$\delta$

# Лекция 4

## Определитель линейного оператора

**Содержание лекции:**

В настоящей лекции мы обобщим идею тензорного произведения пространств, обсуждаемую в предыдущих лекциях. Мы определим тензорное произведение линейных операторов и распространим его на случай линейных отображений произвольных тензорных произведений пространств. Основным для нас результатом будет являться введение определителя линейного оператора и доказательство его мультипликативного свойства.

**Ключевые слова:**
Тензорное произведение операторов, матрица тензорного произведения, тензорная степень оператора, внешняя степень пространства, определитель набора векторов, внешняя степень оператора, определитель линейного оператора, мультипликативное свойство опеределителя.

**Авторы курса:**

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

**Ссылка на ресурсы:**
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

## 4.1 Тензорная степень оператора

***Nota bene*** Пусть $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$ - линейные пространства над одним полем $\Bbbk$ и

$$\dim_{\Bbbk} X = n, \quad \dim_{\Bbbk} Y = m.$$

Пусть также $\varphi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ и $\psi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(Y)$ - эндоморфизмы соответствующих пространств $X(\Bbbk)$ и $Y(\Bbbk)$.

> **Тензорным произведением** операторов $\varphi$ и $\psi$ называется отображение $\chi$, задаваемое равенством
>
> $$\chi(x \otimes y) = (\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x) \otimes \psi(y)$$

**Лемма 4.1.** *Отображение $\chi$ - линейный оператор на $X \otimes Y$.*

►
С одной стороны имеем:

$$\chi(x \otimes (y_1 + y_2)) = \chi(x \otimes y_1 + x \otimes y_2),$$

С другой стороны:

$$\chi(x \otimes (y_1 + y_2)) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1 + y_2) = \varphi(x) \otimes \psi(y_1) + \varphi(x) \otimes \psi(y_2),$$

и тогда

$$\chi(x \otimes y_1 + x \otimes y_2) = \chi(x \otimes y_1) + \chi(x \otimes y_2).$$

◄

***Nota bene*** Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис $X$ и $\{f_j\}_{j=1}^m$ - базис $Y$, тогда базис $X \otimes Y$ будут составлять элементы $\{e_i \otimes f_j\}$. Если $A_\varphi$ и $B_\psi$ - матрицы $\varphi$ и $\psi$ в соответствующих базисах, то матрица $C_\chi$ оператора $\varphi \otimes \psi$ будет иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 B_\psi & a_2^1 B_\psi & \dots a_n^1 B_\psi \\ a_1^2 B_\psi & a_2^2 B_\psi & \dots a_n^2 B_\psi \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ a_1^n B_\psi & a_2^n B_\psi & \dots a_n^n B_\psi \end{pmatrix}.$$

***Nota bene*** Введем следующее обозначение:

$$T_p(X) = \bigotimes_{i=1}^{p} X = X \otimes X \otimes \ldots \otimes X.$$

> **Тензорной степенью** оператора $\varphi$ называется отображение:
>
> $$\varphi^{\otimes m} : T_p(X) \to T_p(X), \quad \varphi^{\otimes m} = \varphi \otimes \varphi \otimes \ldots \otimes \varphi,$$
>
> определяемое на разложимых элементах $T_p(X)$, следующим образом:
>
> $$\varphi^{\otimes n}(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_p) = \varphi x_1 \otimes \varphi x_2 \otimes \ldots \otimes \varphi x_p.$$

## 4.2 Внешняя степень оператора

Векторное пространство $\Lambda_p(X)$ с кососимметрическим $p$-линейным отображением

$$X \times X \times \ldots \times X \to \Lambda_p, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_p) \to x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p,$$

называется **$p$-ой внешней степенью** пространства $X$, если векторы

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n,$$

образуют базис пространства $\Lambda_p(X)$.

***Nota bene*** Очевидно, имеет место

$$\dim_{\Bbbk} \Lambda_p(X) = C_n^p.$$

**Определителем набора векторов** $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется величина $\det[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, определяемая в некотором базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства $X$ равенством:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \det[x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

**Лемма 4.2.** *Два введенных определения* det *эквивалентны:*

$$\det\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \det[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

►
По определению, имеем:

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = \left(\xi_1^{i_1} e_{i_1}\right) \wedge \left(\xi_2^{i_2} e_{i_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\xi_n^{i_n} e_{i_n}\right) =$$
$$= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma]} \xi_1^{\sigma(1)} \xi_2^{\sigma(2)} \ldots \xi_n^{\sigma(n)} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

◄

**Внешней степенью** оператора $\varphi \in \mathrm{End}(X)$ называется отображение

$$\varphi^{\wedge p} : \Lambda_p(X) \to \Lambda_p(X), \quad \varphi^{\wedge p} = \varphi \wedge \varphi \wedge \ldots \wedge \varphi,$$

определяемое на разложимых элементах $\Lambda_p(X)$, следующим образом:

$$\varphi^{\wedge p}(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = \varphi x_1 \wedge \varphi x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$$

**Определителем линейного оператора** $\varphi$ называется величина $\det(\varphi)$, которая определяется следующим равенством:

$$\varphi^{\wedge n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n) = \det(\varphi) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

**Лемма 4.3.** *Определитель линейного оператора в заданном базисе совпадает с определителем его матрицы в этом базисе:*

$$\det(\varphi) = \det A_\varphi, \quad A_\varphi = \left\| a^i_k \right\|.$$

►
Из определения $\det(\varphi)$ следует

$$\varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \ldots \wedge \varphi e_n = \det(\varphi) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n,$$

и тогда

$$\begin{gathered}\varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \wedge \ldots \wedge \varphi e_n = \left(a^{i_1}_1 e_{i_1}\right) \wedge \left(a^{i_2}_2 e_{i_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(a^{i_n}_n e_{i_n}\right) = \\ = \sum_\sigma (-1)^{[\sigma]} \alpha_1^{\sigma(1)} \alpha_2^{\sigma(2)} \ldots \alpha_n^{\sigma(n)} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n.\end{gathered}$$

Откуда получаем $\det(\varphi) = \det A^T_\varphi = \det A_\varphi$.
◄

**Лемма 4.4.** *Для любого $z \in \Lambda_n(X)$ имеет место $\varphi^{\wedge n} z = \det(\varphi) \cdot z$.*
►

$$\begin{gathered}\varphi^{\wedge n}\left(e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n\right) = \varphi e_1 \wedge \varphi e_2 \ldots \wedge \varphi e_n = \\ = \det\left[\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n\right] \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n = \\ = \det(\varphi) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n,\end{gathered}$$

но $z = \alpha \cdot e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n$, $\alpha \in \Bbbk$ и теорема доказана.
◄

***Nota bene*** Определитель $\det(\varphi)$ линейного оператора $\varphi$ не зависит от базиса.

**Теорема 4.1.** *Умножение определителей подчиняется правилу:*

$$\det\left(\varphi \circ \psi\right) = \det\left(\varphi\right) \det\left(\psi\right).$$

►
По определению имеем:

$$\begin{gathered}\det\left(\varphi\psi\right) \cdot e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n = \left(\varphi\psi\right)^{\wedge n}\left(e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n\right) = \\ = \left(\varphi\psi\right) e_1 \wedge \left(\varphi\psi\right) e_2 \ldots \wedge \left(\varphi\psi\right) e_n = \varphi\left(\psi e_1\right) \wedge \varphi\left(\psi e_2\right) \ldots \wedge \varphi\left(\psi e_n\right) = \\ = \det(\varphi) \cdot \left(\psi e_1\right) \wedge \left(\psi e_2\right) \ldots \wedge \left(\psi e_n\right) = \det(\varphi) \cdot \psi^{\wedge n}\left(e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n\right) = \\ = \det(\varphi) \cdot \det(\psi) \cdot e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n.\end{gathered}$$

◄