

II. Группы. Группа перестановок

1. Найдите порядки всех элементов групп S_2 , D_3 , V_4 , \mathbb{Z}_6 , \mathbb{Z} .
2. Найдите порядок группы симметрий:
 - а) квадрата;
 - б) правильного тетраэдра.
3. Найдите порядки элементов группы S_n :
 - а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
 - б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;
 - в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 8 & 10 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;
 - г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 9 & 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
 - а) Найдите $\pi\sigma$ и $\sigma\pi$;
 - б) Найдите π^{2024} и σ^{2024} ;
 - в) Найдите π^{-1} и σ^{-1} .
5. Разложите перестановки в произведение независимых циклов:
 - а) $(1753)(162)(46)(3574)$; б) $(184)(253)(67)(142635)(78)$.
6. Определите чётность перестановки:
 - а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
 - б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;
 - в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решите уравнения в группе S_n :

а) $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 9 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

8. Докажите, что в любой группе чётного порядка имеется элемент порядка 2.

9. Найдите все элементы конечного порядка в группе монотонно возрастающих функций из $[0, 1]$ в $[0, 1]$, для которых $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ (групповая операция — композиция).

10* Приведите пример двух элементов конечного порядка, произведение которых имеет бесконечный порядок.

11* Приведите пример бесконечной группы, в которой все элементы имеют конечный порядок.

12* Найди максимально возможный порядок элемента группы S_7 .