Лекция 5

Основы теории определителей

Содержание лекции:
В лекции кратко рассматривается общая теория определителя как полилинейной формы, а также как формы обьема в линейном (аффином) пространстве. Доказывается ряд свойств определителя набора вектров, которые используются при вычислении определителей. Вводятся основные понятия, необходимые в теории рангов.

Ключевые слова:
Определитель как антисимметричная ПЛФ, определитель набора векторов, свойства определителей, дополнительный минор элемента, алгебраическое дополнение, минор матрицы, теорема Лапласа.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

5.1 Определитель как ПЛФ

Детерминантом набора векторов $\{x_k\}_{k=1}^n$, называется число:

$$\det\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = ^{1,2,\dots,n} F\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right),$$

где $^{1,2,\dots,n}F \in \Lambda^p$ - базисная форма Λ^p.

Лемма 5.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис X, тогда если $x_k = \sum_{j=1}^n \xi_k^j e_j$, то*

$$\det\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}.$$

►

Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\det\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = ^{1,2,\dots,n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$n!\,\mathrm{Alt}(^{1,2,\dots,n}W)(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$n!\frac{1}{n!}\sum_\sigma (-1)^{[\sigma]}(^{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)}W)(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$\sum_\sigma (-1)^{[\sigma]}(^{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)}W(x_1, x_2, \dots, x_n)) =$$
$$\sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}$$

◄

5.2 Определитель как форма обьема

Параллелепипедом (k-мерным) T, построенным на векторах набора $\{x_j\}_{j=1}^k$ называется множество всех их линейных комбинаций с коэффициентами $\alpha_j \in [0,1]$:

$$T = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha^j x_j, \quad x_j \in X, \quad \alpha^j \in [0,1] \right\}$$

Формой обьема в n-мерном пространстве X называется отображение $w^{(n)}$

$$w^{(n)}(T) = w^{(n)}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right),$$

обладающее следующими свойствами:

1. $w^{(n)}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}$
2. $w^{(n)}$ - линейна по каждому своему аргументу;
3. $w^{(n)}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_j\}_{j=1}^n$ - ЛЗ.

Лемма 5.2. *Форма обьема $w^{(n)}$ - антисимметричная ПЛФ из Λ^n.*

►

Из свойств (1) и (2) следует полилинейность, а из свойства (3) - антисимметричность.

◄

5.3 Свойства определителя

1. Линейность определителя (определитель - ПЛФ):

$$\det\{x_1, \ldots, \alpha x'_k + \beta x''_k, \ldots, x_n\} =$$
$$\alpha \det\{x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_n\} + \beta \det\{x_1, \ldots, x''_k, \ldots, x_n\}.$$

2. Антисимметричность (определитель - антисиметричная ПЛФ):

$$\det\{x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_t, \ldots, x_n\} = -\det\{x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_s, \ldots, x_n\}$$

   Определитель матрицы C меняет знак при транспозиции любых двух ее столбцов или строк.

3. Критерий линейной зависимости:

$$\{x_k\}_{k=1}^n - \text{ЛЗ} \quad \Leftrightarrow \quad \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = 0.$$

4. Определитель набора не изменится, если к любому вектору набора добавить линейную комбинацию других векторов набора:

$$\det\left\{x_1, \ldots, x_k + \sum_{i\neq k}^n \alpha^i x_i, \ldots, x_n\right\} =$$
$$\det\{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\} + \det\left\{x_1, \ldots, \sum_{i=\neq k}^n \alpha^i x_i, \ldots, x_n\right\} =$$
$$\det\{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}.$$

5. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{pmatrix}.$$

   Введем определение:

$$\det C = \det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

   тогда имеет место:

$$\det C^T = \det C, \quad C^T = \|\xi_k^i\|^T = \|\xi_i^k\|.$$

►
По определению имеем:

$$\det C^T = \sum_{\sigma}(-1)^{[\sigma]}\xi_1^{\sigma(1)}\xi_2^{\sigma(2)}\ldots\xi_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma'}(-1)^{[\sigma']}\xi^1_{\sigma'(1)}\xi^2_{\sigma'(2)}\ldots\xi^n_{\sigma'(n)} = \det C.$$

Всякое свойство определителя, доказанное для столбцов, справедливо и для строк и наоборот.
◄

6. Разложение определителя по элементам строки (или столбца матрицы):

$$\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = f^1\wedge f^2\wedge\ldots\wedge f^n\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$f^1\wedge\ldots\wedge f^j\wedge\ldots\wedge f^n\,(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n) =$$
$$f^1\wedge\ldots\wedge f^j\wedge\ldots\wedge f^n\left(x_1,\ldots,\sum_{m=1}^{n}\xi_j^m e_m,\ldots,x_n\right) =$$
$$\sum_{m=1}^{n}\xi_j^m f^1\wedge\ldots\wedge f^j\wedge\ldots\wedge f^n\,(x_1,\ldots,e_m,\ldots,x_n) =$$
$$\sum_{m=1}^{n}\xi_j^m(-1)^{|m-j|}f^1\wedge\ldots\wedge f^m(e_m)\wedge\ldots\wedge f^n\,(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n) =$$
$$\sum_{m=1}^{n}\xi_j^m(-1)^{|m-j|}\det\{x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n\}.$$

5.4 Минор и алгебраическое дополнение

Минором M_j^k, дополнительным к элементу ξ_j^k называется определитель матрицы C', полученной из исходной матрицы $C = \|\xi_j^k\|$ вычеркиванием k-ой строки и j-го столбца:

$$M_j^k = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_k^1 & \ldots & \xi_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^j & \vdots & \xi_k^j & \vdots & \xi_n^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^n & \ldots & \xi_k^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_j^k элемента ξ_j^k называется число

$$A_j^k = (-1)^{k+j}M_j^k.$$

Теорема 5.1. *Имеет место следующая рекуррентная формула:*

$$\det C = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^k A_j^k = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \xi_j^k M_j^k,$$

$$\det C = \sum_{k=1}^{n} \xi_j^k A_j^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \xi_j^k M_j^k.$$

Пример 5.1. Важные частные случаи:

1. определитель диагональной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

2. определитель треугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11} t_{22} \dots t_{nn}.$$

> **Минором** порядка r **матрицы** C называется определитель $L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}$ матрицы, полученной из исходной **взятием** элементов, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$, причем $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ и $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_r$

> **Минором** $M_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}$, **дополнительным к минору** $L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r}$ называется определитель матрицы, полученной из исходной **вычеркиванием** строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$.

Теорема 5.2. *(Теорема Лапласа) Определитель матрицы C может быть вычислен следующим образом:*

$$\det C = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_r} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r} L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r} M_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r},$$

$$\det C = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r} L_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r} M_{j_1,j_2,\dots,j_r}^{i_1,i_2,\dots,i_r},$$

Пример 5.2. Определитель блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} \dots A_{nn}.$$
