η

Лекция 7

Линейные формы

Содержание лекции:
В данной лекции мы начнем изучать свойства линейных отображений и разовьем методы, которыми будем активно пользоваться для системного их исследования в дальнейшем. Ближайшим предметом рассмотрения будет линейная форма - скалярная функция векторного аргумента.

Ключевые слова:
Линейная форма, ядро линейной формы, равенство линейных форм, нуль-форма, сумма форм, произведение формы на число, коэффициенты формы в базисе, сопряженные базисы, естественный изоморфизм.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

7.1 Основные определения

Линейной формой f на пространстве $X(\Bbbk)$ называется отображение

$$f : X(\Bbbk) \to \Bbbk,$$

обладающее свойством линейности:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(x)\alpha = f(x)\alpha, \quad \forall x, x_1, x_2 \in X(\Bbbk), \quad \forall \alpha \in \Bbbk.$$

Nota bene Для линейных форм приняты следующие обозначения:

$$f(x), \quad (f, x) \quad x \in X(\Bbbk). \tag{7.1}$$

Пример 7.1. Примеры линейных форм:

1. $X = \mathbb{R}^n : \quad (f, x) = \xi^k, \quad x = \sum_{k=1}^n e_k \xi^k;$
2. $X = \mathbb{R}[x]_n : \quad (f, p) = \int_a^b f(x)p(x)dx, \quad f(x) \in \mathbb{R}[x]_n;$
3. $X = \mathbb{R}_n^n : \quad (f, x) = \sum_{i=1}^n x_{ii} = \operatorname{tr} x.$

Ядром линейной формы f называется множество

$$\ker f = \{x \in X(\Bbbk) : \quad f(x) = 0\}.$$

Лемма 7.1. *Ядро* $\ker f$ *- линейное подпространство в* $X(\Bbbk)$.

►
Достаточно проверить замкнутость $\ker f$ относительно операций в $X(\Bbbk)$. Пусть

$$\forall\, x, x_1, x_2 \in \ker f, \quad \forall \alpha \in \Bbbk$$

тогда прямой проверкой можно убедиться в том, что

$$x_1 + x_2 \in \ker f, \quad \alpha x \in \ker f.$$

◄

Nota bene Имеет место следующее неравенство (будет доказано позже):

$$\operatorname{codim}_{\Bbbk} \ker f \leq 1.$$

Nota bene Всякое уравнение вида

$$f(x) = \alpha, \quad \alpha \in \Bbbk,$$

задает линейное многообразие M с несущим пространством $\ker f$.

$$M = x_0 + \ker f, \quad f(x_0) = \alpha.$$

7.2 Пространство линейных форм

Говорят, что линейные формы f и g **равны** ($f = g$), если

$$(f, x) = (g, x) \quad \forall x \in X(\mathbb{k}).$$

Линейная форма θ называется **нулевой** (нуль-формой), если

$$(\theta, x) = 0 \quad \forall x \in X(\mathbb{k}).$$

Суммой линейных форм f и g называется отображение $u = f + g$:

$$(u, x) = (f, x) + (g, x) \quad \forall x \in X(\mathbb{k}).$$

Лемма 7.2. *Отображение u - линейная форма над $X(\mathbb{k})$.*

▶

Покажем, что

$$u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2), \quad u(\alpha x) = \alpha u(x) \quad \forall x, x_1, x_2 \in X(\mathbb{k}).$$

Действительно, первое свойство следует из:

$$(u, x_1 + x_2) = (f, x_1 + x_2) + (g, x_1 + x_2) =$$
$$= (f, x_1) + (f, x_2) + (g, x_1) + (g, x_2) = (u, x_1) + (u, x_2).$$

Второе свойство доказывается аналогично

$$(u, x\alpha) = (f, x\alpha) + (g, x\alpha) = (f, x)\alpha + (g, x)\alpha = (u, x)\alpha.$$

◀

Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{k}$ называется отображение $v = \alpha f$, такое что:

$$(v, x) = \alpha(f, x).$$

Лемма 7.3. *Отображение v - линейная форма над $X(\mathbb{k})$.*

▶

Покажем, что

$$v(x_1 + x_2) = v(x_1) + v(x_2), \quad v(x\beta) = v(x)\beta \quad \forall x, x_1, x_2 \in X(\mathbb{k}).$$

Аналогично доказательству выше имеем:

$$(v, x_1 + x_2) = \alpha(f, x_1 + x_2) = \alpha(f, x_1) + \alpha(f, x_2) = (v, x_1) + (v, x_2),$$
$$(v, x\beta) = \alpha(f, x)\beta = \alpha(f, x)\beta = (v, x)\beta.$$

◀

Теорема 7.1. *Множество линейных форм на $X(\Bbbk)$ может быть наделено структурой линейного пространства.*

►

Доказывается прямой проверкой аксиом линейного пространства.

◄

Сопряженным пространством к линейному пространству $X(\Bbbk)$ называется пространство $X^*(\Bbbk)$ линейных форм на $X(\Bbbk)$.

7.3 Сопряженное пространство

Коэффициентами линейной формы в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ линейного пространства $X(\Bbbk)$ называются ее значения на базисных векторах:

$$(f, e_i) = \varphi_i, \quad f \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

Теорема 7.2. *Задание линейной формы эквивалентно заданию ее значений на базисных векторах, то есть заданию ее коэффициентов.*

►

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Пусть в выбранном базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ линейного пространства X линейная форма задана набором коэффициентов $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, тогда для любого $x \in X(\Bbbk)$

$$(f, x) = \left(f, \sum_{j=1}^n e_j \xi^j\right) = \sum_{j=1}^n \left(f, e_j \xi^j\right) = \sum_{j=1}^n (f, e_j)\, \xi^j = \sum_{j=1}^n \varphi_j \xi^j \quad \Leftrightarrow \quad (f, x) = \varphi^T \xi.$$

◄

Теорема 7.3. *(о базисе X^*) Множество линейных форм $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n : X(\Bbbk) \to \Bbbk$, действующих на $X(\Bbbk)$ с базисом $\{e_j\}_{j=1}^n$ как*

$$(f^k, x) = \xi^k, \quad x = \sum_{j=1}^n e_j \xi^j.$$

образует базис пространства $X^*(\Bbbk)$.

►

Покажем, что $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ образуют полный и линейнонезависимый набор.

1. Полнота:

$$(f, x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j \xi^j = \sum_{j=1}^n \varphi_j \left(f^j, x\right) \quad \forall x \in X \quad \Leftrightarrow \quad f = \sum_{j=1}^n \varphi_j f^j.$$

2. Линейная независимость:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f^j = \theta \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f^j, e_k\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0 \quad \forall k.$$

◀

Nota bene Заметим, что в обозначениях теоремы мы получаем

$$(f^k, e_j) = \delta_j^k = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Базисы $\{e_j\}_{j=1}^n$, $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ пространств X и X^* соответственно называются **сопряженными**, если они обладают свойством:

$$\left(f^k, e_j\right) = \delta_j^k.$$

Лемма 7.4. *Для каждого базиса* $\{e_j\}_{j=1}^n$ *линейного пространства* $X(\Bbbk)$ *может быть построен сопряженный ему базис пространства* $X^*(\Bbbk)$ *и наоборот.*

7.4 Сопряженный оператор

Nota bene Пусть $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$ - линеное отображение из $X(\Bbbk)$ в $Y(\Bbbk)$.

Лемма 7.5. *Линейным также является отображение* $\sigma^* : Y^* \to X^*$*:*

$$\forall x \in X^*, \quad \forall g \in Y^*, \quad (g, \sigma x) = (\sigma^* g, x).$$

▶

Проверим аддитивность и однородность отображения σ^*:

$$\forall f, g \in X^*(\Bbbk), \quad \forall \alpha \in \Bbbk, \quad \sigma^*(f+g) = \sigma^* f + \sigma^* g, \quad \sigma^*(\alpha f) = \alpha \cdot \sigma^*(f).$$

Действительно:

$$\forall x \in X(\Bbbk) \quad (\sigma^*(\alpha f), x) = (\alpha f, \sigma x) = \alpha(f, \sigma x) = \alpha(\sigma^* f, x) = (\alpha \sigma^* f, x).$$
$$(\sigma^*(f+g), x) = (f+g, \sigma x) = (f, \sigma x) + (g, \sigma x) = (\sigma^* f, x) + (\sigma^* g, x) = (\sigma^* f + \sigma^* g, x).$$

◀

Оператор $\sigma^* \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Y^*, X^*)$ называется **сопряженным оператору** σ.

Nota bene Операция сопряжения обладает следующими совйствами:

- контравариантность: $(\chi \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \chi^*$;
- инволютивность: $(\sigma^*)^* = \sigma$.

7.5 Изоморфизм пространств X и X^*

Nota bene Размерности пространств $X(\Bbbk)$ и $X^*(\Bbbk)$ одинаковы, а значит данные пространства изоморфны:

$$\dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk} X^* \quad \Leftrightarrow \quad X(\Bbbk) \simeq X^*(\Bbbk).$$

Nota bene Аналогично пространству $X^*(\Bbbk)$ сопряженному $X(\Bbbk)$ можно ввести пространство $X^{**}(\Bbbk)$ сопряженное пространству $X^*(\Bbbk)$ - второе сопряженное пространство - множество линейных форм на $X^*(\Bbbk)$:

$$\hat{x} : X^* \to \Bbbk, \quad \hat{x}(f) = (\hat{x}, f) \in \Bbbk,$$
$$\hat{x}(f+g) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g), \quad \hat{x}(\alpha f) = (\hat{x}\alpha)(f).$$

Изоморфизм двух линейных пространств называется **естественным изоморфизмом**, если он устанавливается без применения понятия базиса.

Лемма 7.6. *Изоморфизм между $X(\Bbbk)$ и $X^{**}(\Bbbk)$ - естественный.*

►

Искомый изоморфизм устанавливается отношением:

$$\hat{x} \leftrightarrow x : \quad (\hat{x}, f) = (f, x), \quad \forall f \in X^*(\Bbbk).$$

◄

Nota bene Таким образом на $X^{**}(\Bbbk)$ *естественным образом* индуцируется структура линейного пространства:

$$(\hat{x} + \hat{y}, f) = (\hat{x}, f) + (\hat{y}, f), \quad (\alpha\hat{x}, f) = \alpha(\hat{x}, f).$$