δ

Лекция 4

Индуцированная евклидова структура

Содержание лекции:

В настоящей лекции мы изучим свойства естественного изморофизма, порожденного метрической формой. Будет введено понятие биортогонального базиса и описан еще один способ разложения произвольного вектора по заданному базису в евклидовом пространстве. Полученные результаты дадут представление о том, какую роль играет введение ортогонального базиса в пространстве.

Ключевые слова:

Индуцированная евклидова структура, теорема Рисса, биортогональный базис, явный вид изморфизма, поднятие и опускание индекса у тензора.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

4.1 Изоморфизм X_E и X_E^*

Теорема 4.1. *Метрическая форма $g(x,y) = \langle x,y \rangle$ индуцирует естественный изоморфизм $\sigma : X_E \to X_E^*$ пространств X_E и X_E^*:*

$$\forall y \in X_E \quad \tilde{x}(y) = \langle x, y \rangle \quad \tilde{x} = \sigma(x).$$

▶

Отображение σ *аддитивно*:

$$\sigma(x_1+x_2)(y) = \langle x_1+x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = \sigma(x_1)(y)+\sigma(x_2)(y) = (\sigma(x_1)+\sigma(x_2))(y).$$

Отображение σ *полулинейно*:

$$\sigma(\lambda x)(y) = \langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda}\sigma(x)(y) = (\bar{\lambda}\sigma(x))(y).$$

Докажем *инъективность*. Пусть $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$, тогда

$$\forall y \in X_E \quad \sigma(x_1)(y) = \sigma(x_2)(y) \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x_1 - x_2, y \rangle = 0,$$

и из аксиом скалярного произведения следует, что $x_1 = x_2$. Для завершения доказательства нам необходимо проверить *сюръективность* отображения σ. Наличие этого свойства доказывается *теоремой Рисса*.

◀

Теорема 4.2. *(Рисс) Для любого $\tilde{x} \in X_E^*$ существует единственный $x \in X_E$, так что*

$$\forall y \in X_E \quad \tilde{x}(y) = \langle x, y \rangle.$$

▶

Пусть задан $\tilde{x} \neq 0$. Тогда

$$\exists\, u \in (\ker \tilde{x})^{\perp} : \quad u \neq 0.$$

Для произвольного $y \in X_E$ рассмотрим следующий вектор:

$$p_y = y - \frac{\tilde{x}(y)}{\tilde{x}(u)} u, \quad p_y \in \ker \tilde{x}.$$

Тогда будем иметь:

$$0 = \langle u, p_y \rangle = \langle u, y \rangle - \frac{\tilde{x}(y)}{\tilde{x}(u)} \|u\|^2,$$

откуда сразу следует, что

$$\tilde{x}(y) = \langle u, y \rangle \frac{\tilde{x}(u)}{\|u\|^2} = \langle x, y \rangle.$$

◀

Nota bene Таким образом, существует обратимое и линейное (с точностью до сопряжения) отображение

$$\sigma^{-1} : \quad X_E^* \to X_E.$$

Биортогональный базис

Nota bene Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис X_E и $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ - сопряженный ему базис X_E^*. При помощи отображения σ^{-1} "пересадим" векторы базиса $\left\{f^k\right\}_{k=1}^n$ в пространство X_E:

$$\sigma^{-1}(f^k) = e^k$$

Лемма 4.1. *Наборы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\left\{e^k\right\}_{k=1}^n$ обладают следующим свойством:*

$$\left\langle e^k, e_i\right\rangle = f^k(e_i) = \delta_i^k.$$

‖ Базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\left\{e^k\right\}_{i=1}^n$ называются **биортогональными**.

Nota bene Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$e_i = \sigma^{-1}(\sigma(e_i)) = \sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} f^k\right) = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ik}\sigma^{-1}\left(f^k\right) = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ik} e^k$$

Лемма 4.2. *Пусть g_{ij} - метрический тензор, тогда $\alpha_{ij} = g_{ji}$*

►

Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_{ik}\langle e^k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_{ik}\delta_j^k = \overline{\alpha}_{ij}.$$

◄

Nota bene Таким образом, если G - матрица Грама, тогда $\|\alpha_{ik}\| = \|g_{ki}\| = G$.

Nota bene Прямой проверкой можно убедиться, что

$$e^k = \sum_{i=1}^n \bar{\beta}^{ki} e_i, \quad \|\bar{\beta}^{ki}\| = G^{-1} = \|g^{ik}\|.$$

4.2 Поднятие и опускание индексов

Nota bene Пусть $x \in X_E$ и имеется два его разложения по биортогональным базисам $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\left\{e^k\right\}_{k=1}^n$:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$$

Лемма 4.3. *Имеют место соотношения:*

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}\xi_k, \quad \xi_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ki}\xi^i.$$

►
Прямой проверкой можно убедиться, что

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i \bar{g}_{ik} e^k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k = x.$$

◄

Nota bene Коэффициенты разложения ξ^i и ξ_k имеют вид:

$$\xi^i = \langle e^i, x\rangle, \quad \xi_k = \langle e_k, x\rangle.$$

Лемма 4.4. *Изоморфизм $\sigma : X_E \to E_X^*$ имеет следующий вид:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi^i g_{ik} f^k.$$

►
В этом можно убедиться прямой проверкой:

$$\sigma(x) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \sum_{k=1}^{n} \bar{g}_{ik} e^k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \overline{\xi^i} g_{ik}\sigma\left(e^k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \overline{\xi^i} g_{ik} f^k.$$

◄

Лемма 4.5. *Для ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ имеет место:*

$$e_i = e^i, \quad \xi_i = \xi^i \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Поднятием индекса называется процедура замены *нижнего индекса на верхний* в соответствии с формулой:

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}\xi_k,$$

Опусканием индекса называется процедура замены *верхнего индекса на нижний* в соответствии с формулой:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ki}\xi^i.$$

Nota bene Поднятие и опускание индексов у произвольных тензоров производится аналогично описанному для координат векторов. Именно, пусть $\omega \in \Omega_0^p$, тогда $\sigma(\omega) \in \Omega_1^{p-1}$ и получается с помощью следующего преобразования (опускание первого индекса):

$$\tilde{\omega}_{j_1}^{i_2,i_3,\ldots,i_p} = g_{j_1 i_1}\omega^{i_1,i_2,\ldots,i_p}$$