θ

Лекция 9

Спектральный анализ оператора

Содержание лекции:
В этой лекции мы начинаем систематически исследовать структуру инвариантных и собственных подпространств операторов. Здесь мы вводим основополагающие понятия собственного значения и собственного вектора, а также обсуждаем свойства этих обьектов.

Ключевые слова:
Характеристический полином, теорема Гамильтона-Кэли, инвариант линейного оператора, собственный вектор, собственное число, спектр, характеристическое число.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

9.1 Характеристический полином

Nota bene Из определения ядра оператора φ следует, что

$$x \in L_j \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi - \lambda_j \mathcal{I})^{r_j}\, x = 0.$$

Рассмотрим частный случай, когда $r_j = 1$. Имеем:

$$(\varphi - \lambda_j \mathcal{I})\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi x = \lambda_j x.$$

> **Характеристическим полиномом линейного оператора** φ называется операторный полином $\chi_\varphi \in \Bbbk[\varphi]$, такой что:
>
> $$\chi_\varphi(\lambda) = \det\left(\varphi - \lambda \mathcal{I}\right). \tag{9.1}$$

Лемма 9.1. *Характеристический полином $\chi_\varphi(\lambda)$ не зависит от выбора базиса, то есть он является функцией от λ, не зависящей от базиса.*

►

Пусть A и $\tilde{A}$ - матрицы оператора φ в двух различных базисах пространства X, тогда

$$\tilde{\chi}_\varphi(\lambda) = \det\left(\tilde{A} - \lambda E\right) = \det(SAT - \lambda E) =$$
$$= \det S \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_\varphi(\lambda).$$

◄

Теорема 9.1. *(Гамильтон-Кэли) Характеристический полином линейного оператора φ является его аннулирующим полиномом:*

$$\chi_\varphi \in (p_\varphi).$$

►

Пусть характеристический полином χ_φ имеет следующую запись:

$$\chi_\varphi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n.$$

С другой стороны, если в одном из базисов пространства X оператор φ имеет матрицу A, тогда имеет место равенство

$$\det(A - \lambda E) \cdot E = (A - \lambda E)\, \tilde{A}(\lambda),$$

где $\tilde{A}(\lambda)$ - матрица, союзная матрице $(A - \lambda E)$. Пусть

$$\tilde{A}(\lambda) = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \cdot + C_{n-1}\lambda^{n-1},$$

тогда имеют место следующие равенства:

$$a_0 E = AC_0, \quad a_1 E = AC_1 - C_0, \quad \ldots, \quad a_{n-1}E = AC_{n-1} - C_{n-2}, \quad a_n = -C_{n-1}.$$

Умножив обе части на степени A, получим

$$a_0 E = AC_0, \quad \ldots, \quad a_{k-1}A^{k-1} = A^k C_{k-1} - A^{k-1}C_{k-2}, \quad \ldots, \quad a_n A^n = -A^n C_{n-1}.$$

Сложение данных равенств дает в левой части $\chi_\varphi(A)$, а в правой - ноль.

◄

Nota bene Из того, что $\chi_\varphi \in (p_\varphi)$ следует, в частности, что $\chi_\varphi : p_\varphi$ то есть имеет место

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda_i)^{r_i} \quad \Rightarrow \quad \chi_\varphi(\lambda) \sim \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda_j)^{s_i}, \quad r_i \le s_i.$$

> **Инвариантом линейного оператора** называется такая его числовая функция, значение которой не зависит от выбора базиса.

Nota bene Все коэффициенты характеристического полинома являются инвариантами линейного оператора.

9.2 Спектр и собственные векторы

> **Собственным вектором** оператора φ называется вектор $x \in X$, такой что
>
> $$x \neq 0, \quad \varphi x = \lambda x, \quad \lambda \in \Bbbk,$$
>
> при этом λ называется **собственным числом** линейного оператора φ.

Nota bene В дальнейшем мы остановимся на самых важных и практически значимых случаях $\Bbbk = \mathbb{R}$ и $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Пример 9.1.

1. Пусть $\varphi = \mathcal{I} : X \to X$, так что $\mathcal{I}x = x$, тогда

$$\lambda = 1 - \text{собственное значение}, \quad \forall x \in X - \text{собственный вектор}.$$

2. Пусть $\varphi = O : X \to X$, так что $Ox = 0$, тогда

$$\lambda = 0 - \text{собственное значение}, \quad \forall x \in X - \text{собственный вектор}.$$

> **Спектром** называется множество всех значений линейного оператора:
>
> $$\sigma_\varphi = \sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}.$$
> $$\sigma_{\mathcal{I}} = \{1\}, \quad \sigma_O = \{0\}.$$

Пример 9.2. Пусть $X = L_1 \dot{+} L_2$ и $\varphi = \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} : X \to X$, так что

$$x \in L_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} x = 1 \cdot x,$$
$$y \in L_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{L_1}^{||L_2} y = 0 \cdot y,$$

и значит $\sigma\left(\mathcal{P}_{L_1}^{||L_2}\right) = \{0, 1\}$.

Пример 9.3. Пусть $A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ - диагональная матрица оператора φ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$. Тогда

$$\varphi e_i = \lambda_i e_i \quad \Rightarrow \quad \sigma_\varphi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}.$$

9.3 Подпространства L_λ

Лемма 9.2. *Пусть L_λ - множество собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, тогда L_λ - подпространство линейного пространства X.*

▶

Пусть $x_1.x_2$ - собственные векторы, отвечающие собственному значению λ, тогда

$$\varphi(x_1 + \alpha x_2) = \varphi x_1 + \alpha\varphi x_2 = \lambda x_1 + \alpha\lambda x_2 = \lambda(x_1 + \alpha x_2)$$
$$\Rightarrow \quad (x_1 + \alpha x_2) - \text{собственный вектор},$$

◀

Лемма 9.3. *Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям линейно независимы:*

$$\lambda_1 \to x_1 \in X, \quad \lambda_2 \to x_2 \in X, \quad \ldots, \quad \lambda_k \to x_k \in X,$$
$$\lambda_i \neq \lambda_{k\neq i} \quad \Rightarrow \quad \{x_i\}_{i=1}^k - \textit{линейно-независимы}$$

▶

Выполним доказательство по индукции:

$$m = 1: \quad \{x_1 \neq 0\} - \text{Л.Н.З.},$$
$$m > 1: \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} - \text{верно, что Л.Н.З.},$$
$$\Rightarrow \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0,$$

Покажем, что $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$ - Л.Н.З. Пусть

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \lambda_i x_i,$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \lambda_i x_i - \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{m+1}) x_i = 0,$$

и значит $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, откуда следует, что $\alpha_{m+1} x_{m+1} = 0$.

◀

Nota bene Линейный оператор в конечномерном пространстве не может иметь более n различных собственных значений.

Пример 9.4. Рассмотрим задачу вычисления собственных векторов и собственных значений. Для этого положим

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \quad A = ||\alpha_k^i||, \quad \xi = (\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)^T,$$

тогда

$$\varphi x = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad A\xi = \lambda \xi \quad \Leftrightarrow \quad A\xi - \lambda E \xi = 0,$$
$$(A - \lambda E)\xi = 0, \quad (A - \lambda E) = ||\alpha_k^i - \lambda \delta_k^i||.$$

Соответствующая однородная система линейных уравнений для ξ^i имеет вид:

$$\begin{cases} (\alpha_1^1 - \lambda)\xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + ... + \alpha_n^1 \xi^n = 0 \\ \alpha_1^2 \xi^1 + (\alpha_2^2 - \lambda)\xi^2 + ... + \alpha_n^2 \xi^n = 0 \\ ... \\ \alpha_1^n \xi^n + \alpha_2^n \xi^2 + ... + (\alpha_n^n - \lambda)\xi^n = 0 \end{cases}$$

Найдем все нетривиальные решения. Вычислим характеристический полином:

$$\det(A - \lambda E) = \det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = \chi_\varphi(\lambda).$$

1. Если $\chi_\varphi(\lambda) \neq 0$, тогда по теореме Крамера решение существует и единственно.

2. Если $\chi_\varphi(\lambda) = 0$, тогда по теореме Кронекера-Капели у системы существует нетривиальное решение, а значит можно найти собственный вектор.

Процедура вычисления собственных значений и собственных векторов:

1. $\chi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda \mathcal{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\varphi = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$;

2. $\lambda = \lambda_1 : \quad (A - \lambda_1 E)\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1;$

   $\lambda = \lambda_2 : \quad (A - \lambda_2 E)\xi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_2;$

   ....

   $\lambda = \lambda_k : \quad (A - \lambda_k E)\xi_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_k.$

Nota bene Из основной теоремы алгебры следует, у каждого многочлена есть хотя бы один корень, а значит у любого оператора на $X(\mathbb{C})$ существует по крайней мере одно собственное значение и одие собственный вектор.

9.4 Характеристические числа

Nota bene Предположим теперь, что $X = X(\mathbb{R})$, тогда $\chi_\varphi(\lambda)$ - многочлен с вещественными коэффициентами. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ - корень данного многочлена, то ему соответствует комплексный вектор, который будет решением уравнения на собственные векторы, однако он не будет являться элементом X.

> Корень характеристического многочлена называется **характеристическим числом** линейного оператора.

Теорема 9.2. *Если $X = X(\mathbb{C})$ - линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, то все характеристические числа являются одновременно и собственными. Если $X = X(\mathbb{R})$ - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, то собственными являются только вещественные характеристические числа.*

Пример 9.5. Рассмотрим матрицу поворота двумерного пространства на угол α:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Ее характеристический многочлен

$$\chi_R(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha,$$

имеет комплексные корни:

$$\lambda = \cos\alpha \pm i\sin\alpha,$$

которым соответствуют комплексные собственные векторы

$$V_\pm = \begin{pmatrix} \pm i & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, диагонализовать матрицу поворота в $X(\mathbb{R})$ нельзя.
