Лекция 5

Начало алгебры многочленов

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы кратко рассмотрим основные понятия, связанные с кольцом многочленов и операциями в нем. Данная структура является основополагающей ряда разделов математики и часто служит источником нетривиальных примеров для алгебры и анализа.

Ключевые слова:
Многочлен, коэффициенты многочлена, степень многочлена, сумма и произведение многочленов, ассоциированные многочлены, делимость, остаток от деления, корень многочлена.

Авторы курса:

Трифанов А.И. Москаленко М.А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

5.1 Основные определения

Nota bene Пусть K - некоторое поле.

> **Многочленом от одной переменной** с коэффициентами из поля K будем называть формальную бесконечную сумму следующего вида:
>
> $$f(x) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots,$$
>
> в которой отличны от нуля только *некоторые* **коэффициенты** $a_0, a_1, a_2, \ldots \in K$, а t называется **формальной переменной**.

Nota bene Множество многочленов от переменной t будем обозначать через $K[t]$. Пусть далее $f, g \in K[t]$, так что

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m,$$

> **Суммой** двух многочленов f и g называется такой многочлен $h = f + g$, что
>
> $$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad c_k = a_k + b_k.$$

> **Произведением** двух многочленов f и g называется такой многочлен $p = fg$, что
>
> $$p(t) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j t^j, \quad d_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}.$$

Теорема 5.1. *Множество $K[t]$, наделенное операциями сложения и умножения является коммутативным ассоциативным кольцом.*

►

- Прямой проверкой нетрудно убедиться, что $K[t]$ - абелева группа по сложению с нейтральным элементом $0(t)$ и обратным для каждого $f(t)$, представляющим собой элемент $-f(t)$.
- Также прямой проверкой можно убедиться, что произведение индуцирует на $K[t]$ структуру коммутативного моноида с нейтральным элементом $1(t)$.
- Проверим дистибутивность: пусть $f, g, h \in K[t]$, и

  $$(f+g)h = \sum_{k=0} d_k t^k, \quad fh = \sum_{n=0} p_n t^n, \quad gh = \sum_{m=0} q_m t^m.$$

  тогда имеет место

  $$d_k = \sum i = 0^k (a_i + b_i) c_{k-i} = \sum i = 0^k (a_i c_{k-i}) + \sum i = 0^k (b_i c_{k-i}) = p_k + q_k,$$

  а это коэффициент многочлена $fh + gh$.

◄

Nota bene Полное название кольца $K[t]$ звучит так: *ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.*

Лемма 5.1. *Пусть $\sigma : K \to K[t]$ определено формулой $\sigma(\alpha) = \alpha + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \ldots$, тогда σ - вложение.*

►

Прямой проверкой легко убедиться, что σ - гомоморфизм. Пусть далее

$$\alpha \in \ker \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma(\alpha) = \alpha + 0t + \ldots = 0 + 0t + \ldots \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

Таким образом, σ - вложение.

◄

Nota bene В дальнейшем договоримся записывать $\alpha f(t)$ понимая под этим $\sigma(\alpha)f(t)$

5.2 Делимость в кольце многочленов

Два многочлена f и g называются **ассоциированными** (обозначают $f \sim g$), если $f = \alpha \cdot g$, где $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$.

Лемма 5.2. *Ассоциированность - отношение эквивалентности.*

►

Проверим свойства отношения:

- рефлексивность: $f = 1 \cdot f \quad \Rightarrow \quad f \sim f$;
- симметричность: $f \sim g \quad \Rightarrow \quad f = \alpha g \quad \Rightarrow \quad g = \frac{1}{\alpha} f \quad \Rightarrow \quad g \sim f$;
- транзитивность:

$$f \sim g, \quad g \sim h \quad \Rightarrow \quad f = \alpha g, \quad g = \beta h \quad \Rightarrow \quad f = \alpha\beta h \quad \Rightarrow \quad f \sim h.$$

◄

Степенью $\deg(f)$ многочлена $f \in K[t]$ называется максимальный номер его ненулевого коэффициента. Для нулевого многочлена $\theta(t)$ положим $\deg(\theta) = -\infty$. Если $\deg f = n \in \mathbb{N}_0$ то коэффициент a_n называется **сташим коэффициентом** многочлена f.

Лемма 5.3. *Пусть $f, g \in K[t]$ тогда имеют место следующие свойства:*

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g), \quad \deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}.$$

►
Пусть $\deg(f) = n$ и $\deg(g) = m$, и при этом

$$f = \sum_{i=0} a_i t^i \quad g = \sum_{j=0} b_j t^j, \quad fg = \sum_{k=0} c_k t^k,$$

тогда будем иметь

$$c_{n+m} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_{n+m-i} + a_n b_m + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i b_{n+m-i} = a_n b_m \neq 0.$$

При $k > n + m$ имеем $c_k = 0$ и, следовательно, $\deg(fg) = n + m$.
Доказательство второго свойства следует из того, что при $k > \max\{\deg(f), \deg(g)\}$ имеем

$$a_k = b_k = 0 \quad \Rightarrow \quad c_k = a_k + b_k = 0.$$

◄

Теорема 5.2. *Пусть $f, g \in K[t]$, причем $g \neq 0$, тогда существуют единственные $q, r \in K[t]$, такие что*

$$f = qg + r, \quad \deg(r) < \deg(g).$$

►
Пусть $\deg(f) = n$ и $\deg(g) = m$, а также

$$f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0, \quad g(t) = b_m t^m + \ldots + b_0.$$

Далее используем индукцию по n. При $n < m$ в качестве базы подходит

$$q = 0, \quad r = f.$$

Пусть, далее $n \geq m$ и для многочленов степени меньшей n утверждеие доказано. Так как

$$f_1(t) = f(t) - \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} g(t), \quad \deg(f_1) < n,$$

то по индукционному предположению

$$f_1 = q_1 g + r, \quad \deg(r) < m,$$

но тогда

$$f(t) = \left(q_1(t) + \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} \right) g(t) + r(t)$$

- искомое представление для $f(t)$.
Теперь докажем единственность. Пусть

$$q_1 g + r_1 = f = q_2 g + r_2, \quad \deg(r_1) < m, \quad \deg(r_2) < m.$$

Тогда

$$r_1 - r_2 = g(q_2 - q_1).$$

Пусть далее $q_1 \neq q_2$, имеем:

$$\deg\left((q_2 - q_1)g\right) = \deg(q_2 - q_1) + \deg(g) \geq m.$$

С другой стороны:

$$\deg(r_1 - r_2) \leq \max\left(\deg(r_1), \deg(r_2)\right) < m.$$

Противоречие. Значит $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$. ◀

> Говорят, что многочлен f **делится на многочлен** g (пишут $f \,\vdots\, g$), если существует такой многочлен h, что $f = gh$.

Лемма 5.4. *Если $f \,\vdots\, g$ и $g \,\vdots\, h$, тогда $f \,\vdots\, h$.*

▶
Из условия следует, что

$$f = pg, \quad g = qh \quad \Rightarrow \quad f = (pq)h.$$

◀

Лемма 5.5. *Пусть $f, g \,\vdots\, h$, тогда*

$$\forall p, q \in K[t] \quad (pf + qg) \,\vdots\, h.$$

▶
Имеем

$$f = \alpha h, \quad g = \beta h, \quad \alpha, \beta \in K[t] \quad \Rightarrow \quad fp + gq = (\alpha p + \beta q)h.$$

◀

Лемма 5.6. *Пусть $f \,\vdots\, g$, причем $f, g \neq 0$, тогда*

$$\deg(f) \geq \deg(g).$$

▶
Из условия следует, что

$$f = gh, \quad \in K[t], \quad h \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \deg(f) = \deg(g) + \deg(h) \geq \deg(g).$$

◀

Лемма 5.7. *Пусть $f \,\vdots\, g$, $f, g \neq 0$ и $\deg(f) = \deg(g)$, тогда $f \sim g$.*

▶
Из условий следует $f = gh$, $h \in K[t]$ и

$$\deg(g) = \deg(f) = \deg(g) + \deg(h) \quad \Rightarrow \quad \deg(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h \in K.$$

◀

Лемма 5.8. *Пусть* $f \vdots g$, $f, g \neq 0$ *и* $g \vdots f$, *тогда* $f \sim g$.

▶
Имеем
$$\deg(f) \geq \deg(g), \quad \deg(g) \geq \deg(f) \quad \Rightarrow \quad \deg(f) = \deg(g).$$
◀

5.3 Корень многочлена

Пусть $f \in K[t]$ и $\alpha \in K$. Число α называется **корнем** многочлена f степени m, если
$$f(t) \vdots (t-\alpha)^m, \quad f(t) \not\vdots (t-\alpha)^{m+1}.$$

Лемма 5.9. *Остаток от деления* $f \in K[t]$ *на* $(t-\alpha)$ *равен* $f(\alpha)$

▶
По теореме от делении с остатком имеем:
$$f(t) = (t-\alpha)q(t) + r(t), \quad \deg(r) \leq \deg(t-\alpha) = 1$$
Следовательно, $r(t) = r \in K$ и
$$f(\alpha) = 0 \cdot q(t) + r.$$
◀

Nota bene Если $f \in K[t]$ и α - корень $f(t)$, тогда $f(t) \vdots (t-\alpha)$.

Теорема 5.3. *(основная теорема алгебры) Любой многочлен из* $\mathbb{C}[t]$ *имеет корень из* $\mathbb{C}$.

Nota bene Пусть $f(t) \in \mathbb{C}[t]$, $\deg(f) = n$ и c - старший коэффициент f, тогда
$$f(t) = c(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\ldots(t-\alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{C},$$
причем не обязательно все α_j различны.

Nota bene Рассмотрим автоморфизм $\sigma : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]$, индуцированный операцией комплексного соряжения в $\mathbb{C}$:
$$\sigma(f(t)) = \bar{f}(t) = \bar{a}_n t^n + \ldots + \bar{a}_1 t + \bar{a}_0, \quad f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Лемма 5.10. *Пусть* $f \in \mathbb{C}[t]$ *и* $\alpha \in \mathbb{C}$ *- корень* f *кратности* m. *Тогда* $\bar{\alpha}$ *- корень* $\bar{f}$ *той же кратности* m.

▶
Из условия леммы имеем:
$$f(t) = (t-\alpha)^m g(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(\bar{t}) = (\bar{t} - \bar{\alpha})^m \cdot \bar{g}(\bar{t}).$$
Но это значит, что $\bar{\alpha}$ - корень $\bar{f}$ кратности k не меньшей m. Далее, $\alpha = \bar{\bar{\alpha}}$ - корень $f = \bar{\bar{f}}$ кратности не меньшей k, откуда $k = m$. ◀

Теорема 5.4. *Многочлен $f \in \mathbb{R}[t]$ степени $\deg(f) = n \geq 1$ со старшим коэффициентом c раскладывается в $\mathbb{R}[t]$ на множители:*

$$f(t) = c(t-\alpha_1)^{k_1}\dots(t-\alpha_s)^{k_s}\cdot(t^2+p_1t+q_1)^{m_1}\dots(t^2+p_rt+q_r)^{m_r},$$
$$D(t^2+p_it+q_i) = p_i^2 - 4q_i < 0, \quad i = 1\dots r.$$

Лемма 5.11. *Многочлен $f \in \mathbb{R}[t]$ нечетной степени всегда имеет действительный корень.*

►

Согласно предыдущей теореме, сумма кратностей всех комплексных корней f равна $\deg(f)/2$, а сумма кратностей невещественных корней четна. Следовательно, кратность вещественных корней нечетна и значит такие корни есть.

◄