

Домашняя работа 1 :**Понятие линейного оператора**

Задача 1.1. Пусть L - подпространство линейного пространства X . Является ли линейным отображение $\varphi : X \rightarrow X$, определенное следующими правилами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in L \\ 0, & x \notin L. \end{cases}$$

Задача 1.2. Линейный оператор φ задан матрицей A_φ в стандартных базисах пространств $X(\mathbb{R})$ и $Y(\mathbb{R})$. Найти ядро $\ker \varphi$ и образ $\operatorname{Im} \varphi$ данного оператора, а также полный прообраз вектора $a \in Y(\mathbb{R})$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 4 \\ -24 & -15 & 2 \\ 43 & 8 & 9 \\ -50 & 5 & -20 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad a = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad -1)^T.$$

Задача 1.3. Доказать, что $\varphi : \mathbb{R}[x, y]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x, y]_2$ - линейное преобразование пространства однородных многочленов от двух переменных степени не выше 2. Вычислить матрицу данного преобразования в базисе $\{x^2, xy, y^2\}$, найти его ядро и образ:

$$[\varphi(p)](x, y) = x \frac{\partial p}{\partial x} - y \frac{\partial p}{\partial y}.$$