

## Домашние задачи. Неделя 2

*Nota bene* Матричная норма  $\|\cdot\|_M$  называется согласованной с векторной нормой  $\|\cdot\|_V$ , если

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \|x\|_V$$

для любой матрицы  $A$  и всех векторов  $x$ . Всякая норма матрицы согласована с какими-нибудь векторными нормами

*Nota bene* Пусть задана векторная норма  $\|\cdot\|_V$ . Тогда числовая функция

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_V \neq 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V$$

является матричной нормой и называется нормой матрицы, подчиненной векторной норме  $\|\cdot\|_V$

*Nota bene* Матричную норму из предыдущего замечания также называют индуцированной

### Задача 1

Показать, что спектральная норма и норма Фробениуса являются матричными нормами

### Задача 2

Показать, что спектральная норма является индуцированной

### Задача 3

Доказать, что матричные нормы  $\|\cdot\|_2$  и  $\|\cdot\|_F$  эквивалентны с указанными константами:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{\min\{m, n\}} \cdot \|A\|_2$$

### Задача 4

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

1. Для обеих матриц вычислите спектральную норму и норму Фробениуса
2. Вычислите число обусловленности матриц с использованием обеих норм из предыдущего пункта
3. Проанализируйте результат: что означает полученное значение  $\kappa(A)$  для устойчивости решения системы

$$Ax = b$$

относительно малых возмущений в векторе правой части  $b$ .