δ

Лекция 4

Изоморфизм линейных пространств.

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы обсудим важную концепцию изоморфизма линейных пространств. Изоморфные пространства как алгебраические структуры неотличимы. Мы покажем, что исследование структуры этих пространств можно без потери общности ограничить только некоторыми представителями, а именно координатными пространствами.

Ключевые слова:
Биекция, линейность, изоморфизм, изоморфные пространства, изоморфизм и линейная зависимость, классы изоморфных пространств.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

4.1 Определение изоморфизма

Пусть $X(\mathbb{k})$ и $Y(\mathbb{k})$ - линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{k}$.

Nota bene Напомним что отображение $\sigma : X \to Y$ между *множествами* X и Y называется **биекцией**, если существует отображение $\psi : Y \to X$, такое что

$$\forall x \in X \quad \psi\left(\sigma(x)\right) = x, \quad \forall y \in Y \quad \sigma\left(\psi(y)\right) = y,$$

то есть

$$\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_X, \quad \sigma \circ \psi = \mathrm{id}_Y\,.$$

Лемма 4.1. *Биекция является взаимно-однозначным отображением.*

Отображение $\sigma : X \to Y$ линейного пространства $X(\mathbb{k})$ в линейное пространство $Y(\mathbb{k})$ называется **линейным**, если

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \sigma(x_1 + x_2) = \sigma(x_1) + \sigma(x_2),$$
$$\forall x \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{k} \quad \sigma(\alpha x) = \alpha\sigma(x).$$

Nota bene Если $\sigma : X(\mathbb{k}) \to Y(\mathbb{k})$ - линейно, тогда

$$\sigma(0_X) = 0_Y$$

Отображение $\sigma : X(\mathbb{k}) \to Y(\mathbb{k})$ называется **изоморфизмом** линейных пространств $X(\mathbb{k})$ и $Y(\mathbb{k})$, если σ биективно и линейно.

Пример 4.1. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис $X(\mathbb{k})$, тогда отображение

$$\sigma : \quad X(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}^n,$$

сопоставляющее каждому вектору $x \in X(\mathbb{k})$ набор его координат в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$, является изоморфизмом.

Лемма 4.2. *Отображение σ^{-1}, обратное изоморфизму σ является изоморфизмом.*

►

По определению, σ^{-1} является биекцией. Таким образом, необходимо доказать только линейность. Пусть $y_1, y_2 \in Y(\mathbb{k})$, тогда

$$\sigma^{-1}(y_1), \sigma^{-1}(y_2) \in X(\mathbb{k}).$$

Из линейности σ следует

$$\sigma\left(\sigma^{-1}(y_1) + \sigma^{-1}(y_2)\right) = \sigma\left(\sigma^{-1}(y_1)\right) + \sigma\left(\sigma^{-1}(y_2)\right) = y_1 + y_2.$$

Применим к обеим частям σ^{-1} и получим

$$\sigma^{-1}(y_1 + y_2) = \sigma^{-1}(y_1) + \sigma^{-1}(y_2).$$

Пусть теперь $y \in Y$, тогда

$$\sigma\left(\alpha\sigma^{-1}(y)\right) = \alpha\sigma\left(\sigma^{-1}(y)\right) = \alpha y \quad \Rightarrow \quad \sigma^{-1}(\alpha y) = \alpha\sigma^{-1}(y).$$

◄

4.2 Изоморфизм и линейная зависимость

Лемма 4.3. *Пусть $\sigma : X(\Bbbk) \to Y(\Bbbk)$ - линейное отображение и $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор в $X(\Bbbk)$, тогда $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор в $Y(\Bbbk)$.*

▶

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор в $X(\Bbbk)$, тогда

$$\exists \left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^m \in \Bbbk : \quad \sum_{i=1}^n x_i \alpha^i = 0_X.$$

После отображения σ будем иметь:

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha^i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i)\alpha^i = 0_Y.$$

Так как набор $\{\alpha^i\}_{i=1}^m$ нетривиален, то набор $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$ - линейно зависимый.

◀

Nota bene Образ ЛНЗ набора $\{x_i\}_{i=1}^m$ в этом случае не обязан быть ЛНЗ.

Лемма 4.4. *При изоморфизме ЛНЗ набор векторов отображается в ЛНЗ набор.*

▶

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^m$ - ЛНЗ набор, а $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$ - ЛЗ, но тогда $\{\sigma^{-1}\left(\sigma(x_i)\right)\}_{i=1}^m$ - ЛЗ набор.

◀

Лемма 4.5. *При изоморфизме полный набор отображается в полный набор.*

▶

Покажем, что из полноты набора $\{x_i\}_{i=1}^m$ следует полнота набора $\{\sigma(x_i)\}_{i=1}^m$. Действительно для любого $y \in Y(\Bbbk)$ имеет место

$$\exists \ \left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n : \quad \sigma^{-1}(y) = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \quad \Rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^n \sigma(e_i)\alpha^i,$$

◀

Nota bene Таким образом, при изоморфизме базис пространства $X(\Bbbk)$ отображается в базис пространства $Y(\Bbbk)$. Ниже мы покажем, что данное условие является также достаточным для существования изоморфизма между данными пространствами.

4.3 Изоморфные пространства

> Линейные пространства $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$ называются **изоморфными**, если между ними существует изоморфизм $\sigma : X(\Bbbk) \to Y(\Bbbk)$.

Nota bene Тот факт, что пространство $X(\Bbbk)$ изоморфно пространству $Y(\Bbbk)$ будем обозначать $X(\Bbbk) \simeq Y(\Bbbk)$.

Лемма 4.6. *Изоморфность линейных пространств - отношение эквивалентности.*
▶
Докажем необходимые свойства:

1. рефлексивность $(X(\Bbbk) \simeq X(\Bbbk))$:
   тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ является изоморфизмом;

2. симметричность $(X(\Bbbk) \simeq Y(\Bbbk) \Rightarrow Y(\Bbbk) \simeq X(\Bbbk))$
   было доказано, что обратное отображение также изоморфизм;

3. транзитивность $(X(\Bbbk) \simeq Y(\Bbbk), \quad Y(\Bbbk) \simeq Z(\Bbbk) \quad \Rightarrow \quad X(\Bbbk) \simeq Z(\Bbbk))$
   пусть $\sigma : X(\Bbbk) \to Y(\Bbbk)$ и $\psi : Y(\Bbbk) \to Z(\Bbbk)$ соответствующие изоморфизмы, тогда $\psi \circ \sigma$ - изморфизм и $X(\Bbbk) \simeq Z(\Bbbk)$.

◀

Nota bene Полученное отношение эквивалентности порождает классы эквивалентности изоморфных пространств.

Лемма 4.7. *Чтобы пространства $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$ были изоморфны необходимо и достаточно чтобы их размерности совпадали:*

$$X(\Bbbk) \simeq Y(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk} Y.$$

▶
$\Rightarrow$ Пусть $X(\Bbbk) \simeq Y(\Bbbk)$, тогда образом базиса пространства $X(\Bbbk)$ будет некоторый базис пространства $Y(\Bbbk)$. В силу биективности изоморфизма, количества векторов в соответствующих наборах будут совпадать.
$\Leftarrow$ Если $\dim_{\Bbbk} X = \dim_{\Bbbk} Y$, тогда $X \simeq \Bbbk^n$ и $Y(\Bbbk) \simeq \Bbbk^n$. В силу симметричности и транзитивности мы получим $X(\Bbbk) \simeq Y(\Bbbk)$.
◀

Nota bene Таким образом, каждый класс эквивалентности изоморфных пространств содержит линейные пространства одинаковой размерности. Типичными представителями данных классов являются "арифметические" пространства столбцов:

$$[n = 1] \leftrightarrow \Bbbk^1, \quad [n = 2] \leftrightarrow \Bbbk^2, \quad \ldots, \quad [n = m] \leftrightarrow \Bbbk^m$$

Nota bene Выберем базис в каждом из пространств $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$:

$$\{e_j\}_{j=1}^n \in X(\Bbbk), \quad \{f_j\}_{j=1}^n \in Y(\Bbbk), \quad e_j \leftrightarrow f_j \quad \forall j.$$

Изоморфизм между $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$ устанавливается следующим соответствием:

$$x = \sum_{i=1}^n e_i \alpha^i \quad \leftrightarrow \quad y = \sum_{i=1}^n f_i \alpha^i.$$