

### IX. Подпространства и линейные многообразия

1. Решите СЛАУ над  $\mathbb{R}$ , найдите ФСР соответствующей ей однородной СЛАУ:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 10; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2; \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 3; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5; \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7; \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$$

2. При каких значениях  $\lambda$  СЛАУ над  $\mathbb{R}$

$$\text{а) } \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (3 - 2\lambda)x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 = \lambda; \\ (2 - \lambda)x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 1; \end{cases}$$

- а) имеет единственное решение;
- б) имеет бесконечно много решений;
- в) имеет ровно 2 решения;
- г) несовместна?

3. Составьте СЛАУ над  $\mathbb{R}$ , задающую линейную оболочку системы векторов:

- а)  $(1, 1, 1)^T, (1, 2, 3)^T$ ;
- б)  $(1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 1, 3)^T$ ;
- в)  $(1, 1, 2, 2)^T$ ;
- г)  $(1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 1, 3)^T, (1, 1, 2, 2)^T, (1, 1, 1, 3)^T$ ;
- д)  $(0, 0, 0, 0)^T$ ;

4. Найдите СЛАУ над  $\mathbb{R}$ , задающую линейное многообразие

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

5. Решите СЛАУ над полями  $\mathbb{Z}_5$  и  $\mathbb{Z}_7$ :

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + y + 2z = 1; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ 4x + 3y + 2z = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y = 1; \\ 3x + 2y + z = 2; \\ x + 3y + 4z = 2. \end{cases}$$

6. Решите СЛАУ над полем  $\mathbb{F}_4$  (элементы:  $0, 1, \alpha, \alpha + 1$ ):

$$\text{а) } \begin{cases} x + \alpha y = \alpha + 1; \\ \alpha x + (\alpha + 1)y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \alpha x + y = \alpha; \\ (\alpha + 1)x + y = \alpha + 1. \end{cases}$$

7\* Имеется СЛАУ над  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dots x + \dots y + \dots z = 0; \\ \dots x + \dots y + \dots z = 0; \\ \dots x + \dots y + \dots z = 0. \end{cases}$$

Матроскин и Шарик поочерёдно вписывают вместо многоточий числа. Матроскин ходит первым. Докажите, что он всегда может добиться существования у этой СЛАУ ненулевого целочисленного решения.

8. При каких значениях  $\lambda$  вещественная матрица имеет наименьший ранг:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & \lambda & -2 & 3 \end{pmatrix} ?$$

9.  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы одинакового размера. Обязательно ли  $\text{rk}(AB) = \text{rk}(BA)$ ?

10. Может ли при элементарных преобразованиях матрицы  $A$  измениться ранг матрицы  $A^2$ ?

11\* Пусть  $a_{ij} = (i - j)^2$ . Найдите ранг матрицы  $A = (a_{ij})$  порядка  $n \geq 3$ .

12\* Найдите наименьший возможный ранг вещественной квадратной матрицы  $n$ -го порядка, у которой все диагональные элементы равны нулю, а все остальные элементы положительны.