3 Векторизация матриц

3.1 Определение векторизации

Пусть $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n)$ - пространство вещественных $m \times n$ матриц $\mathbb{R}^{mn}$ - пространство вещественных векторов-столбцов высоты $m \cdot n$.

NB. 1. Из теории линейных пространств следует, что

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{mn} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n) \simeq \mathbb{R}^{mn}.$$

Def 1. Векторизацией $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n)$ называется отображение $vect : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n) \to \mathbb{R}^{mn}$, которое ставит каждой матрице $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n)$ вектор столбец $V_A \in \mathbb{R}^{mn}$ по следующему правилу:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Лемма 1. *Отображение $vect$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Биективность очевидна, линейность проверяется тривиально. □

NB. 2. Если $\{\varepsilon_j^i\}_{i=1\dots n}^{j=1\dots m}$ - базис $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n)$ и $\{v_k\}_{k=1}^{mn}$ - базис $\mathbb{R}^{mn}$, тогда:

$$vect(\varepsilon_j^i) = v_{j+(i-1)m}.$$

Лемма 2. *Пусть $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$, тогда*

$$x = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad vect(x \otimes y) = \begin{bmatrix} \xi^1 y \\ \xi^2 y \\ \vdots \\ \xi^m y \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Напомним, что $\varepsilon_{ij} = e_i \otimes g_j$, где $\{e_i\}_{i=1}^m$ - базис $\mathbb{R}^m$ и $\{g_j\}_{j=1}^n$ - базис $\mathbb{R}^n$, иными словами:

$$vect(e_i \otimes g_j) = v_{j+(i-1)m}, \quad \varepsilon_{ij} \leftrightarrow \varepsilon_j^i,$$

но тогда

$$vect(x \otimes y) = vect(\xi^i e_i \otimes \eta^j g_j) = \xi^i \eta^j v_{j+(i-1)m}.$$

□

3.2 Формула векторизации

NB. 3. Напомним, что под тензорным произведением матриц A и B мы понимаем матрицу C, такую что:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.1. *(основная формула векторизации) Пусть* $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m, n)$, $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, p)$ *и* $C \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(p, q)$, *тогда:*

$$vect(A \cdot B \cdot C) = (C^T \otimes A) \cdot vect(B).$$

Доказательство. С одной стороны, для пары индексов (α, β) имеем:

$$(ABC)_{\alpha,\beta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{\alpha i} b_{ij} c_{j\beta}$$

С другой стороны, строка с номером $\alpha + (\beta - 1)m$ в матрице $C^T \otimes A$ имеет вид $c_{j\beta} a_{\alpha i}$, именно:

$$(C^T \otimes A)_{\alpha+(\beta-1)m} = \begin{bmatrix} c_{1\beta} a_\alpha & c_{2\beta} a_\alpha & \dots & c_{p\beta} a_\alpha \end{bmatrix}, \quad a_\alpha = \begin{bmatrix} a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \dots & a_{\alpha n} \end{bmatrix}.$$

Осталось только вычислить соответствующую координату результирующего вектора:

$$[(C^T \otimes A) \cdot vect(B)]_{\alpha+(\beta-1)m} = \sum_{j=1}^{p} (C^T)_{\beta j} \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{\alpha i} b_{ij} c_{j\beta}.$$

□

NB. 4. Важные частные случаи:

- умножение слева на матрицу:

$$vect(AB) = (I \otimes A) \cdot vect(B).$$

- умножение справа на матрицу:

$$vect(BC) = (C^T \otimes I) \cdot vect(B).$$

3.3 Теорема о представлении

Лемма 3. *Пусть* $\{\varepsilon^i_j\}_{i=1\dots n}^{j=1\dots n}$ *- базис пространства* $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$, *тогда*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \varepsilon^j_j \otimes \varepsilon^i_i = \mathrm{id}_{Mat(n)}$$

Доказательство. Действительно, для произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ имеем

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a^i_j \varepsilon^j_i = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon^i_i A \varepsilon^j_j.$$

Далее, используем теорему о векторизации и произвольность выбора матрицы A:

$$vect(A) = \sum_{i,j=1}^{n} vect(\varepsilon^i_i A \varepsilon^j_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\varepsilon^j_j \otimes \varepsilon^i_i) \cdot vect(A).$$

□

Теорема 3.2. *Для произвольного линейного преобразования* $\varphi \in \mathrm{End}(\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n))$ *в* $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ *найдутся такие наборы* $\{B_k\}$ *и* $\{C_k\}$*, что:*

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot A \cdot C_i.$$

Доказательство. Пусть (прибегая к немому суммированию)

$$\varphi \varepsilon^j_i = \phi^{rj}_{is} \varepsilon^s_r,$$

тогда для матрицы A будем иметь:

$$\varphi(A) = \varphi\left(a^i_j \varepsilon^j_i\right) = a^i_j \phi^{rj}_{is} \varepsilon^s_r = \phi^{rj}_{is} \cdot \varepsilon^i_r A \varepsilon^s_j = (\phi^{rj}_{is} \varepsilon^i_r) \cdot A \cdot \varepsilon^s_j.$$

Таким образом, $B_k = (\phi^{rj}_{is} \varepsilon^i_r)$ и $C_k = \varepsilon^s_j$. В завершение доказательства, приведем "матричный" вид оператора φ при векторизации:

$$vect(\varphi(A)) = \phi^{rj}_{is} (\varepsilon^j_s \otimes \varepsilon^i_r) \cdot vect(A) = L_\varphi \cdot vect(A).$$

□

NB. 5. В случае, когда отображение φ является положительно определенным и симметричным, полученная выше формула принимает более простой вид:

$$\varphi(A) = \sum_k B_k A B_k^T.$$