ϵ

Лекция 5

Эрмитов оператор

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы рассматриваем частный, но очень важный случай оператора, который обладает свойством эрмитовости. Данный тип операторов часто встречается в различных приложениях, а его теория позволяет быстро получить важные свойства эрмитовых и симметрических матриц. Этими свойствами мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

Ключевые слова:
Сопряженный оператор, эрмитовски сопряженный оператор, матрица сопряженного оператора, самосопряженный оператор, эрмитов оператор, спектр и собственные векторы эрмитова оператора, спектральная теорема для эрмитова оператора.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

5.1 Сопряженный оператор

Nota bene Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X)$ - эндоморфизм пространства $X(\Bbbk)$. Напомним, что *сопряженным* к φ называется линейный оператор $\varphi^* \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(X^*)$, определяемый следующим образом:

$$\forall x \in X(\Bbbk), \quad \forall f \in X^*(\Bbbk) \quad f(\varphi x) = (\varphi^* f)(x).$$

Операция сопряжения обладает следующими свойствами:

- аддитивность: $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
- однородность: $(\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*$;
- контравариантность: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$;
- инволютивность: $(\varphi^*)^* = \varphi$.

Из данных свойств, в частности, следует, что для данного оператора φ сопряженный ему определяется единственным образом.

Лемма 5.1. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис пространства $X(\Bbbk)$ и A_φ - матрица оператора φ в этом базисе. Тогда в сопряженном к $\{e_j\}_{j=1}^n$ базисе пространства $X^*(\Bbbk)$ матрица φ^* будет иметь вид A^T:*

$$\varphi \leftrightarrow A_\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi^* \leftrightarrow A_{\varphi^*} = A_\varphi^T.$$

5.2 Эрмитовски сопряженный оператор

> Оператор $\varphi^\dagger \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X_E)$ называется **эрмитовски сопряженным** к оператору φ, если он обладает следующим свойством:
>
> $$\langle x, \varphi y\rangle = \langle \varphi^\dagger x, y\rangle.$$

Теорема 5.1. *(существования) Для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X_E)$ существует единственный эрмитовски сопряженный оператор $\varphi^\dagger$.*

▶

Действительно, с использованием изоморфизма $\sigma : X_E \to X_E^*$ указанное выше условие можно переформулировать, именно:

$$\langle x, \varphi y\rangle = \sigma(x)(\varphi y) = [(\varphi^* \circ \sigma)x](y),$$
$$\langle \varphi^\dagger x, y\rangle = \sigma(\varphi^\dagger x)(y) = [(\sigma \circ \varphi^\dagger)x](y),$$

откуда сразу следует

$$\varphi^\dagger = \sigma^{-1} \circ \varphi^* \circ \sigma,$$

где φ^* сопряжен к φ. Из его единственности следует единственность $\varphi^\dagger$.

◀

Nota bene Свойства операции эрмитовского сопряжения теже, что и свойства операции сопряжения.

Лемма 5.2. *Пусть* $\{e_j\}_{j=1}^n$ *- базис евклидова пространства* $X_E(\mathbb{C})$ *и* G *- его матрица Грама. Тогда если* A_φ *- матрица оператора* φ *в этом базисе, то матрица* $\varphi^\dagger$ *будет имеет вид*

$$A_{\varphi^\dagger} = G^{-1}A^\dagger G, \quad A^\dagger = \bar{A}^T.$$

▶
По определению скалярного произведения:

$$\langle x, \varphi y\rangle = \xi^\dagger G(A_\varphi \eta) = (\xi^\dagger G A_\varphi G^{-1})G\eta = (G^{-1}A_\varphi^\dagger G\xi)^\dagger G\eta = \langle \varphi^\dagger x, y\rangle.$$

◀

5.3 Эрмитовский оператор

> Оператор, обладающий свойством $\varphi^\dagger = \varphi$ называется **самосопряженным**, если $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ и **эрмитовским**, если $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Nota bene Матрицы самосопряженного φ и эрмитовского ψ операторов обладают соответственно свойствами:

$$A_\varphi^T = A_\varphi, \quad B_\psi^\dagger = B_\psi.$$

Пример 5.1. Примеры матрицы A самосопряженного оператора и матрицы B эрмитовского оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}.$$

Nota bene В случае вещественного поля $\mathbb{R}$ операции $\dagger$ и T совпадают.

5.4 Спектральные свойства эрмитова оператора

Лемма 5.3. *Все собстdенные значения эрмитова оператора* φ *вещественны.*

▶
Пусть λ - собственное значение φ и x - соответствующий собственный вектор. Тогда

$$\langle \varphi x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle, \quad \langle x, \varphi x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \lambda$$

◀

Лемма 5.4. *Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:*

$$\varphi x_1 = \lambda_1 x_1, \quad \varphi x_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2.$$

►
Действительно,

$$\begin{gathered} \langle \varphi x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \varphi x_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle \\ \lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle, \quad \overline{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \Rightarrow \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0. \end{gathered}$$

◄

Лемма 5.5. *Если L - инвариантное подпространство эрмитова оператора φ, тогда $L^\perp$ - также инвариантное подпространство.*
►
Пусть $x \in L$ и $y \in L^\perp$, тогда

$$0 = \langle \varphi x, y \rangle = \langle x, \varphi y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi y \in L^\perp.$$

◄

Теорема 5.2. *Эрмитов оператор φ явяется оператором скалярнгго типа.*
►
Покажем, что собсвенные векторы φ образуют базис $X_E(\mathbb{C})$. Проведем доказательство от противного: пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ - максимальный ЛНЗ набор:

$$\varphi x_j = \lambda_j x_j, \quad j = 1 \dots m \quad m < n = \dim_{\mathbb{C}} X_E.$$

Пусть далее

$$L = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle_{\mathbb{C}}, \quad M = L^\perp, \quad \varphi_M : M \to M$$

Так как M -инвариантное подпространство φ, существует по крайней мере один вектор $\tilde{x} \in M$, такой что

$$\varphi_M \tilde{x} = \tilde{\lambda} \tilde{x}.$$

Но $\tilde{x} \perp L$ и значит $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \tilde{x}\}$ - ЛНЗ. Противоречие.
◄

Теорема 5.3. *(Спектральная теорема для эрмитова оператора) Пусть $\varphi : X_E \to X_E$ - эрмитов оператор и $\{e_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ X_E, состоящий из собственных векторов φ, тогда:*

$$\varphi(*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle *, e_i \rangle e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$