# Лекция 6

## Сумма и пересечение подпространств

**Содержание лекции:**

Настоящая лекция посвящена обсуждению операций с подпространствами. Рассматриваемые здесь понятия имеют непосредственное приложение в геометрии. Формулируемое условие единственности разложения произвольного вектора имеет прямое отношение к описанию геометрических объектов и исследованию их свойств. Мы начнем с общих понятий суммы и пересечения линейных подпространств.

**Ключевые слова:**

Пересечение подпространств, сумма подпротранств, прямая сумма подпространств, компоненты вектора, проекция вектора, дополнение пространства, коразмерность пространства.

**Авторы курса:**

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

**Ссылка на ресурсы:**

## 6.1 Сумма и пересечение подпространств

***Nota bene*** Пусть $X(\Bbbk)$ - линейное пространство над некоторым полем $\Bbbk$ и $L, V \subset X(\Bbbk)$ - два его собственных подпространства.

> Множество $N \subset X$ называется **пересечением подпространств** $L$ и $V$, если
> $$N = \{x \in X : x \in L \wedge x \in V\}.$$

***Nota bene*** Тот факт, что множество $N$ является пересечением подпространств $L$ и $V$ обозначают следующим образом:

$$N = L \cap V.$$

**Лемма 6.1.** *Множество $N$ - подпространство $X(\Bbbk)$.*

►

Докажем замкнутость множества $N$ относительно линейных операций, индуцированных из $X(\Bbbk)$. Действительно,

$$x, x_1, x_2 \in N \quad \Rightarrow \quad x, x_1, x_2 \in L \cap V \quad \Rightarrow \quad x, x_1, x_2 \in L, \quad x, x_1, x_2 \in V.$$

Так как $L_1$ и $L_2$ - подпространство, то сразу получаем:

$$x_1 + x_2 \in L, \quad x_1 + x_2 \in V \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \in L \cap V = N,$$
$$x\lambda \in L, \quad x\lambda \in V \quad \Rightarrow \quad x\lambda \in N.$$

◄

> Множество $S \subset X$ называется **суммой подпространств** $L$ и $V$, если
> $$S = \{x \in X : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}.$$

***Nota bene*** Тот факт, что множество $S$ является суммой подпространств $L$ и $V$ обозначают следующим образом:

$$S = L + V.$$

**Лемма 6.2.** *Множество $S = L + V$ - подпространство $X$.*

►

Пусть $x, y \in S$, тогда

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L, \quad x_2, y_2 \in V,$$
$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \quad \Rightarrow \quad x + y \in S,$$
$$x\lambda = (x_1 + x_2)\lambda = x_1\lambda + x_2\lambda \quad \Rightarrow \quad x\lambda \in S.$$

◄

***Nota bene*** Определение суммы подпространств, определенное выше не эквивалентно теоретико-множественному объединению $L$ и $V$.

## 6.2 Теорема о размерностях

**Лемма 6.3.** *Пусть* $L(\Bbbk)$ *и* $V(\Bbbk)$ *- подпространства* $X(\Bbbk)$*. Тогда*

$$(L+V)/V \simeq L/(L\cap V).$$

▶
Рассмотрим гомоморфизм $\sigma : L \to (L+V)/V$ как композицию $\sigma = \varphi \circ j$ вложения $j$ и канонического гомоморфизма $\varphi$ с ядром $V$:

$$j : L \to (L+V), \quad x \mapsto x + 0_V,$$
$$\varphi : (L+V) \to (L+V)/V, \quad x + v \mapsto \bar{x} = x + V.$$

Заметим, что $\sigma$ - сюрьективно, а $\ker\sigma = L\cap V$. Тогда из теоремы об изоморфизме сразу следует утверждение леммы. ◀

**Теорема 6.1.** *(Грассман) Пусть* $L(\Bbbk)$ *и* $V(\Bbbk)$ *- подпространства* $X(\Bbbk)$*, тогда*

$$\dim_\Bbbk L + \dim_\Bbbk V = \dim_\Bbbk(L+V) + \dim_\Bbbk(L\cap V)$$

▶
Используем предыдущую лемму вместе со следующими равенствами:

$$\dim_\Bbbk(L+V) = \dim_\Bbbk V + \dim_\Bbbk(L+V)/V,$$
$$\dim_\Bbbk L = \dim_\Bbbk(L\cap V) + \dim_\Bbbk L/(L\cap V).$$

◀

***Nota bene*** Понятие суммы и пересечения подпространств распространяется на произвольное конечное их число $\{L_i\}_{i=1}^m$, именно:

$$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_m = \{x \in X : \quad x \in L_i, \quad i = 1\ldots m\},$$
$$L_1 + L_2 + \ldots + L_m = \{x \in X : \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \quad x_i \in L_i\}.$$

То, что это линейные подпространства $X(\Bbbk)$ доказываются аналогично.

## 6.3 Прямая сумма подпространств

**Прямой суммой подпространств** $L$ и $V$ называется их сумма $W$:

$$\forall x \in W \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L, \quad x_2 \in V,$$

когда такое разложение *единственно*.

***Nota bene*** Тот факт, что $W$ - прямая сумма $L$ и обозначают следующим образом:

$$W = L \dot{+} V.$$

**Теорема 6.2.** *(критерий прямой суммы)*

$$L + V = L \dot{+} V \quad \Leftrightarrow \quad L \cap V = \{0_X\}.$$

▶

$\Rightarrow$ Докажем от противного. Пусть

$$W = L \dot{+} V, \quad L \cap V \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \exists z \in L \cap V, \quad z \neq 0,$$
$$x = x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + z - z = (x_1 + z) + (x_2 - z).$$

$\Leftarrow$ Докажем от противного. Пусть

$$L \cap V = \{0_X\}, \quad N = L + V, \text{ - непрямая сумма}$$
$$x = x_1 + x_2, \quad x = y_1 + y_2 \quad \Rightarrow \quad 0_X = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2),$$
$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = z \neq 0_X, \quad z \in L_1 \cap L_2.$$

◀

**Теорема 6.3.** *Линейное пространство $X(\Bbbk)$ является прямой суммой своих подпространств $L$ и $V$ тогда и только тогда, когда эти подпространства дизъюнктны, а сумма их размерностей совпадает с размерностью $X(\Bbbk)$:*

$$X = L \dot{+} V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L \cap V = \{0_X\}, \\ \dim_{\Bbbk} L + \dim_{\Bbbk} V = \dim_{\Bbbk} X \end{cases}$$

▶

$\Rightarrow$ Первая часть следует из признака прямой суммы. Вторая - из того что

$$X = L + V, \quad \dim_{\Bbbk}(L \cap V) = 0_X$$

$\Leftarrow$ Имеем $\dim (L \cap V) = 0$ и значит

$$\dim_{\Bbbk} L + \dim_{\Bbbk} V = \dim_{\Bbbk}(L + V) + 0,$$
$$\dim_{\Bbbk} L + \dim_{\Bbbk} V = \dim_{\Bbbk} X,$$
$$\Rightarrow \quad \dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk}(L + V).$$

Кроме того,

$$\begin{cases} \dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk}(L + V), \\ L + V \subset X \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X = L + V \quad \Leftrightarrow \quad X = L \dot{+} V.$$

◀

Подпространство $L = \dot{+}\sum_{i=1}^{m} L_i$ называется **прямой суммой подпространств** $L_1, L_2, \ldots, L_m$, если единственно разложение

$$\forall x \in L \quad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_j \in L_j.$$

**Лемма 6.4.**

$$\sum_{i=1}^{m} L_i = \dot{+}\sum_{i=1}^{m} L_i \quad \Rightarrow \quad L_i \cap L_{j\neq i} = \{0_X\}\,.$$

►
Используем индукцию. Пусть

$$\sum_{i=1}^{m} L_i = \tilde{L}_m + L_m, \quad \tilde{L}_m = \sum_{i=1}^{m-1} L_i,$$

тогда в силу критерия прямой суммы для двух подпространств будем иметь

$$\tilde{L}_m + L_m = \tilde{L}_m \dot{+} L_m \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}_m \cap L_m = \{0_X\}\,.$$

Таким образом, мы получим

$$\tilde{L}_m \cap L_m = \{0_X\}\,, \quad i = 1\ldots m-1.$$

Для подпространства $\tilde{L}_m$ доказательство повторяется. ◄

**Теорема 6.4.** *Имеет место следующий критерий разложения линейного пространства $X(\mathbb{k})$ в прямую сумму подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_m$:*

$$X = \dot{+}\sum_{i=1}^{m} L_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_i \cap L_{j\neq i} = \{0\}\,, \\ \dim_{\mathbb{k}} X = \sum_{i=1}^{m} \dim_{\mathbb{k}} L_i. \end{cases}$$

►
$\Rightarrow$ следует из предыдущей леммы и теоремы о размерностях.
$\Leftarrow$ Используем индукцию.
◄

## 6.4 Проекция вектора на подпространство

Пусть $X = L \dot{+} V$, тогда

- $x_1, x_2$ называются **компонентами** $x$ в $L$ и $V$;
- $x_1 = \mathcal{P}_L^{||V} x$ называется **проекцией** $x$ на $L$ параллельно $V$;
- $x_2 = \mathcal{P}_V^{||L} x$ называется **проекцией** $x$ на $V$ параллельно $L$;
- $\mathcal{P}_L^{||V}$ называется **проектором на подпространство** $L$;
- $\mathcal{P}_V^{||L}$ называется **проектором на подпространство** $V$;
- $L$ называется **дополнением** $V$ до $X$;
- $V$ называется **дополнением** $L$ до $X$;

***Nota bene*** Дополнение к заданному подпространству определяется не единственным образом.

---

**Пример 6.1.** Контрпример:

$$L = \mathcal{L}\left\{e_1, e_2\right\}, \quad V = \mathcal{L}\left\{e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2\right\}, \quad X = L \dot{+} V \quad \forall \alpha, \beta \in \Bbbk.$$

---

**Коразмерностью** подпространства $L(\Bbbk) \leqslant X(\Bbbk)$ называется величина

$$\operatorname{codim}_{\Bbbk} L = \dim_{\Bbbk} X/L.$$