Лекция 16

Поверхности второго порядка в пространстве

Содержание лекции:
Определение геометрической формы поверхности второго порядка по ее уравнению. Метод сечений.

Ключевые слова:
Поверхности второго порядка, виды уравнений поверхностей, метод сечений, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболойды, конусы.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

16.0.1 Уравнения поверхностей и линий в $\mathbb{R}^3$

Способы задания уравнения поверхности:

1. Взаимосвязь между координатами:
$$x = f(y,z), \quad y = g(x,z), \quad z = h(x,y).$$
2. Неявный вид:
$$F(x,y,z) = 0.$$
3. Параметрический вид:
$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v).$$

Способы задания уравнения линии:

1. Неявный вид:
$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$$
2. Параметрический вид:
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

16.0.2 Поверхности второго порядка. Метод сечений.

Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Сечение плоскостью $z = C$:
$$C = 0: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{эллипс},$$
$$|C| < c: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{C^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \text{эллипс},$$
$$|C| = c: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0,$$
$$|C| > c: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \emptyset \quad (\text{мнимый эллипс}),$$

Nota bene Для остальные сечения, параллельные плоскостям канонической системы координат находятся аналогично.

Однополостный гиперболоид

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1. Сечение плоскостью $z = C$:

$$|C| \geq 0: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{C^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \text{эллипс.}$$

2. Сечение плоскостью $y = B$:

$$\begin{aligned} B = 0: &\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{гипербола,} \\ |B| < b: &\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{B^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \text{гипербола,} \\ |B| = b: &\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad |az| = |cx|, \\ |B| > b: &\quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{B^2}{b^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{гипербола,} \end{aligned}$$

3. Сечение плоскостью $x = A$: аналогично.

Двуполостный гиперболоид

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

1. Сечение плоскостью $z = C$:

$$\begin{aligned} |C| < c: &\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{C^2}{c^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \emptyset \quad \text{(мнимый эллипс),} \\ |C| = c: &\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0, \\ |C| > C: &\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{C^2}{c^2} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{эллипс.} \end{aligned}$$

2. Сечение плоскостью $y = B$:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{B^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \text{гипербола,}$$

3. Сечение плоскостью $x = A$: аналогично.

Конус

Каноническое уравнение конуса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

1. Сечение плоскостью $z=C$:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{C^2}{c^2} \quad\Rightarrow\quad \text{эллипс,}$$

2. Сечение плоскостью $y=B$:
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{B^2}{b^2} \quad\Rightarrow\quad \text{гипербола,}$$

3. Сечение плоскостью $x=A$: аналогично.

Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение эллиптического параболоида:

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=z.$$

1. Сечение плоскостью $z=C$:
$$\begin{aligned} C<0 &\quad\Rightarrow\quad \emptyset \quad \text{мнимый эллипс,}\\ C=0: &\quad \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=y=0,\\ C>0: &\quad \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=C \quad\Rightarrow\quad \text{элипс;} \end{aligned}$$

2. Сечение плоскостью $y=B$:
$$x^2=p^2\left(z-\frac{B^2}{q^2}\right) \quad\Rightarrow\quad \text{парабола,}$$

3. Сечение плоскостью $x=A$: аналогично.

Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z.$$

1. Сечение плоскостью $z = C$:

$$C \neq 0: \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = C \quad \Rightarrow \quad \emptyset \quad \text{гипербола},$$
$$C = 0: \quad \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{q}{p}x,$$

2. Сечение плоскостью $y = B$:

$$x^2 = p^2\left(z + \frac{B^2}{q^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{парабола},$$

3. Сечение плоскостью $x = A$:

$$y^2 = q^2\left(\frac{A^2}{q^2} - z\right) \quad \Rightarrow \quad \text{парабола}.$$

Цилиндры

Канонические уравнения цилиндров:

1. Эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

2. Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

3. Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px.$$