Дискретное преобразование Фурье

Задача 1

<u>**def**</u> ***Преобразованием Фурье*** вектора $x = (x_0, \dots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ называется вектор $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$:

$$\tilde{x}_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-2\pi ijk/n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Найдите Фурье-образ векторов:

1. $a = (1 \ \ 2 \ \ 4 \ \ 9)^T$
2. $b = (3 \ \ 5 \ \ 7 \ \ 8 \ \ 3 \ \ 5)^T$
3. $c = (4 \ \ 9 \ \ 8 \ \ 5 \ \ 6 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 7)^T$

Задача 2

Дан многочлен $A = 4x^9 + 2x^7 + 3x^4 + 2x + 15$. Найдите:

1. $fft(fft(A))$
2. $fft(fft(fft(fft(A))))$

Задача 3

После центрирования изображения было выполнено дискретное преобразование Фурье, а затем был применен фильтр

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & \sqrt{(u - \frac{N}{2})^2 + (v - \frac{N}{2})^2} \le R, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

После выполнили обратное преобразование Фурье и домножили на $(-1)^{x+y}$. Опишите, как и почему изменилось изображение

Задача 4

Пусть даны $n+1$ различных точек на числовой прямой:

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \quad x_i \neq x_j \ \text{ при } i \neq j,$$

и соответствующие значения функции

$$y_0, y_1, \dots, y_n.$$

Докажите существование и единственность многочлена $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющег условиям интерполяции:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$