Лекция 8

Тензорная алгебра

Содержание лекции:
Данная лекция завершает знакомство с основынми операциями полилинейной алгебры и посвящена построению алгебраических структур, которые индуцируются рассматриваемыми операциями. Здесь мы обсудим пространство тензоров над выбранным линейным пространством и обобщим наши представления о полилинейных отображениях и их свойствах.

Ключевые слова:
Тензор, пространство тензоров, координаты тензора, тензорное произведение, транспонирование тензора, свертка тензора, симметризация и антисимметризация тензора, внешняя прямая сумма, алгебра, градуировка алгебры.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

8.1 Операции с тензорами

Пространством тензоров типа (p, q) над $X(\Bbbk)$ называется пространство

$$T^p_q(\Bbbk) = X^* \otimes X^* \ldots \otimes X^* \otimes X \otimes X \otimes \ldots \otimes X.$$

Пример 8.1.

1. $T^0_0(\Bbbk) \simeq \Bbbk, \quad T^1_0 \simeq X^*, \quad T^0_1 \simeq X;$
2. $T^p_0(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}(X, \ldots, X; \Bbbk) \simeq \Omega^p_0;$
3. $T^p_1(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}(X, \ldots, X; X) \simeq \mathrm{Hom}(X, \ldots, X, X^*; \Bbbk) \simeq \Omega^p_1;$

Nota bene Элементами пространства T^p_q яляются тензоры:

$$\alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^p \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_q,$$

где $\alpha^1, \ldots, \alpha^p \in X^*$ и $x_1, \ldots, x_q \in X$.

Nota bene С тензорами определены следующие операции:

1. Произведение тензоров:

$$\begin{aligned}&(\alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^{p_1} \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{q_1}) \otimes (\beta^1 \otimes \ldots \otimes \beta^{p_2} \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{q_2})\\ &= \alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^{p_1} \otimes \beta^1 \otimes \ldots \otimes \beta^{p_2} \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{q_1} \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{q_2}.\end{aligned}$$

Таким образом

$$v \in T^{p_1}_{q_1}(\Bbbk), \quad w \in T^{p_2}_{q_2}(\Bbbk) \quad \Rightarrow \quad v \otimes w \in T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}(\Bbbk).$$

2. Транспонирование t_{ij} по паре нижних индексов (i, j):

$$t_{ij} : \quad \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \mapsto \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots.$$

Аналогично для пары верхних индексов t^{ij}:

$$t^{ij} : \quad \ldots \otimes \alpha^i \otimes \ldots \otimes \alpha^j \otimes \ldots \mapsto \ldots \otimes \alpha^j \otimes \ldots \otimes \alpha^i \otimes \ldots.$$

Таким образом:

$$t^{ij}, t_{ij} : \quad T^p_q(\Bbbk) \to T^p_q(\Bbbk).$$

3. Свертка тензора c^i_j по индексам i и j:

$$c^i_j : \quad \ldots \otimes \alpha^i \otimes \ldots \otimes x_j \otimes \ldots \mapsto \alpha^i(x_j) \cdot \ldots \otimes \ldots \otimes \ldots.$$

Таким образом

$$c^i_j : \quad T^p_q(\Bbbk) \to T^{p-1}_{q-1}(\Bbbk).$$

4. Симметризация и антисимметризация тензора:

$$\mathrm{Sym}: \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p \mapsto \frac{1}{p!}\sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)},$$
$$\mathrm{Alt}: \quad x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p \mapsto \frac{1}{p!}\sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)},$$

Таким образом:

$$\mathrm{Sym}: \quad T_0^p(\Bbbk) \to \Sigma^p(\Bbbk), \quad \mathrm{Alt}: \quad T_0^p(\Bbbk) \to \Lambda^p(\Bbbk).$$

Nota bene Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис $X(\Bbbk)$ и $\{f^j\}_{j=1}^n$ - дуальный базис $X^*(\Bbbk)$, тогда базисом пространства $T_q^p(\Bbbk)$ будет набор

$$f^{s_1} \otimes f^{s_2} \otimes \ldots \otimes f^{s_p} \otimes e_{t_1} \otimes e_{t_2} \otimes \ldots \otimes e_{t_q},$$

и каждый элемент $w \in T_q^p(\Bbbk)$ единственным образом может быть представлен в виде:

$$w = w_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q} \cdot f^{s_1} \otimes f^{s_2} \otimes \ldots \otimes f^{s_p} \otimes e_{t_1} \otimes e_{t_2} \otimes \ldots \otimes e_{t_q}.$$

Набор скаляров $w_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q}$ называется **координанатами тензора** w в паре дуальных базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{f^j\}_{j=1}^n$ пространств $X(\Bbbk)$ и $X^*(\Bbbk)$ соответственно.

Лемма 8.1. *При переходе от базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ к новому базису $\{\tilde{e}_m\}_{m=1}^n$, координаты тензора преобразуются в соответствии со следующим правилом:*

$$\tilde{w}_{s_1,s_2,\ldots,s_p}^{t_1,t_2,\ldots,t_q} = \tau_{s_1}^{i_1} \ldots \tau_{s_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{t_1} \ldots \sigma_{j_q}^{t_q} w_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q}.$$

Здесь $T = \|\tau_s^i\|$ и $S = \|\sigma_j^t\|$ - матрицы прямого и обратного перехода соответственно.

▶

Справедливость утверждения следует из билинейности тензорного произведения.

◀

8.2 Определение тензорной алгебры

Внешней прямой суммой пространств $X_1, X_2, \ldots, X_p$ называется линейное пространство $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_p$, составленное из всех последовательностей вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad x_i \in X_i,$$

с покомпонентным сложением и умножением на скаляры из $\Bbbk$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_p)$$

Пример 8.2. Следующие пространства образуются как внешние прямые суммы:

- Пространство многочленов $\mathcal{P}^n[x]$ степени не выше n:

$$\mathcal{P}^n[x] = \mathcal{P}_0[x] \oplus \mathcal{P}_1[x] \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_n[x],$$

  где $\mathcal{P}_k[x]$ - пространство многочленов степени k.

- Пространство тензоров T конечного типа:

$$T = T_0^0 \oplus T_0^1 \oplus T_1^1 \oplus \ldots \oplus T_q^p.$$

Nota bene Прямая сумма может быть распространена на бесконечное число слагаемых, но могут рассматриваются при этом только *финитные последовательности.*

Пример 8.3. Примеры пространств - бесконечных прямых сумм:

- Пространство всех многочленов $\mathcal{P}[x]$:

$$\mathcal{P}[x] = \mathcal{P}_0[x] \oplus \mathcal{P}_1[x] \oplus \ldots$$

- Пространство тензоров всех типов $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}(\mathbb{k}) = T_0^0(\mathbb{k}) \oplus T_0^1(\mathbb{k}) \oplus T_1^1(\mathbb{k}) \oplus \ldots$$

> Линейное пространство $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{k})$ называется **алгеброй** над полем $\mathbb{k}$, если на $\mathbb{A}$ определена операция, индуцирующая на нем структуру кольца с согласованным умножением на элементы поля $\mathbb{k}$.

Пример 8.4.

- Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел образует алгебру над $\mathbb{R}$;
- Множество $\mathbb{k}^4$ кватернионов образует алгебру как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$;
- Пространство $P[x]$ вместе со стандартной операцией умножения многочленов является алгеброй, называемой *алгеброй многочленов*;
- Пространство $\mathcal{T}(\mathbb{k})$ вместе с операцией тензорного умножения образует алгебру, называемую *тензорной алгеброй.*

Говорят, что в алгебре $\mathbb{A}$ задана **градуировка**, если при

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_i \oplus \ldots.$$

имеет место следующее свойство относительно умножения в алгебре:

$$\mathbb{A}_i \cdot \mathbb{A}_j \subseteq \mathbb{A}_{i+j}.$$

Алгебры, обладающие данным свойством называются **градуированными**.

Пример 8.5. Примеры градуированных алгебр:

- $(\mathcal{P}[x], +, \cdot)$ - алгебра многочленов;
- $(\mathcal{T}(\mathbb{k}), \oplus, \otimes)$ - алгебра тензоров;
- $(\Sigma, \oplus, \vee)$ - алгебра симметричных тензоров;
- $(\Lambda, \oplus, \wedge)$ - алгебра антисимметричных тензоров (алгебра Грассмана);
