Лекция 2

Прямое произведение множеств

Содержание лекции:

В данной лекции мы продолжаем обсуждать теоретико-множестивенные построения и рассматриваем акиому упорядоченной пары, а также способы ее определения в рамках системы аксиом ZF-C. После этого мы вводим важнейшие понятия для нас понятия бинарного отношения и функции. На этом наше короткое введение заканчивается и далее нас ждут алгебраические структуры.

Ключевые слова:

Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, упорядоченная пара по Куратовскому, упорядоченный список, прямое произвдение двух множеств, декартово произведение конечного числа множеств, бинарное отношение, рефлексивность, симметричное отношение, композиция отношений, транзитивность, отношение эквивалентности, отношение частичного порядка.

Авторы курса:

Трифанов Александр

Ссылка на ресурсы:

`mathdep.ifmo.ru/geolin`

2.1 Упорядоченная пара

Nota bene Существование упорядоченной пары (x, y) элементов x и y не следует из системы аксиом **ZF+C** в отличие от *неупорядоченной* пары $\{x, y\}$, наличие которой гарантируется аксиомой **ZF-3**.

OP. Равенство двух упорядоченных пар (x, y) и (u, v) имеет место тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

В упорядоченной паре (x, y) элемент x называется **первой компонентой**, а y - **второй компонентой** упорядоченной пары.

Nota bene При моделировании упорядоченной пары в рамках выбранной системы аксиом **ZF+C** данное понятие можно рассматривать *как первичное.* С другой стороны, возможность *определить* данное понятие имеется:

Упорядоченной парой (x, y) с первой компонентой x и второй компонентой y, называется множество

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Nota bene Говорят, что приведенное определение формулирует понятие упорядоченной пары *по Куратовскому.*

Лемма 2.1. *Упорядоченная пара по Куратовскому удовлетворяет аксиоме **OP**.*

▶

Проверим, что имеет место следующее свойство:

$$(x, y) = (u, v) \quad \Rightarrow \quad u = x, \quad v = y.$$

Пусть сначала $x = y$, тогда

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\},$$

откуда сразу следует

$$\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}\} \quad \Rightarrow \quad u = x = v.$$

Пусть теперь $x \neq y$, тогда имеет место один из двух случаев:

$$\{x\} = \{u\} \quad \Rightarrow \quad x = u \quad \Rightarrow \quad \{x, y\} = \{x, v\} \quad \Rightarrow \quad y = v,$$
$$\{x\} = \{u, v\} \quad \Rightarrow \quad u = x = v \quad \Rightarrow \quad \{x, y\} = \{u\} \quad \Rightarrow \quad x = u = y.$$

◀

Nota bene Аналогично упорядоченной паре можно ввести *упорядоченный список* из n элементов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

OL. Равенство двух списков $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$ для всех $i = 1 \ldots n$.

Nota bene В теории множеств упорядоченный список из трех элементов (x, y, z) можно определить, например, так (для большего числа элементов определяется аналогично):

$$\{x, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}.$$

2.2 Прямое произведение множеств

Прямым произведением множеств X и Y называется множество

$$X \times Y = \{(x, y): \quad x \in X, \quad y \in Y\}.$$

Nota bene Данное определение имеет своим недостатком апелляцию к тому факту, что все пары (x, y) *могут быть собраны в множество*. Данный факт должен или фиксироваться отдельной аксиомой, или выводиться из других аксиом.

Лемма 2.2. *Если упорядоченная пара (x, y) определена по Куратовскому, то существование $X \times Y$ гарантируется аксиомами **ZF-4, ZF-5** и **ZF-6**.*

▶

Если $x \in X$ и $y \in Y$, тогда

$$\{x\} \in 2^X, \quad \{x, y\} \in 2^{X \cup Y}, \quad \{\{x\}, \{x, y\}\} \in 2^{2^{X \cup Y}},$$

причем существование указанных множеств гарантируется аксиомами объединения и степени. Тогда $X \times Y$ может быть определено как

$$X \times Y = \left\{ Z \in 2^{2^{X \cup Y}} : \quad Z = \{\{x\}, \{x, y\}\}, \quad x \in X, \quad y \in Y \right\}.$$

Последнее множество существует в силу аксиомы подмножеств.

◀

Пример 2.1. Прямое произведение двух- и трехэлементного множеств:

$$\{0, 1, 2\} \times \{x, y\} = \{(0, x), (0, y), (1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}.$$

Декартовым произведением конечного числа множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): \quad x_i \in X_i\}.$$

2.3 Отношения на множествах

Nota bene Одним из первых и самых важных примеров использования упорядоченной пары является *бинарное отношение*:

Бинарным отношением между множествами X и Y называется тройка (X, Y, R), где R - подмножество $X \times Y$ их декартова произведения.

Nota bene При этом говорят, что элемент x находится в отношении R с элементом y и пишут xRy. Тот факт, что R является отношением между X и Y записывают $R \in \mathrm{Rel}(X, Y)$.

Пример 2.2. Первые примеры отношений:

1. отношение принадлежности: $\quad xRX \quad \Leftrightarrow \quad x \in X;$
2. отношение вхождения: $\quad ARB \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B;$
3. отношение равенства: $\quad xRy \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$

Бинарное отношение $R \in \mathrm{Rel}(X)$ называется **рефлексивным**, если оно содержит в качестве подмножества *диагональ*:

$$\Delta = \{(x, x): \quad x \in X\}.$$

Отношение $R' \in \mathrm{Rel}(Y, X)$ называется **симметричным к** $R \in \mathrm{Rel}(X, Y)$ отношением, если

$$(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R'.$$

Пример 2.3. Примеры отношений и симметричных к ним:

- пусть $X = \{1, 3, 5, 7\}$, тогда

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y): \quad x + 2 = y\}, \quad \mathcal{P}_1' = \{(x, y): \quad y + 2 = x\},$$
$$\mathcal{P}_2 = \{(x, y): \quad (x + y)/2 \in X\}, \quad \mathcal{P}_2' = \mathcal{P}_2.$$

- $(\subseteq)' := \supseteq \qquad (=)' := = \qquad \in := \ni$

Бинарное отношение $R \in \mathrm{Rel}(X)$ называется **симметричным**, если оно совпадает с симметричным к себе отношением $R' \in \mathrm{Rel}(X)$.

Пример 2.4. Примерами симметричных отношений являются $\mathcal{P}_2$ и $' = '$.

2.4 Произведение отношений

Композицией отношений $R \in \mathrm{Rel}(X, Y)$ и $S \in \mathrm{Rel}(Y, Z)$ называется отношение $S \circ R \in \mathrm{Rel}(X, Z)$, такое что

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z: \quad \exists\, y \in Y, \quad (x, y) \in R, \quad (y, z) \in S\}.$$

Лемма 2.3. *Если Δ_X - тождественное отношение, то для любого $R \in \mathrm{Rel}(X)$ имеет место следующее свойство:*

$$R \circ \Delta_X = R = \Delta_X \circ R.$$

Отношение R называется **транзитивным**, если

$$R \circ R = R^2 \subseteq R.$$

2.5 Эквивалентность и частичный порядок

Бинарное отнощение $R \in \mathrm{Rel}(X)$ на множестве X называется **отношенем эквивалентности**, если имеют место следующие свойства:

- рефлексивность: $\Delta_X \subseteq R$;
- симметричность: $R' = R$;
- транзитивность: $R^2 \subseteq R$.

Nota bene Обычно отношение эквивалентности обозначают символом $\sim$.

Пример 2.5. Пусть дано два множества X и Y и пусть $\sim_X$ - отношение эквивалентности на X, тогда на $X \times Y$ можно ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом:

$$(x, y) \sim (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad x \sim_X u.$$

Бинарное отношение $R \in \mathrm{Rel}(X)$ на множестве X называется **отношением частичного порядка**, если имеют место следующие свойства:

- рефлексивность: $\Delta_X \subseteq R$;
- антисимметричность: $R' \cap R = \Delta_X$;
- транзитивность: $R^2 \subseteq R$.

Nota bene Обычно отношение частичного порядка обозначают символом $\leqslant$.

Пример 2.6. Пусть X и Y - два множества, снаженные отношениями частичного порядка $\leqslant_X$ и $\leqslant_Y$, тогда $X \times Y$ можно также снабдить отношением частичного порядка, например, следующим образом:

$$(x, y) \leqslant (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant u \quad \wedge \quad y \leqslant v.$$

2.6 Отображения множеств

Nota bene Следующее определение нарушит симметрию, которая существовала в определении бинарного отношения, однако именно оно играет фундаментальную роль во всей математике:

> Отношение $F \in \mathrm{Rel}(X, Y)$ называется **отображением**, если
> $$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y : \quad xFy.$$

Nota bene Обычно, чтобы подчеркнуть тот факт что $F \in \mathrm{Rel}(X, Y)$ является отображением, используют обозначение $F : X \to Y$, а запись xFy заменяют на $F(x) = y$.

> Множество X называется **областью определения (областью)** отображения F и обозначается $D(F)$. Множество Y называется **областью значений (кообластью)** отображения F и обозначается $C(F)$.

Пример 2.7. Примеры оторажений:

- «отталкивающее»: $\forall X \quad F : \varnothing \to X$;
- «притягивающее»: $\forall X \quad F : X \to \{\varnothing\}$;
- тождественное отображение: $\mathrm{id}_X : X \to X, \quad \mathrm{id}_X(x) = x \quad \forall x \in X$;
- вложение: если $X \subseteq Y$, тогда $\hookrightarrow : X \to Y : \quad X \ni x \mapsto x \in Y$.

Nota bene Отображение $F : X \to Y$ индуцирует отношение эквивалентности на X:

$$x_1 \sim x_2 \quad \Leftrightarrow \quad F(x_1) = F(x_2).$$