

Домашнее задание # 5 : Вычисление определителей

Задача 2.1. Доказать равенство, используя свойства определителя:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & ba \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.2. Найти x из уравнения

1.

$$\begin{vmatrix} 5-x & 6 & -3 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

2.

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & -1 \\ -2 & x-2 & -2 \\ -1 & -3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 2.3. Вычислить определитель, разложив его по строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 13 & 21 & 2 & 10 \\ 4 & 10 & 16 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Задача 2.5. Пользуясь свойствами определителей, включая разложение по строке или столбцу, доказать тождества:

$$1. \quad \begin{vmatrix} \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) & \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) & \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \\ \cos(\frac{\beta-\gamma}{2}) & \sin(\frac{\beta+\gamma}{2}) & \cos(\frac{\beta+\gamma}{2}) \\ \cos(\frac{\gamma-\alpha}{2}) & \sin(\frac{\gamma+\alpha}{2}) & \cos(\frac{\gamma+\alpha}{2}) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \gamma)]$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

Задача 2.6. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{3} & \frac{14}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}.$$