δ

Лекция 4

Обратная матрица

Содержание лекции:
Настоящая лекция посвящена обсуждению существования обратных элементов в алгебре матриц относительно операции умножения. Здесь мы докажем критерий существования обратной матрицы и представим способы ее вычисления.

Ключевые слова:
Единица алгебры, левый/правый обратный элемент, обратимый элемент, обратный элемент, обратная матрица, невыроженная матрица, метод Гаусса, метод союзной матрицы.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

4.1 Обратимый элемент в алгебре

Пусть $\mathcal{A}_{\Bbbk}$ - алгебра, заданная как линейное пространство надо полем $\Bbbk$.

> Алгебра $\mathcal{A}$ называется **унитальной**, если в ней существует элемент $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, называемый **единицей алгебры**, такой что:
>
> $$x \cdot 1_{\mathcal{A}} = x = 1_{\mathcal{A}} \cdot x \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Пример 4.1. Примеры унитальных алгебр алгебр:

1. $\mathcal{A} = \mathbb{R}: \quad 1_{\mathcal{A}} = 1;$
2. $\mathcal{A} = \mathbb{C}: \quad 1_{\mathcal{A}} = (1, 0);$
3. $\mathcal{A} = \mathbb{H}: \quad 1_{\mathcal{A}} = (1, 0, 0, 0);$
4. $\mathcal{A} = \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$:
$$1_{\mathcal{A}} = \mathrm{id}_X, \quad \mathrm{id}_X\, x = x, \quad \mathrm{id}_X \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_X = \varphi.$$
5. $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n$:
$$1_{\mathcal{A}} = E, \quad A \cdot E = A = E \cdot A.$$

> Пусть в алгебре $\mathcal{A}$ имеет место $x \cdot y = 1_{\mathcal{A}}$, тогда
>
> 1. элемент x называется **левым обратным** к элементу y;
> 2. элемент y называется **правым обратным** к элементу x.

> Левый обратный элемент к z, являющийся также и правым обратным элементом к z называется **обратным элементом** к z:
>
> $$z^{-1}: \quad z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1_{\mathcal{A}},$$
>
> при этом говорят, что элемент z **обратим**.

Пример 4.2. Примеры обратимых элементов:

1. $\mathcal{A} = \mathbb{R}: \quad a^{-1} = 1/a, \quad a \neq 0;$
2. $\mathcal{A} = \mathbb{C}: \quad z^{-1} = \bar{z}/|z|^2, \quad z \neq 0;$
3. $\mathcal{A} = \mathbb{H}: \quad q^{-1} = q^*/|q|^2;$

Лемма 4.1. *Если элемент z имеет левый обратный элемент x и правый обратный элемент y, то*

$$z^{-1} = x = y.$$

▶
Прямой проверкой убеждаемся, что

$$x = x \cdot (z \cdot y) = (x \cdot y) \cdot z = z.$$

◀

4.2 Существование обратной матрицы

> Матрицей, **обратной** к $A \in \mathrm{Mat}_n$, называется матрица A^{-1}, такая что
>
> $$A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}.$$

> Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если
>
> $$\det A \neq 0.$$

Теорема 4.1. *Матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$.
▶
$\Leftarrow$ Достаточность:

$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, B, C: \quad A \cdot B = E, \quad C \cdot A = E, \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, A^{-1} = B = C.$$

1. $A \cdot B = E$:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \beta^j_k = \delta^i_k, \quad k = k_0 \quad \Rightarrow \quad \text{система Крамера}$$
$$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{единственное решение.}$$

2. $C \cdot A = E$:

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma^i_j \alpha^j_k = \delta^i_k, \quad k = k_0 \quad \Rightarrow \quad \text{система Крамера}$$
$$\det A^T = \det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{единственное решение.}$$

$\Rightarrow$ Необходимость: обратить порядок рассуждений.
◀

4.3 Методы вычисления обратной матрицы

1. Метод Гаусса:

$$\begin{cases} \alpha_1^1\beta_k^1 + \alpha_2^1\beta_k^2 + \ldots + \alpha_n^1\beta_k^n = \delta_k^1, \\ \alpha_1^2\beta_k^1 + \alpha_2^2\beta_k^2 + \ldots + \alpha_n^2\beta_k^n = \delta_k^2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_1^n\beta_k^1 + \alpha_2^n\beta_k^2 + \ldots + \alpha_n^n\beta_k^n = \delta_k^n. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Элементарным преобразованиями приводим расширенную матрицу $[A|E]$ к следующему виду:

$$[A|E] \sim [E|A^{-1}].$$

2. Метод союзной матрицы:

> Матрицей $\tilde{A}$, **союзной** матрице A называется матрица, каждый элемент которой является алгебраическим дополнением соответствующего элемента матрицы A:
>
> $$\tilde{a}_k^i = (-1)^{i+k} M_k^i.$$

Теорема 4.2. *Имеет место формула:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$$

▶
Пусть $A \cdot B = E$, тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i.$$

Фиксируем индекс k и введем обозначения:

$$b = (\delta_k^1, \delta_k^2, \ldots, \delta_k^n)^T = (0, \ldots, 1_k, \ldots, 0)^T,$$
$$\beta_k^j = \xi^j \quad \alpha_j^i = a_j,$$

откуда получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \xi^j a_j = b. \quad \Rightarrow \quad \beta_k^j = \xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{\det\{A|\, a_j \to b\}}{\det A}.$$

Вычислим $\det\{A|\, a_j \to b\}$, учтя значение b:

$$\det\{A|\, a_j \to b\} = 0 \cdot A_j^1 + \ldots + 1 \cdot A_j^k + \ldots + 0 \cdot A_j^n = A_j^k.$$

Но тогда

$$\beta_k^j = \frac{A_j^k}{\det A} = \frac{\left\{\tilde{A}^T\right\}_k^j}{\det A} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\tilde{A}^T}{\det A}.$$

◀