ρ

Лекция 15

Преобразование координат на плоскости

Содержание лекции:
В настоящей мы рассмотрим преобразования координат, которые не меняют порядок алгебраических кривых. Это так называемые аффинные преобразования. К ним относятся трансляция и поворот. Здесь мы обсудим и обобщим данные два преобразования, а также покажем каким образом их можно использовать для решения геометрических задач.

Ключевые слова:
Параллельный перенос, отнесенные к вершине уравнения кривых второго порядка, поворот, переход к канонической системе координант, обобщение поворота, матрица перехода, ортогональные матрицы, общий вид преобразования координат.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

15.1 Параллельный перенос (трансляция)

> **Параллельным переносом** на плоскости называется такое преобразование прямолинейной системы координат, при котором меняется точка начала координат, но не меняется ориентация осей:

Nota bene Если $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(O', \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ - два кординатных репера, тогда при трансляции имеет место

$$S = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \to \quad (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2) = S'$$

Nota bene Пусть $\vec{r}$ - радиус вектор точки M относительно S и $\vec{r}_1$ - радиус-вектор той же точки относительно S', тогда **прямое преобрзование** от S к S' имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}, \quad \vec{a} = O\vec{O}'.$$

Nota bene Пусть $S = xOy$ и $S' = x'Oy'$ - декартовы прямоугольные системы координат, тогда

$$x = \alpha + x_1, y = \beta + y_1.$$

где

$$\vec{r} = (x, y), \quad \vec{r}_1 = (x_1, y_1), \quad a = (\alpha, \beta).$$

Nota bene В матричной форме прямое преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X = V + X_1.$$

Nota bene Обратное преобразование при тех же обозначениях имеет вид:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{a}.$$

15.2 Уравнения кривых, отнесенные к вершине

Применим описанный выше формализм к задаче об уравнениях линий.

Пример 15.1. Эллипс задан в канонической системе координат уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Найти его уравнение, когда начало координат находится в его левой вершине.
►
Имеем следующее преобразование:

$$x = x_1 - a, \quad y = y_1,$$

которое дает

$$\frac{(x_1 - a)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Вводя обозначения $p = b^2/a$ и вспоминая, что $b^2 = a^2 - c^2$ имеем:

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Это - уравнение эллипса, отнесенное к левой вершине. ◀

Рассмотрим другую задачу.

Пример 15.2. Гипербола задана в канонической системе координат уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Найти ее уравнение, когда начало координат находится в ее правой вершине.
▶
Имеем следующее преобразование:

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1,$$

которое дает

$$\frac{(x_1 + a)^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Вводя обозначения $p = b^2/a$ и вспоминая, что $b^2 = c^2 - a^2$ имеем:

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Это - уравнение гиперболы, отнесенное к правой вершине вершине. ◀

Nota bene Таким образом, все три типа кривых задаются одним и тем же уравнением

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2.$$

При фиксированном p и изменяющемся $\varepsilon \in [0, +\infty)$ мы последовательно получаем: окружность ($\varepsilon = 0$), эллипс ($\varepsilon \in (0, 1)$), параболу ($\varepsilon = 1$) и гиперболу ($\varepsilon \in (1, +\infty)$).

15.3 Поворот

> **Поворотом** называется такое преобразование прямолинейной системы координат, при котором начало координат не меняется, но согласованно меняется ориентация осей.

Nota bene Если $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ - два координатных репера, тогда при повороте имеет место

$$S = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \to \quad (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2) = S'$$

Nota bene При повороте длины базисных векторов и угол между ними не меняются. Рассмотрим случай, когда

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{f}_1| = |\vec{f}_2| = 1, \quad (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0.$$

Из геометрических свойств тогда следует:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = -\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2. \end{cases}$$

Nota bene Полученные выражения можно записать в матричной форме:

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

‖ Матрица $T = T_\theta$ называется **матрицей Эйлера** поворота плоскости на угол θ.

Лемма 15.1. *Прямое преобразование координат от S к S' имеет вид:*

$$\begin{cases} x = \cos\theta \cdot x_1 - \sin\theta \cdot y_1, \\ y = \sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot y_1. \end{cases}$$

►
Пусть радиус-вектор $\vec{r}_M$ точки M имеет координаты (x, y) в S и (x_1, y_1) - в S', тогда

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_1\vec{f}_1 + y_1\vec{f}_2.$$

Подставляя вместо $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ выражающие их линейные комбинации $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, получим

$$x_1\vec{f}_1 + y_1\vec{f}_2 = x_1(\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2) + y_1(-\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2) =$$
$$(\cos\theta \cdot x_1 - \sin\theta \cdot y_1) \cdot \vec{e}_1 + (\sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot y_1) \cdot \vec{e}_2.$$

Откуда сразу получаем искомые выражения.
◄

Nota bene В матричной форме полученные выражения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X = T \cdot X_1.$$

Пример 15.3. Пусть дано уравнение гиперболы $xy = 1$. Получить ее каноническое уравнение.
►
Для нахождения канонического уравнения выберем для начала подходящую (каноническую) систему координат. Запишем семейство уравнений, полученных поворотом заданной системы координат на всевозможные углы:

$$(\cos\theta \cdot x_1 - \sin\theta \cdot y_1) \cdot (\sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot y_1) = 1$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}\right) \cdot \sin 2\theta + x_1 y_1 \cos^2 2\theta = 1$$

Известно, что каноническое уравнение не содержит слагаемых вида $x_1 y_1$, поэтому будем рассматривать только такие углы, для которых $\cos 2\theta = 0$. Отсюда сразу находим $\theta = \pi/4$ и каноническое уравнение:

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = 1.$$

◀

15.4 Обобщение поворота

Рассмотрим более общий вид преобразования базиса на плоскости:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = t_1^1 \cdot \vec{e}_1 + t_1^2 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = t_2^1 \cdot \vec{e}_1 + t_2^2 \cdot \vec{e}_2 \end{cases}$$

> Матрица T, содержащая коэффициенты разложения векторов базиса $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ в линейные комбинации векторов $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ называется **матрицей перехода** от базиса E к базису F.

Nota bene В матричной форме имеем:

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Nota bene Соответствующее преобразование координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Nota bene Без ограничения общности, будем полагать, что

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0,$$

и рассмотрим условия, при которых преобразование координат будет сохранять длины и взаимную ориентацию осей. В случае длин имеем:

$$|\vec{f}_1|^2 = (\vec{f}_1, \vec{f}_1) = |\vec{e}_1| = 1 \quad \Rightarrow \quad (t_1^1)^2 + (t_1^2)^2 = 1,$$
$$|\vec{f}_2|^2 = (\vec{f}_2, \vec{f}_2) = |\vec{e}_2| = 1 \quad \Rightarrow \quad (t_2^1)^2 + (t_2^2)^2 = 1.$$

Аналогично для углов между осями:

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1^1 \cdot t_2^1 + t_1^2 \cdot t_2^2 = 0$$

Перечисленные выше условия могут быть записаны в матричной форме:

$$T^T \cdot T = T \cdot T^T = I$$

Ортогональной называется матрица T, обладающая следующим свойством:

$$T^T \cdot T = T \cdot T^T = I.$$

Nota bene Таким образом, условию преобразования, при котором сохраняются длины и углы является ортогональность матрицы перехода.

Лемма 15.2. *Все ортогональные* 2×2*-матрицы являются матрицами Эйлера.*

15.5 Общий вид преобразования координат

Рассмотрим теперь общий случай, когда трансляция системы координат сопровождается ее обобщенным поворотом, иными словами мы рассмотрим преобразование

$$(O, E) \to (O', F), \quad OO' = \vec{a}, \quad F = E \cdot T.$$

Nota bene Имеет место векторное равенство:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a},$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор точки M в (O, E), $\vec{r}_1$ - ее радиус вектор в (O', F) и $\vec{a}$ - вектор трансляции. Пусть далее

$$\vec{r} = (x, y), \quad \vec{r}_1 = (x_1, y_1), \quad \vec{a} = (\alpha, \beta),$$

причем компоненты вектора $\vec{a}$ заданы в (O, E). Имеем следующее равенство:

$$x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + x_1 \cdot \vec{f}_1 + y_1 \cdot \vec{f}_2.$$

Выражая $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ через $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ мы получим покоординатное равенство:

$$\begin{cases} x = \alpha + x_1 \cdot t_1^1 + y_1 \cdot t_2^1, \\ y = \beta + x_1 \cdot t_1^2 + y_1 \cdot t_1^2. \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X = V + T \cdot X.$$

Полученное уравнение определяет общий вид преобразования прямолинейной системы координат на плоскости.

Преобразования такого вида называются **аффинными преобразованиями**.