ξ

Лекция 14

Парабола

Содержание лекции:
Мы завершаем наше исследование алгебраических линий второго порядка еще одной кривой - параболой. Несмотря на то, что парабола обладает меньшим числом симметрий, чем эллипс и гипербола, другие свойства параболы очень интересны.

Ключевые слова:
Определение параболы, канонической уравнение параболы, полярное уравнение параболы, касательная к параболе.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

14.1 Уравнения параболы

> **Параболой** называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной точки плоскости, называемой **фокусом параболы**, и фиксированной прямой, называемой **директрисой параболы**, одинаково.

Nota bene Обозначим соответствующую точку через F, а прямую через L, тогда условие для произвольной точки M параболы может быть записано следующим образом:

$$\rho(M, L) = |FM|.$$

Введем обозначения

$$|FM| = r, \quad \rho(M, L) = d,$$

в которых уравнение параболы приобретает следующий вид:

$$r = d.$$

> **Канонической системой кординат для параболы** называется прямоугольная декартова система координат, ось абсцисс которой перпендикулярна прямой L и проходит через точку F, а начало координат O делит пополам отрезок перпендикуляра, заключенного между прямой L и точкой F.

Теорема 14.1. *Каноническое уравнение параболы имеет вид*

$$y^2 = 2px,$$

где $p = \rho(F, L)$ - расстояние от фокуса до директрисы параболы.

▶

Расстояние r от фокуса F до произвольной точки параболы имеет вид:

$$r = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2},$$

в то же время расстояние от M до директрисы L равно

$$d = x + p/2.$$

Из равенства $r = d$ можно получить:

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2px.$$

◀

Лемма 14.1. *Каноническое уравнение параболы определяет параболу.*

▶

Действительно, для ординаты y точки параболы имеем:

$$y^2 = 2px, \quad y^2 = r^2 - (p/2 - x)^2,$$

откуда после приравнивания правых частей получаем $r = d$.

◀

Полярным уравнением параболы называется уравнение вида

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi},$$

где в качестве полюса выбран фокус параболы, а в качестве полярной оси - ось абсцисс канонической системы координат.

Nota bene Воспользуемся соотношениями:

$$d = r = \rho, \quad d = p/2 + x, \quad r\cos\varphi = x - p/2.$$

и которых сразу получаем искомое:

$$r\cos\varphi = d - p/2 - p/2 = r - p, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$

Лемма 14.2. *Полярное уравнение параболы задает параболу.*

▶

Действиетльно, из предыдущих уравнений следует, что

$$\cos\varphi = \frac{d-p}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{p}{1-\cos\varphi} = \frac{pr}{r+p-d} \quad \Rightarrow \quad r - d.$$

◀

Касательной к параболе называется прямая, имеющая с параболой одну общую точку и не перпендикулярная директрисе параболы.

Теорема 14.2. *В канонической системе координат уравнение касательной к параболе, проходящей через точку (x_0, y_0) имеет вид:*

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

▶

Будем искать уравнение касательной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение параболы будем иметь:

$$(y_0 + \beta t)^2 = 2p(x_0 + \alpha t).$$

Точка $M(x_0, y_0)$ является общей точкой искомой прямой и параболы, поэтому:

$$2y_0\beta t + \beta^2 t^2 - 2p\alpha t = 0, \quad y_0^2 = 2px_0.$$

Далее будем иметь

$$(2y_0\beta + \beta^2 t - 2p\alpha) \cdot t = 0$$

При $t = 0$ получаем точку $M(x_0, y_0)$, рассмотрим выражение, стоящее в скобках:

$$2y_0\beta + \beta^2 t - 2p\alpha,$$
$$t = \frac{2p\alpha - 2y_0\beta}{\beta^2}.$$

Так как общая точка у параболы и искомой прямой единственная, то t из последнего выражения также должен быть равен нулю:

$$\frac{2p\alpha - 2y_0\beta}{\beta^2} = 0,$$
$$2p\alpha - 2y_0\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{p}{y_0}.$$

Переписывая уравнение касательной в общем вид будем иметь

$$y - y_0 = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0) = \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$
$$y_0(y - y_0) = p \cdot (x - x_0), \quad y_0^2 = 2px_0,$$
$$yy_0 = 2p(x + x_0).$$

◄