Домашняя работа 3 : тензоры и операторы ЕП

Задача 3.1. *В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*, если*

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.2. *Дана матрица A преобразования φ в базисе β с матрицей Грама Γ. Найти матрицу сопряженного преобразования, если*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.3. *Пусть A - квадратная матрица порядка n. Любой квадратной матрице X того же порядка сопоставим матрицу $\varphi(X) = AX$. Тем самым определено линейное преобразование пространства квадратных матриц со скалярным произведением. Найти его сопряженное преобразование φ^*.*

Задача 3.4. *Пусть λ_1 и λ_2 - два различных собственных значения преобразования φ евклидова пространства. Доказать, что*

$$\ker(\varphi - \lambda_1 \mathcal{I}) \subseteq \Im(\varphi - \lambda_2 \mathcal{I})$$

Задача 3.5. *Пусть $X = L_1 \oplus L_2$. Доказать, что проектирование на L_1 является самосопряженным преобразованием тогда и только тогда, когда $L_2 = L_1^{\perp}$.*

Задача 3.6. *Для двух самосопряженных преобразований, заданных в ортонормированном базисе матрицами*

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 2 \\ -2 & 14 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & 8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix},$$

найти матрицу перехода к общему ортонормированному базису из собственных векторов и матрицы преобразований в этом базисе.