$\gamma$

# Лекция 3

## Аффинные отображения

**Содержание лекции:**
В этой лекции мы рассмотрим свойства отображений аффинных прострaнсв, которые сохраняют аффинную структуру. Эти отображения называются аффинными. Их структура весьма проста, но в приложениях играет исключительно важную роль. Мы приближемся к аффинной геометрии.

**Ключевые слова:**
Аффиное отбражение, дифференциал, биективность аффинного отображения, изоморфизм аффинных пространств, аффинная зависимость, аффинно-линейная функция, многообразие уровня.

**Авторы курса:**

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

**Ссылка на ресурсы:**
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

## 3.1 Основные определения

Пусть $\mathbb{A}_{\Bbbk} = (\mathbb{S}_A, \mathbb{V}_A, +)$, $\mathbb{B}_{\Bbbk} = (\mathbb{S}_B, \mathbb{V}_B, +)$ - аффинные пространства.

**Аффинным отображением** пространства $\mathbb{A}_{\Bbbk}$ в пространство $\mathbb{B}_{\Bbbk}$ называется всякое отображение, обладающее свойством

$$\sigma(P + \vec{u}) = \sigma(P) + \varphi(\vec{u}), \quad P \in \mathbb{A}_{\Bbbk}, \quad \vec{u} \in \mathbb{V}_A(\Bbbk),$$

где $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathbb{V}_A, \mathbb{V}_B)$ - линейное отображение.

**Лемма 3.1.** *Отображение $\varphi$ однозначно определяется по $\sigma$:*

$$\varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)}$$

▶
Действительно, пусть $Q \in \mathcal{A}$, тогда

$$\sigma(Q) = \sigma\left(P + \overrightarrow{PQ}\right) = \sigma(P) + \varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right).$$

◀

Отображение $\varphi$ называется **дифференциалом** отображения $\sigma$ и обозначается $d\sigma$.

---

**Пример 3.1.** Примеры аффинных преобразований:

1. параллельный перенос $\varphi = t_{\vec{w}}$:

$$t_{\vec{w}}\left(P + \vec{v}\right) = \left(P + \vec{w}\right) + \vec{v}$$

2. преобразование поворота $\varphi = r_\theta$:

$$r_\theta\left(P + \vec{v}\right) = P + R_\theta(\vec{v}).$$

---

***Nota bene*** Векторизация пространств $\mathbb{A}_{\Bbbk}$ и $\mathbb{B}_{\Bbbk}$ относительно точек $O$ и $O'$ соответственно дает:

$$\sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + \vec{b}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{O'\sigma(O)} \in \mathbb{V}_B(\Bbbk),$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ - радиус вектор точки $P \in \mathbb{A}_{\Bbbk}$.
▶
Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что

$$\sigma(P) = \sigma(O + \overrightarrow{OP}) = \sigma(O) + d\sigma(\overrightarrow{OP}),$$
$$\sigma(\overrightarrow{OP}) \triangleq \overrightarrow{O'\sigma(P)} = \overrightarrow{O'\sigma(O)} + d\sigma(\overrightarrow{OP}) \quad \Rightarrow \quad \sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + \vec{b}.$$

◀

**Лемма 3.2.** *Пусть $\sigma : \mathbb{A}_{\Bbbk} \to \mathbb{B}_{\Bbbk}$ - аффинное отображение, тогда*

$$\sigma\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha^i P_i\right) = \sum_{i=0}^{m}\alpha^i\sigma(P_i),$$

*для любой барицентрической линейной комбинации системы точек $\{P_i\}_{i=0}^m$.*

▶

Векторизация пространства $\mathbb{A}_{\Bbbk}$ дает следующую цепочку равенств:

$$\sigma\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha^i\overrightarrow{OP_i}\right) = \sigma\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha^i\overrightarrow{OP_i}\right) + \vec{b} = \sum_{i=0}^{m}\alpha^i(d\sigma(\overrightarrow{OP_i}) + b) = \sum_{i=0}^{m}\alpha^i\sigma(\overrightarrow{OP_i}).$$

◀

## 3.2 Изоморфизм аффинных пространств

**Лемма 3.3.** *Аффинное отображение $\sigma : \mathbb{A}_{\Bbbk} \to \mathbb{B}_{\Bbbk}$ биективно тогда и только тогда, когда его дифференциал биективен.*

▶

Выберем начала отсчета $O$ и $O'$ в $\mathbb{A}_{\Bbbk}$ и $\mathbb{B}_{\Bbbk}$ так, чтобы $\sigma(O) = O'$. Тогда отображение $\sigma$ в векторизованной форме будет совпадать со своим дифференциалом $d\sigma$, откуда следует доказательство утверждения.

◀

**Лемма 3.4.** *Пусть $\varphi : \mathbb{A}_{\Bbbk} \to \mathbb{B}_{\Bbbk}$ - биективное аффинное отображение. Тогда $\sigma^{-1}$ является также аффинным отображением, причем $d\left(\sigma^{-1}\right) = (d\sigma)^{-1}$.*

▶

Пусть отображение $\sigma : \mathbb{A}_{\Bbbk} \to \mathbb{B}_{\Bbbk}$ задается парой $(d\sigma, \vec{b})$ в том смысле, что

$$\sigma(\vec{r}) = d\sigma(\vec{r}) + \vec{b}.$$

Пусть отображение $\chi : \mathbb{B}_{\Bbbk} \to \mathbb{A}_{\Bbbk}$ также задается парой $(d\chi, \vec{c})$, тогда

$$\chi \circ \sigma \leftrightarrow (d\chi, \vec{c}) \circ (d\sigma, \vec{b}) = (d\chi \circ d\sigma, d\chi(\vec{b}) + \vec{c}),$$

Откуда сразу получаем:

$$\sigma^{-1} \leftrightarrow (d\sigma^{-1}, -d\sigma^{-1}(\vec{b})),$$

иными словами

$$\sigma^{-1}(\vec{r}) = d\sigma^{-1}(\vec{r}) - d\sigma^{-1}(\vec{b}).$$

◀

**Изоморфизмом аффинных пространств** называется биективное аффинное отображение.

**Лемма 3.5.** *Аффинные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

▶

При аффинном отображении $\sigma : \mathbb{A}_{\Bbbk} \to \mathbb{B}_{\Bbbk}$ всякая плоскость $\mathbb{P}_k = P_0 + \mathbb{U}(\Bbbk)$ пространства $\mathbb{A}_{\Bbbk}$ переходит в плоскость $\sigma(\mathbb{P}_{\Bbbk}) = \sigma(P_0) + d\sigma(\mathbb{U})$ пространства $\mathbb{B}_{\Bbbk}$. Если $\sigma$ - биективно, то $\dim \mathbb{P}_{\Bbbk} = \dim \sigma(\mathbb{P}_{\Bbbk})$.

◀

**Лемма 3.6.** *При изоморфизме $\sigma : \mathbb{A}_{\Bbbk} \to \mathbb{B}_{\Bbbk}$ системы точек $\{P_i\}_{i=0}^m$ и $\{\sigma(P_i)\}_{i=0}^m$ аффинно зависимы или аффинно независимы одновременно.*

▶

Тривиально проверяется рассмотрением соответствующих наборов радиус-векторов.

◀

## 3.3 Аффинно-линейные функции

> **Аффинно-линейной функцией** на аффинном пространстве $\mathbb{A}_{\Bbbk}$ называется отображение $f : \mathbb{A}_{\Bbbk} \to \Bbbk$, обладающее свойством:
>
> $$f(P + \vec{v}) = f(P) + \alpha(\vec{v}), \quad P \in \mathbb{A}_{\Bbbk}, \quad \vec{v} \in \mathbb{V}(\Bbbk).$$

***Nota bene*** В векторизованной форме с началом в точке $O \in \mathbb{A}_{\Bbbk}$, аффинно-линейная функция $f$ записывается в виде:

$$f(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) + b, \quad b \in \Bbbk, \quad b = f(O).$$

или в координатах:

$$f(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i + b.$$

***Nota bene*** *Многообразия уровня* $f(P) = c$ аффинно линейной функции представляют собой параллельные гиперплоскости с направляющим подпространством, задаваемым уравнением $df(\vec{v}) = 0$.

**Лемма 3.7.** *Барицентрические координаты - это аффинно-линейные функции.*

▶

Пусть $\{\xi^i\}_{i=0}^n$ - барицентрические координаты относительно системы точек $\{P_i\}_{i=0}^n$. Возьмем точку $P_0$ за начало отсчета и векторизуем пространство $\mathcal{A}$. Тогда $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ - будут координатами относительно базиса $\left\{\overrightarrow{P_0 P_i}\right\}_{i=1}^n$. Следовательно, $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ - аффинно-линейные функции. Так как $\xi^0 = 1 - \sum_{i=1}^n \xi^i$, то $\xi^0$ - также аффинно-линейная функция. ◀