Лекция 2

Матрица линейного оператора

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы рассмотрим представление оператора в линейном пространстве с заданным базисом. Мы покажем, что произвольный линейный оператор в этом случае моно представить прямоугольной матрицей соответствующих размеров. Также будет обсуждаться вопрос преобразования матрицы оператора при замене базисов пространств.

Ключевые слова:
Матрица линейного оператора, базис размерность пространства линейных операторов, преобразование матрицы оператора, преобразование подобия.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Матрица линейного оператора

Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно.

> **Матрицей линейного оператора** φ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A = \|\alpha_i^j\|$ по столбцам которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ в базисе $\{g_j\}_{j=1}^m$:
>
> $$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j.$$

Пример 2.1. Примеры:

1. $\Theta : X \to Y$:
$$A_\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathcal{I} : X \to X$:
$$A_\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to X$:
$$A_{\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2}} = \begin{pmatrix} A_\mathcal{I} & 0 \\ 0 & A_\Theta \end{pmatrix},$$
так как
$$\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = x, \quad \forall x \in L_1,$$
$$\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = 0, \quad \forall x \in L_2.$$

4. $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$:
$$A_\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
в базисе $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$.

Теорема 2.1. *Задание линейного оператора φ эквивалентно заданию его матрицы A в фиксированной паре базисов.*

▶

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно. Рассмотрим элементы $x \in X$ и $y \in Y$, такие что:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{m} \eta^j g_j, \quad \varphi(x) = y.$$

Рассмотрим действие оператора на элемент x:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \varphi\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^{m} \eta^j g_j,$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \alpha_i^j.$$

◀

Теорема 2.2. *Набор операторов $\left\{{}_j^i\varepsilon\right\}$, действующих на произвольный вектор $x \in X$ по правилу*

$${}_j^i\varepsilon(x) = \xi^i g_j, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i,$$

образует базис пространства $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$

▶

Необходимо показать, что набор операторов $\{{}_k^i\varepsilon\}$ является полным и линейно независимым в $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$:

ПН: пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$, тогда

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \sum_{j=1}^{m} a_i^j g_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \xi^i a_i^j g_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {}_j^i\varepsilon(x) a_i^j, \quad \forall x \in X\end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {}_j^i\varepsilon a_i^j, \quad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y).$$

ЛНЗ: положим, рассмотрим линейную комбинацию векторов набора $\left\{{}_j^i\varepsilon\right\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {}_j^i\varepsilon \beta_i^j = \Theta,$$

и применим обе части операторного равенства к базисному элементу e_k пространства X. Получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}{}^{i}_{j}\varepsilon(e_k)\beta^j_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\delta^i_k g_j\beta^j_i = \sum_{j=1}^{m} g_j\beta^j_k = 0_Y$$

Но набор $\{g_j\}_{j=1}^m$ - линейно-независимый (как базис Y) следовательно $\beta^j_k = 0, \forall k$. Применяя полученное выражение ко всем элементам базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ получим что все коэффициенты β^j_k равны нулю.
◄

Nota bene Пространство $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ изоморфно пространству K^m_n $m \times n$ матриц.

Nota bene Размерность линейного пространства $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ равна

$$\dim \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y) = \dim_{\Bbbk} K^m_n = \dim_{\Bbbk} X \cdot \dim_{\Bbbk} Y = m \cdot n.$$

Теорема 2.3. *Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(X)$ имеет в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ соответственно матрицы A и $\tilde{A}$. Тогда*

$$\tilde{A} = S \cdot A \cdot T, \quad S = T^{-1}.$$

►
Вычислим образ $\varphi(\tilde{e}_k)$ двумя способами:

$$\varphi(\tilde{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}^j_k \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}^j_k \tau^i_j e_i.$$

$$\varphi(\tilde{e}_k) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \tau^j_k e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \tau^j_k \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \tau^j_k a^i_j e_i.$$

Доказательство следует из равенства правых частей полученных выражений.
◄

Преобразованием подобия матрицы A называется преобразование вида:

$$A \mapsto T^{-1} \cdot A \cdot T, \quad \det T \neq 0.$$

Nota bene Преобразование матрицы произвольного оператора $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ с матрицами перехода T_X и T_Y имеет вид:

$$\tilde{A} = T_Y^{-1} \cdot A \cdot T_X.$$

Nota bene При замене базиса матрица A линейного оператора φ подвергается преобразованию подобия.