λ

Лекция 9

Матричная и операторная нормы

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы как сможем залатаем 'дыру' в определении функции от оператора. Именно, посредством введения операторной нормы, мы определим сходимость в алгебре операторов и дадим объяснение того в каком смысле можно понимать сумму бесконечного степенного ряда операторов. Более подробную информацию по данной теме рекомендуется искать в курсах математического и функционального анализа.

Ключевые слова:
Норма элемента, норма матрицы, норма оператора, сходимость в нормированном пространстве, предел последовательности, вычисление функции от оператора.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:

9.1 Норма матрицы

Nota bene Пусть $X(\Bbbk)$ - произвольное линейное пространство над полем $\Bbbk$.

Нормой в $X(\Bbbk)$ называется отображение $N : X \to X$, удовлетворяющее следующему набору аксиом:

N1. $\forall x \in X(\Bbbk), \quad N(x) \geqslant 0, \quad N(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$

N2. $\forall x \in X(\Bbbk), \quad \forall \lambda \in \Bbbk \quad N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x);$

N3. $\forall x, y \in X(\Bbbk) \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$

Nota bene Часто норму элемента x вместо $N(x)$ обозначают $\|x\|$.

Пример 9.1. На пространстве $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ комплексных квадратных $n \times n$ матриц можно ввести евклидову норму:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\dagger A)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2},$$

Можно ввести и другие нормы, не связанные со скалярным произведением:

- 1-норма: $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|;$
- p-норма: $\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p}.$

Nota bene Если пространство $X(\Bbbk)$, кроме того, является еще и ассоциативной алгеброй, тогда к перечисленным выше требованиям добавляется еще одно:

N4. $\forall x, y \in X(\Bbbk) \quad N(x \cdot y) \leqslant N(x) \cdot N(y).$

9.2 Норма оператора

Nota bene Пусть теперь $X(\mathbb{C})$ - комплексное нормированное линейное пространство и $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ - линейный оператор на $X(\mathbb{C})$.

Нормой оператора φ называется число $N(\varphi)$

$$N(\varphi) = \sup_{x \in X} \frac{\|\varphi x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\varphi x\|.$$

Лемма 9.1. *Введенная операторная норма $N(\varphi)$ удовлетворяет аксиомам нормы.*

►

Пряма проверка аксиом $N1 - N4$.

◄

Nota bene Норму оператора также принято обозначать $\|\varphi\|$.

Пример 9.2. Пусть σ_A - множество собственных чисел квадратной $n \times n$ матрицы A и пусть $\lambda_{max} = \max(\sigma_A)$, тогда

$$\|A\|_\infty = |\lambda_{\max}|.$$

9.3 Сходимость в пространстве операторов

Nota bene Пусть $X_N(\mathbb{R})$ - вещественное нормированное линейное пространство и $End_{\mathbb{R}}(X_N)$ - операторная алгебра над X_N с с индуцированной из X_N операторной нормой.

> Говорят, что последовательность элементов $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ из $X_N(\mathbb{R})$ **имеет предел** $y \in X_N(\mathbb{R})$, если
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall m > m_0 \quad \|y - x_m\| < \varepsilon.$$

Nota bene Факт того, что последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ имеет своим пределом y, обычно обозначают следующим образом:

$$y = \lim_{m\to\infty} x_m$$

Nota bene Аналогичное опеределение предела можно дать и для последовательности операторов в $\mathrm{End}_R(X_N)$, определяя для последовательности $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ предел ψ в смысле введенной выше операторной нормы:

$$\psi = \lim_{m\to\infty} \varphi_m.$$

Nota bene Теперь мы готовы уточнить, в каком смысле можно понимать определение функции от оператора, заданной в виде степенного ряда:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Определим для этого последовательность операторов $\left\{\varphi_{(s)}\right\}_{s=0}^\infty$, заданных следующим образом:

$$\varphi_{(s)} = \sum_{m=1}^{s} c_m \varphi^m.$$

Если у данной последовательности существует предел ψ в указанном выше смысле, то мы говорим, что значение функции f, вычисленное от оператора φ равно данному пределу ψ.