



Лекция 8

Системы линейных уравнений

Содержание лекции:

Системы линейных алгебраических уравнений имеют важное прикладное значение в самых различных предметных областях. В настоящей лекции мы построим геометрическую теорию таких систем, научимся опеределять наличие у них решений и их количество. Также мы обсудим наиболее удобное представление данных решений и обсудим структуры на их множестве.

Ключевые слова:

Классификация систем линейных уравнений, геометрическое исследование систем, метод Гаусса, система Крамера, теорема Крамера, однородные системы, теорема Кронеккера-Капелли, альтернатива Фредгольма, фундаментальная система решений, неоднородные системы, общее решение.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

8.1 Основные определения

Система следующего вида

$$\begin{cases} \alpha_1^1 \xi^1 + \alpha_2^1 \xi^2 + \dots + \alpha_n^1 \xi^n = \beta^1, \\ \alpha_1^2 \xi^1 + \alpha_2^2 \xi^2 + \dots + \alpha_n^2 \xi^n = \beta^2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \alpha_1^m \xi^1 + \alpha_2^m \xi^2 + \dots + \alpha_n^m \xi^n = \beta^m. \end{cases}$$

называется **линейной алгебраической системой** из m уравнений и n неизвестных. Набор $\{\alpha_k^i\}_{k=1 \dots n}^{i=1 \dots m}$ называется **коэффициентами системы**, $\{\beta^i\}_{i=1}^m$ - **свободными членами**, $\{\xi^k\}_{k=1}^n$ - **неизвестными**:

$$\alpha_k^i, \beta^i, \xi^k \in \mathbb{k} \subset \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

Решением системы называется такой набор $\{\xi^k\}_{k=1}^n$, при подстановке которого в систему его уравнения превращаются в верные равенства.

Система называется **совместной**, если она имеет решение, в противном случае она называется **несовместной**.

Система называется **определенной**, если она совместна и имеет единственное решение, в противном случае она называется **неопределенной**.

Если все свободные члены системы равны нулю, то система называется **однородной**, в противном случае она называется **неоднородной**.

Альтернативные формы записи

1. Матричная форма: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

2. Векторная форма: $\sum_{i=1}^n a_i \xi^i = b$

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^m \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_2^2 \\ \vdots \\ \alpha_2^m \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix},$$

при этом $\{a_i\}_{i=1}^n, b \in \mathbb{k}^m$.

Nota bene Из векторной формы следует следующая интерпретация решения системы уравнений: нахождение коэффициентов $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ линейной комбинации векторов из набора $\{a_i\}_{i=1}^n$, соответствующих вектору b .

В дальнейшем будем использовать векторную форму:

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i\xi^i = b, \quad (8.1)$$

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i\xi^i = 0. \quad (8.2)$$

8.2 Система Крамера

|| Система (8.1) называется **системой Крамера**, если $m = n$ и набор векторов $\{a_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ.

Теорема 8.1. Система Крамера совместна и определена.



Из того, что $m = n$ имеем $\{a_i\}_{i=1}^n, b \in \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^n$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n &\Rightarrow \mathcal{L}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \simeq \mathbb{K}^n, \\ \{a_i\}_{i=1}^n \text{ - ЛНЗ} &\Rightarrow \text{базис } \mathbb{K}^n \Rightarrow \forall b \in \mathbb{K}^n \exists! \{\xi^k\}_{k=1}^n : b = \sum_{k=1}^n \xi^k a_k, \end{aligned}$$



Пусть теперь $m \neq n$ и $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = r \leq m = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^m$, тогда

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\} \text{ - ЛНЗ} \Rightarrow \text{базис } \mathcal{L}.$$

|| Коэффициенты $\{\xi^{i_k}\}_{k=1}^r$ называются **базисными** или **главными** неизвестными системы:

$$\xi^{i_1} = \xi^1, \quad \xi^{i_2} = \xi^2, \quad \dots \quad \xi^{i_r} = \xi^r.$$

|| Оставшиеся неизвестные называются **свободными** или **параметрическими**:

$$\xi^{i_{r+1}} = \xi^{r+1}, \quad \xi^{i_{r+2}} = \xi^{r+2}, \quad \dots \quad \xi^{i_n} = \xi^n$$

В новых обозначениях систему (8.1) можно записать в виде:

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots + a_r\xi^r = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \dots - a_n\xi^n. \quad (8.3)$$

Теорема 8.2. (Кронекера-Капелли) Чтобы система (8.3) была совместна необходимо и достаточно выполнение условия $b \in \mathcal{L}$. При этом, если $r = n$, то система определена а в противном случае $r < n$ неопределена.



⇒ Пусть 8.3 - совместна, тогда $b \in \mathcal{L}$ и

$$b = a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots + a_r\xi^r.$$

⇐ Пусть $b \in \mathcal{L}$, тогда существует набор $\{\xi^i\}_{i=1}^r$ такой что

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \dots + a_r\xi^r = b.$$

При этом, если $r = n$, тогда $\{a_i\}_{i=1}^n$ - ЛНЗ набор и базис в \mathcal{L} , а значит разложение вектора b по этому набору единственно. Если $r < n$, то единственно разложение для

$$b' = b - a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \dots - a_n\xi^n,$$

что дает неоднозначность в разложении b .



Следствия теоремы Кронекера-Капелли

Однородная система

1. всегда совместна (всегда существует тривиальное решение):
2. имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $r < n$;
3. является неопределенной тогда и только тогда, когда $m < n$.

Nota bene Линейная оболочка \mathcal{L} является подпространством \mathbb{K}^m .

Теорема 8.3. (Альтернатива Фредгольма) Пусть $m = n$, тогда

1. или (8.2) имеет единственное тривиальное решение, а (8.1) совместна и определена при любом b ;
2. или существуют нетривиальные решения (8.2) и система совместна не при любых b .



Из того, что $m = n$ следует $\mathbb{K}^m = \mathbb{K}^n$.

1. Из единственности решения следует $\xi^1 = \xi^2 = \dots = \xi^n = 0$ и линейная независимость набора $\{a_i\}_{i=1}^n$. Тогда при $m = n$ система (8.1) является системой Крамера.
2. Из существования нетривиальных решений следует $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L} = r < n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^m$ и существуют $\mathbb{K}^m \ni b \notin \mathcal{L}$, такие что система (8.1) несовместна.



Фундаментальная система решений

Обозначим через S множество решений системы (8.2).

Теорема 8.4. Множество решений S однородной системы (8.2) является линейным подпространством \mathbb{K}^n :

$$x_1, x_2 \in S \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \in S, \\ x\lambda \in S. \end{cases}$$

►

Имеем:

$$\begin{aligned} x_1 \in S &\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \xi_1^i = 0, & x_2 \in S &\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \xi_2^i = 0, \\ \sum_{i=1}^n a_i (\xi_1^i + \xi_2^i) &= \sum_{i=1}^n a_i \xi_1^i + \sum_{i=1}^n a_i \xi_2^i = 0 + 0 = 0, \\ \sum_{i=1}^n a_i \xi^i \lambda &= \sum_{i=1}^n a_i \xi^i \cdot \lambda = 0 \cdot \lambda = 0. \end{aligned}$$

◀

Теорема 8.5. Подпространство $S(\mathbb{K})$ изоморфно пространству \mathbb{K}^{n-r} :

$$\dim_{\mathbb{K}} S = n - r.$$

►

Изоморфизм пространств $S(\mathbb{K})$ и \mathbb{K}^{n-r} устанавливается отображением:

$$\mathbb{K}^{n-r} \ni (\xi^{r+1}, \xi^{r+2}, \dots, \xi^n)^T \leftrightarrow (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^r; \xi^{r+1}, \dots, \xi^n)^T \in S(\mathbb{K}).$$

Действительно, вектор

$$-a_{r+1}\xi^{r+1} - a_{r+2}\xi^{r+2} - \dots - a_n\xi^n$$

имеет единственное разложение по системе векторов $\{a_i\}_{i=1}^r$ и значит предложенное отображение является биекцией. Кроме того, полагая

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=r+1}^n a_i \eta_1^i &\leftrightarrow& x_1 = \sum_{i=1}^n a_i \xi_1^i, \\ y_2 &= \sum_{i=r+1}^n a_i \eta_2^i &\leftrightarrow& x_2 = \sum_{i=1}^n a_i \xi_2^i, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= \sum_{i=r+1}^n a_i (\eta_1^i + \eta_2^i) &\leftrightarrow& x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^n a_i (\xi_1^i + \xi_2^i), \\ y\lambda &= \sum_{i=r+1}^n \eta^i a_i \cdot \lambda &\leftrightarrow& x\lambda = \sum_{i=1}^n a_i \xi^i \lambda, \end{aligned}$$

◀

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Фундаментальной системой решений (ФСР) линейной однородной системы уравнений называется любая система из $n - r$ линейнонезависимых решений этой системы, то есть базис пространства решений однородной системы:

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0)^T, & \leftrightarrow & \quad x_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \dots, \xi_1^r; 1, 0, 0, \dots, 0)^T, \\ y_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0)^T, & \leftrightarrow & \quad x_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \dots, \xi_2^r; 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \\ & & & \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_{n-r} &= (0, 0, 0, \dots, 1)^T, & \leftrightarrow & \quad x_{n-r} = (\xi_{n-r}^1, \xi_{n-r}^2, \dots, \xi_{n-r}^r; 0, 0, 0, \dots, 1)^T. \end{aligned}$$

Nota bene Построенная выше ФСР называется нормальной ФСР.

Теорема 8.6. Любое решение однородной системы (8.2) может быть выражено следующим образом:

$$x! = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_{n-r} C_{n-r} = \sum_{i=1}^{n-r} x_i C_i.$$



Очевидно.



Решение системы (8.2) выражающееся приведенной выше формулой называется **общим решением однородной системы**.

8.3 Неоднородная система

Рассмотрим случай, когда система (8.1) совместна, то есть:

$$b \in \mathcal{L}, \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L} = r < n.$$

Пусть \tilde{S} - множество решений системы (8.1), а $S(\mathbb{K})$ множество решений соответствующей ей однородной системы (8.2).

Теорема 8.7. Пусть $z' \in \tilde{S}$ частное (фиксированное) решение, тогда

$$z = z' + x, \quad \forall z \in \tilde{S}, \quad \forall x \in S(\mathbb{K}).$$



С одной стороны:

$$\begin{aligned} z' &= \{\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^n\}, \quad x = \{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n\}, \\ z &= z' + x = \{\zeta^1 + \xi^1, \zeta^2 + \xi^2, \dots, \zeta^n + \xi^n\}: \\ \sum_{i=1}^n a_i (\zeta^i + \xi^i) &= \sum_{i=1}^n a_i \zeta^i + \sum_{i=1}^n a_i \xi^i = b + 0 = b. \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$x = z - z' \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i (\tilde{\zeta}^i - \zeta^i) = 0 = \sum_{i=1}^n a_i \xi^i,$$

и значит $x \in S(\mathbb{K})$. ◀

Теорема 8.8. Любое решение $z \in \tilde{S}$ может быть представлено в виде:

$$z = z' + \sum_{i=1}^n x_i C_i, \quad \{x_j\}_{j=1}^n - \text{ФСР (8.2)}.$$

►

Очевидно.

◀

|| Приведенный выше вид решения неоднородной системы (8.1) называется ее **общим решением**.

Nota bene Таким образом, общее решение неоднородной системы представляет собой сумму ее частного решения неоднородной и общего решения соответствующей ей однородной системы.

Nota bene Множество решений \tilde{S} имеет структуру линейного многообразия, параллельного линейному пространству $S(\mathbb{K})$.