10 Предобуславливание

10.1 Определение и свойства

Пусть A - невырожденная $n \times n$-матрица.

Df. 1. **Числом обусловленности** матрицы A наывается величина

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Lm. 1. *Для любой невырожденной матрицы* A *имеет место следующая оценка:*

$$\kappa(A) \leqslant 1.$$

Доказательство. Действительно, для согласованной матричной нормы имеем:

$$\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \quad \Rightarrow \quad 1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

. □

Lm. 2. *Оценка погрешности решения* $Ax = b$ *для возмущенной системы* $A(x+\delta x) = b+\delta b$ *имеет вид:*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \kappa(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Доказательство. Если x - точное решение системы $Ax = b$, тогда

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad \Rightarrow \quad A\delta x = \delta b.$$

Далее, запишем следующие оценки:

$$b = Ax \quad \Rightarrow \quad \|b\| = \|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad 1/\|x\| \leqslant \|A\|/\|b\|,$$
$$\delta x = A^{-1}\delta b \quad \Rightarrow \quad \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|.$$

После деления первого неравенства на второе, получаем требуемое. □

Lm. 3. *Оценка погрешности решения* $Ax = b$ *для возмущенной системы* $(A+\delta A)(x+\delta x) = b$ *имеет вид:*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\kappa(A)R}{1-\kappa(A)R}, \quad R = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Доказательство. Если x - точное решение системы $Ax = b$, тогда

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \quad \Rightarrow \quad \delta x = -A^{-1} \cdot \delta A \cdot (x + \delta x),$$
$$\|\delta x\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|x + \delta x\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot (\|x\| + \|\delta x\|).$$

После деления обеих частей на $\|x\|$, получаем:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\delta A\|\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|} = \frac{\kappa(A)R}{1-\kappa(A)R}.$$

□

10.2 Спектральный радиус

Df. 2. **Спектральным радиусом** матрицы A называется число

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

Lm. 4. *Для любой согласованной матричной нормы имеет место следующая оценка:*

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$, тогда

$$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \|A\| \cdot \|x\| \geqslant \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

□

Lm. 5. *Для спектральной нормы $\|A\|_2$ матрицы матрицы A имеет место:*

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^T \cdot A)}{\lambda_{min}(A^T \cdot A)}}.$$

Доказательство. Действительно, для спектральной нормы имеем:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T \cdot A)}, \quad \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}((A^{-1})^T \cdot A^{-1})}.$$

Заметим, что $(A^{-1})^T \cdot A^{-1} = (A^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot A^T)^{-1}$. Далее $\sigma(A \cdot A^T) = \sigma(A^T \cdot A)$, откуда сразу следует

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}[(A^T \cdot A)^{-1}]} = \sqrt{1/\lambda_{min}(A^T \cdot A)}.$$

Подстановка в произведение $\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ дает утверждение леммы. □

Nb. 1. Пусть A - симметрическая положительно определенная матрица, тогда

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}.$$

10.3 Предобуславливание

Пусть M - невырожденная матрица.

Lm. 6. *Системы $Ax = b$ и $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ эквивалентны.*

Df. 3. Матрица M называется **предобуславливателем** матрицы A, если

$$\kappa(M^{-1}A) < \kappa(A).$$

Df. 4. Говорят, что к системе $Ax = b$ применили

- **левое предобуславливание**, если $M^{-1}Ax = M^{-1}b$;

- **правое предобуславливание**, если $AM^{-1}y = b, \quad y = Mx$;
- **двустороннее предобуславливание**, если $L^{-1}AU^{-1}y = L^{-1}b, \quad y = Ux$.

Lm. 7. *Пусть A, M - невырожденные, положительно определенные матрицы, так что*

$$\exists\, c_1, c_2 > 0: \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad c_1\langle Mx, x\rangle \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant c_2\langle Mx, x\rangle.$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\kappa_2(M^{-1}A) \leqslant c_2/c_1.$$

Доказательство. Рассмотрим обобщенную зхадачу на собственные числа:

$$M^{-1}Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \lambda Mx.$$

Применение условия из формулировки леммы дает:

$$\langle Ax, x\rangle = \lambda\langle Mx, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\langle Mx, x\rangle}{\langle Ax, x\rangle}.$$

Далее, имеем

$$\begin{cases} \lambda \geqslant \lambda_{min} \geqslant c_1 \\ \lambda \leqslant \lambda_{max} \leqslant c_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \kappa_2(M_{-1}A) = \frac{\lambda_{max}(M^{-1}A)}{\lambda_{min}(M^{-1}A)} \leqslant \frac{c_2}{c_1}.$$

□

Ex. 1. *(Диагональное предобуславливание) Пусть A имеет строгое диагнальное преобладание, то есть*

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \Rightarrow \quad \sum_{j\neq i} |a_{ij}|/|a_{ii}| < 1.$$

Выберем в качестве предобуславливателя матрицу $M = D = \mathrm{diag}(A)$:

$$A = D + A', \quad a'_{ii} = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n \quad \Rightarrow \quad D^{-1}A = I + D^{-1}A'$$

Lm. 8. *Имеет место следующая оценка:*

$$\rho(I - D^{-1}A) = \rho(D^{-1}A') < 1.$$

Доказательство. Рассмотрим строчную норму матрицы $G = I - D^{-1}A$:

$$\|G\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}|, \quad g_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -a_{ij}/a_{ii}, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, для каждой строки матрицы G, имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} |g_{ij}| = \sum_{j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| < 1,$$

и значит

$$\|G\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j\neq i}^{n} |g_{ij}| < 1.$$

Примеенение условия $\rho(G) \leqslant \|G\|_\infty < 1$ завершает доказательство. □