}_\Bbbk$ аффинного пространства $\mathbb{A}_\Bbbk$ называется выражение вида
>
> $$\sum_{i=0}^m \alpha^i P_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=0}^m \alpha^i = 1 \quad \alpha^i \in \Bbbk.$$

Nota bene При векторизации vect_O аффинного пространства барицентрическая линейная комбинация задает точку $Q \in \mathbb{S}$, чей радиус-вектор равен

$$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=0}^m \alpha^i \overrightarrow{OP_i}$$

Лемма 2.1. *Точка Q - результат барицентрической линейной комбинации точек $\{P_i\}_{i=0}^m$ - определена корректно.*

►

Пусть O' - другая точка, тогда

$$\overrightarrow{O'Q} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=1}^k \alpha^i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}\right) = \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{O'P_i},$$

где было использовано свойство $\sum_{i=0}^m \alpha^i = 1$.

◄

Пример 2.1. Центр тяжести системы точек $\{P_0, P_1, \ldots P_m\}$:

$$center(P_0, P_1, \ldots, P_m) = \frac{1}{m+1}\left(P_0 + P_1 + \ldots + P_m\right).$$

Nota bene Барицентрическая комбинация $\lambda P + \mu Q$ двух точек P и Q есть точка R, лежащая на прямой PQ, и обладающая свойством

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{RQ}.$$

Лемма 2.2. *Непустое множество $\mathbb{P}_{\Bbbk} \subset \mathbb{A}_{\Bbbk}$ является плоскостью тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя различными точками оно содержит проходящую через них прямую.*

►

$\Leftarrow$ Утверждение очевидно.

$\Rightarrow$ Пусть $\mathbb{P}_{\Bbbk}$ обладает указанным свойством и $P_0 \in \mathbb{P}_{\Bbbk}$. Покажем, что множество

$$\mathbb{U} = \{\vec{u} \in \mathbb{U} : \quad P_0 + u \in \mathbb{P}_{\Bbbk}\} \subset \mathbb{V},$$

является подпространством. Ясно, что $0 \in \mathbb{U}$ и если $\vec{u} \in \mathbb{U}$, а $\lambda \in \Bbbk$, то $P_0 + \lambda\vec{u}$ лежит на прямой, проходящей через точки P_0 и $P_0 + \vec{u}$. Следовательно $\lambda\vec{u} \in \mathbb{U}$. Пусть теперь $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{U}$ и $\lambda \in \Bbbk$, так что $\lambda \notin \{0, 1\}$, тогда точка $P = P_0 + \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ лежит на прямой, проходящей через точки

$$P_1 = P_0 + \lambda\vec{u}_1 \in \mathbb{P}_{\Bbbk}, \quad P_2 = P_0 + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\vec{u}_2 \in \mathbb{P}_{\Bbbk},$$

а именно:

$$P = \frac{1}{\lambda}P_1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda}P_2 \quad \Rightarrow \quad P \in \mathbb{P}_{\Bbbk}.$$

◄

Аффинная независимость

> Система точек $\{P_i\}_{i=0}^m$ называется **аффинно-независимой**, если никакую из этих точек нельзя представить в виде барицентрической линейной комбинации остальных.

Лемма 2.3. *Система точек $\{P_i\}_{i=0}^m$ аффинно-независима тогда и только тогда, когда система векторов $\left\{\overrightarrow{P_0P_i}\right\}_{i=1}^k$ линейно-независима.*

►

$\Leftarrow$ Предположим, что $\{P_i\}_{i=0}^m$ - аффинно-зависима и

$$P_0 = \sum_{i=1}^m \alpha^i P_i, \quad \sum_{i=1}^m \alpha^i = 1,$$

тогда векторизация относительно точки P_0 дает

$$\vec{0} = \overrightarrow{P_0P_0} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \overrightarrow{P_0P_i}, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha^i = 1,$$

и значит система векторов $\left\{\overrightarrow{P_0P_i}\right\}_{i=1}^{k}$ линейнозависима.
$\Rightarrow$ Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha^i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{0}.$$

Возможны два случая:

- $\sum_{i=1}^{m} \alpha^i \neq 0$, тогда без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha^i = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i P_i \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad P = P_0.$$

- $\sum_{i=1}^{m} \alpha^i = 0$, но $\alpha^1 \neq 0$, тогда используем соотношение:

$$\overrightarrow{P_0P_i} = -\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_i},$$

  получаем линейную комбинацию

$$\alpha^0 \overrightarrow{P_1P_0} + \sum_{i=2}^{m} \alpha^i \overrightarrow{P_1P_i} = \vec{0},$$

  в которой

$$\alpha^0 = -\sum_{i=1}^{m} \alpha^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^0 + \sum_{i=2}^{m} \alpha^i = -\alpha^1 \neq 0,$$

  и значит P_1 является барицентрической линейной комбинацией точек $\{P_0, P_2, \dots P_m\}$.

◀

Барицентрические координаты

Теорема 2.1. *Пусть* $\dim \mathbb{A}_{\Bbbk} = n$ *и* $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ *- аффинно-независимая система точек в* $\mathbb{A}_{\Bbbk}$*. Тогда каждая точка* $Q \in \mathbb{A}_{\Bbbk}$ *единственным образом представляется в виде*

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \xi^i P_i, \quad \sum_{i=0}^{n} \xi^i = 1.$$

▶
Утверждение теоремы можно запистъ в виде

$$\overrightarrow{P_0Q} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \overrightarrow{P_0P_i}, \quad \xi^i \in \Bbbk.$$

Отсюда следует, что в качестве $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ можно взять координаты вектора $\overrightarrow{P_0Q}$ в базисе $\left\{\overrightarrow{P_0P_i}\right\}_{i=1}^n$. После этого ξ^0 определяется равенством

$$\xi^0 = 1 - \sum_{i=1}^n \xi^i.$$

◀

> Совокупность чисел $\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^k$ называется **барицентрическими координатами** точки $P \in \mathbb{A}_{\Bbbk}$ относительно системы точек $\{P_i\}_{i=0}^n$.