Алгебра. КТ. Осенний семестр

III. Гомоморфизмы групп. Нормальные подгруппы. Факторгруппы

1. Приведите примеры плоских фигур, группы симметрий которых изоморфны:

   а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_3$; в) S_3; г) V_4.

2. Докажите, что группы $\langle \mathscr{P}(M), \cap \rangle$ и $\langle \mathscr{P}(M), \cup \rangle$ изоморфны.

3. Изоморфны ли группы:

   а) $\mathbb{Z}_4$ и D_4;

   б) $\mathbb{Z}_4$ и V_4;

   в) $\mathbb{Z}_4$ и R_4;

   г) $\mathbb{Z}_{24}$ и S_4;

   д) $\langle 3\mathbb{Z}, + \rangle$ и $\langle 5\mathbb{Z}, + \rangle$;

   е) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$?

4. Является ли отображение φ гомоморфизмом групп? В случае положительного ответа найдите его ядро и образ:

   а) $\varphi\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$, $\varphi(x) = |x|$;

   б) $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{Q}^*$, $\varphi(x) = -|x|$;

   в) $\varphi\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) = x^2$;

   г) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_8$, $\varphi(x)$ равно остатку от деления числа $2x$ на 8.

5. Докажите, что в абелевой группе любая подгруппа является нормальной.

6. Верно ли, что

   а) $A_n \trianglelefteq S_n$;

   б) $S_4^1 \trianglelefteq S_4$ (S_4^1 — все перестановки оставляющие на месте 1)?

7. Найдите левое и правое разложения:

   а) группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $5\mathbb{Z}$;

   б) группы D_3 по подгруппе R_3;

   в) группы S_3 по подгруппе $\{\varepsilon, (12)\}$;

   г) группы D_4 по подгруппе отражений относительно центра;

   д) группы D_4 по подгруппе отражений относительно одной из диагоналей;

8. Докажите, что подгруппа является нормальной тогда и только тогда, когда левое и правое разложения группы по этой подгруппе совпадают.

9. Докажите, что если порядок подгруппы в два раза меньше порядка группы, то эта подгруппа является нормальной.

10. Найдите:

    а) $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$;

    б) $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_3$;

    в) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

    г) факторгруппы по ядрам гомоморфизмов задачи 4.

11. Найдите все нормальные подгруппы и соответствующие факторгруппы группы симметрий правильного треугольника.

12. Среди функций $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ рассмотрим функции вида $y = kx + b$, которые образуют группу относительно композиции (проверьте это!). Докажите, что функции

    а) вида $y = x + b$;

    б) вида $y = kx$ $(k \neq 0)$

    образуют нормальные подгруппы и найдите соответствующие факторгруппы.

13. Пусть R — группа всех вращений плоскости вокруг центра правильного n-угольника. Докажите, что $R_n \trianglelefteq R$ и найдите R/R_n.

14.* Может ли факторгруппа иметь неизоморфные нормальные подгруппы, факторгруппы по которым изоморфны?

15.* Является ли отношение «быть нормальной подгруппой» транзитивным?