

Домашняя работа 1 : операции с тензорами

Задача 2.1. Записать матрицу тензора, имеющего в некотором базисе пространства X , $\dim X = 3$ следующие компоненты:

$$\varepsilon_{k,l}^{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } (k,l) - \text{четная перестановка различных чисел } (i,j); \\ -1, & \text{если } (k,l) - \text{нечетная перестановка различных чисел } (i,j); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Задача 2.2. Сколько различных двумерных сечений имеет тензор ранга r над пространством размерности n , если:

1. $r = 3, \quad n = 2,$

2. $r = 3, \quad n = 3,$

3. $r = 4, \quad n = 3.$

Задача 2.3. Найти тип и матрицу тензора $a \otimes b$, если

1. $a_j^i \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_k = (3 \ 2 \ 1).$

2. $a_j^i \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Задача 2.4. Пусть x_1, x_2, x_3 - векторы, а f^1, f^2, f^3 -линейные формы. Какие из приведенных ниже выражений имеют смысл? Если данное выражение есть тензор, указать его тип:

1. $x_1 \otimes x_2 + x_3 \otimes x_2;$

2. $x_1 \otimes f^1 + x_2 \otimes f^2;$

3. $x_1 \otimes (x_2 \otimes f^3 - x_3 \otimes f^2)$

4. $f^1 \otimes f^2 \otimes f^3 + f^1 \otimes f^2;$

5. $(x_1 - f^2) \otimes (x_2 - f^1);$

Задача 2.5. Найти матрицу тензора $a \otimes (b \otimes a + a \otimes c)$, если

1. $a^i \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b^j \rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c^k \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$

2. $a_i \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_k^j \rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad c_k^j \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$