



# **Matériaux et structures composites**

Modélisation des composites stratifiés

**Guillaume Couégnat**  
couegnat@lcts.u-bordeaux.fr

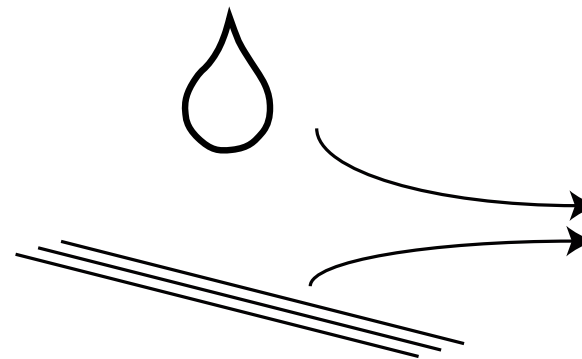
# Objectifs

- **Comment modéliser un composite stratifié ?**
- **Choix de modélisation “matériau”**
  - Modèle 3D mésoscopique
  - Modèle de plaque équivalente (CLT)
  - Matériaux homogènes équivalents
- **Choix des éléments finis (2D/3D, cinématique)**
  - *Shell* (homogène/généralisée/composite)
  - *Continuum shell*
  - *Solid* (homogène/composite)

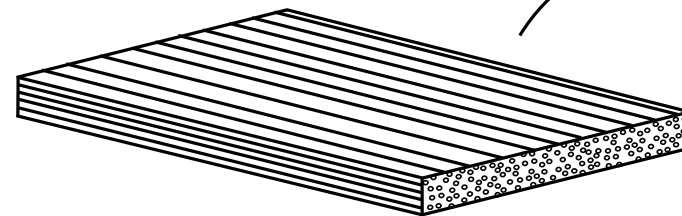
# Qu'est-ce qu'un composite stratifié ?

- “Matériau” multiéchelle (micro/méso/macro), hétérogène, anisotrope
  - Echelle micro : fibre/matrice
  - Echelle méso : pli UD
  - Echelle macro : stratifié

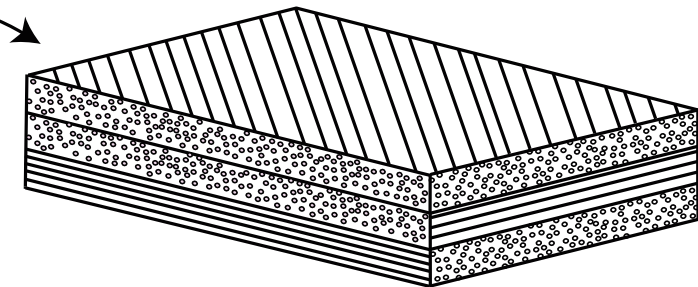
matrice polymérique



fibres (carbone, verre...)



pli unidirectionnel



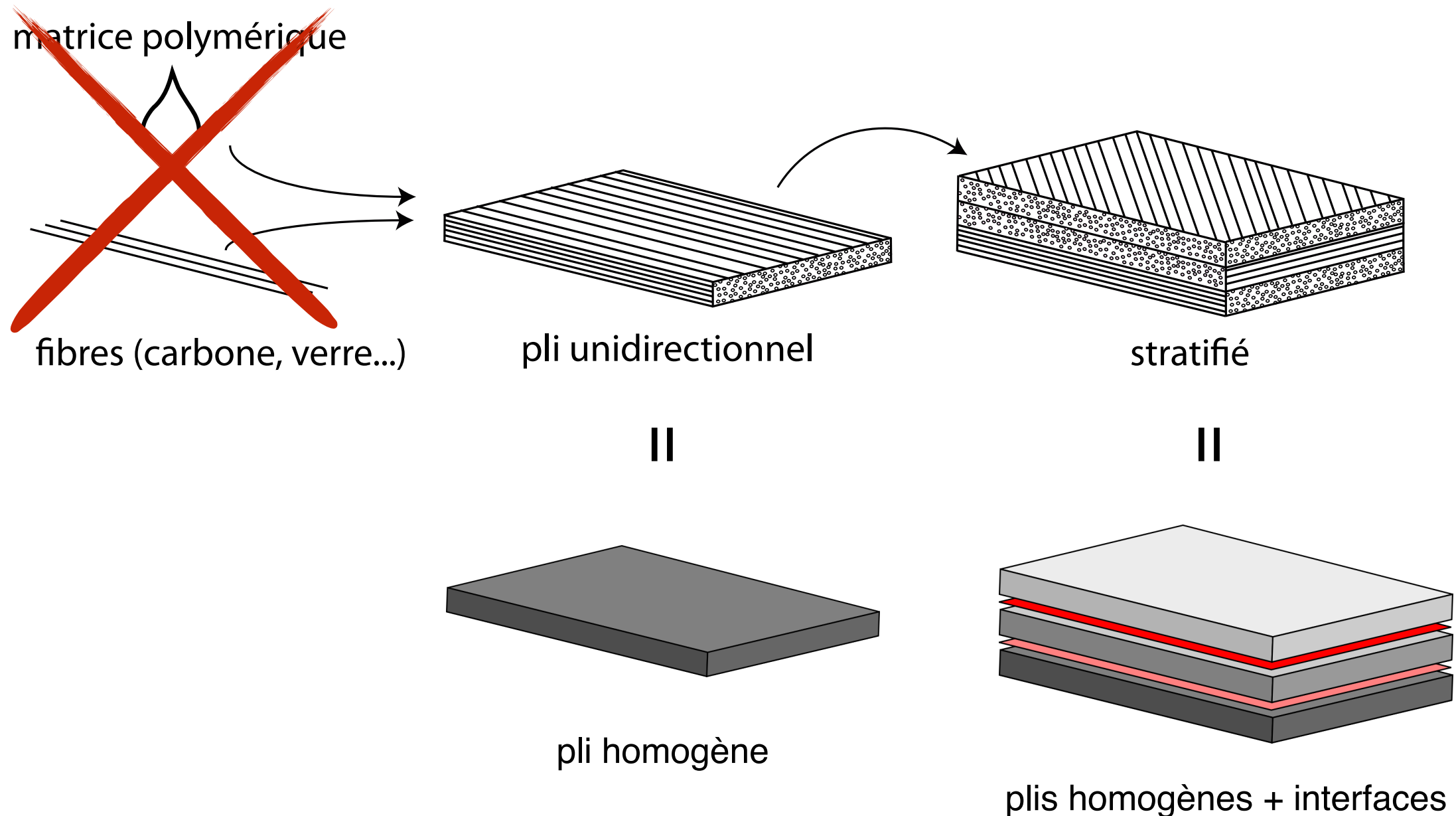
stratifié

[Trovalet2010]

- Composite stratifié = STRUCTURE

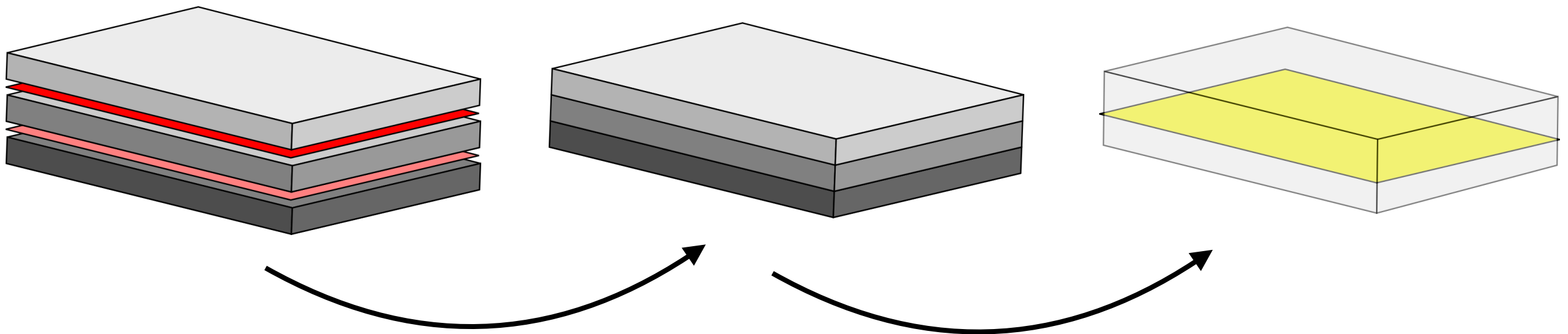
# Modèle mésoscopique

- Plis = matériaux homogènes orthotropes
- Stratifié = assemblage plis + interfaces



# Modèle de plaque équivalente

- Plis homogènes (orthoroïpe/isotrope transverse) :  $\bar{Q}$
- Interfaces parfaites
- Hypothèse plaque mince (Kirchhoff-Love) :  $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$



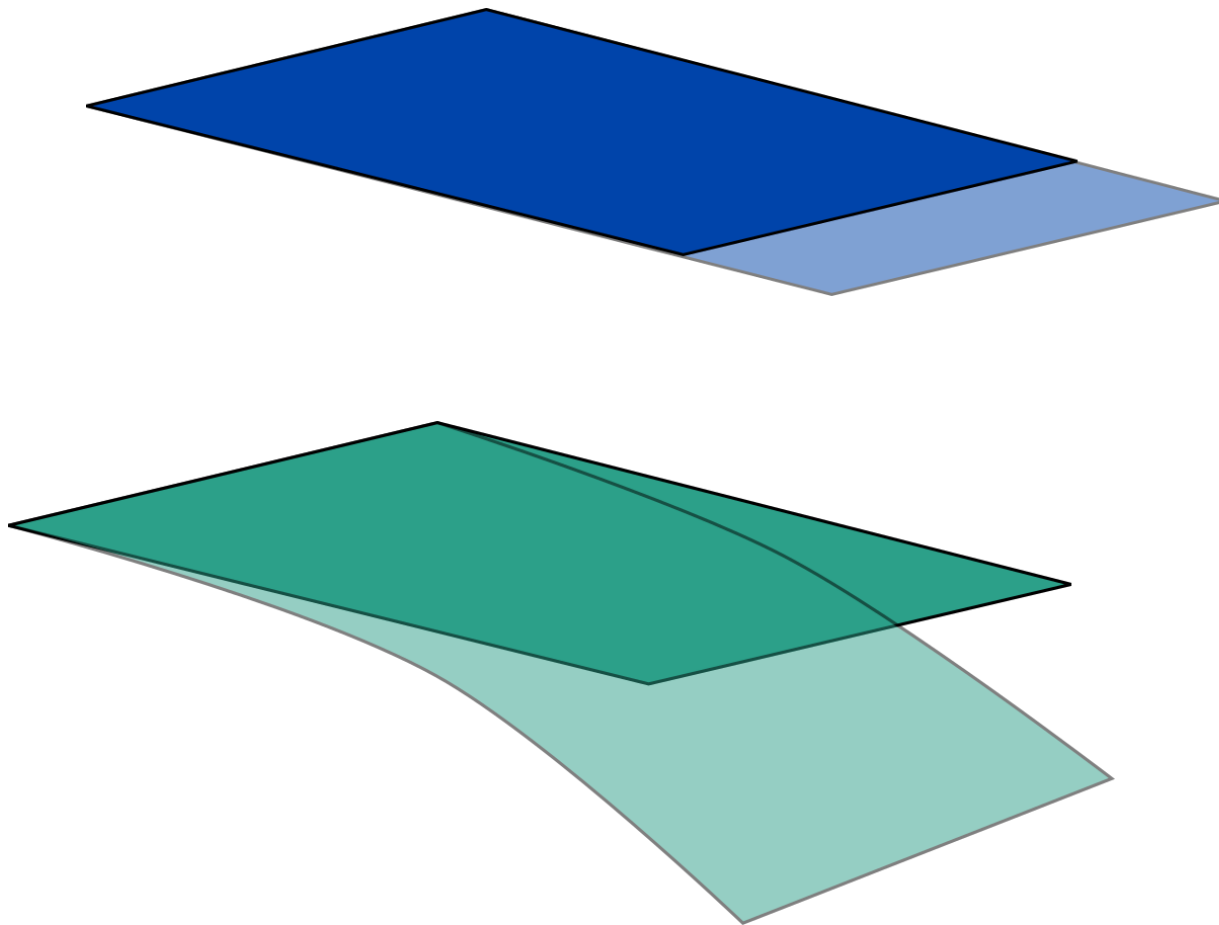
$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix}$$

# Modèle de plaque équivalente

membrane    couplage

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix}$$

flexion



$$A = \sum_k (z_k - z_{k-1}) \bar{Q}_k$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{Q}_k$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k$$

# Matériau homogène équivalent

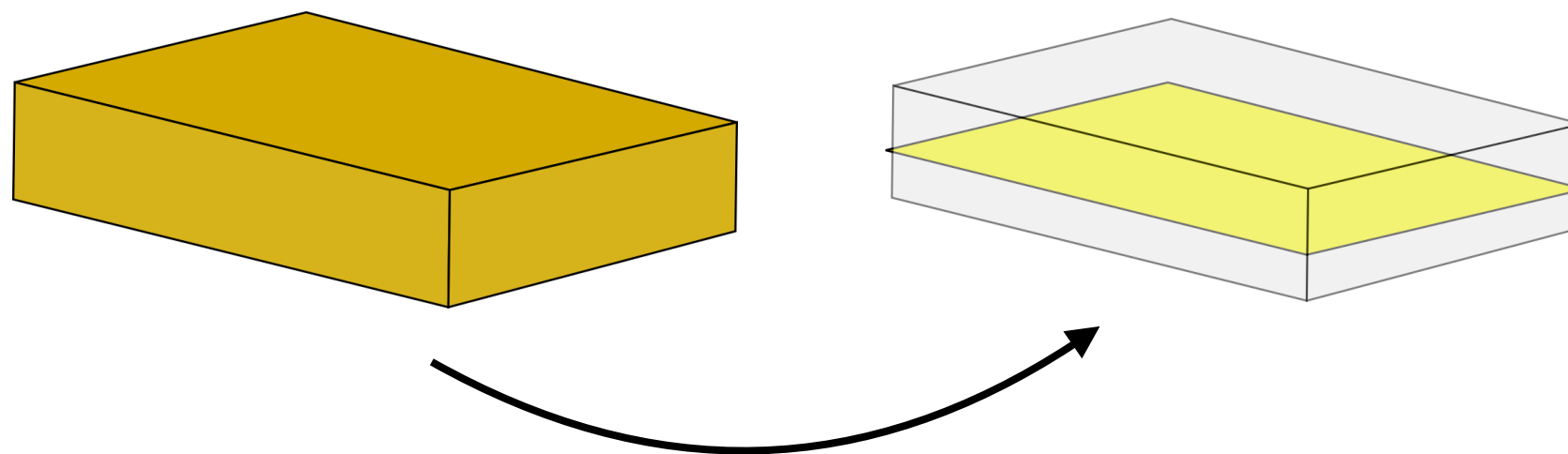
- Si symétrique *et* équilibré :  $B = 0$ , découplage entre membrane et flexion

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix}$$

- On peut définir des matériaux équivalents en membrane ou flexion  $\square^{m/f}$  tels que :

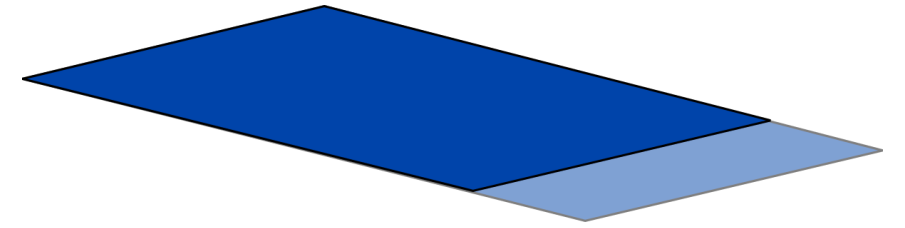
$$\tilde{A}(E_x^m, E_y^m, G_{xy}^m, \nu_{xy}^m) = A_{\text{CLT}}$$

$$\tilde{D}(E_x^f, E_y^f, G_{xy}^f, \nu_{xy}^f) = D_{\text{CLT}}$$



# Matériau homogène équivalent

- Chargement membrane pure



$$\begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

- On peut trouver un matériau équivalent tel qu'il ait la même rigidité **A** en membrane

$$E_x^m = \frac{1}{h} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}$$

$$E_y^m = \frac{1}{h} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}}$$

$$G_{xy}^m = \frac{1}{h} A_{66}$$

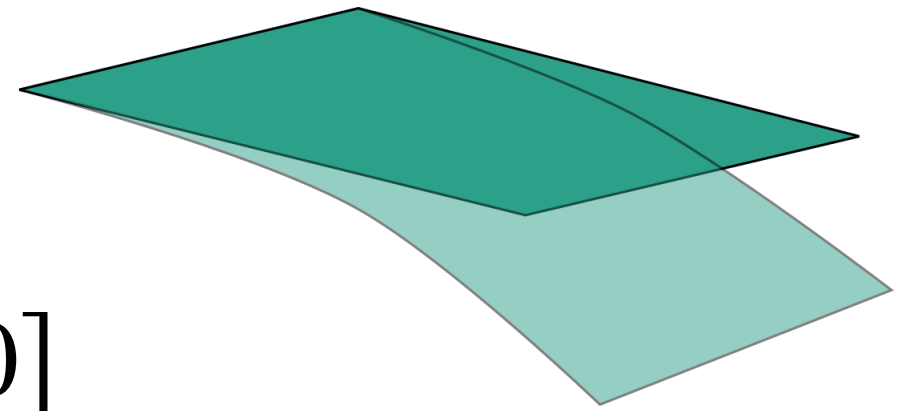
$$\nu_{xy}^m = A_{12}/A_{22}$$



# Matériau homogène équivalent

- Chargement flexion pure

$$\begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix}$$



- On peut trouver un matériau équivalent tel qu'il ait la même rigidité  $\mathbf{D}$  en flexion

$$E_x^f = \frac{12}{h^3} \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{D_{22}}$$

$$G_{xy}^f = \frac{12}{h^3} D_{66}$$

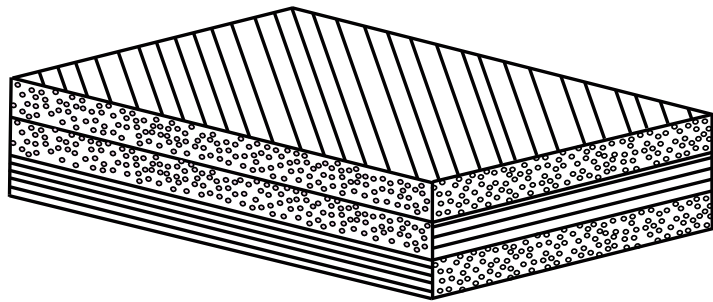
$$E_y^f = \frac{12}{h^3} \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{D_{11}}$$

$$\nu_{xy}^f = D_{12}/D_{22}$$

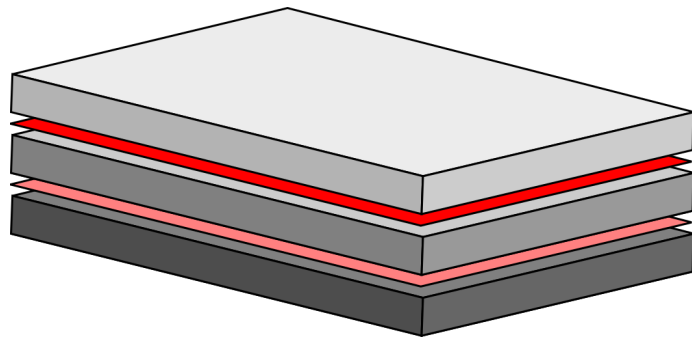
# Matériau homogène équivalent

- **Choix du matériau homogène équivalent ?**
  - Si symétrique *et* équilibré, et chargement pur : choix évident
  - Si symétrique *et* équilibré, et chargement quelconque : dépend du chargement
  - Sinon, dépend à la fois de l'empilement (couplage) et du chargement

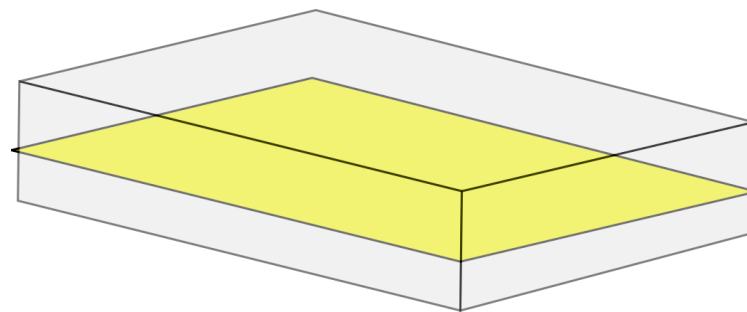
# En résumé



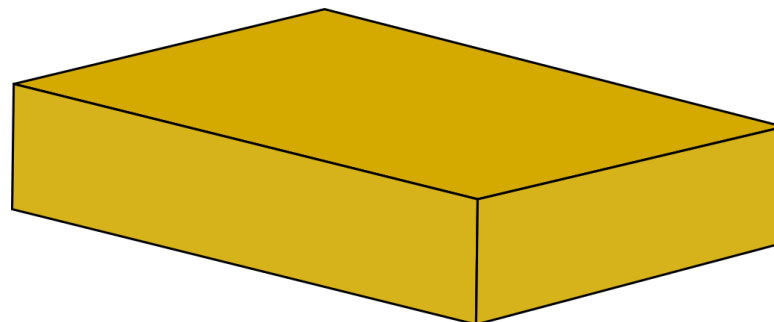
structure hétérogène multiéchelle



plis + interfaces



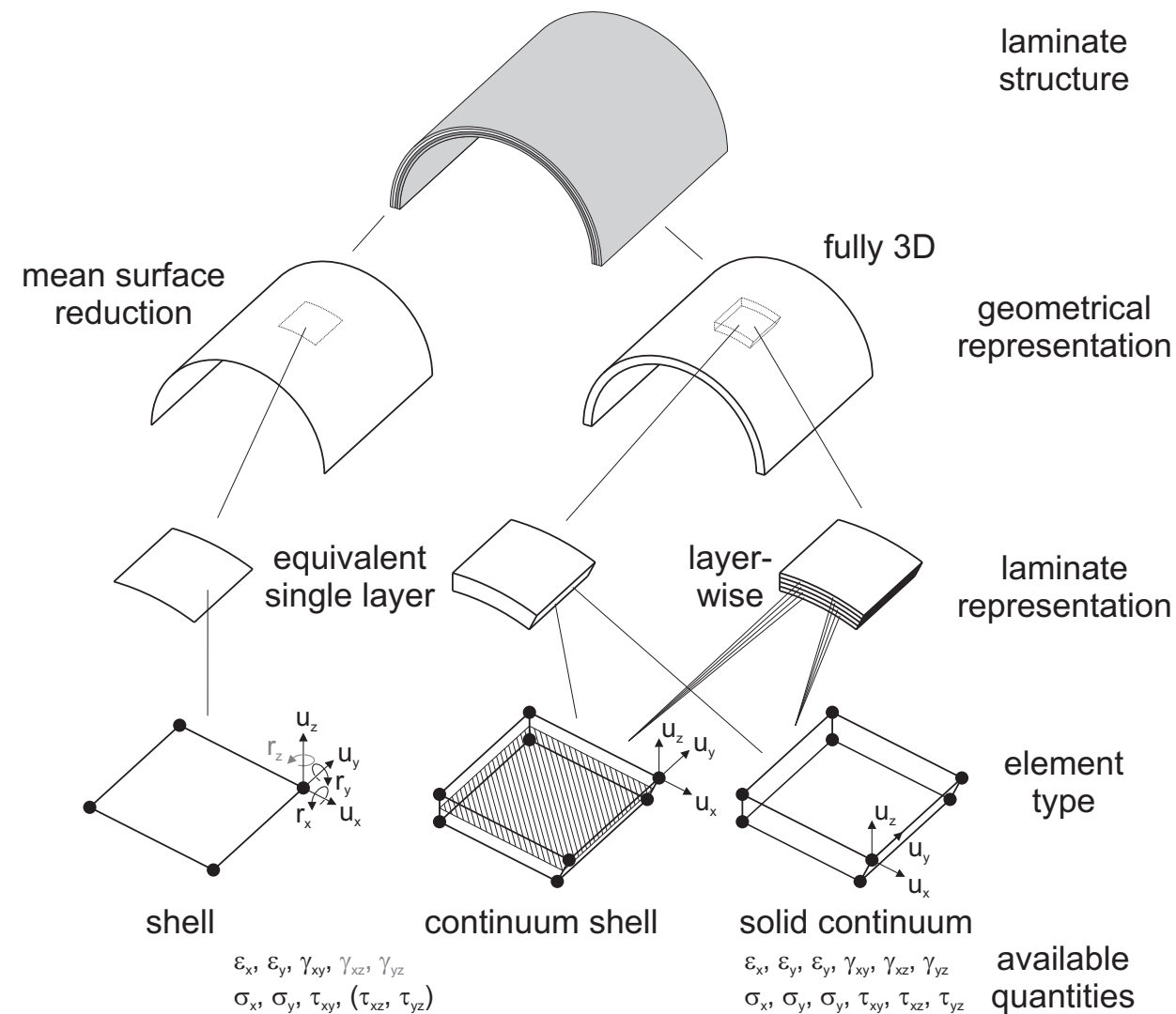
plaque équivalente (CLT)



matériau orthotrope équivalent

# Choix des éléments

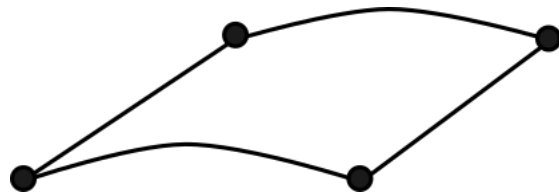
- Différentes approximations matériaux
- Quels types d'éléments sont compatibles avec ces représentations
  - 2D/3D, cinématique (plaque, solide), homogène/composite ?



# Éléments de type *shell*

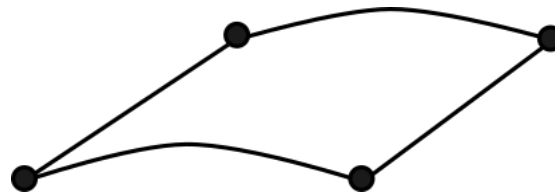
- Shell = “coque”
- Géométrie 2D, cinématique 3D (plaque mince)
- 6 DDL par noeud : 3 translations  $u_x, u_y, u_z$  et 3 rotations  $r_x, r_y, r_z$
- Contraintes planes :  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

*Homogeneous shell*



- Matériau homogène équivalent (membrane/flexion)
- Épaisseur

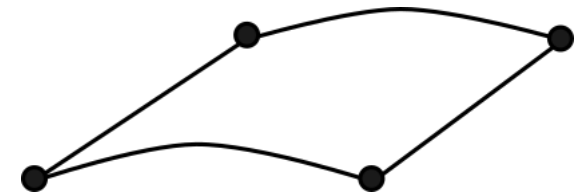
*General shell*



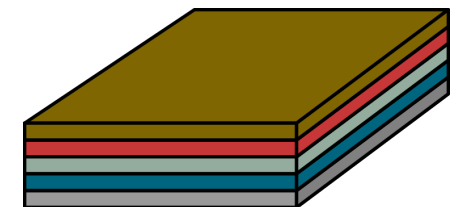
- Matrice [ABBD]

Épaisseur définie par la  
définition de la *section*

***Composite shell***



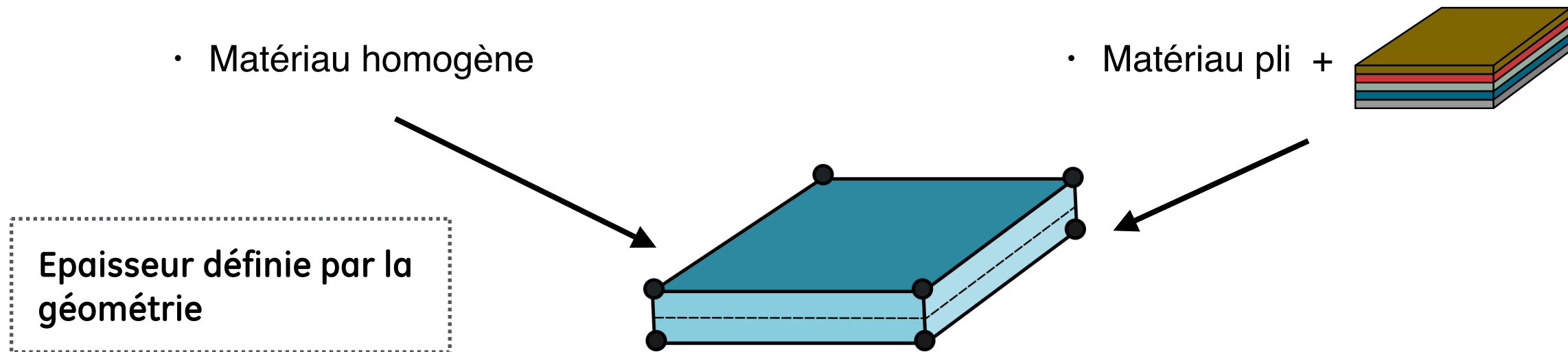
- Matériaux plis
- Définition stratification (épaisseur, orientation)



Accès direct aux valeurs pli par pli

# Éléments de type *continuum shell*

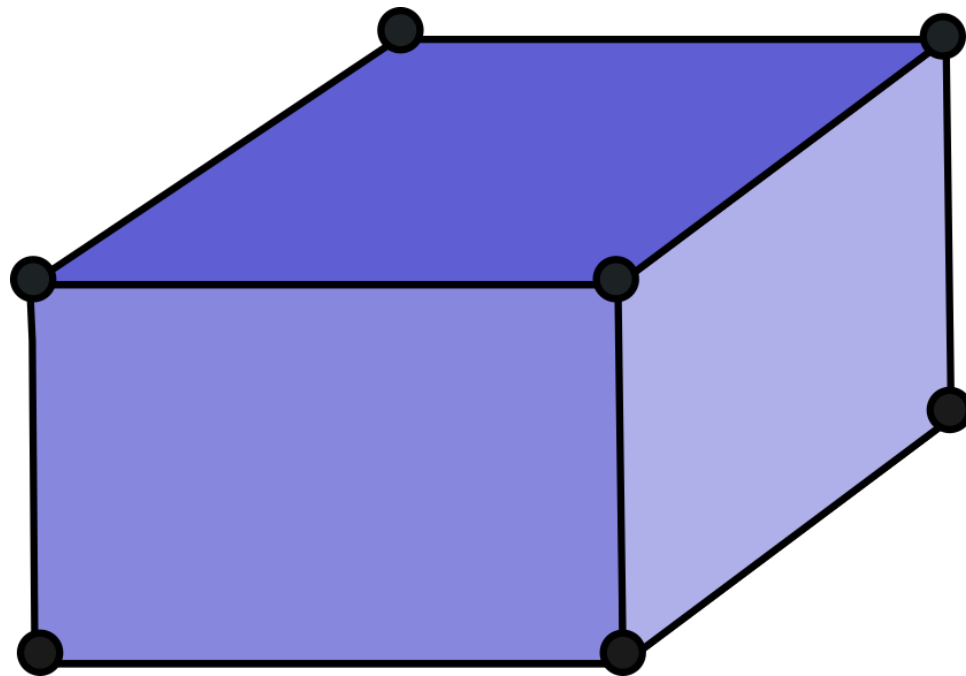
- Element volumique mais avec cinématique plaque (épaisse)
- 3 DDL par noeud : 3 translations  $u_x, u_y, u_z$
- Contraintes planes  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  (+ approximation  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ), mais toujours  $\sigma_z = 0$



- On gagne (un peu) en contrainte (approx. cisaillement interlaminaire), mais on perd en cinématique. Pas de DDL de rotation = pas de flexion
- (Seul) intérêt : pièce avec épaisseur variable -> épaisseur "coque" depuis la CAO sans avoir à définir plusieurs *sections*

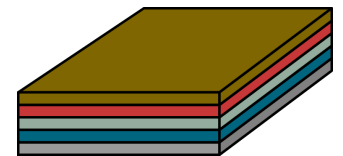
# Éléments de type *solid*

- Element volumique
- 3 DDL par noeud : 3 translations  $u_x, u_y, u_z$
- Tenseur des contraintes 3D complet



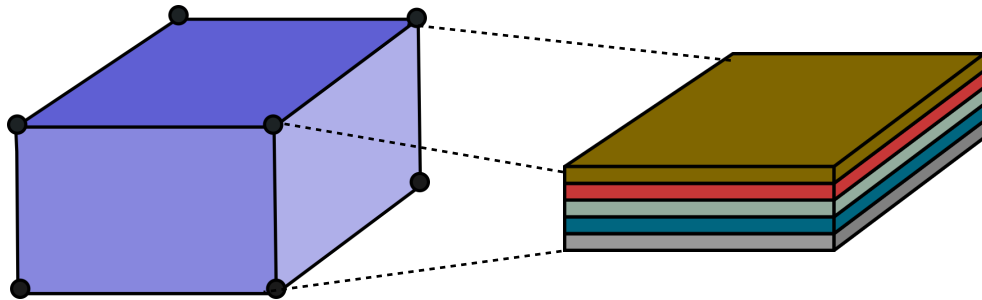
Matériau homogène

Matériau pli +

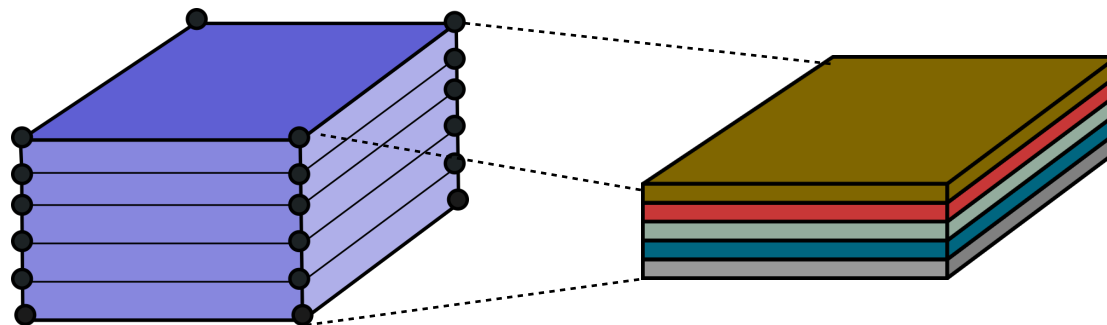


# Éléments de type *solid*

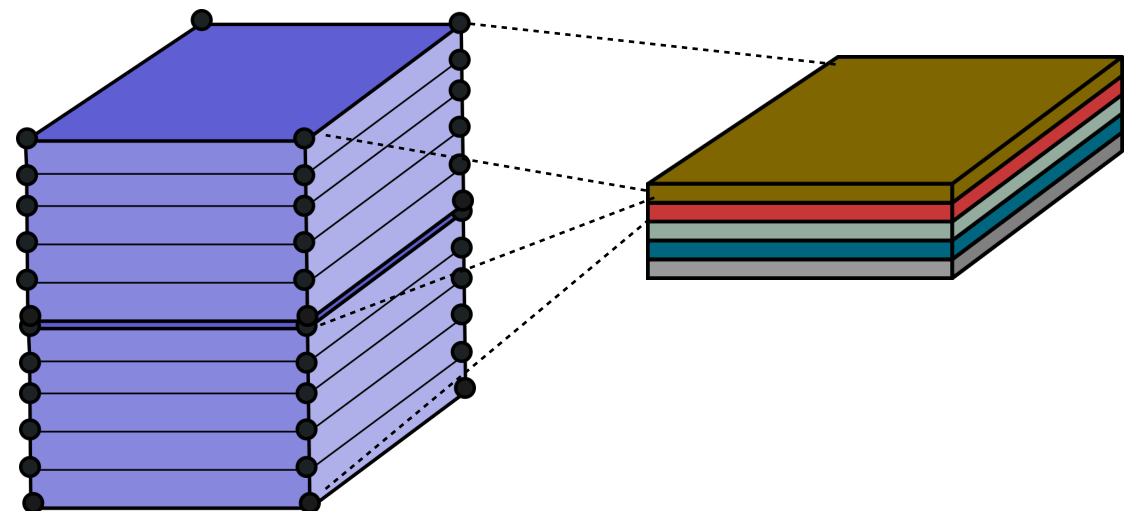
1 élément dans l'épaisseur



1 élément par pli



Plusieurs éléments par pli

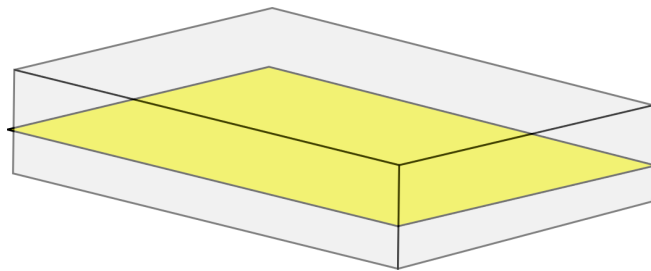




# En pratique

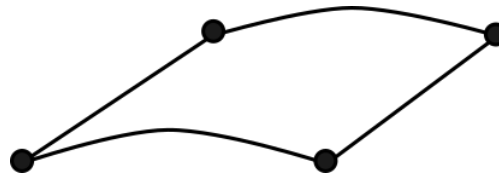
- Dans 95% des cas, on peut s'en sortir avec :

Théorie des stratifiés



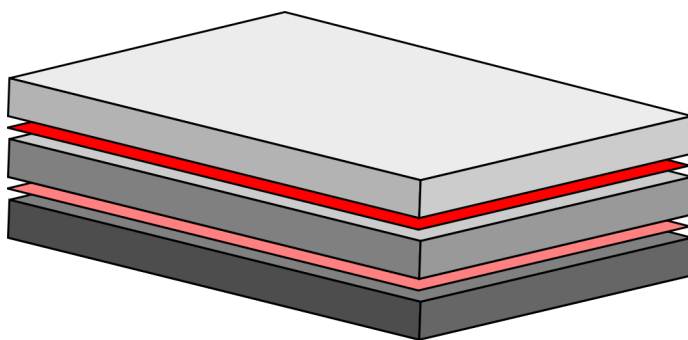
+

*Shell*



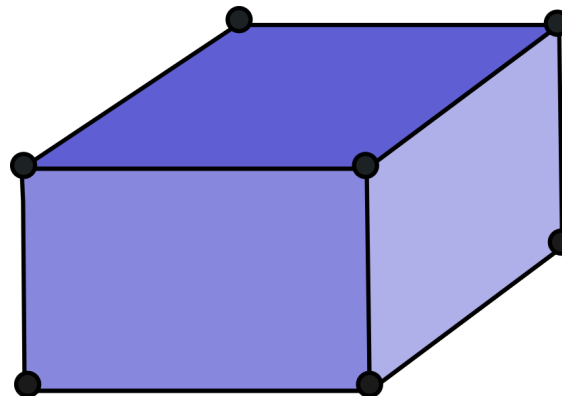
- Suffisant pour dimensionnement global (déformée, effort) **TP1**
- OK pour endommagement intralaminaire (plis) **TP2**

Plis (+ interfaces)



+

*Solid*



- Nécessaire pour contraintes hors-plan + endommagement interlaminaire (délaminage) **TP3**