Лекция 8

Инвариантные подпространства

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы начнем исследовать структуру инвариантных подпространств линейного оператора. Будут сформулированы основные понятия, связанные с задачей разложения на инвариантные подпространства, а также приведена общая формулировка спектральной теоремы.

Ключевые слова:
Инвариантное подпространство, ультраинвариантное подпространство, компонента оператора, ультрапроектор, прямая сумма компонент, спектральная компонента, нильпотентный оператор, спектральная теорема, спектр.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

8.1 Ультраинвариантность

Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ - эндоморфизм линейного пространства $X(\Bbbk)$.

Подпространство $L(\Bbbk) \leq X(\Bbbk)$ линейного пространства $X(\Bbbk)$ называется **инвариантным подпространством** линейного оператора φ, если

$$\forall x \in L \quad \varphi x \in L \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(L) \subset L. \tag{8.1}$$

Пример 8.1.

1. $\{0\}$ и X - инвариантные подпространства;
2. $\mathcal{I}: \quad \mathcal{I}x = x, \quad \forall x \in X$ - любое подпространство является инвариантным;
3. $\theta: \quad \theta x = 0, \quad \forall x \in X$ - любое подпространство является инвариантным;
4. Пусть $X = L_1 \oplus L_2$, тогда L_1 и L_2 - инвариантные подпространства для соответствующих проекторов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$.

Инвариантное подпространство L линейного оператора φ называется **ультраинвариантным** подпространством, если существует его дополнение L', которое тоже является инвариантным подпространством.

Nota bene В силу симметричности определения, дополнение ультраинвариантного подпространства является также ультраинвариантным подпространством.

Оператор φ_L называется **компонентой** оператора φ в ультраинвариантном подпространстве L, если $\varphi_L \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(L)$ и

$$\varphi_L(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in L.$$

Ультрапроектор - это проектор на ультраинвариантное подпространство.

Лемма 8.1. *Пусть $X = L_1 \oplus L_2$ - прямая сумма ультраинвариантных подпространств оператора φ, тогда*

$$\varphi = \varphi\mathcal{P}_1 + \varphi\mathcal{P}_2 \triangleq \varphi_1 \oplus \varphi_2, \quad \varphi_i \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(L_i).$$

►
Прямой проверкой убеждаемся:

$$\forall x \in X \quad \varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi\mathcal{P}_1(x) + \varphi\mathcal{P}_2(x) = (\varphi\mathcal{P}_1 + \varphi\mathcal{P}_2)(x).$$

◄

В условиях предыдущей леммы говорят, что оператор φ **представим в виде прямой суммы своих компонент**:

$$\varphi(x) = (\varphi_1 \oplus \varphi_2)(x_1 + x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2).$$

8.2 Спектральная теорема

Лемма 8.2. *Пусть $p_\varphi(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$, причем $(p_1, p_2) = 1$, так что*

$$X = L_1 \oplus L_2, \quad L_i = \ker p_i(\varphi), \quad i = 1, 2.$$

Тогда L_1 и L_2 - нетривиальные инвариантные подпространства оператора φ.
▶
Пусть $x \in L_1$, тогда $p_1(\varphi)x = 0$, откуда сразу получаем

$$p_1(\varphi)(\varphi x) = \varphi(p_1(\varphi)x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in \ker p_1\varphi.$$

Для $\ker p_2(\varphi)$ аналогично. Пусть теперь $\ker p_1(\varphi) = X$, тогда

$$\ker p_1(\varphi) = X \quad \Rightarrow \quad \forall x \in X \quad p_1(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1(\varphi) = \theta,$$

и значит $p_1(\varphi)$ - аннулирующий полином, но $\deg p_1 < \deg p_\varphi$, противоречие.
И, наконец, пусть $\ker p_1(\varphi) = \{0\}$, тогда

$$\dim_{\Bbbk} \ker p_2(\varphi) = \dim_k X - \dim_k \ker p_1(\varphi) = \dim_{\Bbbk} X \quad \Rightarrow \quad \ker p_2(\varphi) \simeq X,$$

и приходим к уже рассмотренному случаю.
◀

Лемма 8.3. *Подпространства $\ker p_1(\varphi)$ и $\ker p_2(\varphi)$ - ультраинвариантные.*
▶
Оба подпространства $\ker p_1(\varphi)$ и $\ker p_2(\varphi)$ являются инвариантными.
◀

Лемма 8.4. *Пусть $p_\varphi(t) = p_1(t)p_2(t)$ разложение минимального аннулирующего полинома оператора φ на взаимно простые множители и пусть φ_i - компонента φ в соответствующием подпространстве L_i, тогда $p_i(t)$ - минимальный аннулирующий полином для φ_i.*
▶
Действительно

$$\forall x \in L_i \quad p_i(\varphi_i)x = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i(\varphi) = \theta,$$

и таким образом $p_i(t)$ - аннулирующий полином для φ_i. Докажем его минимальность.
Пусть $\tilde{p}_i$ - минимальный аннулирующий полином для φ_i, тогда

$$p_i \mathrel{\vdots} \tilde{p}_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g: \quad p_i(t) = g(t)\tilde{p}_i(t),$$

но тогда $\tilde{p}_1(t) \cdot \tilde{p}_2(t)$ - аннулирующий полином оператора φ, степень которого меньше степени $p_\varphi(t)$. Противоречие.
◀

Теорема 8.1. *(спектральная теорема) Пусть $p_\varphi(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_m(t)$ - минимальный полином оператора φ, разложенный на взаимно простые сомножтели. Тогда*

- $\bigoplus_{i=1}^m L_i, \quad L_i = \ker p_i(\varphi)$;
- $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i \mathcal{P}_i$,

где φ_i - компонента оператора φ в ультраинвариантном подпространстве L_i и $\mathcal{P}_i$ - проектор подпространство L_i.

Nota bene Пусть $p_\varphi(t)$ представим в следущем виде:

$$p_\varphi(t) = \prod_{i=1}^m p_i(t), \quad p_i(t) = (t - t_i)^{r_i},$$

тогда сразу получаем:

$$L_i = \ker p_i(\varphi) = \ker(\varphi_i - t_i \mathcal{I}_i)^{r_i}$$

> Подпространства L_i указанного вида называются **корневыми** подпространствами X относительно оператора φ. При этом L_i называется подпространством, *отвечающим корню* t_i.

Nota bene Напомним, что оператор τ называется **нильпотентным** порядка r, если

$$\tau^r = \theta, \quad \tau^{r-1} \neq \theta.$$

Лемма 8.5. *Определяемый следующим образом оператор $\tau_i : L_i \to L_i$, является нильпотентным:*

$$\tau_i = \varphi_i - t_i \mathcal{I}_i$$

►
Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\forall x \in L_i \quad (\varphi_i - t_i \mathcal{I}_i)^{r_i} x = \tau_i^{r_i} x = 0.$$

◄

Nota bene Имея определение для оператора τ_i, спектральную теорему можно переписать следующим образом:

$$\varphi = \sum_{i=1}^m (t_i \mathcal{I}_i + \tau_i)\mathcal{P}_i, \quad \tau_i^{r_i} = \theta.$$

> В приведенной выше формулировке спектральной теоремы...
> t_i называется **элементарной порцией спектра**;
> $\mathcal{P}_i$ называется **спектральным ультрапроектором**;
> L_i называется **спектральным ультраинвариантным подпространством**;
> φ_i называется **спектральной компонентой** линейного оператора φ.