η

Лекция 7

Квадратичные формы в линейном пространстве

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим квадратичные формы и основные задачи, связанные с ними. Квадратичные формы играют особую роль ввиду того, что могут определять геометрию пространства, над которым они заданы наподобие того как скалярное произведение задает геометрию в евклидовом пространстве. Мы изучим общие аспекты исследования квадратичных форм и коротко затронем вопросы геометрической интерпретации полученных результатов.

Ключевые слова:
Билинейная форма, квадратичная форма, канонический вид КФ, приведение к главным осям, индексы инерции КФ, сигнатура КФ, положительно определенные КФ, теорема Лагранжа.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

7.0.1 Определение квадтратичной формы

Nota bene Напомним, что билинейной формой над вещественным линейным пространством $X(\mathbb{R})$ называется отображение $b : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y), \quad b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y),$$
$$b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2), \quad b(x, \lambda y) = \lambda b(x, y).$$

Nota bene Билинейная форма является тензором второго ранга и типа $(2, 0)$:

$$b \in \Omega_0^2(\mathbb{R}).$$

Nota bene Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ базис X, тогда

$$b \leftrightarrow b_{ij}, \quad x \leftrightarrow \xi^i, \quad y \leftrightarrow \eta^j$$

тогда

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \eta^j b_{ij} = \xi^T B \eta,$$

где B - матрица квадратичной формы b.

Пример 7.1. Пример квадратичной формы в $\mathbb{R}^2$ и соответствующей ей матрицы:

$$b(x, y) = a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \end{pmatrix}$$

Квадратичной формой, соответствующей билинейной форме b называется отображение $q : X \to \mathbb{R}$, такое что:

$$q(x) = b(x, x), \quad \forall x \in X.$$

Nota bene В базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства $X(\mathbb{R})$ квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \xi^j q_{ij} = \xi^T Q \xi,$$

где Q - матрица квадратичной формы.

Пример 7.2. Метрика Минковского:

$$\mu(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Лемма 7.1. *Закон преобразования коэффициентов билинейной формы при переходе к новом базису при помощи матрицы T имеет вид:*

$$\tilde{Q} = T^T Q T.$$

Лемма 7.2. *Матрица квадратичной формы q симметрична в любом базисе:*

$$Q^T = Q.$$

Диагонализация матрицы квадратичной формы

Говорят, что квадратичная форма **диагональна** в некотором базисе линейного пространства $X(\mathbb{R})$, если диагональна ее матрица в этом базисе:

$$Q = \operatorname{diag}\left\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right\}.$$

Если при этом $\alpha_j \in \{0, \pm 1\} \quad \forall j$, то говорят, что квадратичная форма q имеет в соответствующем базисе **канонический** вид.

Процедура нахождения базиса, в котором данная квадратичная форма является диагональной, называется **приведением к главным осям**.

Nota bene Пусть квадратичная форма приведена к диагональному виду, тогда

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i |\xi^i|^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j |\xi^{p+j}|^2,$$

где $\alpha_i > 0$, $\beta_j < 0$ и $n - p - q - z$.

Числа p, q и z называются соответственно **положительным**, **отрицательным** и **нулевым индексами инерции** квадратичной формы q.

Теорема 7.1. *(об индексах инерции КФ) Индексы инерции квадратичной формы не зависят от способа ее приведения к главным осям:*

$$p' = p, \quad q' = q, \quad p + q \leq n.$$

►
Докажем от противного. Пусть $p > p'$ и рассмотрим соответствующий базис $X(\mathbb{R})$:

$$\{e_j\}_{j=1}^{n} = \left\{e_1, e_2, \dots e_p; e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_{p+q}; e_{p+q+1}, \dots, e_n\right\},$$

и линейные оболочки

$$L = \langle e_1, e_2, \dots e_p \rangle_{\mathbb{R}}, \quad L' = \langle \tilde{e}_{p'+1}, \tilde{e}_{p'+2}, \dots \tilde{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Заметим, что

$$\dim L + \dim L' = p + (n - p') = n + (p - p') > 0,$$

и тогда

$$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L').$$

Значит $\dim_{\mathbb{R}} L \cap L' > 0$ и $L \cap L' \neq \{0\}$. Пусть теперь $z \in L \cap L', z \neq 0$ тогда

$$q(z) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left|\zeta^i\right|^2 > 0, \qquad q(z) = \sum_{i=p'+1}^{n} \alpha_i \left|\tilde{\zeta}^i\right|^2 \leq 0.$$

Значит предположение $p > p'$ неверно и, следовательно, $p \leq p'$. Аналогично можно доказать, что $p' \leq p$ и тогда $p = p'$ и $q' = q$.
◄

Тройка $(n_+, n_-, n_0) \triangleq (p, q, z)$ называется **сигнатурой** квадратичной формы.

Пример 7.3. Алгебраические поверхности второго порядка в $\mathbb{R}^3$:

- эллипсоид $(3, 0, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$
- однополостный гиперболоид $(2, 1, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
- двуполостных гиперболоид $(1, 2, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
- эллиптический цилиндр $(2, 0, 1)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Квадратичная форма q называется **положительно определенной**, если:

$$n_+ = n = \dim_{\mathbb{R}} X \quad \Rightarrow \quad \forall x \in X \quad q(x) \geq 0, \quad q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Теорема 7.2. *(Лагранжа) Квадратичная форма в линейном пространстве может быть приведена к диагональному виду методом выделения полных квадратов.*

▶

Пусть в некотором базисе пространства E квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} \xi^i \xi^j.$$

Если $q_1 = 0$, то перенумеруем элементы так, чтобы $q_{11} \neq 0$. Если все $q_{ii} = 0$, то воспользуемся заменой (при условии что $q_{1k} \neq 0$)

$$\tilde{\xi}^1 = \xi^1 - \xi^k, \quad \tilde{\xi}^k = \xi^1 + \xi^k, \quad \tilde{\xi}^i = \xi^i.$$

Далее будем полагать, что $q_{11} \neq 0$ и выделим следующую группу слагаемых:

$$q(x) = q_{11} \left|\xi^1\right|^2 + 2q_{12}\xi^1\xi^2 + \ldots + 2q_{1n}\xi^1\xi^n + \sum_{i,j=2}^{n} q_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Преобразуем группу следующим образом:

$$q_{11}\left|\xi^1\right|^2 + 2q_{12}\xi^1\xi^2 + \ldots + 2q_{1n}\xi^1\xi^n =$$
$$= q_{11}\left(\xi^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}\xi^2 + \frac{q_{13}}{q_{11}}\xi^3 + \ldots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}\xi^n\right)^2 - \frac{q_{12}^2}{q_{11}}\left|\xi^2\right|^2 - \ldots - \frac{q_{1n}^2}{q_{11}}\left|\xi^n\right|^2 -$$
$$-2\frac{q_{12}q_{13}}{q_{11}}\xi^2\xi^3 - \ldots - \frac{q_{1,n-1}q_{1n}}{q_{11}}\xi^{n-1}\xi^n.$$

Значит выражение для q может быть переписано так:

$$q(x) = q_{11}\left(\xi^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}\xi^2 + \frac{q_{13}}{q_{11}}\xi^3 + \ldots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}\xi^n\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n}\tilde{q}_{ij}\xi^i\xi^j,$$

где $\tilde{q}_{ij}$ - коэффициенты, полученные после преобразования. Пусть далее

$$\eta^1 = \xi^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}\xi^2 + \frac{q_{13}}{q_{11}}\xi^3 + \ldots + \frac{q_{1n}}{q_{11}}\xi^n,$$
$$\eta^2 = \xi^2, \quad \ldots, \quad \eta^n = \xi^n.$$

Тогда в новых координатах форма примет вид

$$q(x) = q_{11}\left|\eta^1\right|^2 + \sum_{i,j=2}^{n}\tilde{q}_{ij}\eta^i\eta^j$$

Если форма $\sum_{i,j=2}^{n}\tilde{q}_{ij}\eta^i\eta^j$ тождественно равна нулю, то вопрос о ее диагонализации решен, в противном случае повторяем описанный выше алгоритм не меняя координату η^1. Очевидно, все приведенные преобразования являлись невырожденными.
◀