θ

Лекция 8

Преобразование базиса

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим замену базиса в линейном пространстве и связанные с этой заменой преобразования коордиант. Как будет видно, имеются лишь две возможности - ковариантный закон, когда величины преобразуются также как и базисные векторы при переходе, и контравариантный закон - закон противоположный ковариантному. Любой разумный закон движения сопровождается квариантным или контравариантным преобравзованиями наблюдаемых величин.

Ключевые слова:
Матрица перехода, невырожденность матрицы перехода, ковариантные величины, контравариантные величины.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

8.1 Матрица линейного оператора

Пусть $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X,Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно.

Матрицей линейного оператора σ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{g_j\}_{j=1}^m$ называется матрица $A = (a_i^j)$ по столбцам которой находятся координаты образов векторов базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ в базисе $\{g_j\}_{j=1}^m$:

$$\sigma(e_i) = \sum_{j=1}^m a_i^j g_j.$$

Лемма 8.1. *Задание линейного оператора σ эквивалентно заданию его матрицы A в фиксированной паре базисов.*

▶

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X,Y)$ - линейный оператор и $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ - базисы пространств X и Y соответственно. Рассмотрим элементы $x \in X$ и $y \in Y$, такие что:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j, \quad \sigma(x) = y.$$

Рассмотрим действие оператора на элемент x:

$$\sigma(x) = \sigma\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sigma(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j=1}^m \alpha_i^j g_j = \sum_{j=1}^m \eta^j g_j,$$

Откуда следует, что

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i a_i^j, \quad \Leftrightarrow \quad \eta = A\xi.$$

◀

Лемма 8.2. *Если оператор σ в паре базисов $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m$ пространств $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$ задается матрицей A, тогда матрица сопряженного ему оператора σ^* в соответствующих сопряженных базисах пространств $X^*(\Bbbk)$ и $Y^*(\Bbbk)$ будет равна A^T.*

▶

Действительно для любых $x \in X(\Bbbk)$ и $f \in Y^*(\Bbbk)$ таких что

$$x \leftrightarrow \xi, \quad f \leftrightarrow \varphi, \quad \sigma \leftrightarrow A,$$

будет иметь место

$$(f, \sigma x) = \varphi^T A\xi = (A^T\varphi)^T\xi.$$

◀

8.2 Матрица перехода

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ - линейное пространство и $\{e_j\}_{j=1}^n$, $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ - базисы $X(\Bbbk)$:

$$\forall x \in X(\Bbbk), \quad x = \sum_{j=1}^n e_j \xi^j, \quad x = \sum_{k=1}^n \tilde{e}_k \tilde{\xi}^k.$$

В силу того, что оба набора $\{e_j\}_{j=1}^n$ и $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ являются базисами, каждый из векторов одного набора единственным образом выражается через векторы другого набора:

$$\tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n e_j \tau_k^j.$$

> Набор коэффициентов $\|\tau_k^j\| = T$ образует матрицу, которая называется **матрицей перехода** от старого базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к новому базису $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$.

Nota bene Вводя обозначения $E = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ и $\tilde{E} = [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n]$ получаем:

$$\tilde{E} = E \cdot T.$$

Лемма 8.3. *Матрица перехода невырождена:*

$$\det T \neq 0.$$

►
Набор векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ЛНЗ, а значит $\det T \neq 0$.
◄

Nota bene Существует обратная матрица $T^{-1} = S = \|\sigma_i^l\|$, такая что

$$\tilde{E} \cdot T^{-1} = E \quad \text{или} \quad E = \tilde{E} \cdot S.$$

Лемма 8.4. *Пусть* $\{f^i\}_{i=1}$ *и* $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}$ *- базисы* $X^*(\Bbbk)$, *сопряженные соответственно базисам* $\{e_j\}_{j=1}^n$ *и* $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$, *тогда*

$$\tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i.$$

►
По определению сопряженных базисов, Имеем

$$\left(\tilde{f}^l, \tilde{e}_k\right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^l f^i, \sum_{j=1}^n e_j \tau_k^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i^l \left(f^i, e_j\right) \tau_k^j =$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i^l \delta_j^i \tau_k^j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^l \tau_k^i = \delta_k^l \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}^l = \sum_{i=1}^n \sigma_i^l f^i.$$

◄

Nota bene Вводя соответствующие обозначения, получаем:

$$F = \left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right)^T \quad \tilde{F} = \left(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \ldots, \tilde{f}^n\right)^T \quad \tilde{F} = S \cdot F.$$

8.3 Замена координат при замене базиса

Лемма 8.5. *(о замене координат в $X(\Bbbk)$) Преобразование координат вектора X при переходе от базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^n$ имеет вид:*

$$\tilde{\xi}^k = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^k \xi^j, \quad \text{или} \quad \left(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2, \ldots, \tilde{\xi}^n\right)^T = S \cdot \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)^T.$$

►

Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\tilde{\xi}^k = \left(\tilde{f}^k, x\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^k f^i, \sum_{j=1}^{n} e_j \xi^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^k \left(f^i, e_j\right) \xi^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i^k \delta_j^i \xi^j = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^k \xi^j.$$

◄

Лемма 8.6. *(о замене координат в $X^*(\Bbbk)$) Преобразование координат формы в $X^*(\Bbbk)$ при переходе от базиса $\{f^i\}_{i=1}^n$ к $\left\{\tilde{f}^l\right\}_{l=1}^n$ имеет вид:*

$$\tilde{\eta}_l = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \tau_l^i, \quad \text{или} \quad \left(\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2, \ldots, \tilde{\eta}^n\right) = \left(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n\right) \cdot T.$$

►

$$\tilde{\eta}_l = (y, \tilde{e}_l) = \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i f^i, \sum_{j=1}^{n} e_j \tau_l^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_i \left(f^i, e_j\right) \tau_l^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_i \delta_j^i \tau_l^j = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \tau_l^i.$$

◄

> Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису так же, как базисные векторы (то есть, с использованием матрицы T), называются **ковариантными** величинами и снабжаются нижними индексами (ковекторы).

> Величины, преобразующиеся при переходе к новому базису по обратному закону (то есть, с использованием матрицы S), называются **контравариантными** величинами и снабжаются верхними индексами (векторы).

8.4 Преобразование матрицы линейного оператора

Лемма 8.7. *Пусть* $\sigma \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ - *эндоморфизм пространства* $X(\Bbbk)$ *имеет в базисах* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *и* $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ *соответственно матрицы* A *и* $\tilde{A}$. *Тогда*

$$\tilde{A} = S \cdot A \cdot T, \quad S = T^{-1}.$$

►
Вычислим образ $\varphi(\tilde{e}_k)$ двумя способами:

$$\varphi(\tilde{e}_k) = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_k^j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \tilde{a}_k^j \tau_j^i e_i.$$

$$\varphi(\tilde{e}_k) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \tau_k^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \tau_k^j \varphi\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \tau_k^j a_j^i e_i.$$

Осталось приравнять правые части, записанные в матричной форме:

$$T \cdot \tilde{A} = A \cdot T \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = S \cdot A \cdot T.$$

◄