

# Trabajo Práctico Integrador

## 66.06 - Análisis de circuitos

Primer cuatrimestre 2021

Alumno	Padrón	Correo electrónico
Companys, Gonzalo Alejo	103026	gcompanys@fi.uba.ar

Lenguaje elegido: Python

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Análisis Transferencia</b>	<b>2</b>
2.1. Tipo de filtro . . . . .	2
2.2. Polos y ceros de $H(s)$ . . . . .	2
2.3. $w_0$ , $Q$ y ganancia . . . . .	3
<b>3. Respuesta a excitaciones</b>	<b>4</b>
3.1. Respuesta al escalón $u(t)$ . . . . .	5
3.2. Respuesta al impulso $\delta(t)$ . . . . .	6
3.3. Respuesta a $\text{sen}(wt)$ . . . . .	8
<b>4. Circuito propuesto</b>	<b>9</b>
4.1. Análisis filtro pasa altos y normalización de sus componentes . . . . .	10
4.2. Análisis filtro pasa bajos y normalización de sus componentes . . . . .	11
4.3. Transferencia del filtro pasa banda normalizada . . . . .	12
<b>5. Análisis transferencia normalizada</b>	<b>12</b>
5.1. Diagrama de Bode . . . . .	13
5.2. Respuesta al escalón $u(t)$ . . . . .	13
5.3. Respuesta al impulso $\delta(t)$ . . . . .	14
5.4. Respuesta a $\text{sen}(wt)$ . . . . .	15
5.5. Respuesta a onda cuadrada . . . . .	16
5.5.1. Frecuencia $\frac{f_0}{10}$ . . . . .	16
5.5.2. Frecuencia $f_0$ . . . . .	17
5.5.3. Frecuencia $10f_0$ . . . . .	17
<b>6. Simulaciones LTSpice</b>	<b>18</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>21</b>

## 1. Introducción

El presente informe recopila el desarrollo del trabajo practico final correspondiente a la materia análisis de circuitos.

## 2. Análisis Transferencia

La transferencia asignada es la siguiente:

$$H_{21}(s) = \frac{s^2 \cdot 4,564 \cdot 10^8}{s^4 + s^3 \cdot 3,288 \cdot 10^4 + s^2 \cdot 5,405 \cdot 10^8 + s \cdot 1,324 \cdot 10^{12} + 1,622 \cdot 10^{15}} \quad (1)$$

A partir de ahora se hará referencia a la transferencia  $H_{21}(s)$  simplemente como  $H(s)$ .

### 2.1. Tipo de filtro

Para determinar de qué tipo de filtro se trata procedemos a analizar  $|H(jw)|$  con  $w \rightarrow \{0, \infty\}$ .

$$\lim_{w \rightarrow 0} |H(jw)| = 0 \quad \wedge \quad \lim_{w \rightarrow \infty} |H(jw)| = 0$$

Dado estos valores, podemos decir que la transferencia corresponde a la de un **filtro pasa banda**. En cuanto al orden del circuito correspondiente al filtro, podemos decir que se trata de uno de orden 4, esto se debe a que el grado del denominador de la transferencia es 4.

### 2.2. Polos y ceros de $H(s)$

Procedemos a determinar los ceros y los polos de la transferencia.

Los ceros corresponden a la raíces del numerador y los polos corresponden a las raíces del denominador.

Es evidente que  $H(s)$  tiene un cero de multiplicidad 2 en  $s = 0$ . Basta con solo mirar el numerador de la transferencia (Denoto a los ceros con  $z$ ):

$$s^2 \cdot 4,564 \cdot 10^8 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 0$$

En cuanto a los polos de  $H(s)$ , tenemos que:

$$s^4 + s^3 \cdot 3,288 \cdot 10^4 + s^2 \cdot 5,405 \cdot 10^8 + s \cdot 1,324 \cdot 10^{12} + 1,622 \cdot 10^{15} = 0$$

Lo cual nos da por resultado dos pares de polos complejos conjugados (utilizando 4 decimales con redondeo simétrico):

$$\begin{aligned} p_1 &= -1332,8325 + j1333,1992 & p_2 &= -1332,8325 - j1333,1992 \\ p_3 &= -15107,1675 + j15105,5729 & p_4 &= -15107,1675 - j15105,5729 \end{aligned}$$

En la figura 1 puede apreciarse la distribución de los polos y ceros de  $H(s)$  en el plano s.

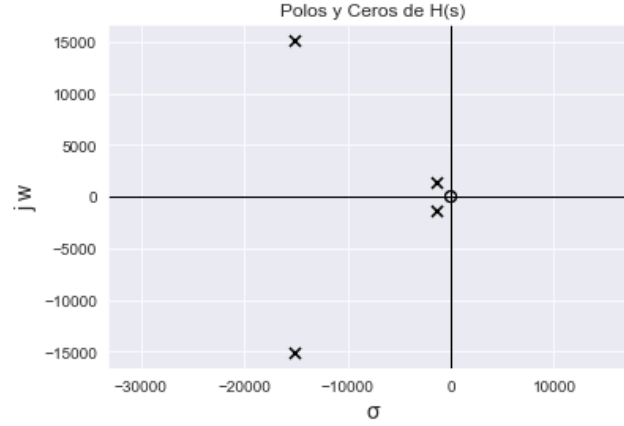


Figura 1: Polos (x) y ceros (o) de  $H(s)$  en el plano  $s = \sigma + j\omega$

### 2.3. $w_0$ , $Q$ y ganancia

Dado que se trata de un filtro pasa banda de orden cuatro, lo pensamos como 2 filtros colocados en cascada, siendo cada uno de estos un filtro de segundo orden pasa bajo y pasa altos.



Figura 2: Etapas del circuito

Es fácil demostrar que si colocamos un pasa altos de segundo orden en cascada con un pasa bajos de segundo orden, la transferencia del filtro conjunto equivale al producto de las transferencias de cada uno de los filtros, siendo esta la transferencia a un de un filtro pasa banda de cuarto orden.

$$H_{PasaBanda}(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

Ahora que hicimos esta separación, podemos buscar los parámetros  $w_0$ ,  $Q$  y la ganancia para cada uno de los dos filtros, utilizando las transferencias características de cada uno:

**Pasa altos:**

$$H_1(s) = \frac{s^2 \cdot h_{01}}{s^2 + s \cdot \frac{w_{01}}{Q_1} + w_{01}^2}$$

**Pasa bajos:**

$$H_2(s) = \frac{w_{02}^2 \cdot h_{02}}{s^2 + s \cdot \frac{w_{02}}{Q_2} + w_{02}^2}$$

Ahora, sabiendo que  $H(s)$  posee 4 polos complejos, siendo estos 2 pares de polos complejos conjugados, el denominador puede factorizarse de la forma:

$$(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3) \cdot (s - p_4)$$

considerando que  $p_2 = p_1^*$  y  $p_4 = p_3^*$  tenemos:

$$(s - p_1) \cdot (s - p_1^*) \cdot (s - p_3) \cdot (s - p_3^*) = (s^2 + s \cdot (-2\text{Re}(p_1)) + |p_1|^2) \cdot (s^2 + s \cdot (-2\text{Re}(p_2)) + |p_2|^2)$$

Ahora, para cada filtro por separado, sabemos que cada uno debe tener 2 polos y deben ser complejos conjugados, de manera que los coeficientes de sus respectivos denominadores sean reales. Sabiendo esto, podemos asignarle a cada uno un par de polos, tomando los polos en baja frecuencia para el pasa altos y los polos en alta frecuencia para el pasa bajos. De esta manera, despejamos los valores con:

$$w_{0i} = |p_i| \quad \wedge \quad \frac{w_{0i}}{Q_i} = -2\text{Re}(p_i) \Rightarrow Q_i = -\frac{w_{0i}}{2\text{Re}(p_i)}$$

Finalmente obtenemos:

■ Pasa Altos:

- $w_{01} \approx 1885,169112$
- $Q_1 \approx 0,7072$

■ Pasa Bajos:

- $w_{02} \approx 21363,633645$
- $Q_2 \approx 0,7071$

En cuanto a la ganancia de cada uno, sabemos que:

$$h_{01} \cdot h_{02} \cdot w_{02}^2 = 4,564 \cdot 10^8$$

Esta ecuación la obtenemos de igualar el numerador de la transferencia asignada y el numerador del producto de  $H_1(s)$  por  $H_2(s)$ .

Despejando obtenemos:

$$h_{01} \cdot h_{02} = \frac{4,564 \cdot 10^8}{w_{02}^2} = \frac{4,564 \cdot 10^8}{(21363,633645)^2} = 0,99999 \approx 1$$

Dado que el producto de ambas ganancias es igual a 1, podemos decir que ambas son iguales a 1, esto nos sera útil al tener que diseñar el circuito. Por lo tanto:

$$h_{01} = h_{02} = 1$$

### 3. Respuesta a excitaciones

En esta sección, se procederá a analizar la respuesta del circuito a diferentes excitaciones.

Si definimos a  $V_{in}(s) = \mathcal{L}\{v_{in}(t)\}$  como la señal de entrada del circuito y a  $V_{out}(s) = \mathcal{L}\{v_{out}(t)\}$  como la salida del mismo, sabemos que la transferencia esta caracterizada por:  $H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ . Dado que ya contamos con la transferencia del circuito, el calculo que podemos realizar es:

$$V_{out}(s) = H(s) \cdot V_{in}(s)$$

De manera que transformando la señal de entrada al dominio de frecuencia compleja  $s$  podemos realizar el producto de  $H(s) \cdot V_{in}(s)$  y antitransformarlo de manera de obtener  $v_{out}(t)$ . Con esto nos ahorramos el trabajo de realizar una convolución en el dominio del tiempo.

Para hallar las antitransformadas correspondientes, se utilizara el método de los residuos y la reducción a fracciones simples de  $V_{out}(s)$ .

### 3.1. Respuesta al escalón $u(t)$

Primero, obtenemos la transformada de  $u(t)$ :

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto,

$$V_{out}(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s \cdot 4,564 \cdot 10^8}{s^4 + s^3 \cdot 3,288 \cdot 10^4 + s^2 \cdot 5,405 \cdot 10^8 + s \cdot 1,324 \cdot 10^{12} + 1,622 \cdot 10^{15}}$$

Utilizando la propiedad de linealidad de la antitransformada tenemos que:

$$v_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_{out}(s)\} = 4,564 \cdot 10^8 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}\right\} = 4,564 \cdot 10^8 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Descomponemos a  $F(s)$  en fracciones simples, sabiendo que tenemos 4 polos simples:

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \frac{k_3}{(s-p_3)} + \frac{k_4}{(s-p_4)}$$

Los coeficientes  $k_i$  los calculamos con el método de residuos:

$$k_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s) \quad (2)$$

obteniendo de esta manera:

- $k_1 = (1,2974 + j1,0867) \cdot 10^{-9}$
- $k_2 = (1,2974 - j1,0867) \cdot 10^{-9}$
- $k_3 = (-1,2974 + j1,0872) \cdot 10^{-9}$
- $k_4 = (-1,2974 - j1,0872) \cdot 10^{-9}$

Nuevamente utilizando la propiedad de linealidad de la antitransformada y haciendo uso de la conocida transformada  $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$  tenemos para los términos de  $F(s)$ :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^4 \frac{k_i}{s-p_i}\right\} = \sum_{i=1}^4 k_i \cdot e^{p_i \cdot t} \quad (3)$$

Reemplazando y haciendo uso de la ecuación 3, obtenemos:

$$v_{out}(t) = 4,564 \cdot 10^8 \cdot [k_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + k_3 \cdot e^{p_3 \cdot t} + k_4 \cdot e^{p_4 \cdot t}] \cdot u(t)$$

Un vez que realizamos los cálculos llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &= 4,564 \cdot 10^8 \cdot [v_{o1}(t) + v_{o2}(t)], \quad \text{con :} \\ v_{o1}(t) &= 2 \cdot e^{Re(p_1) \cdot t} (Re(k_1) \cdot \cos(Im(p_1)t) - Im(k_1) \cdot \sin(Im(p_1)t)) \cdot u(t) \\ v_{o2}(t) &= 2 \cdot e^{Re(p_3) \cdot t} (Re(k_3) \cdot \cos(Im(p_3)t) - Im(k_3) \cdot \sin(Im(p_3)t)) \cdot u(t) \end{aligned}$$

Reemplazando con los valores correspondientes llegamos a:

$$v_{o1}(t) = 2e^{-1332,8325t} (1,2974 \cdot 10^{-9} \cdot \cos(1333,1991t) - 1,0867 \cdot 10^{-9} \sin(1333,1991t)) \cdot u(t)$$

$$v_{o2}(t) = 2e^{-15107,1675t} (-1,2974 \cdot 10^{-9} \cdot \cos(15105,5729t) - 1,0872 \cdot 10^{-9} \sin(15105,5729t)) \cdot u(t)$$

Por razones de simplicidad queda expresado de la forma:

$$v_{out}(t) = 4,564 \cdot 10^8 \cdot [v_{o1}(t) + v_{o2}(t)] \cdot u(t)$$

Si graficamos la respuesta al escalón, obtenemos el gráfico de la figura 3.

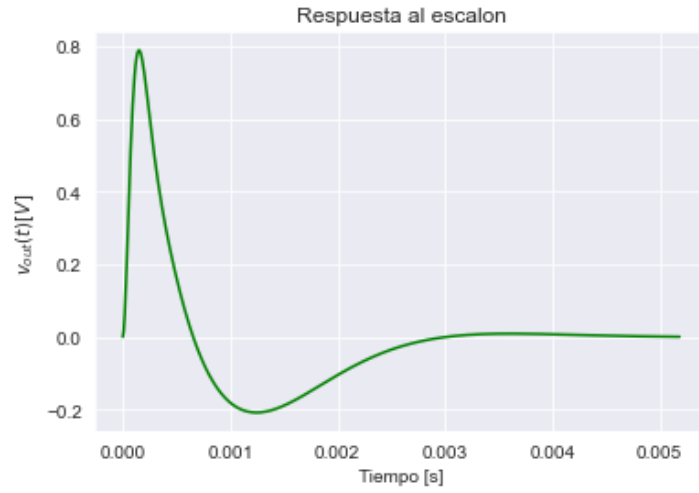


Figura 3: Respuesta al escalón del filtro

### 3.2. Respuesta al impulso $\delta(t)$

La transformada de Laplace de la función impulso  $\delta(t)$  es:

$$\Delta(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

de manera que:

$$V_{out}(s) = H(s) \cdot \Delta(s) = H(s)$$

Por lo tanto

$$v_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 4,564 \cdot 10^8 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}\right\} = 4,564 \cdot 10^8 \cdot \mathcal{L}\{F(s)\}$$

Descomponemos a  $F(s)$  en fracciones simples y obtenemos, al igual que en la respuesta al escalón:

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \frac{k_3}{(s-p_3)} + \frac{k_4}{(s-p_4)}$$

El procedimiento a realizar es exactamente igual que en la respuesta al escalón, vamos a obtener los coeficientes  $k_i$  haciendo uso de la ecuación 2, con la diferencia de que  $F(s)$  es distinta para

esta respuesta, y luego antitransformamos haciendo uso de la ecuación 3.

Primero obtenemos los coeficientes  $k_i$ :

- $k_1 = -3,1781 \cdot 10^{-6} + j2,8123 \cdot 10^{-5}$
- $k_2 = -3,1781 \cdot 10^{-6} - j2,8123 \cdot 10^{-5}$
- $k_3 = 3,1781 \cdot 10^{-6} - j3,6023 \cdot 10^{-5}$
- $k_4 = 3,1781 \cdot 10^{-6} + j3,6023 \cdot 10^{-5}$

Finalmente antitransformando obtenemos:

$$v_{out}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 4,564 \cdot 10^8 \cdot [v_{o1}(t) + v_{o2}(t)] \cdot u(t), \quad \text{con :}$$

$$v_{o1}(t) = 2 \cdot e^{Re(p_1) \cdot t} (Re(k_1) \cdot \cos(Im(p_1)t) - Im(k_1) \cdot \sin(Im(p_1)t)) \cdot u(t)$$

$$v_{o2}(t) = 2 \cdot e^{Re(p_3) \cdot t} (Re(k_3) \cdot \cos(Im(p_3)t) - Im(k_3) \cdot \sin(Im(p_3)t)) \cdot u(t)$$

Reemplazando los valores correspondientes obtenemos:

$$v_{o1}(t) = 2 \cdot e^{-1332,8325 \cdot t} (-3,1781 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(1333,1991t) - 2,8138 \cdot 10^{-7} \cdot \sin(1333,1991t)) \cdot u(t)$$

$$v_{o2}(t) = 2 \cdot e^{-15107,1675 \cdot t} (3,1781 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(15105,5729t) + 3,6023 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(15105,5729t)) \cdot u(t)$$

En la figura 4 podemos observar un gráfico de la respuesta al impulso.

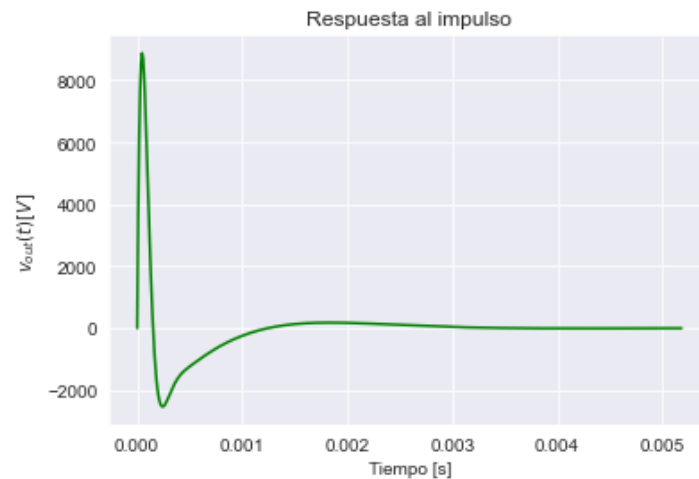


Figura 4: Respuesta al impulso del filtro



### 3.3. Respuesta a $\text{sen}(wt)$

La transformada de Laplace de  $\text{sen}(wt)$  es :

$$J(s) = \mathcal{L}\{\text{sen}(wt)\} = \frac{w}{s^2 + w^2} = \frac{w}{(s - jw) \cdot (s + jw)}$$

El valor de frecuencia que se utilizara para realizar el calculo es  $w = 10000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .  
Tenemos entonces que:

$$V_{out}(s) = H(s) \cdot J(s) = \frac{4,564 \cdot 10^8 \cdot w \cdot s^2}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)(s - jw)(s + jw)}$$

La antitransformada a calcular es:

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot J(s)\} = 4,563 \cdot 10^8 \cdot w \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)(s - jw)(s + jw)}\right\} \\ &\Rightarrow v_{out}(t) = 4,563 \cdot 10^8 \cdot w \cdot \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \end{aligned}$$

Tenemos 6 polos simples, descomponemos a  $F(s)$  en fracciones simples:

$$F(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \frac{k_3}{s - p_3} + \frac{k_4}{s - p_4} + \frac{k_5}{s - p_5} + \frac{k_6}{s - p_6}$$

Nota:  $p_5 = jw \quad \wedge \quad p_6 = -jw$

Para el calculo de los coeficientes  $k_i$  nuevamente utilizamos la ecuación 2:

- $k_1 = -3,1841 \cdot 10^{-14} + j1,6822 \cdot 10^{-15}$
- $k_2 = -3,1841 \cdot 10^{-14} - j1,6822 \cdot 10^{-15}$
- $k_3 = 7,6766 \cdot 10^{-14} - j9,8645 \cdot 10^{-15}$
- $k_4 = 7,6766 \cdot 10^{-14} + j9,8645 \cdot 10^{-15}$
- $k_5 = -4,4925 \cdot 10^{-14} - j9,7051 \cdot 10^{-14}$
- $k_6 = -4,4925 \cdot 10^{-14} + j9,7051 \cdot 10^{-14}$

Antitransformando y haciendo uso de la ecuación 3, llegamos a que:

$$v_{out}(t) = 4,564 \cdot 10^8 \cdot w \cdot [v_{o1}(t) + v_{o2}(t) + v_{o3}(t)]$$

donde:

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= 2e^{Re(p_1) \cdot t} \cdot [Re(k_1)\cos(Im(p_1)t) - Im(k_1)(\text{sen}(Im(p_1)t))]u(t) \\ v_{o2}(t) &= 2e^{Re(p_3) \cdot t} \cdot [Re(k_3)\cos(Im(p_3)t) - Im(k_3)(\text{sen}(Im(p_3)t))]u(t) \\ v_{o3}(t) &= 2 \cdot [Re(k_5)\cos(w \cdot t) - Im(k_5)\text{sen}(w \cdot t)]u(t) \end{aligned}$$

Reemplazando por valores numéricos, y multiplicando por el factor  $4,564 \cdot 10^8 \cdot w$  con  $w = 10^4$ , tenemos que:

$$v_{out}(t) = (v_1(t) + v_2(t) + v_3(t))u(t)$$

con:

$$v_1(t) = e^{-1332,8325t} (-0,2906 \cos(1333,1991t) - 0,0154 \sin(1333,1991t)) u(t)$$

$$v_2(t) = e^{-15107,1675t} (0,7007 \cos(15105,5729t) + 0,09 \sin(15105,5729t)) u(t)$$

$$v_3(t) = (-0,4101 \cos(10000t) + 0,8859 \sin(10000t))u(t)$$

Podemos observar en la figura 5 la respuesta al seno.

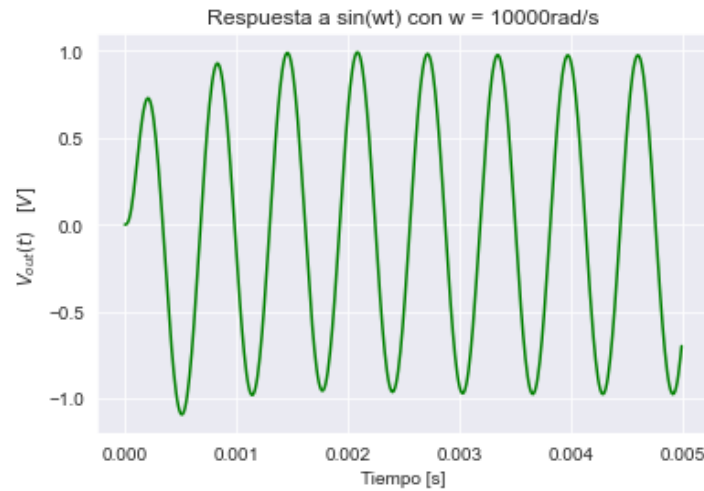


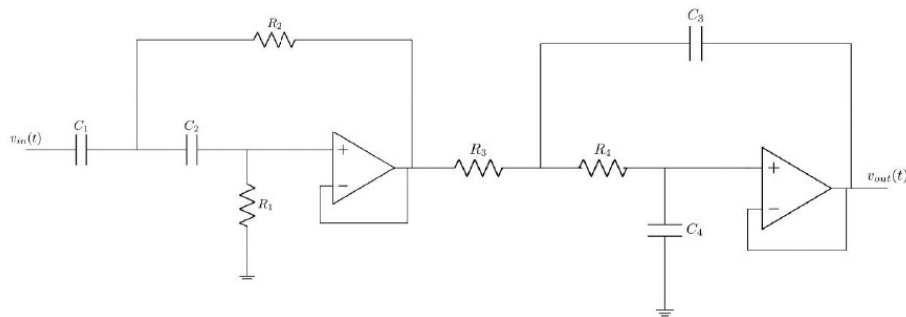
Figura 5: Respuesta a  $\sin(\omega t)$  del filtro con  $\omega = 10000 \text{ rad/s}$

## 4. Circuito propuesto

Como habíamos visto en la sección 2.3, propusimos un filtro pasa altos de 2<sup>do</sup> orden, de ganancia unitaria y  $Q = 0,7072$  colocado en cascada con un filtro pasa bajos de 2<sup>do</sup> orden, de ganancia unitaria y  $Q = 0,7071$ .

Dado que los dos filtros en cascada que componen el pasa banda tienen ganancia unitaria y factores de calidad  $Q$  bajos ( $Q < 3$ ), para el diseño del filtro se utilizó la topología Sallen-Key.

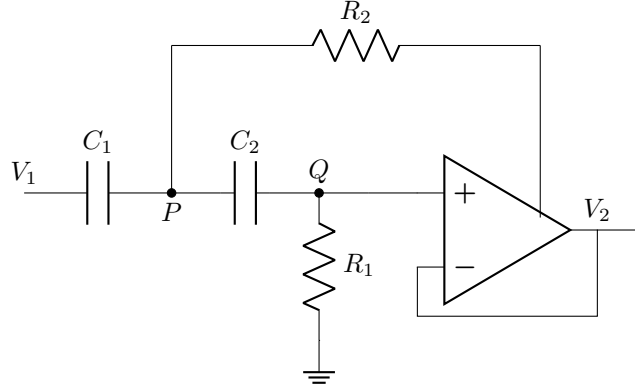
El circuito propuesto es:



Para corroborar que el circuito propuesto cumple con lo pedido, procedemos a analizar por separado cada etapa. Buscamos la función transferencia de cada uno de los filtros que componen el pasa banda.

#### 4.1. Análisis filtro pasa altos y normalización de sus componentes

Buscamos la transferencia de la primer etapa del pasa banda que corresponde a un pasa altos. Una vez encontrada su función de transferencia, normalizamos sus componentes buscando obtener un error porcentual menor a 1 % para  $w_{01}$ ,  $Q_1$  y  $h_{01}$ .



Planteamos dos nodos:

$$\textcircled{P} \quad V_1 s C_1 + \frac{V_2}{R_2} = V_P \left( \frac{1}{R_2} + s C_1 + s C_2 \right) - V_Q s C_2$$

$$\textcircled{Q} \quad 0 = -V_P s C_2 + V_Q \left( \frac{1}{R_1} + s C_2 \right)$$

Además sabemos que por propiedades del modelo amplificador operacional ideal, la diferencia de potencial entre las entradas del opAmp es 0, por lo tanto:

$$V_Q = V_2$$

Despejando para obtener  $H_1(s) = \frac{V_2}{V_1}$  y dejándolo en la forma canónica llegamos a que:

$$H_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

De aquí podemos despejar  $w_{01}$ ,  $Q_1$  y  $h_{01}$ :

$$w_{01} = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}}, \quad Q_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}} \cdot \frac{R_1 \cdot C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}, \quad h_{01} = 1 \quad (4)$$

Los valores normalizados de los componentes propuestos son los siguientes:

$$R_1 = 412k\Omega \quad R_2 = 68,1k\Omega \quad c_1 = 1nF \quad c_2 = 10nF$$

Para los valores de resistencias se uso la serie del 1 % (E96) y para los valores de los capacitores se utilizo la serie del 10 % (E24).

Sabiendo ahora que los valores ideales son  $w_{ideal} = 1885,169112$  y  $Q_{ideal} = 0,7072$ , y los valores normalizados podemos calcularlos con las ecuaciones (4), calculamos el error porcentual para cada uno:

$$\epsilon_w^{\%} = \frac{|w_{ideal} - w_{norm}|}{w_{ideal}} \cdot 100 = \frac{|1885,169112 - 1887,894999|}{1885,169112} \cdot 100 = 0,1446 \% < 1 \%$$

$$\epsilon_Q^{\%} = \frac{|Q_{ideal} - Q_{norm}|}{Q_{ideal}} \cdot 100 = \frac{|0,7072 - 0,7071|}{0,7072} \cdot 100 = 0,014 \% < 1 \%$$

Ahora, utilizando los valores normalizados calculamos  $H_1(s)$ :

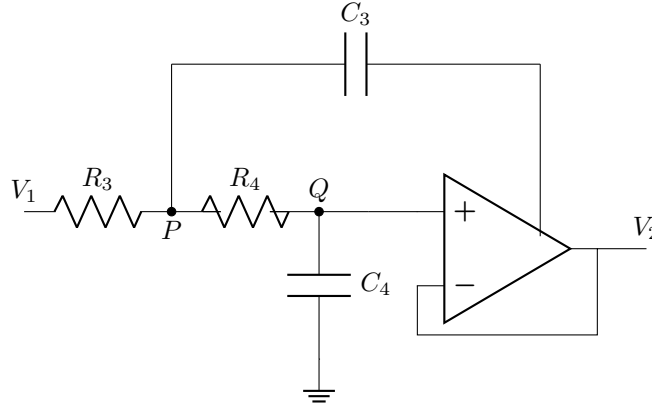
$$H_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot 2669,90291 + 3564147,527}$$

Las singularidades de  $H_1(s)$  son:

$$p_1 = -1334,9515 + j1334,9353 \quad p_2 = -1334,9515 - j1334,9353$$

#### 4.2. Análisis filtro pasa bajos y normalización de sus componentes

Buscamos ahora la transferencia de la segunda etapa del pasa banda que corresponde a un pasa bajos. Una vez encontrada su función de transferencia, normalizamos sus componentes buscando obtener un error porcentual menor a 1 % para  $w_{02}$ ,  $Q_2$  y  $h_{02}$ .



Nuevamente planteamos dos nodos:

$$\begin{aligned} \textcircled{P} \quad \frac{V_1}{R_3} + V_2 s C_3 &= V_P \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + s C_3 \right) - V_Q \frac{1}{R_4} \\ \textcircled{Q} \quad 0 &= -V_P \frac{1}{R_4} + V_Q \left( \frac{1}{R_4} + s C_4 \right) \end{aligned}$$

Despejando para obtener  $H_2(s) = \frac{V_2}{V_1}$  y dejándolo en la forma canónica llegamos a que:

$$H_2(s) = \frac{\frac{1}{R_3 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_4}}{s^2 + s \cdot \frac{(R_3 \cdot (C_3 + C_4) + R_4 \cdot C_4 - R_3 \cdot C_3)}{R_3 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_4} + \frac{1}{R_3 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_4}}$$

De aquí podemos despejar  $w_{02}$ ,  $Q_2$  y  $h_{02}$ :

$$w_{02} = \frac{1}{\sqrt{R_3 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_4}}, \quad Q_2 = \frac{\sqrt{R_3 \cdot R_4 \cdot C_3 \cdot C_4}}{R_3 \cdot (C_3 + C_4) + R_4 \cdot C_4 - R_3 \cdot C_3}, \quad h_{02} = 1 \quad (5)$$

Los valores normalizados de los componentes propuestos son los siguientes:

$$R_3 = 3570\Omega \quad R_4 = 47,5k\Omega \quad c_3 = 10nF \quad c_4 = 1,3nF$$

Para los valores de resistencias se uso la serie del 1 % (E96) y para los valores de los capacitores se utilizo la serie del 10 % (E24).

Sabiendo ahora que los valores ideales son  $w_{ideal} = 21363,633645$  y  $Q_{ideal} = 0,7071$ , y los valores normalizados podemos calcularlos con las ecuaciones (5), calculamos el error porcentual para cada uno:

$$\epsilon_w \% = \frac{|w_{ideal} - w_{norm}|}{w_{ideal}} \cdot 100 = \frac{|21363,633645 - 21298,42118|}{21363,633645} \cdot 100 = 0,3052 \% < 1 \%$$

$$\epsilon_Q \% = \frac{|Q_{ideal} - Q_{norm}|}{Q_{ideal}} \cdot 100 = \frac{|0,7071 - 0,6936|}{0,7071} \cdot 100 = 0,019 \% < 1 \%$$

Ahora, utilizando los valores normalizados calculamos  $H_2(s)$ :

$$H_2(s) = \frac{453622744,6}{s^2 + s \cdot 30116,46764 + 453622744,6}$$

Las singularidades de  $H_2(s)$  son:

$$p_1 = -15058,23382 + j15062,28199 \quad p_2 = -15058,23382 - j15062,28199$$

### 4.3. Transferencia del filtro pasa banda normalizada

Habiendo calculado  $H_1(s)$  y  $H_2(s)$  calculamos ahora la transferencia  $H(s)$ .

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \left( \frac{s^2}{s^2 + s \cdot 2669,90291 + 3564147,527} \right) \cdot \left( \frac{453622744,6}{s^2 + s \cdot 30116,46764 + 453622744,6} \right)$$

Por lo tanto:

$$H(s) = \frac{453622744,6 \cdot s^2}{s^4 + s^3 \cdot 32786,3706 + s^2 \cdot 537594936,7 + s \cdot 1,318 \cdot 10^{12} + 1,617 \cdot 10^{15}}$$

## 5. Análisis transferencia normalizada

Vamos a proceder a realizar una comparación y análisis entre la transferencia original y la transferencia normalizada para distintas excitaciones de entrada al circuito como así también su respuesta en frecuencia.

### 5.1. Diagrama de Bode

Comenzamos realizando el diagrama de Bode de modulo y fase para ambas transferencias.

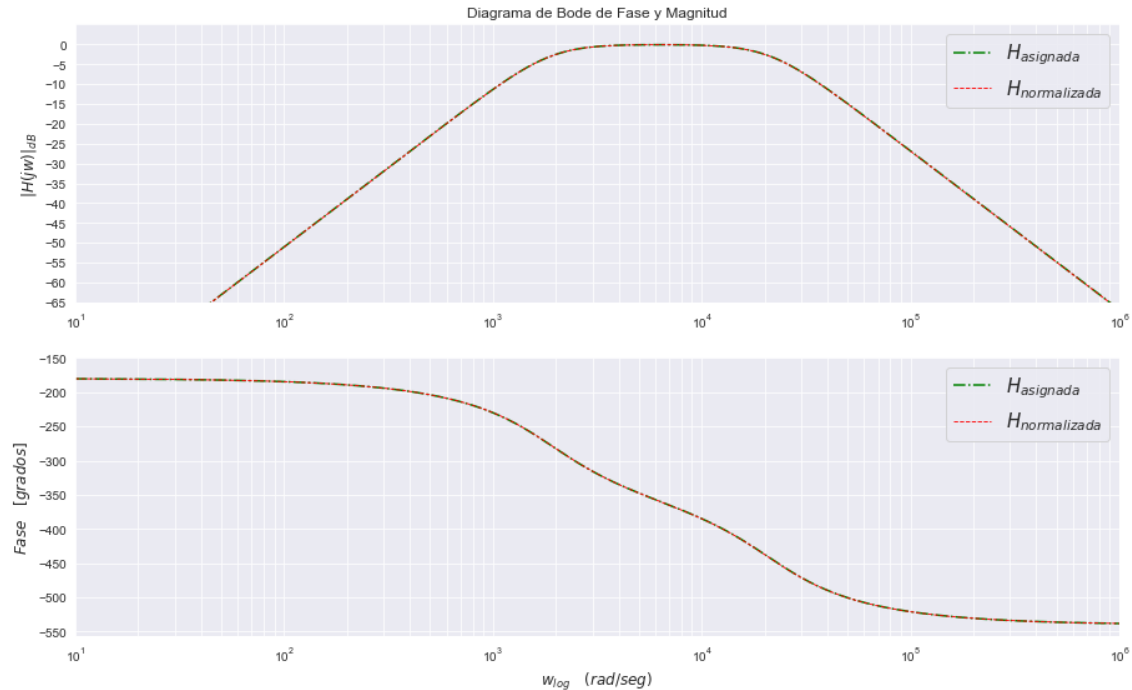


Figura 6: Diagrama de Bode para la transferencia normalizada y asignada

Primero observamos que para ambas transferencias, los diagramas tanto de magnitud como de fase son indistinguibles uno del otro.

Segundo, para el diagrama de magnitud, podemos observar un comportamiento esperado por varias razones. Si avanzamos por el eje de la frecuencia podemos ver que a medida que aumentamos la frecuencia la ganancia aumenta, hasta que llegamos a un punto donde vemos que la ganancia es cero (esto es, el modulo de la transferencia es 1), por ende tenemos ganancia unitaria, y luego a medida que seguimos avanzando vemos que la ganancia disminuye. Dicho comportamiento se corresponde con el de un filtro pasa banda.

### 5.2. Respuesta al escalón $u(t)$

En la figura 7 podemos ver la respuesta al escalón para cada transferencia. Podemos observar nuevamente que las diferencias entre las curvas son imperceptibles.

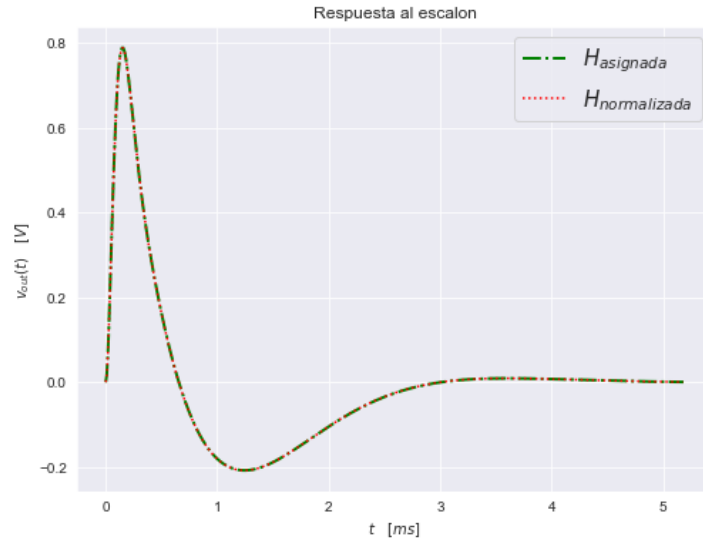


Figura 7: Respuesta al escalón unitario para la transferencia normalizada y asignada

Recordando la sección 3.1, cuando obtuvimos analíticamente la respuesta al escalón para la transferencia asignada podíamos ver que la tensión de salida quedaba definida por la suma de dos respuestas independientes multiplicadas por un factor. Cada una de estas respuestas correspondía a una respuesta subamortiguada, donde los polos del sistema (tomando cada par de polos complejos conjugados) determinaban la frecuencia de oscilación de la señal de salida junto con la atenuación de la misma a lo largo del tiempo correspondiente a una exponencial. Dicho esto, lo que vemos observar en la figura 7 es simplemente la suma de ambas respuestas.

### 5.3. Respuesta al impulso $\delta(t)$

Analizaremos en este apartado la respuesta al impulso, para ambas transferencias. Sabiendo que  $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$ , es de esperar que el gráfico de la respuesta al impulso sea consistente con la respuesta al escalón unitario  $u(t)$ .

En la figura 8 podemos observar que la repuesta coincide para ambas transferencias. Debido a la diferencia de escala en el eje de ordenadas para cada respuesta, no es posible superponerlas en un mismo gráfico de manera que se vea su relación. Sin embargo, utilizando un graficador online, si graficamos la respuesta a  $u(t)$  y la derivamos podemos observar (salvo un factor numérico multiplicando) el mismo comportamiento que en la figura 8.

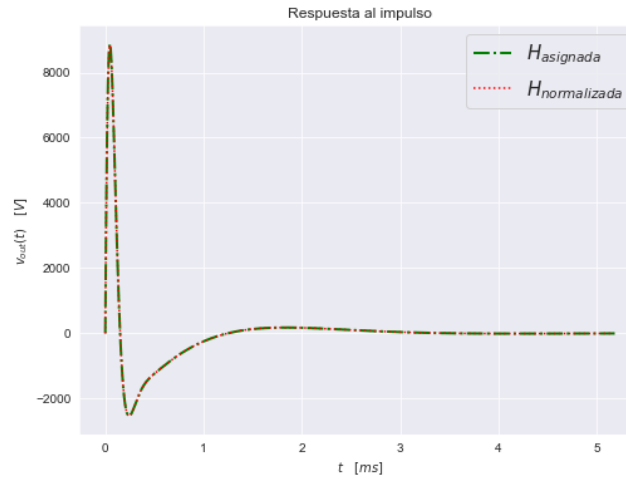


Figura 8: Respuesta al impulso para la transferencia normalizada y asignada

#### 5.4. Respuesta a $\sin(wt)$

Procedemos ahora a analizar la respuesta a una señal de entrada de  $\sin(wt)$  para tres frecuencias características del filtro. Las mismas elegidas son:

$$w_{01} = 1885,169112 \quad w_{02} = 21363,633645 \quad w_m = \frac{w_{01} + w_{02}}{2} = 11624,40138$$

Para poder observar el comportamiento para cada frecuencia en simultanea, se muestra en la figura 9 la respuesta para las frecuencia dadas.

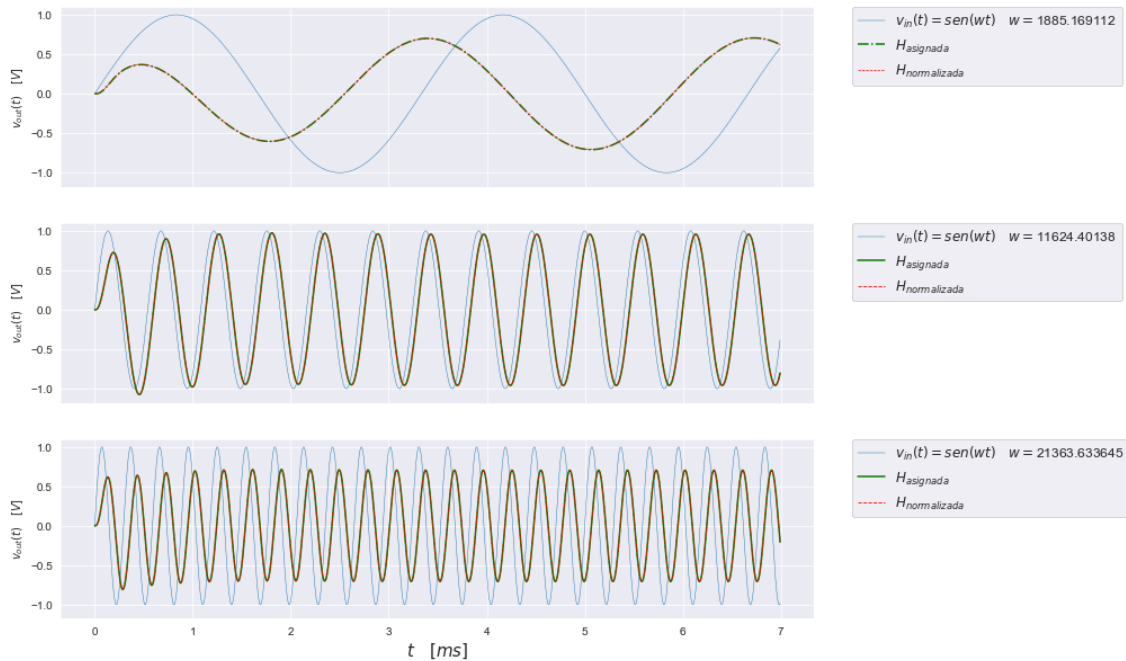


Figura 9: Respuesta a  $\sin(wt)$  para la transferencia normalizada y asignada para diferentes frecuencias angulares

Para las tres frecuencias angulares elegidas, podemos notar que primero tenemos un periodo



de tiempo en el cual podemos observar el régimen transitorio del sistema antes de estabilizarse. Una vez estabilizado, puede calcularse que para  $w_{01}$  y  $w_{02}$  la amplitud de la señal de salida es :

$$A_{salida} = \frac{A_{entrada}}{\sqrt{2}}$$

Esto se debe a que, para cada caso en particular, al tratarse de un filtro pasa banda compuesto por un filtro pasa altos en cascada con un pasa bajos, en bajas frecuencias ( $w_{01}$ ) el filtro pasa altos atenúa por un factor de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  la señal de entrada y luego el pasa bajos deja pasar la señal atenuada en su totalidad, mientras que para el caso de frecuencias altas ( $w_{02}$ ) el filtro pasa altos deja pasar en su totalidad a la señal de entrada para luego el pasa bajos atenuarla por un factor de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Por otro lado, para el caso de  $w_m$ , podemos observar que pertenece a la banda de frecuencias que el filtro deja pasar sin atenuar, por ende, una vez se estabiliza, la amplitud de la señal de salida es 1 (igual que la entrada).

### 5.5. Respuesta a onda cuadrada

Para este apartado, vamos a tomar una frecuencia  $f_0$  particular y analizar tres casos donde tenemos una onda cuadrada de frecuencia  $\frac{f_0}{10}$ ,  $f_0$  o  $10f_0$  como señal de entrada.

Vamos a tomar como  $f_0$  a:

$$f_0 = \frac{w_m}{2\pi} = \frac{\frac{w_{01}+w_{02}}{2}}{2\pi} = 1850,0809Hz$$

En cuanto a la onda cuadrada, utilizaremos una onda de valor medio cero y valor pico a pico igual a 2.

Para los tres casos a ver, la diferencia entre la tensión normalizada y la tensión ideal es imperceptible, por ende no se mencionara cada vez en cada paso.

#### 5.5.1. Frecuencia $\frac{f_0}{10}$

Lo que podemos observar en la figura 10 es la respuesta a una onda cuadrada de frecuencia  $\frac{f_0}{10} \approx 185,01Hz$ .

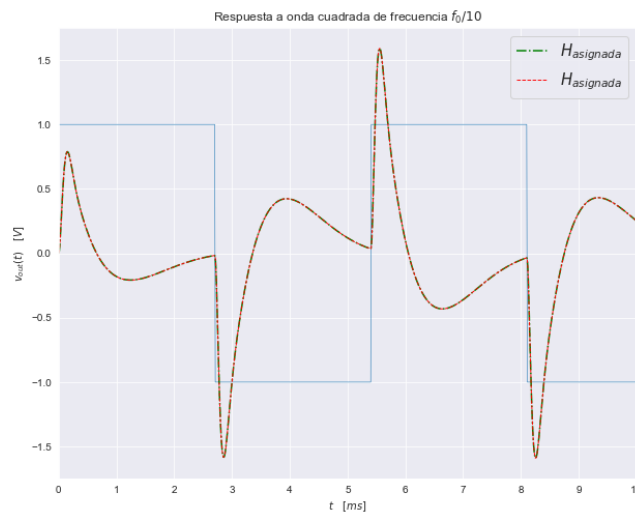


Figura 10: Respuesta a onda cuadrada de frecuencia  $\frac{f_0}{10}$  para la transferencia normalizada y asignada

Podemos notar que cuando la onda cuadrada cambia de  $-1$  a  $+1$  tenemos en el tiempo que permanece en alto, una respuesta que puede verse igual a la respuesta al escalón (lo cual tiene sentido) y cuando cambia de  $+1$  a  $-1$  una respuesta igual a la del escalón pero con signo opuesto.

### 5.5.2. Frecuencia $f_0$

En el caso de la figura 11, podemos ver que tenemos también un periodo en el que podemos observar un transitorio, y luego al estabilizarse, pareciera que la salida oscila a la misma frecuencia que la entrada salvo un leve desfase.

La razón por la cual la señal de salida tiene el aspecto de una senoide se debe a que si descomponemos la señal cuadrada como suma de senos, a medida que sumamos más términos la frecuencia a la cual oscila cada uno de los senos aumenta, por ende, el filtro los atenúa. De esta manera, solo podemos apreciar pocos armónicos, obteniendo de esta manera el aspecto de un seno.

En cuanto al valor medio de la señal de salida, tenemos que el igual a cero, coincidiendo con el valor medio de la señal de entrada.

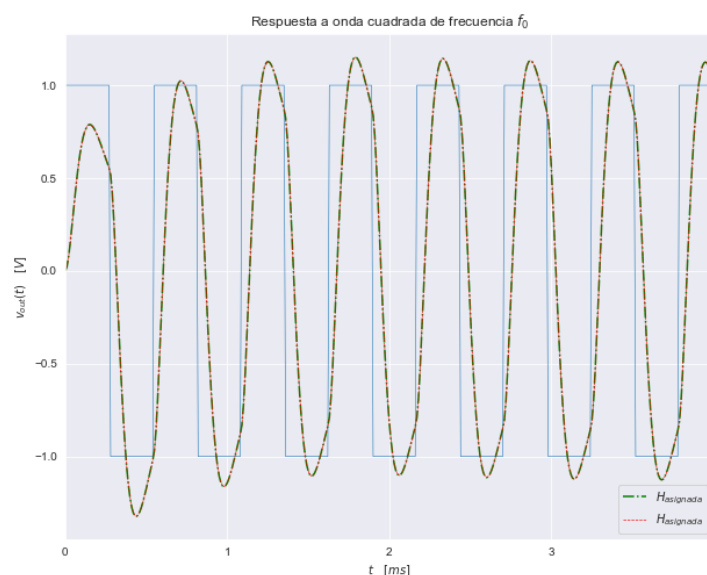


Figura 11: Respuesta a onda cuadrada de frecuencia  $f_0$  para la transferencia normalizada y asignada

### 5.5.3. Frecuencia $10f_0$

Por último tenemos para analizar a frecuencia  $10f_0$ . En este caso, podemos observar varias cosas.

Por un lado, podemos ver que al tratarse de una alta frecuencia (fuera del ancho de banda del filtro), tenemos una gran atenuación de la amplitud de la señal de entrada. Esto es correcto de acuerdo al tipo de filtro. Sin embargo, el gráfico no es del todo correcto, debido a la forma de representar una onda cuadrada en python. Este gráfico volveremos a verlo junto con la simulación en LTSpice para una mejor explicación.

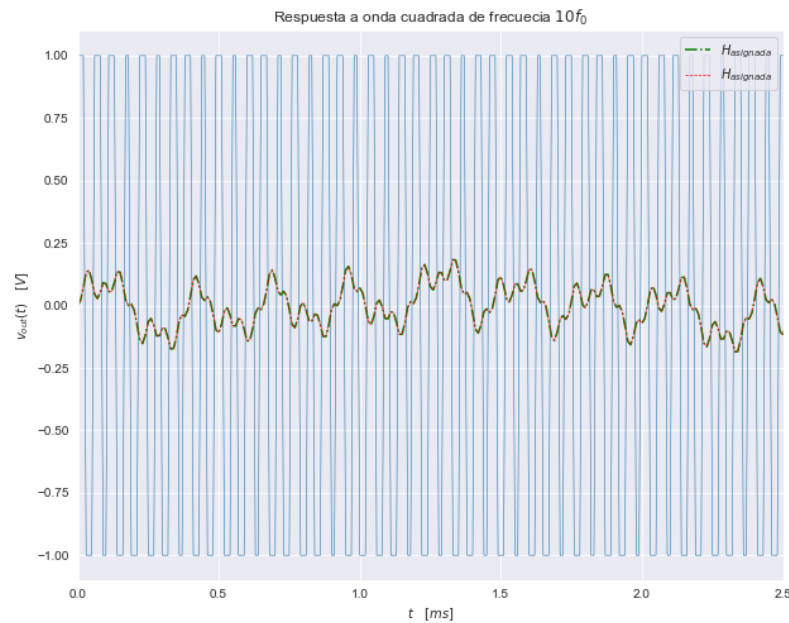


Figura 12: Respuesta a onda cuadrada de frecuencia  $10f_0$  para la transferencia normalizada y asignada

## 6. Simulaciones LTSpice

Por ultimo, se utilizo el software de simulación LTSpice para realizar la simulación del circuito. Se realizaron 4 simulaciones, utilizando en los casos correspondientes  $f_0 = 1850,0809 Hz$ :

- Respuesta al escalón
- Respuesta a  $\sin(2\pi f_0 t)$
- Respuesta a onda cuadrada de frecuencia  $f_0$
- Diagrama de Bode

Los resultados obtenidos para las simulaciones fueron los esperados, coincidiendo con los gráficos realizados anteriormente en el trabajo para la transferencia normalizada y la ideal.

A continuación, se presentan todos los gráficos con la superposición de la tensión ideal (Utilizando la transferencia asignada), la tensión normalizada (utilizando la transferencia normalizada) y la tensión simulada en LTSpice.

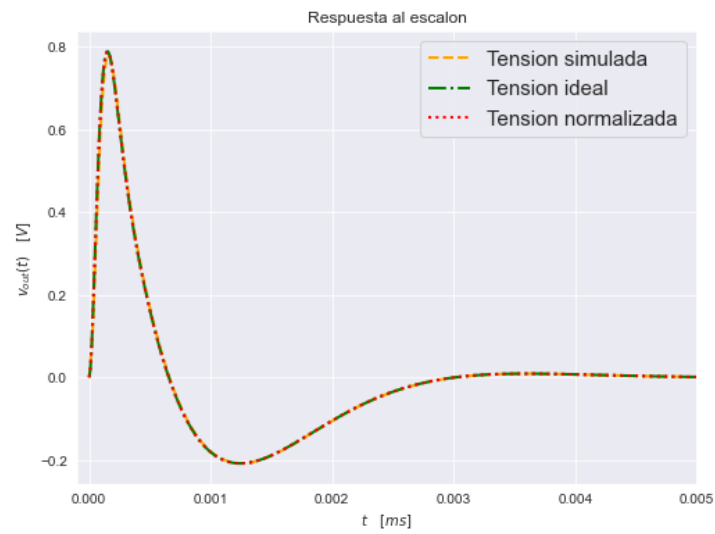
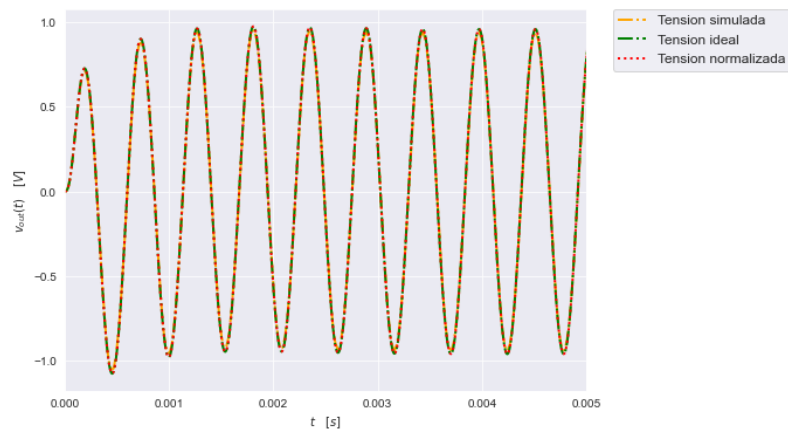
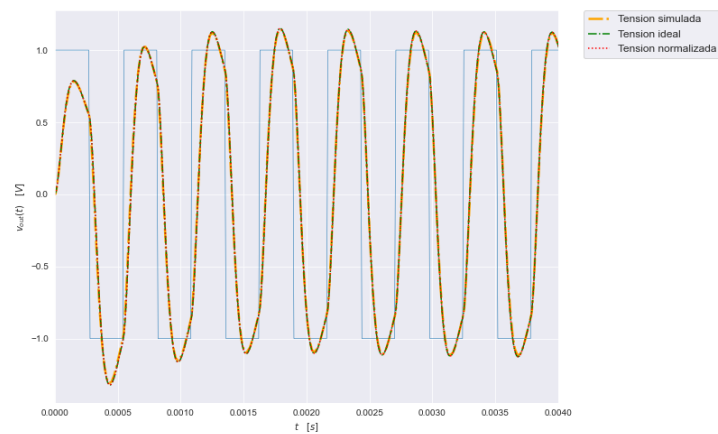


Figura 13: Respuesta al escalón

Figura 14: Respuesta a  $\sin(2\pi f_0 t)$ Figura 15: Respuesta a cuadrada de frecuencia  $f_0$

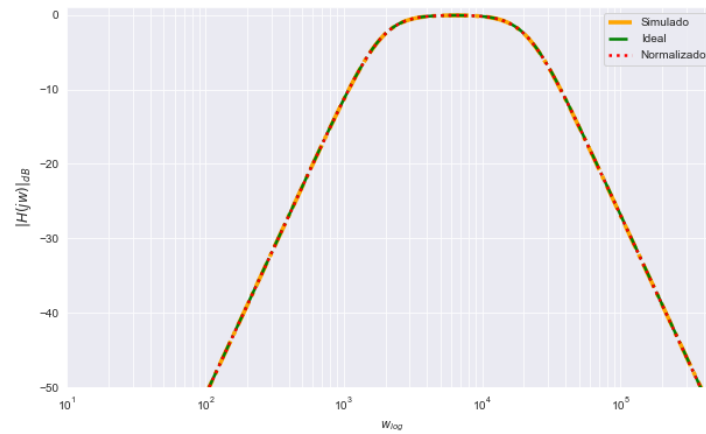


Figura 16: Diagrama de Bode de magnitud

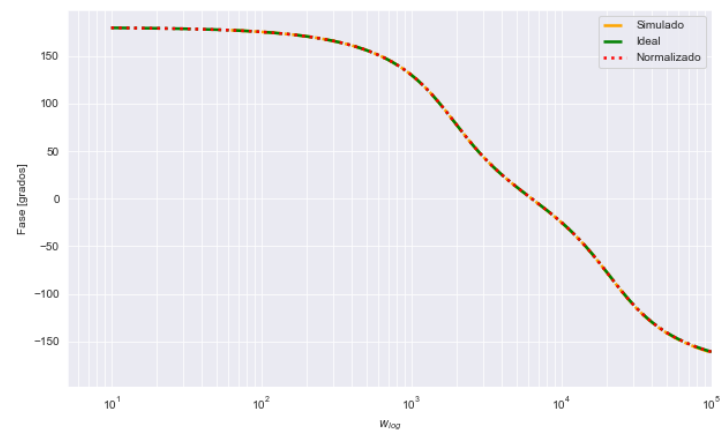
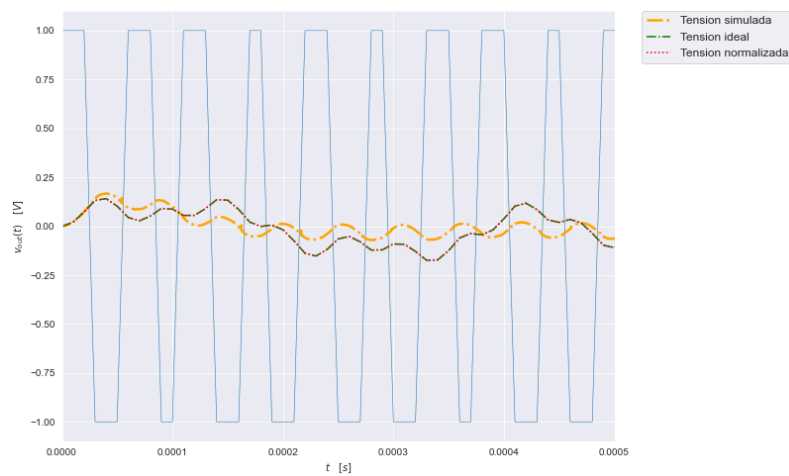


Figura 17: Diagrama de Bode de fase

Como puede verse, todos los gráficos son coincidentes. El caso que veremos en particular es para la onda cuadrada de frecuencia  $10f_0$

Figura 18: Respuesta a onda cuadrada de frecuencia  $10f_0$

Como podemos ver, la tensión simulada es la que tiene sentido, dado que primero podemos observar un transitorio y luego ver como la onda oscila alrededor del valor medio de la salida cambiando de signo a medida que la cuadrada cambia de polaridad.

La razón por la que este gráfico en particular es incorrecto tanto para la tensión ideal como la normalizada se debe a la onda cuadrada implementada para hacer los cálculos en python. Como puede verse en la figura 18, la onda cuadrada en azul tiene diferente ancho para distintos periodos, lo cual es incorrecto y la razón de la mala representación de la tensión normalizada e ideal, mientras que para la tensión simulada, la onda cuadrada utilizada en LTSpice es mucho mas consistente, dando por ende resultados esperados (te utilizo un tiempo de crecimiento de 1ps para la cuadrada en LTSpice).

## 7. Conclusiones

Se logro diseñar un circuito que cumpla dentro de ciertos límites permitidos de errores con la transferencia pedida. Asimismo, gracias a las diferentes simulaciones numéricas y circuitales, se logro hacer una verificación de lo que predice la teoría.