Список вопросов и ответов к коллоквиуму

1. Закон композиции: определение, примеры:

Внутренний закон композиции

Внутренним законом композиции на множестве M называется отображение $M \times M \to M$ декартова произведения $M \times M$ в M. Значение

$$(x, y) \mapsto z \in M$$

называется композицией элементов x и y относительно этого закона.

Пример 1.1. Пусть $\wp(M)$ - семейство всех подмножеств множества M. Тогда операции объединения и пересечения

$$(X, Y) \to X \cup Y, \quad (X, Y) \to X \cap Y,$$

являются законами композиции на $\wp(M)$.

Простейшими примерами внутренних законов композиции на множестве $\mathbf{R}$ являются арифметические операции сложения, вычитания и умножения действительных чисел, которые паре действительных чисел (α, β) ставят в соответствие их сумму, разность и произведение,

$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha - \beta$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$.

Внешний закон композиции

Пусть $M_1 \neq \varnothing, M_2 \neq \varnothing$. Внешним законом композиции на множестве M_2 над множеством M_1 называется произвольное отображение множества $M_1 \times M_2$ во множество M_2.

Примером внешнего закона композиции на множестве матриц $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ над множеством действительных чисел $\mathbf{R}$ является операция умножения матрицы на число,

$(\lambda, A) \mapsto \lambda \cdot A$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

2. Закон композиции : ассоциативность и коммутативность

Ассоциативность

Закон композиции элементов множества M называется **ассоциативным**, если для любых элементов $x, y, z \in M$ выполняется равенство:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

Коммутативность

‖ Элементы $x, y \in M$ называются **перестановочными** относительно заданного закона композиции, если имеет место равенство:

$$x \circ y = y \circ x.$$

Если перестановочна любая пара элементов $x, y \in M$, тогда внутренний закон $\circ$ называется **коммутативным**.

3. Основные структуры с одним законом композиции

Магма

‖ Множество, наделенное внутренним законом композиции, называется **магмой**.

Пример 1.7. Пусть множество M содержит только три элемента $\{-1, 0, 1\}$. Алгебраическую структуру магмы на S задает следующий закон композиции:

$$x \circ y = x <=> y = \begin{cases} 1, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ -1, & x > y. \end{cases}$$

Полугруппа

‖ Множество M, наделенное **ассоциативным** всюду определенным законом композиции называется **полугруппой**.

Пример 1.8. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с операцией операцией $\circ = "+"$ является полугруппой $(\mathbb{N}, "+")$.

Моноид

‖ Полугруппа S, содержащая **нейтральный элемент**, называется **моноидом**.

Пример 1.9. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с операцией операцией $\circ = "\cdot"$ является моноидом $(\mathbb{N}, 1, "\cdot")$.

---

4. Группа: определение, примеры

Говорят, что на множестве M определена структура **группы**, если закон композиции, заданный на M удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам):

1. ассоциативность закона;
2. существование нейтрального элемента;
3. для каждого элемента существует обратный.

Пример 1.10. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$, снабженное операцией сложения является коммутативной группой $(\mathbb{Z}, ''+'')$.

5. Гомоморфизмы групп: определение, свойства

Гомоморфизмом групп G и G' называется отображение $\sigma : G \to G'$, обладающее следующими свойствами:

$$\forall x, y \in G \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y), \quad \sigma(e) = e'.$$

Свойства:

1. Ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой
2. Сохранение операций: Гомоморфизм сохраняет операции, определенные на двух алгебраических структурах. Для групп это означает, что гомоморфизм сохраняет групповую операцию (обычно обозначается как *). Другими словами, если у нас есть группы (G, *) и (H, •), и f: G -> H - гомоморфизм групп, то f(a * b) = f(a) • f(b) для любых a и b в G.
3. Сохранение идентичности: Гомоморфизм сохраняет идентичные элементы. Это означает, что если e_G - единичный элемент (или ноль, если мы говорим о кольцах или поле) в группе G, и f: G -> H - гомоморфизм групп, то f(e_G) = e_H.
4.

Пусть $\sigma \in \mathrm{Hom}(G, G')$, *тогда*

$$\forall x \in G \quad \sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}.$$

-

(есть еще, но я думаю, что хватит)

6. Подгруппы: определение, примеры

Подгруппа

Подгруппой H группы G называется подмножество G, имеющее структуру группы, индуцированной групповым законом G.

Пример 3.1. Пусть $\sigma \in \hom(G, G')$, тогда $\ker\sigma \leq G$ и $\operatorname{Im}\sigma \leq G'$.

Вообще можно любой другой более простой пример, строятся довольно банально)

7. Нормальная подгруппа, фактор-группа

Нормальная подгруппа

Подгруппа H группы G называется **нормальной**, если

$$\forall x \in G \quad xH = Hx.$$

Nota bene Если H - нормальная подгруппа в G, то обычно пишут $H \triangleleft G$.

Nota bene Нормальной является любая подгруппа абелевой группы.

Nota bene В случае нормальной подгруппы имеем

$$\forall x \in G \quad [x]_R = [x]_L = \bar{x}.$$

Фактор-группа

Пусть G — группа, H — ее нормальная подгруппа, $G/H = \{xH = Hx \mid x \in G\}$ — множество смежных классов по подгруппе H. Определим на множестве G/H операцию умножения, полагая $xH \cdot yH = xyH$.

Примеры

- Рассмотрим $G = \mathbb{Z}$ и её нормальную подгруппу $H = n\mathbb{Z}$, тогда $G/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (группы вычетов по модулю n) будет являться факторгруппой G по H.

8. Понятие канонического гомоморфизма

Лемма 3.5. *Пусть $H \lhd G$, тогда существует такой гомоморфизм φ (называемый каноническим), что* $\ker\varphi = H$.

▶

Рассмотрим отображение

$$\varphi : G \to G/H, \quad \varphi(x) = xH,$$

и прямой проверкой убеждаемся, что

$$\varphi \in \hom(G, G/H), \quad \ker\varphi = H.$$

◀

9. Теорема об изоморфизме для групп

Теорема 3.1. *(Об изоморфизме) Пусть $\sigma : G \to G'$ - гомоморфизм групп, тогда*

$$G/\ker\sigma \simeq \operatorname{Im}\sigma.$$

▶

Зададим отображение $\bar{\sigma} : G/\ker\sigma \to \operatorname{Im}\sigma$

$$\bar{\sigma}(\bar{x}) = \sigma(x),$$

и покажем, что оно определено корректно. Именно, пусть $\bar{x} = \bar{y}$, тогда

$$\bar{\sigma}(\bar{y}) = \sigma(y) = \sigma(xx^{-1}y) = \sigma(x)\sigma(x^{-1}y) = \sigma(x)e = \sigma(x) = \bar{\sigma}(\bar{x}).$$

Далее, $\bar{\sigma}$ - гомоморфизм:

$$\bar{\sigma}(\bar{x}\bar{y}) = \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) = \bar{\sigma}(\bar{x})\bar{\sigma}(\bar{y}).$$

Тривиально проверяется, что $\operatorname{Im}\bar{\sigma} = \operatorname{Im}\sigma$, и остается прямой проверкой убедиться, что ядро $\bar{\sigma}$ тривиально:

$$\bar{z} \in \ker\bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \sigma(z) = \bar{\sigma}(\bar{z}) = e \quad \Rightarrow \quad z \in \ker\sigma \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \bar{e}.$$

Таким образом, мы показали, что $\bar{\sigma}$ - изоморфизм.

◀

10. Два закона композиции на множестве

4.1 Согласование внутренних законов

Пусть на множестве M задано два всюду определенных закона композиции, обозначаемых через $\circ$ и $*$. Закон композиции $\circ$ называется **дистрибутивным слева** относительно закона $*$, если для любых элементов $x, y, z \in M$ имеет место равенство

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)\,.$$

Соответственно, **дистрибутивность справа** означает выполнение следующего равенства:

$$\forall x, y, z \in M \quad (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)\,.$$

Закон, дистрибутивный и справа и слева называется **двояко дистрибутивным**.

Пример 4.1. Пусть на множестве M задано два всюду определенных закона композиции, обозначаемых через $\circ$ и $*$, причем $\circ$ наделяет M структурой группы. Если в M существует *нейтральный элемент* e относительно $*$ и $\circ$ двояко дистрибутивен относительно $*$, тогда элемент e является *поглощающим* относительно закона $\circ$. Действительно, пусть $x, y \in M$, рассмотрим композицию

$$x \circ y = x \circ (e * y) = (x \circ e) * (x \circ y) = e * (x \circ y).$$

Вообще говоря, из выведенного равенства не следует, что $(x \circ e) = e$, так как не доказано свойство всеобщности - мы показали лишь, что это верно для подмножества M_z композиций вида $z = x \circ y$. Чтобы $M_z = M$ достаточно потребовать существования групповой структуры на M относительно закона $\circ$.

---

11. Структура коммутативного кольца: определение, примеры

Кольцом R называется множество замкнутое относительно двух согласованно заданных на нем бинарных операций, удовлетворяющих следующим аксиомам:

A1. Ассоциативность сложения:

$$\forall x, y, z \in R \quad (x + y) + z = x + (y + z);$$

A2. Существование нуля:

$$\exists\, 0 \in R: \quad x + 0 = x = 0 + x \quad \forall x \in R$$

A3. Существование противоположного:

$$\forall x \in R \quad \exists\, (-x): \quad x + (-1) = 0 = (-x) + x.$$

M1. Асоциативность умножения:

$$\forall x, y, z \in R \quad (xy)z = x(yz);$$

M2. Существование единицы:

$$\exists\, 1 \in R: \quad 1 \cdot x = x = x \cdot 1, \quad \forall x \in R;$$

M3. Коммутативность:

$$\forall x, y \in R \quad x \cdot y = y \cdot x;$$

D1. Дистрибутивность слева:

$$\forall x, y, z \in R \quad x \cdot (y + z) = xy + xz;$$

D2. Дистрибутивность справа:

$$\forall x, y, z \in R \quad (x + y) \cdot z = xz + yz;$$

Пример 4.2. Примеры колец:

1. Нулевое кольцо:

$$R: \quad 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in R \quad x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0;$$

2. Целые числа:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m, \dots\};$$

12. Гомоморфизмы колец: определения, свойства

Пусть R и R' - кольца. **Гомоморфизмом колец** называется отображение $f : R \to R'$, со следующими свойствами:

- сохранение сложения:
$$\forall x, y \in R \quad f(x+y) = f(x) + f(y);$$
- сохранение умножения:
$$\forall x, y \in R \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y);$$
- сохранение единицы:
$$f(1_R) = 1_{R'}.$$

Nota bene Таким образом, гомоморфизм колец является гомоморфизмом абелевых групп $(R, +)$ и $(R', +)$, а также мультипликативных моноидов $(R, \cdot)$ и $(R', \cdot)$.

Подмножество $S \subset R$ называется **подкольцом** кольца R, если оно является абелевой подгрупой R и содержит единицу R.

Nota bene Тот факт, что S является подкольцом в R обозначают $S \leqslant R$.

Лемма 4.1. *Образ* $\operatorname{Im} f$ *гомоморфизма* $f \in \operatorname{Hom}(R, R')$ *является подкольцом в* R'*:*
$$\operatorname{Im} f \leqslant R'.$$

Лемма 4.2. *Ядро* $\ker f$ *гомоморфизма* $f \in \operatorname{Hom}(R, R')$ *имеет следующие свойства:*

1. *является нормальной подгрупой:* $\ker f \trianglelefteq (R, +)$;
2. *обладает поглощением:* $\forall x \in R, \quad \forall y \in \ker f \quad x \cdot y \in \ker f$.

13. Подкольцо: определение, примеры

Подмножество $S \subset R$ называется **подкольцом** кольца R, если оно является абелевой подгруппой R и содержит единицу R.

Nota bene Тот факт, что S является подкольцом в R обозначают $S \leqslant R$.

Подкольцо

Т. Непустое подмножество Н кольца К является подкольцом тогда и только тогда, когда

1) $\forall\, a, b \in$ Н, $\quad a+b \in$ Н;

2) $\forall\, a \in$ Н, $-a \in$ Н;

3) $\forall\, a, b \in$ Н, $\quad a \cdot b \in$ Н

Доказательство:

а) *Необходимость*. Пусть Н – подкольцо кольца К. Тогда оно само является кольцом и в нем выполняются требования 1), 2), 3) по определению кольца.

Пример 2.19. Кольцо целых чисел $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ есть подкольцо кольца действительных чисел $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. При этом, несмотря на то что кольцо действительных чисел есть поле, кольцо целых чисел не является его подполем, поскольку в последнем для любого целого числа отсутствует обратный к нему по умножению элемент.

14. Идеал кольца, фактор-кольцо

Иделалом J в кольце R называется аддитивная подгруппа со свойством

$$RJ \subset J \quad (\forall x \in R, \quad \forall y \in J \quad xy \in J).$$

Пример 5.1. Найдем идеалы в кольце $\mathbb{Z}$. Пусть m - наименьшее положительное число, лежащее в идеале $J \triangleleft \mathbb{Z}$. Тогда $(m) = m \cdot \mathbb{Z}$. Других идеалов в кольце $\mathbb{Z}$ содержащих элемент m нет. Действительно, пусть

$$z \in J = m \cdot \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad z = m \cdot u + r, \quad r \in J, \quad r < m \quad \Rightarrow \quad r = \min(J).$$

Множество R/J называется **фактор-кольцом** кольца R по идеалу J. Отображение $\varphi : R \to R/J$, действующее как

$$x \mapsto \bar{x} = x + J,$$

является гомоморфизмом, который называется **каноническим**.

15. Теорема об изоморфизме колец

Теорема 2.20. *Пусть $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ — произвольные кольца. Если $f\colon \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ — гомоморфизм, то*

1) образ нуля кольца $\mathcal{R}_1$ при отображении f есть нуль кольца $\mathcal{R}_2$, то есть $f(0) = 0$;

2) образ единицы кольца $\mathcal{R}_1$ при отображении f есть единица кольца $\mathcal{R}_2$, то есть $f(1) = 1$;

3) для всякого элемента x кольца $\mathcal{R}_1$ образ элемента, противоположного элементу x, равен элементу, противоположному образу элемента x, то есть $f(-x) = -f(x)$;

4) если кольца $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ являются полями, то для всякого элемента x кольца $\mathcal{R}_1$ образ элемента, обратного к элементу x по умножению, равен элементу, обратному к образу элемента x, то есть $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

Теорема 2.21. *Если f — гомоморфизм кольца $\mathcal{R}$ в кольцо $\mathcal{K}$, а g — гомоморфизм кольца $\mathcal{K}$ в кольцо $\mathcal{L}$, то композиция отображений $f \circ g$ есть гомоморфизм кольца $\mathcal{R}$ в кольцо $\mathcal{L}$.*

Теорема 2.22. *Если $f\colon \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ — изоморфизм кольца $\mathcal{R}_1$ на кольцо $\mathcal{R}_2$, то отображение f^{-1} есть изоморфизм кольца $\mathcal{R}_2$ на кольцо $\mathcal{R}_1$.*

16. Нильпотенты и обратимые элементы кольца

Элемент $z \neq 0$ называется **нильпотентом**, если

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad z^n = 0.$$

Nota bene Всякий нильпотент является делителем нуля. Обратное верно не всегда.

Обратимым элементом кольца называется всякий элемент $u \in R$ такой что

$$\exists v \in R \quad u \cdot v = 1$$

Nota bene В паре u, v оба элемента являются обратимыми.

Лемма 5.4. *Множество обратимых элементов кольца R образует мультипликативную группу, обозначаемую R^*.*

17. Область целостности. Поле

‖ **Областью целостности** называется кольцо, в котором нет делителей нуля.

‖ **Полем** называется ненулевое кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

Если раскрыть определение, то множество F с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения $+$ и умножения $*$ ($+\colon F\times F\to F,\quad *\colon F\times F\to F$, то есть $\forall a,b\in F\quad (a+b)\in F,\ a*b\in F$) называется **полем** $\langle F,+,*\rangle$, если выполнены следующие аксиомы:

1. Коммутативность сложения: $\forall a,b\in F\quad a+b=b+a$.
2. Ассоциативность сложения: $\forall a,b,c\in F\quad (a+b)+c=a+(b+c)$.
3. Существование нулевого элемента: $\exists \mathbf{0}\in F\colon \forall a\in F\quad a+\mathbf{0}=a$.
4. Существование противоположного элемента: $\forall a\in F\ \exists(-a)\in F\colon a+(-a)=\mathbf{0}$.
5. Коммутативность умножения: $\forall a,b\in F\quad a*b=b*a$.
6. Ассоциативность умножения: $\forall a,b,c\in F\quad (a*b)*c=a*(b*c)$.
7. Существование единичного элемента: $\exists e\in F\setminus\{\mathbf{0}\}\colon \forall a\in F\quad a*e=a$.
8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a\in F\colon a\neq\mathbf{0})\ \exists a^{-1}\in F\colon a*a^{-1}=e$.
9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a,b,c\in F\quad (a+b)*c=(a*c)+(b*c)$.

18. Важный пример: поле комплексных чисел

Теорема 6.1. *Множество $\mathbb{C}$ имеет алгебраическую структуру поля.*

▶

Сначала проверим свойства операции $+$:

1. ассоциативность очевидна в силу ассоциативности $+$ на множестве $\mathbb{R}$;
2. нейтральный элемент $0_{\mathbb{C}}=(0,0)$, действительно:
$$\forall z\in\mathbb{C}\quad z+0_{\mathbb{C}}=z=0_{\mathbb{C}}+z;$$
3. обратным элементом для $z=(a,b)$ является $(-z)=(-a,-b)$;

Далее, проверим свойства операции $\cdot$:

1. ассоциативность проверяется непостредственно:
$$((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2))\cdot(a_3,c_3)=(a_1,b_1)\cdot((a_2,b_2)\cdot(a_3,c_3))\,.$$
2. нейтральный элемент $1_{\mathbb{C}}=(1,0)$:
$$1_{\mathbb{C}}\cdot z=(1,0)\cdot(a,b)=(a,b).$$
3. обратным элементом для $z=(a,b)\neq(0,0)=0_{\mathbb{C}}$ является
$$z^{-1}=\left(\frac{a}{N(z)},-\frac{b}{N(z)}\right),\quad N(z)=a^2+b^2.$$

Осталось проверить дистрибутивность введенных операций слева и справа, что проводится непосредственным вычислением:

19. Важный пример: кольцо многочленов;

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3.$$

◀

19. Важный пример: кольцо многочленов

Теорема 6.1. *Множество $\Bbbk[x]$, наделенное операциями сложения и умножения является коммутативным ассоциативным кольцом.*

▶

Проверим аксиомы кольца:

- $(\Bbbk[x], +)$ - абелева группа, в которой
$$0(x) = 0, \quad (-p)(x) = -p(x).$$
- $(\Bbbk[x], \cdot)$ - коммутативный моноид, в котором $1(x) = 1$.
- Пусть $p, q, r \in \Bbbk[x]$, проверим дистрибутивность:
$$(p+q)\cdot r = \sum_{k=0} d_k x^k, \quad p \cdot r = \sum_{n=0} \alpha_n x^n, \quad q \cdot r = \sum_{m=0} \beta_m x^m.$$
тогда имеет место
$$d_k = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) c_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} (a_i c_{k-i}) + \sum_{i=0}^{k} (b_i c_{k-i}) = \alpha_k + \beta_k,$$

◀

20. Важный пример: алгебра матриц

Матрицы довольно простые(сложение, умножение, определитель), поэтому ничего добавлять не буду

21. Понятие системы линейных алгебраических уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений с m уравнениями и n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9.2}$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений (9.2) называется упорядоченный набор чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, который является решением *каждого* линейного алгебраического уравнения системы

Nota bene Далее для удобства и общности линейные уравнения также будем считать системами, состоящими из одного уравнения.

Система (9.2) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной** в противном случае.

Nota bene Будем обозначать через $\mathcal{S}_n^m$ множество всех систем линейных алгебраических уравнений, содержащих m уравнений и n неизвестных.

Nota bene Пусть $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^m$ - две системы, будем писать $S_1 \sim S_2$ если множества решений этих систем совпадают.

Элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений называются преобразования следующих трех типов:

L1. Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число;

L2. Перестановка двух уравнений;

L3. Умножение одного уравнения на число, отличное от нуля.

Лемма 9.2. *В результате элементарных преобразований любая система S переходит в эквивалентную ей систему S'.*

Матрицей системы алгебраических уравнений называется матрица S системы (9.2), соствленная из коэффициентов этой системы. **Расширенной матрицей** матрицей называется матрица $\tilde{S}$ системы, полученная приписыванием к матрице системы S столбца свободных членов:

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

22. Внешний закон композиции: определение, примеры

Его я расписал в пункте 1

23. Понятие согласованно действующей структуры

Nota bene Напомним, что внешний закон композиции называется согласованным с внутренним законом, если

$$\forall x, y \in M, \quad \alpha \in \Omega, \quad \alpha(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y).$$

Говорят, что алгебраическая структура Ω **действует на** алгебраической структуре M, если каждый элемент $\alpha \in \Omega$ является оператором внешнего закона на M и для любой пары элементов из $\alpha, \beta \in \Omega$ имеет место согласованное действие:

$$(\alpha * \beta)(x) = \alpha(\beta(x)), \quad \forall x \in M.$$

Говорят, что имеет место **согласованное действие** Ω на M, если

$$(\alpha * \beta)(x \circ y) = \alpha(\beta(x \circ y)) = \alpha(\beta x \circ \beta y) = \alpha(\beta x) \circ \alpha(\beta y).$$

24. Структура модуля над кольцом: определение, примеры

Левым R-модулем (или левым модулем над кольцом R) называется абелева группа $(G, +)$ с заданной бинарной операцией $R \times G \to G$, записываемой как $(\alpha, x) \to \alpha x$ и согласованной действующей на групповой структуре на G:

L1. Действие кольца группе:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in G$$
$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

L2. Согласованное действие:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall x_1, x_2 \in G \quad \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

Nota bene Аналогично можно определить структуру **правого** R-модуля, если определена бинарная операция

$$G \times R \to G, \quad (x, \alpha) \mapsto x\alpha.$$

Если определены оба отображения, то говорят о **двустороннем** R-модуле.

Пример 10.3. Примеры R-модулей:

- Всякий $J \trianglelefteq R$ - идеал кольца R есть R-модуль.
- Любая абелева группа $(G, +)$ представляет собой $\mathbb{Z}$ - модуль, ибо

$$\forall x \in G \quad x + x + x + \ldots + x = zx, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

- Пусть $\Bbbk$-поле, тогда структру модуля имеет $\Bbbk^n$ - множество столбиков вида

$$\xi = \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)', \quad \xi^i \in \Bbbk.$$

25. Линейное отображение: определение, примеры

> **Гомоморфизмом R-модулей** X и Y (или R-линейным отображением) называется отображение $\sigma : X \to Y$, такое что:
>
> $$\forall x, x_1, x_2 \in X, \quad \forall \alpha \in R$$
> $$\sigma(x_1 + x_2) = \sigma(x_1) + \sigma(x_2), \quad \sigma(\alpha x) = \sigma(x)\alpha.$$

Nota bene Для множества R-линейных отображений между X и Y используют следующее обозначение $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$.

П **Пример 6.** Предыдущим примерам можно дать и геометрическую интерпретацию. Так, линейное отображение $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

задает ортогональную проекцию вектора $X = (x, y, z)$ на плоскость $z = 0$. Можно рассматривать его и как отображение $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$. Проецирование же на произвольное подпространство может быть задано с помощью матрицы. Так, например, отображение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

задает ортогональную проекцию вектора X на многообразие $x + y + z = 0$.

26. Подмодуль: определение, примеры

(1) Подмножество $L \subseteq X$ называется **подмодулем** R-модуля X, если L замкнуто относительно операций, индуцированных из X.

(2) Подмножество $L \subseteq X$ называется **подмодулем** R-модуля X, если L само является R-модулем относительно операций, индуцированных из X.

Лемма 10.3. *Определения (1) и (2) равносильны.*

Пример 10.4. Примеры подмодулей:

- Ядро линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ является подмодулем в X;
- Образ линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ является подмодулем в Y;
- Идеал $J \trianglelefteq R$ являеется подмодулем R-модуля R;
- Подмножество $\Bbbk^n$ столбиков ξ, у которых первый элемент $\xi^1 = 0$.

27. Фактор-модуль, теорема об изоморфизме модулей.

Nota bene На фактор группу X/L переносится структура R-модуля, если умножение определить формулой:

$$\alpha(x+L) = \alpha x + L, \quad \forall x \in X.$$

R-модуль X/L называется **фактор-модулем** X по L.

Коядром гомоморфизма $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ называется множество

$$\mathrm{Coker}\,\sigma = Y/\,\mathrm{Im}\,\sigma.$$

Лемма 10.4. *Коядро является фактор-модулем Y.*

Теорема 10.1. *Имеет место изоморфизм R-модулей:*

$$X/\ker\sigma \simeq \mathrm{Im}\,\sigma.$$

Первая теорема [править | править код]

Пусть $\varphi\colon\ M \to N$ — гомоморфизм модулей, тогда:

1. Ядро φ — подмодуль в M;
2. Образ φ — подмодуль в N;
3. Образ φ изоморфен фактормодулю $M/\ker\varphi$.

Вторая теорема [править | править код]

Пусть M — модуль, S и T — подмодули в M, тогда:

1. Сумма $S+T$ — подмодуль в M;
2. Пересечение $S \cap T$ — подмодуль в M;
3. Фактормодуль $(S+T)/T$ изоморфен фактормодулю $S/(S \cap T)$.

Третья теорема [править | править код]

Пусть M — модуль, S и T — подмодули в M такие, что $T \subseteq S$, тогда:

1. S/T — подмодуль в M/T;
2. Фактормножество фактормодулей $(M/T)/(S/T)$ изоморфно фактормодулю M/S.