α

Лекция 1

Линейная зависимость векторов

Содержание лекции:
В данной лекции мы введем и обсудим аксиомы линейного пространства. Главным объектом нашего исследования будут линейные комбинации векторов, рассмотрение которых приводит к понятиям линейной зависимости или независимости набора векторов, а также полноты заданного набора. Эти понятия затем лягут в основу определения одного из главных понятий линейной алгебры - размерности линейного пространства.

Ключевые слова:
Аксомы линейного пространства, набор векторов, набор коэффициентов, тривиальный набор, линейная комбинация векторов, линейнозависимый набор, линейнонезависимый набор, полный набор.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Аксиомы линейного пространства

> **Линейным пространством** $X(\Bbbk)$ над полем $\Bbbk$ называется абелева группа X, снабженная алгебраической структурой $\Bbbk$-модуля:

Nota bene В связи с тем, что линейные пространства играют ключевую роль во многих практических задачах, перечислим явно аксиомы согласования в этой алгебраической структуре. Положим далее, что $x, y, z, \dots$ - элементы группы X, а $\alpha, \beta, \dots$ - элементы поля $\Bbbk$.

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in X, \quad \alpha, \beta \in K;$
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in X, \quad \alpha \in K;$
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x = \beta(\alpha x), \quad \forall x \in X, \quad \alpha, \beta \in K;$
4. $\exists 1 \in K : 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in X;$

Nota bene Элементы линейного пространства $X(\Bbbk)$ принято называть *векторами.*

Пример 1.1.

1. $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) = \left\{x = \left(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n\right)^T, \xi^i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\}$ - линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$;
2. $\Bbbk[x]_n = \{p \in \Bbbk[x] : \quad \deg p \le n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ - линейное пространство над $\mathbb{R}$;
3. $\mathrm{Mat}_{\Bbbk}(m, n) = \{A \in \Bbbk^m_n : \quad a_{i,j} \in \Bbbk\}$ - линейное пространство $m \times n$ матриц.

Лемма 1.1. *Имеет место:* $\quad 0 \cdot x = 0_X.$

►

$$0 \cdot x = 0_X \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x + y = y \quad \forall y \in X(\Bbbk).$$
$$0 \cdot x + y = 0 \cdot x + 0_X + y = 0 \cdot x + x + (-x) + y = 0 \cdot x + 1 \cdot x + (-x) + y =$$
$$= (0 + 1) \cdot x + (-x) + y = 1 \cdot x + (-x) + y = x + (-x) + y = 0_X + y = y.$$

◄

Лемма 1.2. *Имеет место:* $\quad (-1) \cdot x = -x.$

►

$$-1 \cdot x = -1 \cdot x + 0_X = -1 \cdot x + x + (-x) = (-1 + 1)x + (-x) =$$
$$= 0 \cdot x + (-x) = 0_X + (-x) = -x.$$

◄

Лемма 1.3. *Имеет место:* $\forall \alpha \in \Bbbk, \quad \alpha \cdot 0_X = 0_X.$

►

$$\alpha \cdot 0_X = 0_X \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot 0_X + y = y \quad \forall y \in X.$$

$$y = 0_X + y = x + (-x) + y = 1 \cdot x + (-x) + y = (\alpha + (-\alpha) + 1) \cdot x + (-x) + y =$$
$$\alpha x + (-\alpha)x + 1 \cdot x + (-x) + y = \alpha x + (-1)\alpha x + x + (-x) + y = \alpha(x + (-1)x) + 0_X + y =$$
$$= \alpha \cdot (x + (-x)) + y = \alpha \cdot 0_X + y.$$

◄

1.2 Линейная зависимость векторов

Набором $\{x_i\}_{i \in I}$ элементов некоторого множества M будем называть конечную и упорядоченную совокупность его элементов с учетом их кратностей.

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n \in X(\Bbbk)$ - набор векторов линейного пространства $X(\Bbbk)$, и $\{\alpha^j\}_{j=1}^n \in \Bbbk$ - набор коэффициентов из поля $\Bbbk$. Конструкция вида

$$v = x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n$$

называется **линейной комбинацией** векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ с коэффициентами $\{\alpha^j\}_{j=1}^n$.

Тривиальным набором коэффициентов договоримся называть набор, все элементы которого равны нулю.

Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **линейнозависимым** (ЛЗ), если существует *нетривиальный* набор коэффициентов $\{\alpha^j\}_{j=1}^n$, такой что

$$x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n = 0.$$

Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **линейнонезависимым** (ЛНЗ), если

$$x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n = 0.$$

имеет место только тогда, когда набор $\{\alpha^j\}_{j=1}^n$ *тривиальный*.

Пример 1.2. Пусть $X(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n = \left\{ x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T, \xi^i \in \mathbb{R} \right\}$, тогда

$$x_1\alpha^1 + x_2\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^n = 0.$$

записывается в виде

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \xi_2^1 \\ \xi_2^2 \\ \vdots \\ \xi_2^n \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} \xi_n^1 \\ \xi_n^2 \\ \vdots \\ \xi_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

или в форме системы

$$\begin{cases} \xi_1^1\alpha^1 + \xi_2^1\alpha^2 + \ldots + \xi_n^1\alpha^n = 0, \\ \xi_1^2\alpha^1 + \xi_2^2\alpha^2 + \ldots + \xi_n^2\alpha^n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \xi_1^n\alpha^1 + \xi_2^n\alpha^2 + \ldots + \xi_n^n\alpha^n = 0. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить, что система векторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

является линейнонезависимой, что следует из

$$\begin{cases} 1 \cdot \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^2 + \ldots + 0 \cdot \alpha^n = 0, \\ 0 \cdot \alpha^1 + 1 \cdot \alpha^2 + \ldots + 0 \cdot \alpha^n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 0 \cdot \alpha^1 + 0 \cdot \alpha^2 + \ldots + 1 \cdot \alpha^n = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha^1 = 0, \\ \alpha^2 = 0, \\ \vdots \\ \alpha^n = 0. \end{cases}$$

Пример 1.3. Пусть $X = \Bbbk[x]_n$, рассмотрим набор $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ и линейную комбинацию

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0(x).$$

В точке $t = 0$ рассмотрим производные до n-го порядка включительно:

$$0 : \quad \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 0.$$

$$1 : \quad 0 + \alpha_1 \cdot 1 + 2\alpha_2 \cdot 0 + \ldots + n\alpha_n \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0.$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\text{n} : \quad n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1\alpha_n \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 0.$$

Отсюда следует, что набор $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ линейнонезависимый.

Пример 1.4. Положим $X = \mathrm{Mat}_\Bbbk(m, n)$ и рассмотрим набор $\{e_{ij}\}$ матриц, у каждой из которых единственный ненулевой элемент имеет индексы (i, j) ($e_{i,j}$ называют матричной единицей). Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha^{ij} e_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{ij} = 0.$$

Лемма 1.4. *Любой набор, содержащий нулевой вектор, является ЛЗ.*

Лемма 1.5. *Набор, содержащий ЛЗ поднабор, является ЛЗ.*

Лемма 1.6. *Любой поднабор ЛНЗ набора также является ЛНЗ.*

Лемма 1.7. *Система векторов линейнозависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов набора выражается линейной комбинацией остальных.*

$$\{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in 1 \ldots n: \quad x_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i \beta^i.$$

►
$\Rightarrow$ Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ - линейнозависимый набор, тогда

$$\exists k \in 1 \ldots n: \quad \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i = 0, \quad \alpha^k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = -\sum_{i=1, i \neq k}^n x_i \frac{\alpha^i}{\alpha^k}.$$

$\Leftarrow$ Пусть набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ такой, что

$$\exists k \in 1 \ldots n: \quad x_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i \beta^i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i \beta^i - 1 \cdot x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ}.$$

◄

1.3 Полный набор

Набор векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **полным** в линейном пространстве $X(\Bbbk)$, если выполняется следующее условие:

$$\forall x \in X \quad \exists\, \alpha^1 \ldots \alpha^n \in \Bbbk: \quad x = \sum_{i=1}^n x_i \alpha^i.$$

Пример 1.5. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, тогда введенный выше набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ является полным:

$$x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xi^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xi^2 + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \xi^n = \sum_{i=1}^n x_i \xi^i.$$

Пример 1.6. Пусть $X = \Bbbk[x]_n$, тогда набор $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ является полным:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k.$$

Пример 1.7. Пусть $X = \mathrm{Mat}_{\Bbbk}(m, n)$, тогда набор $\{e_{ij}\}$ является полным:

$$A = \alpha^{11} e_{11} + \alpha^{12} e_{12} + \ldots + \alpha^{mn} e_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij} e_{ij}.$$