β

Лекция 2

Симметричные и антисимметричные ПЛФ

Содержание лекции:

В приложениях, как правило, важную роль играют полилинейные отображения, которые обладают полной симметричностью или антисимметричностью по всем своим аргументам. Одно из важнейших применений данных объектов - теория дифференциальных форм в геометрии и анализе. В настоящей лекции мы исследуем свойства симметричных и антисимметричных ПЛФ, а также укажем методы их "изготовления" из произвольной формы.

Ключевые слова:

Симметричные и антисимметричные формы. Достаточное условие антисимметричности ПЛФ. Операции симметризации и антисимметризации. Свойства операций Sym и Alt. Базис пространства антисимметричных ПЛФ.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

2.1 Симметричные и антисимметричные ПЛФ

В данной лекции мы будем рассматривать подмножества простанства $\Omega_0^p(\Bbbk)$.

> Полилинейная форма $U \in \Omega_0^p(\Bbbk)$ называется **симметричной**, если ее значения не зависят от порядка следования аргументов, то есть
>
> $$U(x_1, x_2, \ldots, x_p) = U(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_n.$$

Лемма 2.1. *Множество всех симметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ образует подпространство $\Sigma^p(\Bbbk)$ пространства $\Omega_0^p(\Bbbk)$.*

Лемма 2.2. *Тензор симметричной ПЛФ симметричен по своим индексам:*

$$U \in \Sigma^p(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad U \leftrightarrow u_{\vec{i}_p} = u_{i_1, i_2, \ldots, i_p},$$
$$u_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = u_{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)}, \quad \sigma \in S_p.$$

> Полилинейная форма $V \in \Omega_0^p(\Bbbk)$ называется **антисимметричной**, если она меняет знак при транспозиции любых двух ее аргументов или
>
> $$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (-1)^{[\sigma]} V(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), \quad \sigma \in S_p.$$

Лемма 2.3. *Множество всех антисимметричных ПЛФ валентности $(p, 0)$ образует подпространство $\Lambda^p(\Bbbk)$ пространства $\Omega_0^p(\Bbbk)$.*

Лемма 2.4. *Тензор антисимметричной ПЛФ антисимметричен по своим индексам:*

$$V \in \Lambda^p(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad V \leftrightarrow v_{\vec{i}_p} = u_{i_1, i_2, \ldots, i_p},$$
$$v_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = (-1)^{[\sigma]} v_{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_p)}, \quad \sigma \in S_p.$$

Теорема 2.1. *Для того, чтобы ПЛФ была антисимметричной необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в ноль при совпадении любых двух ее аргументов:*

$$V \in \Lambda^p(\Bbbk) \quad \Leftrightarrow \quad V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0.$$

►

$\Rightarrow$ Пусть $X \in \Lambda^p(\Bbbk)$, тогда

$$V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$
$$\Leftrightarrow \quad V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0.$$

$\Rightarrow$ Пусть $V(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$, и $x_i = x_i' + x_i''$ тогда

$$V(x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_p) = 0,$$
$$V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i'', \ldots, x_p) +$$
$$V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i', \ldots, x_p) + V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i'', \ldots, x_p) = 0,$$
$$V(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_i', \ldots, x_p) = -V(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_i'', \ldots, x_p).$$

◄

Nota bene Значение антисимметричной формы на ЛЗ наборе векторов равно нулю.

Nota bene При $p > n = \dim_{\Bbbk} X$ пространство $\Lambda^p(\Bbbk)$ тривиально (содержит только нуль-форму):

$$\Lambda^p(\Bbbk) = \{\Theta\}\,.$$

2.2 Симметризация и антисимметризация

Nota bene Для дальнейшего изложения наложим некоторые ограничения на поле $\Bbbk$. Именно, будем считать, что характеристика поля $\Bbbk$ равна нулю, то есть $\Bbbk$ содержит поле рациональных чисел в качестве подполя.

Теорема 2.2. *Пусть $W \in \Omega_0^p(\Bbbk)$, тогда*

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right).$$

- симметричная ПЛФ из $\Sigma^p(\Bbbk)$.

▶

Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка тогда

$$U(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \ldots, x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} W(x_{\sigma\circ\chi(1)}, x_{\sigma\circ\chi(2)}, \ldots, x_{\sigma\circ\chi(p)}) =$$

$$= \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi\circ\chi^{-1}} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi \in S_p} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) = U(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

◀

> Операция изготовления симметричной ПЛФ U из произвольной ПЛФ W называется **операцией симметризации** формы W. Для нее пишут
>
> $$U = \operatorname{Sym} W$$

Nota bene Нормировочный множитель $1/p!$ необходим для того, чтобы

$$\operatorname{Sym} U = U, \quad U \in \Sigma^p.$$

Теорема 2.3. *Пусть $W \in \Omega_0^p$, тогда*

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]}\, W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right)$$

- антисимметричная ПЛФ из $\Lambda^p(\Bbbk)$.

►

Пусть $\chi \in S_n$ - произвольная перестановка тогда

$$V(x_{\chi(1)}, x_{\chi(2)}, \ldots, x_{\chi(p)}) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} \cdot W(x_{\sigma\circ\chi(1)}, x_{\sigma\circ\chi(2)}, \ldots, x_{\sigma\circ\chi(p)}) =$$
$$= \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi\circ\chi^{-1}} (-1)^{[\varphi\circ\chi^{-1}]} \cdot W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) =$$
$$= (-1)^{[\chi^{-1}]} \cdot \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\varphi \in S_p} (-1)^{[\varphi]} W(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots, x_{\varphi(p)}) = (-1)^{[\chi]} \cdot V(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

◄

> Операция изготовления антисимметричной ПЛФ V из произвольной ПЛФ W называется **операцией антисимметризации (альтернирования)** формы W. Для нее пишут
> $$V = \operatorname{Alt} W$$

2.3 Свойства операций Sym и Alt

1. Линейность:

$$\operatorname{Sym}(U+V) = \operatorname{Sym} U + \operatorname{Sym} V, \quad \operatorname{Sym}(\alpha U) = \alpha \operatorname{Sym}(U),$$
$$\operatorname{Alt}(U+V) = \operatorname{Alt} U + \operatorname{Alt} V, \quad \operatorname{Alt}(\alpha U) = \alpha \operatorname{Alt}(U)$$

2. Композиция:

$$\operatorname{Sym}\circ\operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}, \quad \operatorname{Sym}\circ\operatorname{Alt} = 0,$$
$$\operatorname{Alt}\circ\operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}, \quad \operatorname{Alt}\circ\operatorname{Sym} = 0.$$

2.4 Базис пространства $\Lambda^p(\Bbbk)$

$$\operatorname{Alt} W(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{[\sigma]} W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right)$$

Nota bene Пространство $\Lambda^p(K)$ является подпространством $\Omega^p_0(\Bbbk)$, базис которого формирует набор ПЛФ $\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\}$ такие что

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = \xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\ldots\xi_p^{s_p}.$$

Построим систему антисимметричных ПЛФ $\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\}$, следующим образом:

$${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F = p! \operatorname{Alt}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right).$$

Лемма 2.5. *ПЛФ* ${}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F$ *обладают свойством антисимметричности по индексам* $(s_1,s_2,\ldots,s_p)$*:*

$${}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}F = -{}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F.$$

►

Заметим, что

$${}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}W(x_1,\ldots x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = {}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}W(x_1,\ldots x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p),$$

откуда сразу можем получить:

$$\begin{gathered} {}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}F\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_j,\ldots,x_p\right) = \\ = \operatorname{Alt}\left({}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}W\right)\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_j,\ldots,x_p\right) = \\ = -\operatorname{Alt}\left({}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots,s_p}W\right)\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots x_i,\ldots,x_p\right) = \\ = -\operatorname{Alt}\left({}^{s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_i,\ldots,s_p}W\right)\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_j,\ldots,x_p\right). \end{gathered}$$

◄

Nota bene Имеют место следующие свойства:

1. ${}^{s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_i,\ldots,s_p}F = \Theta$;
2. ${}^{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)}F = (-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)$.

Теорема 2.4. *Следующий набор образует базис в пространстве* $\Lambda^p(K)$*:*

$$\left\{{}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F : \quad 1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_p \le n\right\}$$

Nota bene Далее для краткости записи введем следующее обозначение:

$$\vec{s} = \left\{(s_1,s_2,\ldots s_p) : \quad 1 \le s_1 < \ldots < s_p \le n\right\}.$$

►

ПН: рассмотрим произвольную форму $U \in \Lambda^p \subset \Omega^p$:

$$U = {}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W \cdot u_{s_1,s_2,\ldots,s_p},$$

тогда

$$\begin{gathered} \operatorname{Alt} U = U = u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\operatorname{Alt}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right) = \frac{1}{p!}\cdot\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)u_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \\ \frac{1}{p!}\cdot\sum_{\vec{s}}\sum_{\sigma\in S_p}\left({}^{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)}F\right)u_{\sigma(s_1),\sigma(s_2),\ldots,\sigma(s_p)} = \\ \frac{1}{p!}\cdot\sum_{\vec{s}}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)(-1)^{[\sigma]}u_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \\ \frac{1}{p!}\cdot p!\cdot\sum_{\vec{s}}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)u_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \sum_{1\le s_1<\ldots<s_p\le n}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)u_{s_1,s_2,\ldots,s_p}. \end{gathered}$$

ЛНЗ: рассмотрим линейную комбинацию:

$$\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \Theta.$$

и вычислим значение правой части на векторах базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$:

$$\begin{gathered}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}F\right)\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}\right)\alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = \\ \alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\cdot p!\cdot \mathrm{Alt}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right)\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}\right) = \\ \alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\cdot p!\cdot \frac{1}{p!}\cdot\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\left({}^{s_1,s_2,\ldots,s_p}W\right)\left(e_{\sigma(i_1)}, e_{\sigma(i_2)}, \ldots, e_{\sigma(i_p)}\right) = \\ \alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p}\cdot\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\delta^{s_1}_{\sigma(i_1)}\delta^{s_2}_{\sigma(i_2)}\ldots\delta^{s_p}_{\sigma(i_p)} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \alpha_{s_1,s_2,\ldots,s_p} = 0 \quad \forall\left(s_1, s_2, \ldots, s_p\right).\end{gathered}$$

◄

Nota bene Из теоремы о базисе пространства Λ^p следует, что

$$\dim_{\Bbbk}\Lambda^p = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2.5 Свойства размерностей $\Lambda^p(\Bbbk)$

1. $p = 0: \quad \Lambda^0 \equiv \Bbbk, \quad \dim_{\Bbbk}\Lambda^0 = 1$
2. $p = 1: \quad \Lambda^1 = X^*, \quad \dim_{\Bbbk}\Lambda^1 = n;$

... $\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$

3. $p = n: \quad \Lambda^n, \quad \dim_{\Bbbk}\Lambda^n = 1.$

Nota bene Базис пространства Λ^n состоит из одного элемента $\left\{{}^{1,2,\ldots,n}F\right\}$:

$$\begin{gathered}\left({}^{1,2,\ldots,n}F\right)(x_1, x_2, \ldots, x_p) = p!\cdot\mathrm{Alt}\left({}^{1,2,\ldots,n}W\right)(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \\ p!\cdot\frac{1}{p!}\cdot\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\left({}^{1,2,\ldots,n}W\right)\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \\ \sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{[\sigma]}\xi^1_{\sigma(1)}\xi^2_{\sigma(2)}\ldots\xi^n_{\sigma(n)} \equiv \det\|\xi^i_j\|.\end{gathered}$$

Nota bene Для любого $V \in \Lambda^n$ имеет место:

$$V = \alpha\left({}^{1,2,\ldots,n}F\right), \quad \alpha\in\Bbbk.$$