4 Дискретное преобразование Фурье

4.1 Система корней из единицы

Определение 1. Корнем степени N называется коомплексное число $\omega \in \mathbb{C}$, такое, что

$$\omega^N = 1, \quad \omega = e^{2\pi i/N}.$$

Лемма 1. *Следующее множество является циклической группой относительно операции умножения в* $\mathbb{C}$*:*

$$W_N = \{\omega \in \mathbb{C} : \quad \omega^N = 1\} = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\omega = e^{2\pi i/N}$ *и* $k \in \overline{1, N-1}$*, тогда:*

$$\sum_{n=1}^{N-1} \omega^{nk} = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой для конечной суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{nk} = \frac{1-\omega^{Nk}}{1-\omega^k} = 0.$$

□

4.2 Базис Фурье

Лемма 3. *Следующая система векторов* $\{f_m\}_{m=0}^{N-1}$ *является линейно-независимой в* $\mathbb{C}_E^N$*:*

$$f_k = \begin{bmatrix} 1 & \omega^k & \omega^{2k} & \dots & \omega^{(N-1)k} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Чтобы показать, что система $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$ является линейно-независимой, докажем ее ортогональность относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{C}_E^N$:

$$\langle f_l, f_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{nk} \cdot \omega^{-nl} = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{n(k-l)} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ N, & k = l. \end{cases}$$

□

Лемма 4. *Имеет место следующее равенство:* $\overline{f}_k = f_{N-k}$.

Доказательство. Доказательство прямо следует из определения:

$$\omega^k \cdot \omega^{N-k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^{N-k} = \omega^{-k} = \overline{\omega}^k.$$

□

Определение 2. Система векторов $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$ называется **базисом Фурье** пространства $\mathbb{C}^n$.

Определение 3. Матрица перехода от стандартного базиса $\{e_j\}_{j=-0}^{N-1}$ пространства $\mathbb{C}^N$ к базису Фурье $\{f_m\}_{m=0}^{N-1}$ называется матрицей **обратного преобразования Фурье**:

$$\mathrm{IDFT}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Лемма 5. *Матрица* IDFT_N *является унитарной:*

$$\mathrm{IDFT}_N^\dagger \cdot \mathrm{IDFT}_N = \mathrm{Id}, \quad \mathrm{DFT}_N = \mathrm{IDFT}_N^\dagger.$$

Замечание 1. Пусть $x \in \mathbb{C}_E^N$ и имеет в стандартном базисе набор координат $\{x[j]\}_{j=0}^{N-1}$, тогда в базисе Фурье его координаты будут

$$y = \mathrm{DFT}_N \cdot x, \quad y[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-nm} x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N_1} e^{-\frac{2\pi}{N} mni} x[n].$$

Определение 4. Преобразование координат $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1} \to \{y[m]\}_{m=0}^{N-1}$ представленного выше вида, называется **дискретным преобразованием Фурье**.

4.3 Свойства DFT

Замечание 2. Перечисленные ниже свойства являются очевидными (ввиду вышесказанного):

1. $\mathrm{DFT}_N(x + y) = \mathrm{DFT}_N(x) + \mathrm{DFT}_N(y)$ - аддитивность;
2. $\mathrm{DFT}_N(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \mathrm{DFT}_N(x)$ - однородность;
3. $\langle \mathrm{DFT}_N(x), \mathrm{DFT}_N(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ - унитарность;

Лемма 6. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^N \leqslant \mathbb{C}^N$, *тогда*

$$\mathrm{DFT}_N(x)[N - m] = \overline{\mathrm{DFT}_N(x)[m]}.$$

Доказательство. Действительно, имеем:

$$\mathrm{DFT}_N(x)[N - m] = \langle f_{N-m}, x \rangle = \langle \overline{f}_m, x \rangle = \langle \overline{f}_m, \overline{x} \rangle = \overline{\langle f_m, x \rangle} = \overline{\mathrm{DFT}_N(x)[m]}.$$

□

Определение 5. Конволюцией (или сверткой) двух векторов $x, y \in \mathbb{C}^N$, называется вектор $x * y \in \mathbb{C}^N$, такой что

$$(x * y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n - m],$$

где индекс $n - m$ берется по модулю N.

Пример 1. *Приведем пример свертки в* $\mathbb{C}^4$*:*

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x * y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Теорема 4.1. *Фурье-образ свертки двух векторов равен поэлементному произведению образов Фурье этих векторов:*

$$\mathrm{DFT}_N(x * y) = \sqrt{N} \cdot \mathrm{DFT}_N(x) \cdot \mathrm{DFT}_N(y)$$

Доказательство. Прямым вычислением можем получить:

$$\mathrm{DFT}_N(x * y)[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m] \omega^{-nk} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m] \omega^{-nk} \omega^{mk} \omega^{-mk} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \omega^{-mk} \sum_{n=0}^{N-1} y[n-m] \omega^{-(n-m)k} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \omega^{-mk} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \omega^{-nk} = \sqrt{N} \cdot \mathrm{DFT}_N(x)[k] \cdot \mathrm{DFT}_N(y)[k]$$

□

Определение 6. Циркулянтной матрицей (или циркулянтом) называется квадратная $N \times N$ матрица, каждая следующая строка которой является циклическим сдвигом предыдущей строки на один элемент вправо:

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 7. *Имеет место равенство:*

$$\forall x \in \mathbb{C}^N \quad Cx = c * x, \quad c = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1}. \end{bmatrix}$$

Теорема 4.2. *(Спектральное представление циркулянта) Циркулянтная* $N \times N$*-матрица* C *имеет следующее спектральное представление:*

$$C = \mathrm{DFT}_N \cdot \Lambda \cdot \mathrm{DFT}_N^{\dagger}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\mathrm{DFT}_N(c)\}.$$

Доказательство. Убедимся прямой проверкой, что векторы f_k - собственные для матрицы C. Действительно:

$$(Cf_k)[j] = \sum_{m=0}^{N-1} C_{jm} (f_k)[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} c_{(m-j) \bmod N} \cdot \omega^{-mk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} c_l \cdot \omega^{-(l+j)k} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{-jk} \sum_{l=0}^{N-1} c_l \omega^{-lk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{-jk} \cdot \mathrm{DFT}_N(c)^k = \mathrm{DFT}_N(c)^k \cdot (f_k)[j].$$

□