$\boxed{\text{Алгебра. КТ. Осенний семестр}}$

## I. Алгебраические системы и алгебраические операции. Группы

1. Являются ли алгебраическими системами следующие объекты:

   а) $\langle \mathbb{Q}_{>0}, \sqrt{\ } \rangle$; б) $\langle \mathbb{R}_{>0}, \sqrt{\ } \rangle$; в) $\langle \mathbb{N}, - \rangle$; г) $\langle \mathbb{Z}, : \rangle$; д) $\langle \mathbb{Q}, : \rangle$; е) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, : \rangle$?

2. Относительно каких операций, заданных на множестве $\mathbb{Z}$, замкнуты множества $2\mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z}+1$? Рассмотрите бинарные операции: сложение, умножение, взятие НОДа; а также унарные операции: взятие противоположного элемента, удвоение, утроение.

3. Найдите все конечные подсистемы алгебраических систем:

   а) $\langle \mathbb{Z}, f \rangle$, где $f$ — унарная операция удвоения;

   б) $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$;

   в) $\langle X, f \rangle$, где $X$ — множество точек плоскости, $f$ — тернарная операция, сопоставляющая трём точкам $A$, $B$, $C$ точку пересечения медиан треугольника $ABC$ (возможно, вырожденного).

4. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве $M$, если:

   а) $M = \mathbb{N}$, $x * y = x^y$;

   б) $M = \mathbb{N}$, $x * y = \text{НОД}(x, y)$;

   в) $M = \mathbb{N}$, $x * y = 2xy$;

   г) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x - y$;

   д) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$;

   е) $M = \mathbb{R}$, $x * y = \sin x \cdot \sin y$;

   ж) $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$?

5. Составьте таблицу Кэли для операций на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

   а) $a * b = \min\{2a, b\}$;

   б) $a * b = a + b - \max\{a, b\}$.

   Являются ли операции коммутативными? Имеют ли они нейтральный элемент?

6. На множестве $M$ определена операция $*$ по правилу $x * y = x$. Докажите, что $\langle M, * \rangle$ является полугруппой. Что можно сказать о её нейтральных и обратимых элементах? В каких случаях она является группой?

7. Какие из указанных структур являются группами:

а) $\langle\{-1,\ 1\},\ \cdot\rangle$;

б) $\langle\mathbb{Z}_6,\ \cdot\rangle$.

в) множество степеней данного ненулевого вещественного числа с натуральными показателями относительно умножения;

г) множество всех непрерывных монотонно возрастающих функций из $[0,1]$ в $[0,1]$, для которых $f(0)=0$, $f(1)=1$, относительно операции композиции;

д) функции $x$, $-x$, $\dfrac{1}{x}$, $-\dfrac{1}{x}$ на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ относительно операции композиции;

е) множество $\mathscr{P}(M)$ всех подмножеств некоторого множества $M$ относительно операции симметрической разности $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(B\cap A)$?

Какие из групп являются абелевыми?

8. Составьте таблицу Кэли для:

а) группы симметрий правильного треугольника;

б) множества функций $x$, $1-x$, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x-1}{x}$, $\dfrac{x}{x-1}$, $\dfrac{1}{1-x}$ на $\mathbb{R}\backslash\{0,\ 1\}$ с операцией композиции. Убедитесь, что эта структура является группой.

Абелевы ли эти группы? Сравните их таблицы Кэли.

9. Докажите, что если в группе выполнено тождество $x^2=e$, то эта группа абелева.

10. Докажите, что любая группа третьего порядка абелева.

11.* Каждой паре вещественных чисел $x$ и $y$ поставлено в соответствие некоторое число $x*y$. Найдите $2024*2025$, если известно, что для любых трёх чисел $x, y$ и $z$ выполнены тождества: $x*x=0$ и $x*(y*z)=(x*y)+z$.

12.* На доске написано 2024 числа:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{2024}.$$

За один ход требуется стереть любые два числа $a$ и $b$ и вместо них написать число $a+b+ab$. Сделано 2023 хода и на доске осталось одно число. Какое это число может быть? Укажите все варианты.