



Лекция 12

Жорданова нормальная форма

Содержание лекции:

Этой лекцией мы завершаем знакомство с линейными операторами. Здесь мы обсудим жорданову нормальную форму матрицы, а также покажем какие преимущества она имеет для функционального исчисления матриц.

Ключевые слова:

Жорданова нормальная форма матрицы, алгебраическая кратность, полная кратность, спектральная кратность, функция от оператора.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

12.1 Жорданова нормальная форма

Лемма 12.1. Пусть $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(X)$ и $\beta(X)$ - базис линейного пространства X , причем

$$\beta(X) = \{\beta(L_1), \beta(L_2), \dots, \beta(L_k)\}, \quad L_i = \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$$

тогда матрица A_φ оператора φ имеет в этом базисе блочно-диагональный вид:

$$A = \text{diag} \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \quad A_j = \lambda_j E_j + T_j.$$



Каждое подпространство L_i является ультраинвариантным, на котором действует компонента φ_i оператора φ , матрица которого как следствие имеет блочно-диагональный вид:

$$\varphi \leftrightarrow A = \text{diag} \{A_1, A_2, \dots, A_k\}.$$



Nota bene В случае линейного оператора скалярного типа имеем:

$$\begin{aligned} \varphi x_i &= \lambda_i x_i \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_i = \lambda_i \mathcal{I}_i, \\ A_j &= \text{diag} \{\lambda_j, \lambda_j, \dots, \lambda_j\}. \end{aligned}$$

Nota bene Пусть A_i - матрица компоненты оператора φ_i подпространстве L_i , тогда:

$$\begin{aligned} A_i &= \lambda_i E_i + T_i : \quad L_i \rightarrow L_i, \\ n_i &= \dim L_i = \dim \ker(\varphi - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}. \end{aligned}$$

Если в L_i выбран базис Жордана, тогда T_i представляет собой прямую сумму жордановых блоков.

$$T_i = \text{diag} \left\{ T_{i,1}^{(m)}, T_{i,2}^{(m)}, T_{i,3}^{(m-1)}, T_{i,4}^{(m-1)}, \dots, T_{i,k}^{(1)}, \dots, T_{i,r_i}^{(1)} = 0 \right\},$$

где r_i - число жордановых блоков, а n_i - размер жордановой клетки T_i .

|| Построенная таким образом форма матрицы линейного оператора называется **Жордановой нормальной формой**.

Nota bene Имеет место

1. $\chi_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.
2. $\sigma_\varphi = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$.



Характеристический полином компоненты φ_i имеет вид:

$$\begin{aligned} \chi_{\varphi_i}(\lambda) &= \det(A_i - \lambda_i E_i) = \prod_{i=1}^{n_i} (\lambda_i - \lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i}, \\ \chi_\varphi(\lambda) &= \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i}(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{n_i}. \end{aligned}$$

Отсюда для спектра σ_{φ_i} имеем

$$\begin{aligned} \chi_{\varphi_i}(\lambda) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_i, \quad \sigma_{\varphi_i} = \{\lambda_i\} \\ \chi_\varphi(\lambda) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \quad \sigma_\varphi = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}. \end{aligned}$$



ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Пусть λ_i - собственное значение оператора $\varphi : X \rightarrow X$, тогда

1. m_i - кратность корня λ_i в минимальном полиноме $p_\varphi(\lambda)$ - **алгебраическая кратность** λ_i (максимальный размер жорданова блока);
2. n_i - размерность ультраинвариантного подпространства L_i - **полная кратность** λ_i (кратность корня характеристического полинома $\chi_\varphi(\lambda)$);
3. r_i - размерность подпространства $(A_i - \lambda_i E_i)$ - **спектральная кратность** λ_i (число жордановых блоков в A_i).

Лемма 12.2. Алгебраическая и спектральная (геометрическая) кратности не превосходят полной:

$$1 \leq m_i \leq n_i, \quad 1 \leq r_i \leq m_i.$$

Nota bene Частные случаи:

1. $n_i = 1 \Rightarrow r_i = m_i = 1$ - оператор с простым спектром;
2. $r_i = n_i \Leftrightarrow m_i = 1$ - оператор скалярного типа;
3. $r_i = 1 \Leftrightarrow m_i = n_i$ - жорданов блок.

12.1.1 Функциональное исчисление для оператора общего вида

Пусть $\varphi \in \text{End}_k(X)$ - линейный оператор над пространством X и $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ - функция, которая представима в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Nota bene Значение $f(\varphi)$ функции f определяется следующим образом

$$f(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m.$$

Пусть $\beta(X)$ - произвольный базис линейного пространства X и $\beta_J(X)$ - жорданов базис оператора φ . Если A - матрица оператора φ в базисе $\beta(X)$ и A_J - жорданова нормальная форма оператора матрицы оператора φ , тогда

$$A = T A_J T^{-1}, \quad f(A) = T (f(A_J)) T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m A_J^m \right) T^{-1}$$

Nota bene Матрица оператора φ в жордановой нормальной форме имеет блочно-диагональный вид и значит:

$$A_J = \text{diag} \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \quad A_J^m = \text{diag} \{A_1^m, A_2^m, \dots, A_k^m\}.$$

Откуда следует, что достаточно уметь возводить в степень жорданову клетку.

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Nota bene Пусть далее

$$A_j = \lambda_j I_j + \tau_j, \quad \tau_j^{m_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_j I_j + \tau_j)^m = \sum_{r=1}^m C_m^r \tau_j^r \lambda^{m-r},$$

где C_m^r - биномиальные коэффициенты. С учетом свойств матрицы нильпотентного оператора, будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{diag} A_j &= \{C_m^0 \lambda^m, C_m^0 \lambda^m, \dots, C_m^0 \lambda^m\}, \\ \text{diag}_{+1} A_j &= \{C_m^1 \lambda^{m-1}, C_m^1 \lambda^{m-1}, \dots, C_m^1 \lambda^{m-1}\}, \\ &\dots, \\ \text{diag}_{+r} A_j &= \{C_m^r \lambda^{m-r}, C_m^r \lambda^{m-r}, \dots, C_m^r \lambda^{m-r}\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} \text{diag} f(A_j) &= \{f(\lambda), f(\lambda), \dots, f(\lambda)\}, \\ \text{diag}_{+1}(A_j) &= \left\{ \frac{1}{1!} f'(\lambda), \frac{1}{1!} f'(\lambda), \dots, \frac{1}{1!} f'(\lambda) \right\}, \\ &\dots, \\ \text{diag}_{+r}(A_j) &= \left\{ \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda), \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda), \dots, \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda) \right\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Пример 12.1. Пусть $f(x) = \sin(x)$ и

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

тогда

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} \sin \lambda & \cos \lambda & -\frac{1}{2} \sin \lambda & -\frac{1}{6} \cos \lambda \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda & -\frac{1}{2} \sin \lambda \\ 0 & 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \sin \lambda \end{pmatrix},$$