Алгебра. Семестр II. Векторные пространства

II. Линейные функции

1. Рассмотрим линейное пространство всех сходящихся числовых последовательностей (a_n). Какие из функций $(a_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $(a_n) \mapsto \sup a_n$, $(a_n) \mapsto a_1$ являются линейными?

2. В пространстве $M_n(\mathbb{R})$ рассмотрим функции следа и определителя. Являются ли они линейными?

3. Найдите базис ядра линейного функционала $\varphi = 2x^1 - 3x^2 + x^4$, где $x^k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ — функционал взятия k-той координаты вектора $\mathbb{R}^4$ в стандартном базисе.

4. Докажите, что набор линейных функций $\omega_1, \dots \omega_n \in V^*$, $n = \dim V$, образует базис пространства V^* тогда и только тогда, когда пересечение их ядер нулевое.

5. Докажите, что k линейных функций на n-мерном линейном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер является подпространством размерности $n-k$.

6. Докажите, что линейные формы $\varphi_1 = x^1 + 2x^2 + 3x^3$, $\varphi_2 = 4x^1 + 5x^2 + 6x^3$, $\varphi_3 = 7x^1 + 8x^2 + x^3$ образуют базис пространства $(\mathbb{Q}^3)^*$, и найдите сопряжённый ему базис в $\mathbb{Q}^3$. Найдите координаты вектора $(4, -2, 13)^T \in \mathbb{Q}^3$ в этом базисе. Каковы коэффициенты формы $5x^1 - 4x^2 + 2x^3$ относительно этого базиса?

7. Пусть k — натуральное число. Сопоставим каждому многочлену степени не выше n значение его k-той производной в точке a. Проверьте, что этим определена линейная функция. Найдите ее координатную строку в базисах:

   а) $1, x, x^2, \dots, x^n$;

   б) $1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n$.

8. В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ линейные функции ω_i, $i = 0, 1, \dots, n$ заданы формулой $\omega_i(f) = f^{(i)}(a)$ для всех многочленов этого пространства, где a — произвольная точка числовой прямой. Докажите, что эти функции образуют базис в сопряжённом пространстве, и найдите двойственный базис изначального пространства.

9. В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ линейные функции ω_i, $i = 0, 1, \dots, n$ заданы формулой $\omega_i(f) = f(a_i)$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — различные точки числовой прямой. Докажите, что эти функции образуют базис в пространстве $(\mathbb{R}[x]_n)^*$. Найдите двойственный базис в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$.

10. В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ линейные функции ω_i, $i = 0, 1, \dots, n$ заданы формулой $\omega_i(f) = \int\limits_0^{i+1} f(x)dx$. Докажите, что эти функции образуют базис в пространстве $(\mathbb{R}[x]_n)^*$.