Лекция 1

Аксиоматика множеств

Содержание лекции:
Данная вводная лекция посвящена одному из фундаментальных понятий математики - множеству. Здесь мы обсудим современное представление о множествах и коротко обсудим наиболее известную систему аксиом, которая описывает данную математическую структуру.

Ключевые слова:
Понятие множества по Кантору, аксиома Фреге, парадоксы теории множеств, элемент, отношение принадлежности, подмножество, система аксиом ZF, аксиома выбора, другие системы аксиом.

Авторы курса:

Трифанов Александр

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Интуиция и примеры

Nota bene Ввиду того, что существует несколько систем аксиом, описывающих множество как объект, мы, перед тем как сформулировать некоторые из них, дадим определение, принадлежащее автору теории множеств - Георгу Кантору:

> **Множеством** называется любое соединение определенных различных(различимых) объектов нашего умозрения или нашей мысли (которые будут называться элементами множетва) в единое целое.

Nota bene *Задать* множество можно одним следущих способов:

1. табличная запись:
$$\{a, b, a, b, a, c\}.$$
2. задание предиката (правила)
   - перечисление элементов (достаточное для понимания правила):
   $$\omega = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$
   - задание элемента общего вида:
   $$2 \cdot \mathbb{Z}, \quad a_n = 2^n, \quad a + 2\sqrt{2}.$$

Задача 1.1. *Сколько элементов содержится в множестве зеленых яблок?*

Пример 1.1. Примеры множеств:

1. Множество арабских цифр:
$$\mathrm{Dig} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
2. Числовые множества:
$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{A}, \quad \mathbb{C}, \quad \mathbb{H}_4$$
3. Отрезки и интервалы:
$$[a, b], \quad [0, \infty), \quad (-\infty, \infty).$$

Nota bene Следует отметить, что не любое мыслимое правило может быть использовано задания множества. Принятие следующей **аксиомы Фреге** привело к внешней "дискредитации" теории множеств и ряду парадоксов:

Для любого свойства $\mathcal{P}$ *существует множество*
$\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ всех объектов x, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

Пример 1.2. Для примера приведем известные падоксы Эвбулида, Эпименида, Рассела, парадокс лжеца и парадокс самоприменимости.

1.2 Принадлежность и включение

Nota bene Введем понятие, которое является исходным в теории множеств (Set):

> Объект x теории Set называется **элементом** объекта y этой теории, если x находится в отношении $\in$ с объектом y.

Nota bene Обычно используют запись $x \in y$ и говорят, что x *принадлежит* y.

Nota bene Принадлежность, вообще говоря, не обладает *свойством транзитивности*, то есть:

$$x \in y, \quad y \in z \quad \not\Rightarrow \quad x \in z.$$

Пример 1.3. Рассмотрим два множества:

$$A = \{x, \{x\}\} \quad B = \{\{x\}\},$$

и $x \in \{x\}$, однако $x \in A$ и при этом $x \notin B$.

Nota bene Позже мы введем аксиому, <u>запрещающую</u> конструкции вида $x \in x$.

> Объект u теории Set называется **подмножеством** объекта w этой теории если
>
> $$\forall x \in u \quad \Rightarrow \quad x \in w$$

Nota bene Обычно используется запись $u \subseteq w$ и говорят, что u *содержится* в w. Если при этом $w \not\subseteq v$, то говорят, что u содержится в w *строго* и записывают $u \subset w$.

Лемма 1.1. *Отношение $\subseteq$ обладает следующими свойствами:*

- *рефлексивность:* $u \subseteq u$;
- *анстисимметричность:* $v \subseteq w, \quad w \subseteq v \quad \Rightarrow \quad v = w$;
- *транзитивность:* $u \subseteq v, \quad v \subseteq w \quad \Rightarrow \quad u \subseteq w$.

Nota bene Свойство антисимметричности в теории Set является, по существу, определением *равенства* его объектов.

Пример 1.4. Примеры подмножеств:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}, \quad \{1, 3, 5, 7\} \subseteq \mathrm{Dig}, \quad B \subseteq A.$$

1.3 Система аксиом ZF+C

Nota bene Наиболее известная система аксиом теории Set была предложена Э. Цермелло и А. Френкелем. В этой системе есть единственный тип объектов - множество и единственный предикат $\in$. Множества и отношение принадлежности подчинены следующим требованиям:

ZF-1. (Аксиома экстенсиональности) Два множества x и y равны, если они содержат одни и те же элементы:

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad (z \in x \quad \Leftrightarrow \quad z \in y).$$

ZF-2. (Аксиома существования) Существует пустое множество (утверждение $x \in \varnothing$ *ложно* для любого x):

$$x \in \varnothing \quad \Rightarrow \quad \forall \mathcal{P} \quad \mathcal{P}(x).$$

ZF-3. (Аксиома неупорядоченных пар) Для любых двух объектов x и y существует множество $\{x, y\}$:

$$\{x, y\} = \{y, x\}\,, \quad \{x, x\} = \{x\}\,.$$

ZF-4. (Аксиома объединения) Для любого множества x множеств y_α существует их объединение $z = \bigcup y_\alpha$:

$$u \in z = \bigcup_{y \in x} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y \in x : \quad u \in y.$$

ZF-5. (Аксиома бесконечности) Существует такое множество ω, что

$$\varnothing \in \omega, \quad \forall x \in \omega \quad \{x, \{x\}\} \in \omega.$$

ZF-6. (Аксиома подмножеств) Для любого множества x и любого свойства $\mathcal{P}$ существует множество всех $y \in x$, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

ZF-7. (Аксиома степени) Для любого множества x существует множество ω такое, что

$$y \in \omega \quad \Leftrightarrow \quad y \subseteq x.$$

ZF-8. (Аксиома выбора) Если x - объединение непересекающихся непустых множеств x_α, то существует по крайней мере одно подмножество $y \subseteq x$, которое пересекается с каждым из x_α ровно по одному элементу.

ZF-9. (Аксиома регулярности) Принадлежности вида $x \in x$ *запрещены*:

$$\exists\, x \in y : \quad \forall z \in y \quad z \notin x.$$

Nota bene Кроме представленной выше системы аксиом **ZF**, дополненной аксиомой выбора **C**, существуют и другие системы: Гёделя-Бернайса (**GB**), теории типов (**PM, NF, ML**), система Гротендика (**ZFG**), теория гипермножеств (**ZF$^-$**).