



Лекция 10

Матрицы и определители

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы начинаем рассматривать один из основных объектов линейной алгебры - матрицу. Здесь мы введем основные определения, связанные с этим понятием и выведем некоторые интересные свойства и приведем ряд примеров. Исследование матриц по существу составляет основную часть настоящего курса.

Ключевые слова:

Матрица, сумма и произведение матриц, единичная матрица, нильпотентная матрица, обратимая матрица, определитель матрицы, дополнительный минор, элементарные преобразования, транспонированная матрица.

Авторы курса:

Трифанов А.И.

Москаленко М.А.

Ссылка на ресурсы:

10.1 Определения

Матрицей договоримся называть прямоугольную таблицу, составленную из элементов некоторого поля \mathbb{K} :

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K},$$

совокупность элементов с фиксированным первым индексом называется **строкой матрицы**, а с фиксированным вторым индексом - **столбцом матрицы** A .

Nota bene Число m определяет, таким образом, число строк матрицы, а n - число ее столбцов. Матрица, у которой $m = n$ называется *квадратной*, в противном случае - *прямоугольной*.

Nota bene Множество *прямоугольных* $m \times n$ матриц с элементами из поля \mathbb{K} будем обозначать $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$.

Суммой матриц A и B , где $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ называется матрица $C = A + B$, $C \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ такая что:

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad A = (a_{i,j}), \quad B = (b_{i,j}).$$

Лемма 10.1. *Относительно операции сложения $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ - абелева группа.*



Проверим аксиомы группы:

- ассоциативность следует из определения и проверяется тривиально;
- нейтральный элемент - нулевая матрица θ : $\theta_{i,j} = 0$;
- противоположный элемент: $\forall A = (a_{i,j}) \quad \exists (-A) = (-a_{i,j})$.



Произведением матриц $A \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, p)$ и $B \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(p, n)$ называется матрица $C = A \cdot B$, $C \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$, такая что:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}, \quad A = (a_{i,k}), \quad B = (b_{k,j}).$$

Лемма 10.2. *Операция умножения матриц ассоциативна и некоммутативна.*

10.2 Специальные виды матриц

Единичной матрицей $E \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(n)$ называется матрица, для которой

$$E = (e_{ij}), \quad e_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \equiv \delta_{i,j}.$$

Nota bene Пусть $A \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(m, p)$, $B \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(p, n)$ и $E \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(p)$, тогда

$$A \cdot E = A, \quad E \cdot B = B.$$

Квадратная матрица N называется **нильпотентной матрицей порядка k** , если

$$N^m = N \cdot \dots \cdot N = \theta, \quad N^{m-1} \neq \theta.$$

Nota bene Пример nilпотентной матрицы порядка $k = 2$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица $A \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(n)$ называется **обратимой**, если в $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n)$ существуют матрицы B и C , такие что

$$A \cdot B = E = C \cdot A.$$

Лемма 10.3. На множестве квадратных матриц $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n)$ операция умножения индуцирует структуру некоммутативного моноида.

Теорема 10.1. Операции сложения и умножения индуцируют на множестве квадратных матриц $\text{Mat}_{\mathbb{K}}(n)$ структуру ассоциативного некоммутативного кольца.

Пример 10.1. Приведем пример одного интересного изоморфизма. Рассмотрим множество комплексных чисел \mathbb{C} и подмножество в $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2)$ вещественных квадратных матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Пусть $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2)$ - отображение со следующими свойствами:

$$\sigma(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что σ - гомоморфно, сюръективно и инъективно.

10.3 Определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы A договоримся называть число $\det(A)$, которое ставится ей в соответствие по следующим образом:

1. $\det A_1 = \det(a) = a$;
2. $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.
- ...
- m. $\det A_m = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot M_{i,j}$,

где $M_{i,j}$ - **дополнительный минор** элемента $a_{i,j}$ - определитель матрицы A' , полученной из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится элемент $a_{i,j}$.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

- E1. Перестановка строк матрицы;
- E2. Произведение всех элементов некоторой строки на число $\lambda \neq 0$;
- E3. Поэлементное сложение одной строки с другой, умноженной на число λ .

Лемма 10.4. *Имеют место следующие свойства определителя:*

1. при элементарном преобразовании (E1) определитель меняет знак;
2. при элементарном преобразовании (E2) определитель умножается на число λ ;
3. при элементарном преобразовании (E3) определитель сохраняется;
4. определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю;
5. определитель произведения матриц равен произведению их определителей;

Nota bene Прямой проверкой легко убедиться, что

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Транспонированием матрицы $A \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, m)$ называется операция $A \mapsto A^T$ в результате которой получается матрица со следующим свойством:

$$A = (a_{i,j}), \quad A^T = (a'_{i,j}), \quad a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Лемма 10.5. *Имеет место свойство:*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Теорема 10.2. (критерий обратимости матрицы)

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$