2 Нормы векторов и матриц. Обусловленность

2.1 Понятие нормы вектора

Здесь и далее $X(\mathbb{R})$ -вещественное линейное пространство.

Def 1. Нормой вектора $x \in \mathbb{R}^n$ называется функция $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. $N(x) \geqslant 0, \quad N(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$
2. $N(\alpha x) = |\alpha| \cdot N(x), \quad \alpha \in \mathbb{R};$
3. $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$

NB. 1. *Норму $N(x)$ элемента x принято обозначать через $\|x\|$.*

Ex 1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, так что $x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T$, тогда:*

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi^i|$ *- 1-норма;*
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi^i|^2}$ *- 2-норма (евклидова);*
- $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\xi^i|^p}$ *- p-норма;*
- $\|x\|_\infty = \max_i |\xi^i|$ *- максимум-норма.*

NB. 2. *Введем на множестве норм на $\mathbb{R}^n$ отношение:*

$$N_a \sim N_b \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, C_{ab}, c_{ab} \in \mathbb{R} : \quad c_{ab} \cdot N_a \leqslant N_b \leqslant C_{ab} \cdot N_b.$$

Лемма 1. *Введенное отношение является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Проверим свойства отношения эквивалентности:

- рефлексивность $N_\alpha \sim N_\alpha$:
$$C_{\alpha\alpha} = c_{\alpha\alpha} = 1.$$
- симметричность: $N_\alpha \sim N_\beta \quad \Rightarrow \quad N_\beta \sim N_\alpha$:
$$C_{\beta\alpha} = 1/C_{\alpha\beta}, \quad c_{\beta\alpha} = 1/c_{\alpha\beta}.$$
- транзитивность: $N_\alpha \sim N_\beta, \quad N_\beta \sim N_\gamma \quad \Rightarrow \quad N_\alpha \sim N_\gamma$:
$$C_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\beta} \cdot C_{\beta\gamma}, \quad c_{\alpha\gamma} = c_{\alpha\beta} \cdot c_{\beta\gamma}.$$

$\square$

Лемма 2. *В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Нам достаточно показать эквивалентность норм N_1, N_p и N_∞.

- Докажем эквивалентность $N_1 \sim N_\infty$. Запишем следующие оценки:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1,$$
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant n \cdot \max_i |x_i| = n \cdot \|x\|_\infty.$$

- Теперь докажем эквивалнтность $N_p \sim N_\infty$. Дадим оценки:

$$\|x\|_\infty^p = (\max_{i\in[1,n]} |x_i|)^p \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p^p,$$
$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant n \cdot \|x\|_\infty^p.$$

$\square$

NB. 3. *В бесконечномерном случае доказанное выше утверждение уже места не имеет.*

2.2 Норма матрицы

Def 2. **Индуцированной матричной нормой** над $\mathbb{R}^n$ называется отображение

$$\|A\|_{op} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 3. *Индуцированная матрицная норма N_{op} является нормой.*

Доказательство. Прямая проверка аксиом нормы. $\square$

Лемма 4. *Следующие нормы в пространстве $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ являются индуцированными:*

- $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ - *максимум по столбцам;*
- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ - *максимум по строкам;*
- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$ - *спектральная норма;*

Доказательство. Докажем утверждение для N_1. Действительно, пусть $y = Ax$, тогда

$$\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |\eta^i| = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_j^i \xi^j| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i^j \xi^j| = \sum_{j=1}^n |\xi^j| \sum_{i=1}^n |a_i^j| \leqslant \sum_{j=1}^n |\xi^j| \cdot \max_j |a_i^j| = \|x\|_1 \cdot \|A\|_1.$$

Осталось показать, что существует элемент x, для которого достигается равенство. $\square$

Ex 2. *Следующая норма (называемая нормой Фробениуса), не является индуцированной:*

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}.$$

Лемма 5. *(о произведении) Имеет место следующее свойство:*

$$\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n) \quad \|A \cdot B\|_{op} \leqslant \|A\|_{op} \cdot \|B\|_{op}.$$

NB. 4. *Следствия леммы о произведении:*

- $\|E\|_{op} = 1$ - *индуцированная норма единичной матрицы;*
- $\|E\|_F \geqslant \sqrt{n}$ - *норма Фробениуса единичной матрицы;*
- $\|A^{-1}\|_{op} \cdot \|A\|_{op} \geqslant 1$ - *норма обратной матрицы.*

Лемма 6. *Пусть $\widetilde{A}$ - матрица, подобная матрице A, так что $\widetilde{A} = T^{-1}AT$, где T - некоторая обратимая матрица. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\|A\|_{op}/\kappa(T) \leqslant \|B\|_{op} \leqslant \|A\|_{op} \cdot \kappa(T), \quad \kappa(T) = \|T^{-1}\|_{op} \cdot \|T\|_{op}.$$

Доказательство. Запишем два неравенства, ограничивающих норму произведения

$$\|\widetilde{A}\|_{op} = \|T^{-1}AT\|_{op} \leqslant \|T^{-1}\|_{op}\|A\|_{op} \cdot \|T\|_{op} = \kappa(T) \cdot \|A\|_{op},$$
$$\|A\|_{op} = \|T\widetilde{A}T^{-1}\|_{op} \leqslant \|T\|_{op}\|\widetilde{A}\|_{op} \cdot \|T^{-1}\|_{op} = \kappa(T) \cdot \|\widetilde{A}\|_{op}.$$

Комбинация данных двух неравенств приводит к искомой оценке. □

Def 3. Норма называется **унитарно инвариантной**, если

$$\forall A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n) \quad \|\widetilde{A}\| = \|A\|, \quad \widetilde{A} = U^{\dagger}AU, \quad U^{\dagger} = U^{-1}.$$

Ex 3. *Примером унитарно-инвариантной нормы является норма Фробениуса.*

2.3 Число обусловленности

Def 4. **Числом обусловленности** матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n)$ относительно нормы N, называется вещественная положительная величина

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geqslant 1.$$

NB. 5. *Продемонстрируем связь между числом обусловленности и относительной погрешностью. Пусть даны решения x_0 и $\widetilde{x}_0$ соответственно двух систем:*

$$Ax = b, \quad A\widetilde{x} = \widetilde{b}.$$

Введем обозначения:

$$\delta x_0 = \frac{\widetilde{x}_0 - x_0}{x_0}, \quad \delta b = \frac{\widetilde{b} - b}{b}.$$

Тогда имеет место следующая лемма:

Лемма 7. *Относительная погрешность δx_0 решения связана с погрешностью δb правой части следующим образом:*

$$\|\delta x_0\| \leqslant \kappa(A) \cdot \|\delta b\|, \quad \|\delta x_0\| = \|\Delta x_0\|/\|x_0\|, \quad \|\delta b\| = \|\Delta b\|/\|b\|.$$

Доказательство. Прямое вычисление дает

$$A(\widetilde{x}_0 - x_0) = \widetilde{b} - b \quad \Rightarrow \quad \Delta x_0 = A^{-1} \cdot \Delta b \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x_0\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|.$$

Также имеем:

$$\|b\| = \|Ax_0\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_0\| \quad \Rightarrow \quad \|x_0\| \geqslant \|b\|/\|A\|.$$

В итоге, после деления, можно получить:

$$\|\delta x_0\| = \frac{\|\Delta x_0\|}{\|x_0\|} \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \kappa(A) \cdot \|\delta b\|.$$

□