

Домашняя работа 1 : скалярное произведение

Задача 1.1. Пусть в вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $\langle x, y \rangle_1$ и $\langle x, y \rangle_2$. Доказать, что для любых положительных чисел λ и μ функция $\langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle_1 + \mu \langle x, y \rangle_2$ - также скалярное произведение.

Задача 1.2. Рассмотрим P_2 - пространство полиномов с вещественными коэффициентами степени не выше 2.

Определим

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)t^2 dt$$

Показать является ли данное отображение скалярным произведением, и если да, то найти его матрицу Грамма

Задача 1.3. Найти угол между векторами x и y , если

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.4. В базисе e_1, e_2, e_3 матрица Грамма имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

В базисе $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ вектора x и y имеют вид

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Известно, что

$$\tilde{e}_1 = 2e_1 + 2e_2, \quad \tilde{e}_2 = -e_2 - e_3, \quad \tilde{e}_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

Найти $\langle x, y \rangle$

Задача 1.5. В пространстве многочленов, степени $n \leq 3$ со стандартным скалярным произведением задан треугольник со сторонами $t, t^3, t - t^3$. Найти углы данного треугольника и длины его сторон.

Задача 1.6. Найти угол между ребром и диагональю n -мерного куба.