α

Лекция 1

Модуль над кольцом

Содержание лекции:
Настоящей лекцией мы вплотную приближаемся к центральному разделу нашего курса - линейным пространствам. Здесь мы обсудим понятие внешнего закона, дадим определение алгебраической структуры, а также сформулируем самые основные определения, связанные с линенми пространствами и их отображениями.

Ключевые слова:
Внешний закон композиции, оператор закона, согласованность закона со структурой, действие на структуре, алгебраическая структура, модуль над кольцом, левый (правый) R-модуль, линейное отображение, мономорфизм, эпиморфизм, ядро и образ линейного отображения, подмодуль, фактор модуль, коядро.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

1.1 Определение алгебраической структуры

Nota bene Напомним, что внешний закон композиции называется согласованным с внутренним законом, если

$$\forall x, y \in M, \quad \alpha \in \Omega, \quad \alpha\,(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y).$$

Говорят, что алгебраическая структура Ω **действует на** алгебраической структуре M, если каждый элемент $\alpha \in \Omega$ является оператором внешнего закона на M и для любой пары элементов из $\alpha, \beta \in \Omega$ имеет место согласованное действие:

$$(\alpha * \beta)(x) = \alpha(\beta(x)), \quad \forall x \in M.$$

Говорят, что имеет место **согласованное действие** Ω на M, если

$$(\alpha * \beta)\,(x \circ y) = \alpha\,(\beta\,(x \circ y)) = \alpha\,(\beta x \circ \beta y) = \alpha\,(\beta x) \circ \alpha\,(\beta y)\,.$$

Пример 1.1. Внешний закон композиции, со множеством операторов из $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$, согласован со структурой коммутативной группы $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$:

$$n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2.$$

При этом имеет место согласованное действие:

$$(n \cdot m)(z_1 + z_2) = nmz_1 + nmz_2.$$

Алгебраической структурой на множестве M называется всякая структура, определяемая в M одним или несколькими внутренними законами композиции элементов из M, и одним или несколькими внешними законами композиции из областей операторов $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$, согласованных с внутренними законами.

Пример 1.2. Рассмотрим алфавит $\mathcal{A} = \{p, q\}$ и множество $\mathcal{D}$ всех формальных сумм элементов A с коммутативной операцией $+$. Тогда произвольный элемент $\mathcal{D}$ имеет вид

$$p + p + \ldots + p + q + \ldots + q$$

Пусть $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ множество операторов внешнего закона на $\mathcal{D}$, согласованных с его внутренним законом:

$$n(p+q) = np + nq, \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$(n+m)(p+q) = n(p+q) + m(p+q),$$
$$(nm)p = n(mp).$$

Множество комбинаций $\mathcal{D}$, наделенное алгебраической структурой коммутативного внутреннего закона и внешнего закона с множеством операторов из кольца $\mathbb{Z}$ называется **модулем над кольцом** $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}$-модулем.

1.2 Модуль над кольцом

Левым R-модулем (или левым модулем над кольцом R) называется абелева группа $(G,+)$ с заданной бинарной операцией $R \times G \to G$, записываемой как $(\alpha, x) \to \alpha x$ и согласованно действующей на групповой структуре G:

L1. Действие кольца группе:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in G$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

L2. Согласованное действие:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall x_1, x_2 \in G \quad \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

Nota bene Для обозначения модуля G над кольцом R обычно используют $G(R)$.

Nota bene Аналогично можно определить структуру **правого** R-модуля, если определена бинарная операция

$$G \times R \to G, \quad (x, \alpha) \mapsto x\alpha.$$

Если определены оба отображения, то говорят о **двустороннем** R-модуле.

Пример 1.3. Примеры R-модулей:

- Всякий $J \trianglelefteq R$ - идеал кольца R есть R-модуль.
- Любая абелева группа $(G,+)$ представляет собой $\mathbb{Z}$ - модуль, ибо

$$\forall x \in G \quad x + x + x + \ldots + x = nx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Структру R-модуля имеет $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ - множество столбиков вида

$$\xi = \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)^T, \quad \xi^i \in R.$$

Гомоморфизмом R-модулей X и Y (или R-линейным отображением) называется отображение $\sigma : X \to Y$, такое что:

$$\forall\, x, x_1, x_2 \in X, \quad \forall \alpha \in R$$
$$\sigma(x_1 + x_2) = \sigma(x_1) + \sigma(x_2), \quad \sigma(\alpha x) = \sigma(x)\alpha.$$

Nota bene Для множества R-линейных отображений между X и Y используют следующее обозначение $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$.

Лемма 1.1. *На множестве* $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *линейных отображений из* X *в* Y *можно ввести структуру* R*-модуля определив операции*

$$\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(X,Y), \quad \forall x \in X(R), \quad \forall \alpha \in R,$$
$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (\alpha\varphi)(x) = \alpha \cdot \varphi(x).$$

Ядром линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ называется множество

$$\ker \sigma = \{x \in X(R) : \quad \sigma(x) = 0_X\}$$

Лемма 1.2. *Ядро* $\ker \sigma \subseteq X(R)$ *имеет структуру модуля над кольцом.*

Образом линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ называется множество

$$\mathrm{Im} = \{y \in Y : \quad \exists x \in X \quad \sigma(x) = y\} = \sigma(X).$$

Лемма 1.3. *Образ* $\mathrm{Im}\,\sigma \subseteq Y$ *имеет стурктуру модуля над кольцом.*

1.3 Подмодуль. Фактор-модуль

Подмножество $L \subseteq X(R)$ называется **подмодулем** R-модуля X, если L само является R-модулем относительно операций, индуцированных из $X(R)$.

Лемма 1.4. *Подмножество* $L \subseteq X$ *является подмодулем тогда и только тогда, когда* L *замкнуто относительно операций, индуцированных из* $X(R)$*.*

Nota bene Для обозначения этого факта используют запись $L(R) \leqslant X(R)$.

Пример 1.4. Примеры подмодулей:

- $\{0_X\}$ и X - тривиальный и несобственный подмодули $X(R)$ соответственно;
- Ядро линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ является подмодулем в $X(R)$;
- Образ линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ является подмодулем в $Y(R)$;
- Идеал $J \trianglelefteq R$ явлеяется подмодулем R-модуля R;
- Множество R^n столбиков ξ, у которых первый элемент $\xi^1 = 0$ - подмодуль R^n.

Nota bene На фактор группу $X(R)/L(R)$ переносится структура R-модуля, если умножение определить формулой:

$$\alpha(x + L) = \alpha x + L, \quad \forall x \in X(R), \quad \forall \alpha \in R.$$

R-модуль $X(R)/L(R)$ называется **фактор-модулем** X по L.

Коядром гомоморфизма $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ называется множество

$$\mathrm{Coker}\,\sigma = Y/\,\mathrm{Im}\,\sigma.$$

Nota bene Для каждого линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ имеет место *теорема об изоморфизме*:

$$X(R)/\ker\sigma \simeq \mathrm{Im}\,\sigma.$$

Задача 1.1. *Пусть $Z(R) \leqslant Y(R) \leqslant X(R)$ - некоторые R-модули. Докажите, что*

$$(X/Z)/(Y/Z) \simeq X/Y.$$

Задача 1.2. *Докажите, что последовательность R-модулей*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

является точной тогда и только тогда, когда для любого R-модуля N точной является последовательность

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\bar{g}} \mathrm{Hom}_R(M', N)$$