



Лекция 3

Аффинные отображения

Содержание лекции:

В этой лекции мы рассмотрим свойства отображений аффинных пространств, которые сохраняют аффинную структуру. Эти отображения называются аффинными. Их структура весьма проста, но в приложениях играет исключительно важную роль. Мы приближемся к аффинной геометрии.

Ключевые слова:

Аффинное отображение, дифференциал, биективность аффинного отображения, изоморфизм аффинных пространств, аффинная зависимость, аффинно-линейная функция, многообразие уровня.

Авторы курса:

Трифанов А. И.

Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

mathdep.ifmo.ru/geolin

3.1 Основные определения

Пусть $\mathbb{A}_k = (\mathbb{S}_A, \mathbb{V}_A, +)$, $\mathbb{B}_k = (\mathbb{S}_B, \mathbb{V}_B, +)$ - аффинные пространства.

Аффинным отображением пространства \mathbb{A}_k в пространство \mathbb{B}_k называется всякое отображение, обладающее свойством

$$\sigma(P + \vec{u}) = \sigma(P) + \varphi(\vec{u}), \quad P \in \mathbb{A}_k, \quad \vec{u} \in \mathbb{V}_A(k),$$

где $\varphi \in \text{Hom}_k(\mathbb{V}_A, \mathbb{V}_B)$ - линейное отображение.

Лемма 3.1. Отображение φ однозначно определяется по σ :

$$\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)}$$



Действительно, пусть $Q \in \mathcal{A}$, тогда

$$\sigma(Q) = \sigma(P + \overrightarrow{PQ}) = \sigma(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$



|| Отображение φ называется **дифференциалом** отображения σ и обозначается $d\sigma$.

Пример 3.1. Примеры аффинных преобразований:

1. параллельный перенос $\varphi = t_{\vec{w}}$:

$$t_{\vec{w}}(P + \vec{v}) = (P + \vec{w}) + \vec{v}$$

2. преобразование поворота $\varphi = r_\theta$:

$$r_\theta(P + \vec{v}) = P + R_\theta(\vec{v}).$$

Nota bene Векторизация пространств \mathbb{A}_k и \mathbb{B}_k относительно точек O и O' соответственно дает:

$$\sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + \vec{b}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{O'\sigma(O)} \in \mathbb{V}_B(k),$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ - радиус вектор точки $P \in \mathbb{A}_k$.



Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\sigma(P) = \sigma(O + \overrightarrow{OP}) = \sigma(O) + d\sigma(\overrightarrow{OP}),$$

$$\sigma(\overrightarrow{OP}) \triangleq \overrightarrow{O'\sigma(P)} = \overrightarrow{O'\sigma(O)} + d\sigma(\overrightarrow{OP}) \Rightarrow \sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + \vec{b}.$$



Лемма 3.2. Пусть $\sigma : \mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{B}_k$ - аффинное отображение, тогда

$$\sigma \left(\sum_{i=0}^m \alpha^i P_i \right) = \sum_{i=0}^m \alpha^i \sigma(P_i),$$

для любой барицентрической линейной комбинации системы точек $\{P_i\}_{i=0}^m$.

►

Векторизация пространства \mathbb{A}_k дает следующую цепочку равенств:

$$\sigma \left(\sum_{i=0}^m \alpha^i \overrightarrow{OP_i} \right) = d\sigma \left(\sum_{i=0}^m \alpha^i \overrightarrow{OP_i} \right) + \vec{b} = \sum_{i=0}^m \alpha^i (d\sigma(\overrightarrow{OP_i}) + b) = \sum_{i=0}^m \alpha^i \sigma(\overrightarrow{OP_i}).$$

◄

3.2 Изоморфизм аффинных пространств

Лемма 3.3. Аффинное отображение $\sigma : \mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{B}_k$ биективно тогда и только тогда, когда его дифференциал биективен.

►

Выберем начала отсчета O и O' в \mathbb{A}_k и \mathbb{B}_k так, чтобы $\sigma(O) = O'$. Тогда отображение σ в векторизованной форме будет совпадать со своим дифференциалом $d\sigma$, откуда следует доказательство утверждения.

◄

Лемма 3.4. Пусть $\varphi : \mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{B}_k$ - биективное аффинное отображение. Тогда σ^{-1} является также аффинным отображением, причем $d(\sigma^{-1}) = (d\sigma)^{-1}$.

►

Пусть отображение $\sigma : \mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{B}_k$ задается парой $(d\sigma, \vec{b})$ в том смысле, что

$$\sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + \vec{b}.$$

Пусть отображение $\chi : \mathbb{B}_k \rightarrow \mathbb{A}_k$ также задается парой $(d\chi, \vec{c})$, тогда

$$\chi \circ \sigma \leftrightarrow (d\chi, \vec{c}) \circ (d\sigma, \vec{b}) = (d\chi \circ d\sigma, d\chi(\vec{b}) + \vec{c}),$$

Откуда сразу получаем:

$$\sigma^{-1} \leftrightarrow (d\sigma^{-1}, -d\sigma^{-1}(\vec{b})),$$

иными словами

$$\sigma^{-1}(\vec{r}) = d\sigma^{-1}(\vec{r}) - d\sigma^{-1}(\vec{b}).$$

◄

|| **Изоморфизмом аффинных пространств** называется биективное аффинное отображение.

Лемма 3.5. Аффинные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

►

При аффинном отображении $\sigma : \mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{B}_k$ всякая плоскость $\mathbb{P}_k = P_0 + \mathbb{U}(k)$ пространства \mathbb{A}_k переходит в плоскость $\sigma(\mathbb{P}_k) = \sigma(P_0) + d\sigma(\mathbb{U})$ пространства \mathbb{B}_k . Если σ - биективно, то $\dim \mathbb{P}_k = \dim \sigma(\mathbb{P}_k)$.

◀

Лемма 3.6. При изоморфизме $\sigma : \mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{B}_k$ системы точек $\{P_i\}_{i=0}^m$ и $\{\sigma(P_i)\}_{i=0}^m$ аффинно зависимы или аффинно независимы одновременно.

►

Тривиально проверяется рассмотрением соответствующих наборов радиус-векторов.

◀

3.3 Аффинно-линейные функции

Аффинно-линейной функцией на аффинном пространстве \mathbb{A}_k называется отображение $f : \mathbb{A}_k \rightarrow k$, обладающее свойством:

$$f(P + \vec{v}) = f(P) + \alpha(\vec{v}), \quad P \in \mathbb{A}_k, \quad \vec{v} \in \mathbb{V}(k).$$

Nota bene В векторизованной форме с началом в точке $O \in \mathbb{A}_k$, аффинно-линейная функция f записывается в виде:

$$f(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) + b, \quad b \in k, \quad b = f(O).$$

или в координатах:

$$f(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) = \sum_{i=1}^n a_i \xi^i + b.$$

Nota bene Многообразия уровня $f(P) = c$ аффинно линейной функции представляют собой параллельные гиперплоскости с направляющим подпространством, задаваемым уравнением $df(\vec{v}) = 0$.

Лемма 3.7. Барицентрические координаты - это аффинно-линейные функции.

►

Пусть $\{\xi^i\}_{i=0}^n$ - барицентрические координаты относительно системы точек $\{P_i\}_{i=0}^n$. Возьмем точку P_0 за начало отсчета и векторизуем пространство \mathcal{A} . Тогда $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ - будут координатами относительно базиса $\{\vec{P_0 P_i}\}_{i=1}^n$. Следовательно, $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ - аффинно-линейные функции. Так как $\xi^0 = 1 - \sum_{i=1}^n \xi^i$, то ξ^0 - также аффинно-линейная функция. ◀