Лекция 12

Алгебраические кривые. Эллипс

Содержание лекции:
Мы приступаем к изучению кривых сторого порядка - геометрических мест точек на плоскости, которые обладают рядом интересных свойств. В это лекции мы обсудим понятие алгебрической линии и приведем пример аналитического исследования эллипса.

Ключевые слова:
Уравнение линии, алгебраическая линия, порядок алгебраической линии, эллипс, каноническая система координат, каноническое уравнение эллипса, рациональные уравнения эллипса, полярное уравнение эллипса, касательная к эллипсу, директриса эллипса.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

12.1 Уравнения линий на плоскости

Nota bene Строго говоря, начать следовало бы с определения линии, однако автору данного конспекта не известно "хорошего" определения, не содержащего непонятных на данном этапе обучения слов, а "плохое" определение хуже, чем интуитивное представление о непрерывной линии, которым мы и будем пользоваться.

Уравнением линии мы будем называть произвольное соотношение между координатами x и y, выполняющееся тогда и только тогда, когда точка $M(x, y)$ с этими координатами принадлежит линии.

Nota bene Способы задания линии:

1. Уравнение, разрешенное относительно одной из координат:
$$y = f(x), \quad x = g(y).$$
2. Неявное уравнение:
$$F(x, y) = 0$$
3. Уравнение, заданное параметрически:
$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Nota bene Контрпримеры: ГМТ, не являющиеся линиями

1. единственная точка: $x^2 + y^2 = 0$;
2. пустое множество: $x^2 + y^2 = -1$;
3. пара линий: $xy = 0$.

Функция $F(x, y)$ называется **целым алгебраическим полиномом**, если:

$$F(x, y) = \alpha_1 x^{m_1} y^{n_1} + \alpha_2 x^{m_2} y^{n_2} + \ldots + \alpha_2 x^{m_k} y^{n_k}, \quad m_i, n_i \in \{\mathbb{N}, 0\}.$$

Порядком алгебраического полинома $F(x, y)$ называется число:

$$p = \deg F = \max_{i=1\ldots k} \{m_i + n_i\}.$$

Линия называется **алгебраической**, если ее уравнением является целый алгебраический полином, при этом **порядком линии** называется степень соответствующего алгебраического полинома.

Теорема 12.1. *Свойство линии быть алгебраической не зависит от способа выбора прямолинейной системы координат и порядок линии во всех системах координат сохраняется.*

►

Доказательство данного утверждения будет предоставлено очень скоро.

◄

12.2 Определения

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек плоскости есть величина постоянная.

Nota bene Обозначим соответствующие точки через F_1 и F_2, тогда условие, сформулированное в определении для произвольно точки M эллипса можно записать следующим образом:

$$|F_1M| + |F_2M| = const.$$

Вводя краткие обозначения

$$|F_1M| = r_1, \quad |F_2M| = r_2, \quad |F_1F_2| = 2c, \quad const = 2a, \quad a > 0.$$

получаем

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad c < a$$

Канонической системой координат для эллипса называется декартова прямоугольная система координат, центр которой является серединой отрезка, заключеного между точками F_1 и F_2, которые лежат на оси Ox.

Лемма 12.1. *Уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{12.1}$$

и называется каноническим уравнением эллипса.

▶
Подставим в определение эллипса выражения для r_1 и r_2:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Будем иметь:

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a \\
(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + (c-x)^2 + y^2 \\
4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \\
a^2 - xc = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \\
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1
\end{gathered}$$

Заметим, что $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, откуда получаем искомое уравнение. ◀

Лемма 12.2. *Всякое уравнение вида* (12.1) *определяет эллипс.*

▶

Покажем, что из канонического уравнения эллипса следуют геометрические соотношения, лежащие в основе его определения. Имеем

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 \pm 2xc + a^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c}{a}x \pm a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x \pm a\right|,$$

откуда получаем:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad \varepsilon = \frac{c}{a},$$

и тогда

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

◀

Рациональными уравнениями эллипса называются уравнения вида:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad \varepsilon = \frac{c}{a},$$

Nota bene Из определения следует, что эллипс - ограниченная кривая:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x}{a}\right| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq a, \quad x = \pm a \quad y = 0,$$
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y}{b}\right| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |y| \leq b, \quad y = \pm b \quad x = 0,$$

Nota bene Симметрии эллипса: осевая и центральная

$$M(x,y) \in E \quad \Rightarrow \quad M_1(x,-y) \in E, \quad M_2(-x,y) \in E, \quad M_3(-x,-y) \in E.$$

Nota bene Точки пересечения эллипса с осями координат:

$$A_1(-a,0), \quad A_2(a,0), \quad B_1(0,-b), \quad B_2(0,b).$$

Введем ряд определений:

- точки F_1 и F_2 называются **фокусами** эллипса;
- расстояние $c = |F_1F_2|/2$ называется **фокусным расстоянием**;
- точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются **вершинами** эллипса;
- отрезок A_1A_2 (B_1B_2) называется **большой (малой) осью** эллипса;
- величина $2a$ ($2b$) называется **длиной большой (малой) оси**;
- величина $\varepsilon = c/a$ называется **эксцентриситетом** эллипса;

Nota bene Эксцентриситет ε:

$$a > c \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = c/a \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \in [0, 1).$$

Частные случаи:

1. $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = a = R$ - окружность.
2. $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad |F_1F_2| = 2a \quad \Rightarrow \quad F_1F_2$ - отрезок

Полярным уравнением эллипса называется уравнение вида

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = a - \varepsilon c,$$

где (ρ, φ) - полярные координаты на плоскости, F_1 - полюс и Ox - полярная ось.

Лемма 12.3. *Полярное уравнение эллипса задает эллипс.*

▶

Из определения следует, что $r_1 = \rho$. С другой стороны:

$$r_2^2 = (2a - r_1)^2 = 4a^2 - 4ar_1 + r_1^2,$$
$$r_2^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4r_1 c \cos \varphi,$$

откуда после исключения r_2 находим:

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

◀

Параметрическими уравнениями эллипса называются уравнения вида

$$x(t) = a \cdot \cos t, \quad y(t) = b \cdot \sin t$$

Лемма 12.4. *Параметрические уравнения эллипса задают эллипс.*

▶

Имеет место следующее тождество:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

◀

12.3 Специальные прямые

‖ **Касательной к эллипсу** называется прямая, имеющая с ним одну общую точку.

Лемма 12.5. *Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

►
Будем искать уравнение касательной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение эллипса будем иметь:

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + \beta t)^2}{b^2} = 1.$$

Точка $M(x_0, y_0)$ является общей точкой искомой прямой и эллипса, поэтому:

$$\frac{2x_0\alpha t + \alpha^2 t^2}{a^2} + \frac{2y_0\beta t + \beta^2 t^2}{b^2} = 0, \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Далее будем иметь

$$t\left(\frac{2x_0\alpha + \alpha^2 t}{a^2} + \frac{2y_0\beta + \beta^2 t}{b^2}\right) = 0.$$

При $t = 0$ получаем точку $M(x_0, y_0)$, рассмотрим выражение, стоящее в скобках:

$$2x_0\alpha b^2 + \alpha^2 b^2 t + 2y_0\beta a^2 + \beta^2 a^2 t = 0,$$
$$t = -2\frac{x_0\alpha b^2 + y_0\beta a^2}{\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2}.$$

Так как общая точка у эллипса и искомой прямой единственная, то t из последнего выражения также должен быть равен нулю:

$$\frac{x_0\alpha b^2 + y_0\beta a^2}{\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2} = 0,$$
$$x_0\alpha b^2 + y_0\beta a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}.$$

Переписывая уравнение касательной в общем виде будем иметь

$$y - y_0 = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0) = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0),$$
$$y_0 a^2 (y - y_0) = -x_0 b^2 (x - x_0), \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

◄

> **Директрисами эллипса** называются прямые, параллельные малой оси эллипса и проходящие от нее на расстоянии a/ε.

Лемма 12.6. *Директориальное свойство: отношение расстояний от каждой точки эллипса до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно и не зависит от выбора точки:*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \tag{12.2}$$

►
Из определения директрисы следует:

$$d_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_1}{\varepsilon}, \quad d_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}\right| = \frac{r_2}{\varepsilon},$$

◄

Лемма 12.7. *Всякое геометрическое место точек, удовлетворяющее условию* (12.2) *есть эллипс.*
►
Из равенств

$$r_{1,2} = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = \varepsilon \left|x \pm \frac{a}{\varepsilon}\right|,$$

следует

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (\varepsilon x \pm a)^2,$$

и поэтому

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

◄