δ

Лекция 4

Группы и гомоморфизмы

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы введем одно из центральных структур алгебры - группу. Рассматривая группу как иллюстративный пример множества с внутренним законом композиции, мы введем основные опредления, связанные с этой структурой, а также подготовимся к формулировке одного из самых известных утверждений о группах - теоремы об изоморфизме.

Ключевые слова:
Магма, полугруппа, моноид, группа, коммутативная группа, гомоморфизм групп, изоморфизм, автоморфизм, ядро гомоморфизма, образ гомоморфизма, вложение.

Авторы курса:

Трифанов А.И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

4.1 Основные структуры

Множество, наделенное внутренним законом композиции, называется **магмой**.

Пример 4.1. Пусть множество M содержит только три элемента $\{-1, 0, 1\}$. Алгебраическую структуру магмы на S задает следующий закон композиции:

$$x \circ y = x <=> y = \begin{cases} 1, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ -1, & x > y. \end{cases}$$

Множество M, наделенное **ассоциативным** всюду определенным законом композиции называется **полугруппой**.

Пример 4.2. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с операцией операцией $\circ = " + "$ является полугруппой $(\mathbb{N}, " + ")$.

Полугруппа S, содержащая **нейтральный элемент**, называется **моноидом**.

Пример 4.3. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с операцией операцией $\circ = " \cdot "$ является моноидом $(\mathbb{N}, 1, " \cdot ")$.

4.2 Определение группы

Непустое множество G называется **группой**, если на нем задан закон композиции $G \times G \to G$, так что $(x, y) \mapsto xy$ и имеют место следующие три свойства:

G1. Ассоциативность закона:

$$\forall x, y, z \in G \quad (xy)z = x(yz).$$

G2. Существует нейтральный элемент:

$$\exists\, e \in G : \quad \forall x \in G \quad xe = x = ex.$$

G3. Существует обратный элемент:

$$\forall x \in G \quad \exists\, x^{-1} : \quad xx^{-1} = e = x^{-1}x.$$

Пример 4.4. На практике группы чаще всего встречаются в виде *групп преобразований* каких-то обьектов:

- группа D_3 симметрий правильного треугольника;
- симметрическая группа S_n перестановок;
- группа Рубика - группа внутренних вращений кубика Рубика;

Коммутативной или **абелевой** называется такая группа, любые два элемента которой *коммутируют*:

$$\forall x, y \in G \quad xy = yx.$$

Пример 4.5. Примеры коммутативных групп:

1. Аддитивная группа целых чисел $\mathbb{Z}^+$;
2. Мультипликативная группа вещественных чисел $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
3. Группа углов (точек единичной окружности) - группа вещественныз чисел $\mathbb{R}^+$ по модулю $2\pi\mathbb{Z}$. Групповая операция $\oplus$ определяется следующим образом:

$$\begin{cases} x \oplus y = x + y, & x + y < 2\pi \\ x \oplus y = x + y - 2\pi, & x + y \geq 2\pi \end{cases}$$

4. Булева группа множества X - множество 2^X всех подмножеств множества X вместе с операцией симметрической разности Δ;
5. Группа размерностей физических величин;

4.3 Гомоморфизмы групп

Гомоморфизмом групп G и G' называется отображение $\sigma : G \to G'$, обладающее следующими свойствами:

$$\forall x, y \in G \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y), \quad \sigma(e) = e'.$$

Nota bene Множество гомоморфизмов из группы G в группу G' принято обозначать $\mathrm{Hom}(G, G')$. Гомоморфизмы из G в G называются эндоморфизмами и их множество обозначается $\mathrm{End}(G) \triangleq \mathrm{Hom}(G, G)$.

Nota bene Напомним некоторые свойства отображений. Пусть M и N - два множества и $f : M \to N$. Отображение f называется *инъективным (или инъекцией)*, если имеет место свойство:

$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Далее, отображение f называется *сюръективным (или сюръекцией)*, если

$$\forall y \in N \quad \exists x \in M : \quad f(x) = y.$$

И, наконец, f, будучи сюрьекцией и инъекцией называется *биекцией (или взаимно-однозначным отображением)*. В этом случае

$$\exists\, g : N \to M \quad : \quad g \circ f = \mathrm{id}_M, \quad f \circ g = \mathrm{id}_N\,.$$

Рассмотрим ситуацию, когда соответствующие множества имеют структуру группы.

Лемма 4.1. *Пусть* $\sigma \in \mathrm{Hom}(G, G')$, *тогда*

$$\forall x \in G \quad \sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}.$$

Гомоморфизм σ называется **изоморфизмом**, если

$$\exists\, \chi \in \mathrm{Hom}(G', G) : \quad \chi \circ \sigma = \mathrm{id}_G, \quad \sigma \circ \chi = \mathrm{id}_{G'}\,.$$

Соответствующие группы при этом называются *изоморфными* (пишут $G \simeq G'$).

Nota bene Подмножество отображений в $\mathrm{Hom}(G, G')$, являющихся изоморфизмами, принято обозначать $\mathrm{Iso}(G, G')$. В случае $\mathrm{Iso}(G, G)$ обычно пишут $\mathrm{Aut}(G)$ и соответствующие отображения называют **автоморфизмами**.

Пример 4.6. Множество $\mathrm{Aut}(G)$ вместе с операцией композиции и тождественным отображением id_G является группой (автоморфизмов группы G).

Ядром гомоморфизма $\sigma \in \mathrm{Hom}(G, G')$ называется множество

$$\ker \sigma = \{g \in G : \quad \sigma(g) = e'\}\,.$$

Лемма 4.2. *Ядро* $\ker \sigma$ *является группой.*

Лемма 4.3. *Гомоморфизм* $\sigma \in \mathrm{Hom}(G, G')$ *ядро которого тривиально иньективен.*

Образом гомоморфизма $\sigma \in \mathrm{Hom}(G, G')$ называется подмножество G, такое что

$$\mathrm{Im}\, \sigma = \{g' \in G' : \quad \exists g \in G, \quad \sigma(g) = g'\}\,.$$

Лемма 4.4. *Образ* $\mathrm{Im}\, \sigma$ *является группой.*

Вложением называется гомоморфизм $\sigma \in \mathrm{Hom}(G, G')$, обладающий следующим свойством

$$G \simeq \mathrm{Im}\, \sigma \subset G'.$$