$\mathcal{E}$

Лекция 5

Линейные подпространства

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы поговорим о подструктурах линейного пространства - линейных подпространстранствах. Чаще всего приходится иметь дело именно с ними. Подпространства и линейные многообразия играют важную роль в геометрических приложениях линейной алгебры, а также, как будет указано, в теории систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова:
Линейное подпространство, линейная оболочка, линейное многообразие, размерность линейного многообразия.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

5.1 Подпространства

Подмножество $L \subset X$ линейного пространства $X(\Bbbk)$ называется **линейным подпространством пространства** $X(\Bbbk)$, если оно само является линейным простанством над полем $\Bbbk$ относительно операций, определенных в $X(\Bbbk)$.

Лемма 5.1. *(Критерий линейного подпространства) Для того, чтобы непустое подмножество L линейного пространства $X(\Bbbk)$ являлось подпространством, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. $\forall x_1, x_2 \in L(\Bbbk) \quad x_1 + x_2 \in L(\Bbbk)$;
2. $\forall \alpha \in \Bbbk, \quad \forall x \in L(\Bbbk) \quad \alpha x \in L(\Bbbk)$.

►
$\Rightarrow$ Пусть $L(\Bbbk)$ - подпространство линейного пространства $X(\Bbbk)$, тогда условия (1) и (2) содержатся в его определении.
$\Leftarrow$ Пусть выполняются условия (1) и (2), тогда прямой проверкой аксиом, убеждаемся, что $L(\Bbbk)$ - подпространство линейного пространства $X(\Bbbk)$. ◄

Nota bene Обычно пишут $L(\Bbbk) \leqslant X(\Bbbk)$.

Пример 5.1. Примеры подпространств:

1. Само $X(\Bbbk)$ и $\{0\}$ - примеры несобственного и тривиального подпространств;
2. Множество симметричных 2×2 матриц - подпространство $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2)$;
3. Множество четных полиномов - подпространство $\mathbb{R}[x]_n$;

Лемма 5.2. *Пусть $L(\Bbbk) \leqslant X(\Bbbk)$, тогда*

$$\dim_{\Bbbk} L \leq \dim_{\Bbbk} X.$$

►
Так как $L(\Bbbk)$ является подмножеством $X(\Bbbk)$, то любой набор элементов $L(\Bbbk)$ также содержится и в $X(\Bbbk)$. Лемму доказывает выбор базиса $L(\Bbbk)$ в качестве такого набора.
◄

Лемма 5.3. *Имеет место:*

$$L(\Bbbk) = X(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\Bbbk} L = \dim_{\Bbbk} X.$$

►
$\Rightarrow$ Утверждение очевидно.
$\Leftarrow$ Наряду с тем, что $L \subseteq X$, имеет место критерий:

$$\dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk} L \quad \Leftrightarrow \quad X(\Bbbk) \simeq L(\Bbbk),$$

◄

Лемма 5.4. *Любой базис подпространства $L(\Bbbk)$ может быть дополнен до базиса всего пространства $X(\Bbbk)$.*

▶

Пусть $\{f_i\}_{i=1}^m$ базис $L(\Bbbk)$. Применим процедуру замещения к системе

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \quad \Rightarrow \quad \{\ldots; f_1, f_2, \ldots, f_m\}$$

где $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $X(\Bbbk)$. ◀

Лемма 5.5. *Из произвольного базиса пространства $X(\Bbbk)$, вообще говоря, нельзя выбрать базис его подпространства $L(\Bbbk)$.*

▶

Лемму доказывает контрпример:

$$X(\Bbbk) = \mathcal{L}\{e_1, e_2\} \quad L(\Bbbk) = \mathcal{L}\{e_1 + e_2\}.$$

◀

> Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^m$ называется **линейно-независимым над** $L(\Bbbk)$, если
>
> $$\sum_{i=1}^m \xi^i x_i \in L(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \xi^i = 0.$$

5.2 Линейная оболочка

> **Линейной оболочкой** системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется множество $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ всех линейных комбинаций этих векторов:
>
> $$\mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \left\{ x \in X : \quad x = \sum_{i=1}^k \alpha^i x_i \right\}.$$

Лемма 5.6. *Линейная оболочка векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - подпространство $X(\Bbbk)$:*

$$\forall y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}, \quad \forall \lambda \in \Bbbk \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 \in \mathcal{L}, \quad \lambda y \in \mathcal{L}.$$

▶

Так как $y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}(\Bbbk)$, то

$$y = \sum_{i=1}^k x_i \alpha^i, \quad y_1 = \sum_{i=1}^k x_i \alpha_1^i, \quad y_2 = \sum_{i=1}^k x_i \alpha_2^i,$$

и осталось только проверить существование соответствующих линейных комбинаций:

$$y_1 + y_2 = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_1^i + \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_2^i = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\alpha_1^i + \alpha_2^i\right) \in \mathcal{L},$$

$$y\lambda = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i \cdot \lambda = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha^i \lambda \in \mathcal{L}.$$

◀

Лемма 5.7. *(минимальность) Линейная оболочка векторов $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ является наименьшим подпространством в $X(\Bbbk)$, содержащим эти векторы.*
▶
Всякое линейное пространство, содержащее векторы $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ также должно содержать и все их линейные комбинации, а значит - линейная оболочка $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ - наименьшее из таких подпространств. ◀

Линейная оболочка векторов $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ называется **подпространством, натянутым на данные векторы**.

5.3 Линейное многообразие

Линейным многообразием M, параллельным подпространству $L(\Bbbk)$ линейного пространства $X(\Bbbk)$ называется множество

$$M_{x_0} = \{y \in X(\Bbbk) : \quad y = x_0 + x, \quad x_0 \in X(\Bbbk), \quad x \in L(\Bbbk)\}.$$

Nota bene Линейное подпространство $L(\Bbbk)$ называется также *несущим подпространством* для многообразия M.

Теорема 5.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$(1) \quad x_0 + L = y_0 + L \quad \Leftrightarrow \quad (2) \quad y_0 \in x_0 + L \quad \Leftrightarrow \quad (3) \quad y_0 - x_0 \in L.$$

▶
На протяжении всего доказательства положим $z, z' \in L$.
Импликация (1) $\Rightarrow$ (2):

$$x_0 + L = y_0 + L \quad \Rightarrow \quad x_0 + z = y_0 + z' \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + (z - z') \in x_0 + L.$$

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3):

$$y_0 \in x_0 + L \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + z \quad \Rightarrow \quad y_0 - x_0 = z \in L.$$

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1):

$$y_0 - x_0 \in L \quad \Rightarrow \quad y_0 = x_0 + z.$$

Пусть $x \in x_0 + L$, тогда $x = x_0 + z'$, $z' \in L$ и

$$x = x_0 + z' = y_0 + (z' - z) \quad \Rightarrow \quad x_0 + L \subseteq y_0 + L.$$

аналогично для $y \in y_0 + L$.
◀

Nota bene Многообразие M_{x_0} порождается любым своим представителем.

Nota bene Для того, чтобы линейное многообразие M_{x_0} было подпространством необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \in L(\Bbbk)$, то есть, чтобы $M_{x_0} \equiv L(\Bbbk)$.

Лемма 5.8. *Несущее подпространство линейного многообразия определяется единственным образом.*
▶
Пусть $x_0, y_0 \in X$ и $L(\Bbbk), L'(\Bbbk) \leqslant X(\Bbbk)$, тогда

$$x_0 + L = y_0 + L' \quad \Rightarrow \quad L = L'$$

Из предыдущей теоремы следует:

$$\begin{gathered} x_0 + L = y_0 + L' \quad \Rightarrow \quad x_0 + L = x_0 + L' \quad \Rightarrow \\ \forall x \in L \quad \exists y \in L' : \quad x_0 + x = x_0 + y \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad L \subseteq L', \\ \forall y \in L' \quad \exists x \in L : \quad x_0 + x = x_0 + y \quad \Rightarrow \quad y = x \quad \Rightarrow \quad L' \subseteq L. \end{gathered}$$

◀

Определяют **размерность многобразия** M, параллельного подпространству L

$$\dim_{\Bbbk} M_{x_0} = \dim_{\Bbbk} L.$$

Многообразие M, параллельное L называется:

- **прямой**, если $\dim_{\Bbbk} L = 1$;
- **плоскостью**, если $\dim_{\Bbbk} L = 2$;
- k**-мерной плоскостью**, если $\dim_{\Bbbk} L = k$;
- **гиперплоскостью** $\dim_{\Bbbk} L = \dim_{\Bbbk} X - 1$.

5.4 Теорема о ядре и образе

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ линейное пространство, $L(\Bbbk) \leqslant X(\Bbbk)$ - его собственное подпространство и $\{x_i\}_{i=1}^m$ - базис $L(\Bbbk)$.

Лемма 5.9. *Система векторов $\{\{x_i\}_{i=1}^m, \{y_j\}_{j=1}^{n-m}\}$ является базисом в $X(\Bbbk)$ тогда и только тогда, когда базисом в $X/L(\Bbbk)$ является система $\{\bar{y}_j = y_j + L(\Bbbk)\}_{j=1}^{n-m}$.*

▶

Набор $\{\{x_i\}_{i=1}^m, \{y_j\}_{j=1}^{n-m}\}$ является полным, если и только если

$$\forall \bar{z} \in X/L(\Bbbk) \quad \exists \{\zeta^j\}_{j=1}^{n-m} \in \Bbbk : \quad \bar{z} = \sum_{j=1}^{n-m} \zeta^j y_j + \langle x_1, \ldots, x_m \rangle_{\Bbbk} = \sum_{j=1}^{n-m} \zeta^j \bar{y}_j.$$

Далее, из свойства линейной независимости базиса следует, что набор $\{y_j\}_{j=1}^{m-n}$ - линейно независим над $L(\Bbbk)$, но это и означает линейную зависимость в $X/L(\Bbbk)$.

◀

Nota bene Из леммы, в частности, следует, что для любого $L(\Bbbk) \leqslant X(\Bbbk)$

$$\dim_{\Bbbk} L + \dim_{\Bbbk} X/L = \dim_{\Bbbk} X.$$

Теорема 5.2. *(о ядре и образе) Пусть $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$ - линейные пространства над одним и тем же полем $\Bbbk$, и пусть $\sigma : X(\Bbbk) \to Y(\Bbbk)$ - линейное отображение. Тогда*

$$\dim_k \ker \sigma + \dim_{\Bbbk} \operatorname{Im} \sigma = \dim_{\Bbbk} X.$$

▶

Доказательство прямо следует из предыдущего замечания и теоремы об изоморфизме для произвольных R-модулей. ◀

Лемма 5.10. *Пусть $\sigma : X(\Bbbk) \to Y(\Bbbk)$ - линейное отбражение и*

$$\dim_k X = n, \quad \dim_{\Bbbk} Y = m.$$

Тогда

- *при $n > m$ отображение σ не инъективно;*
- *при $n < m$ отображение σ не сюръективно.*

▶

Применить теорему *о ядре и образе.*

◀