Алгебра. КТ. Осенний семестр

V. Факториальные и евклидовы кольца. Кольцо многочленов

1. Найдите НОД(x, y) и его линейное представление:

   а) $x = 30, y = 18$;

   б) $x = 846, y = 246$;

   в) $x = 588, y = 1960$;

   г) $x = 7975, y = 2585$.

2. Найдите НОД двух многочленов и его линейное представление:

   а) $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^2 - x + 1$;

   б) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$;

   в) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ и $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

   г) $x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3$ и $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

3. Найдите общие корни многочленов $x^4 + 4x^3 - 5x + 2$ и $2x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 7x + 1$.

4. Докажите, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем многочлена f с целыми коэффициентами, то:

   а) p — делитель свободного коэффициента;

   б) q — делитель старшего коэффициента;

   в) $p - mq \mid f(m)$ при любом целом m. В частности, $p - q \mid f(1)$, $p + q \mid f(-1)$.

5. Найдите рациональные корни многочленов:

   а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

   б) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

   в) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x - 36$;

   г) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

   д) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$.

6. Разложите многочлен на неприводимые сомножители над полями рациональных, вещественных и комплексных чисел:

   а) $x^4 - 1$;

   б) $x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + 10$, $x_1 = -1 + i$ — корень многочлена;

   в) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$, $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — корень многочлена;

г) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100$, $x_1 = 1 + 2i$ — корень многочлена

д) $x^4 + 2x^2 + 4$;

е) $x^4 - 3x^2 + 9$;

ж) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 38x - 39$;

з) $x^5 + 2x^4 - 20x^3 - 68x^2 - 41x + 30$.

7. Докажите, что при любом натуральном n многочлен $x^{3n} + x^{n+3} - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

8.* На доске написаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$?

9.* Докажите неприводимость многочленов над полем рациональных чисел:

а) $x^{105} - 9$;

б) $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - 1$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — различные целые числа;

10.* Вычислите $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5}$.