Matériaux et structures composites

Modélisation des composites stratifiés

Guillaume Couégnat
couegnat@lcts.u-bordeaux.fr

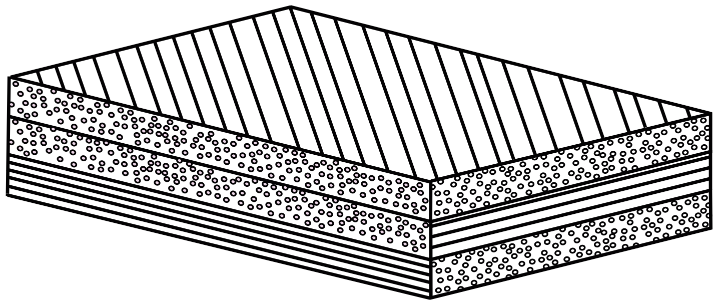
Objectifs

- **Comment modéliser un composite stratifié ?**

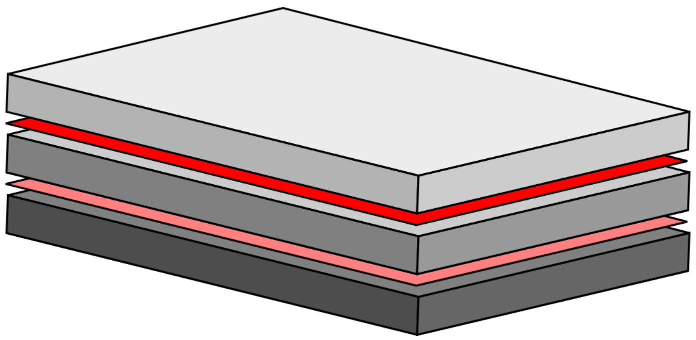
- **Choix de modélisation “matériau”**
  - Modèle 3D mésoscopique
  - Modèle de plaque équivalente (CLT)
  - Matériaux homogènes équivalents

- **Choix des éléments finis (2D/3D, cinématique)**
  - *Shell* (homogène/généralisée/composite)
  - *Continuum shell*
  - *Solid* (homogène/composite)

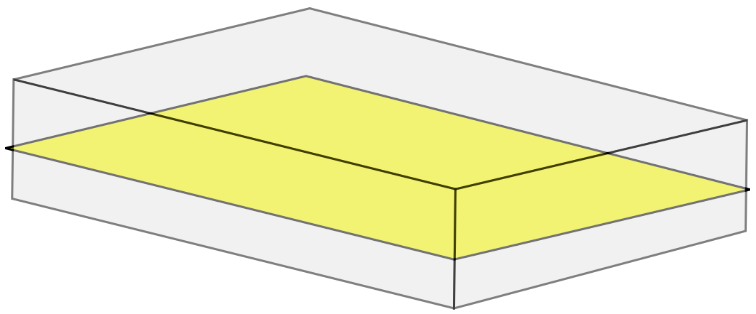
Modélisation “matériau”



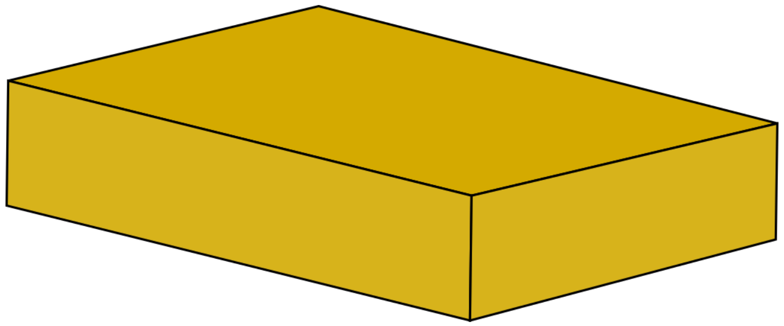
Composite stratifié



Modèle “plis/interfaces”



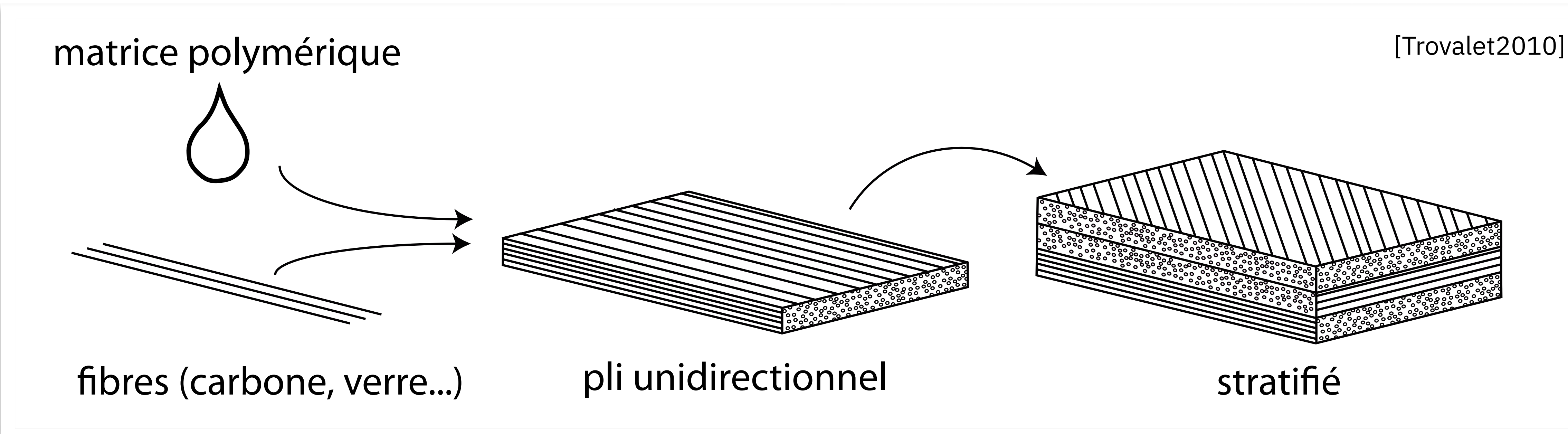
Modèle “théorie des stratifiés”



Modèle “matériau homogène”

Qu’est-ce qu’un composite stratifié ?

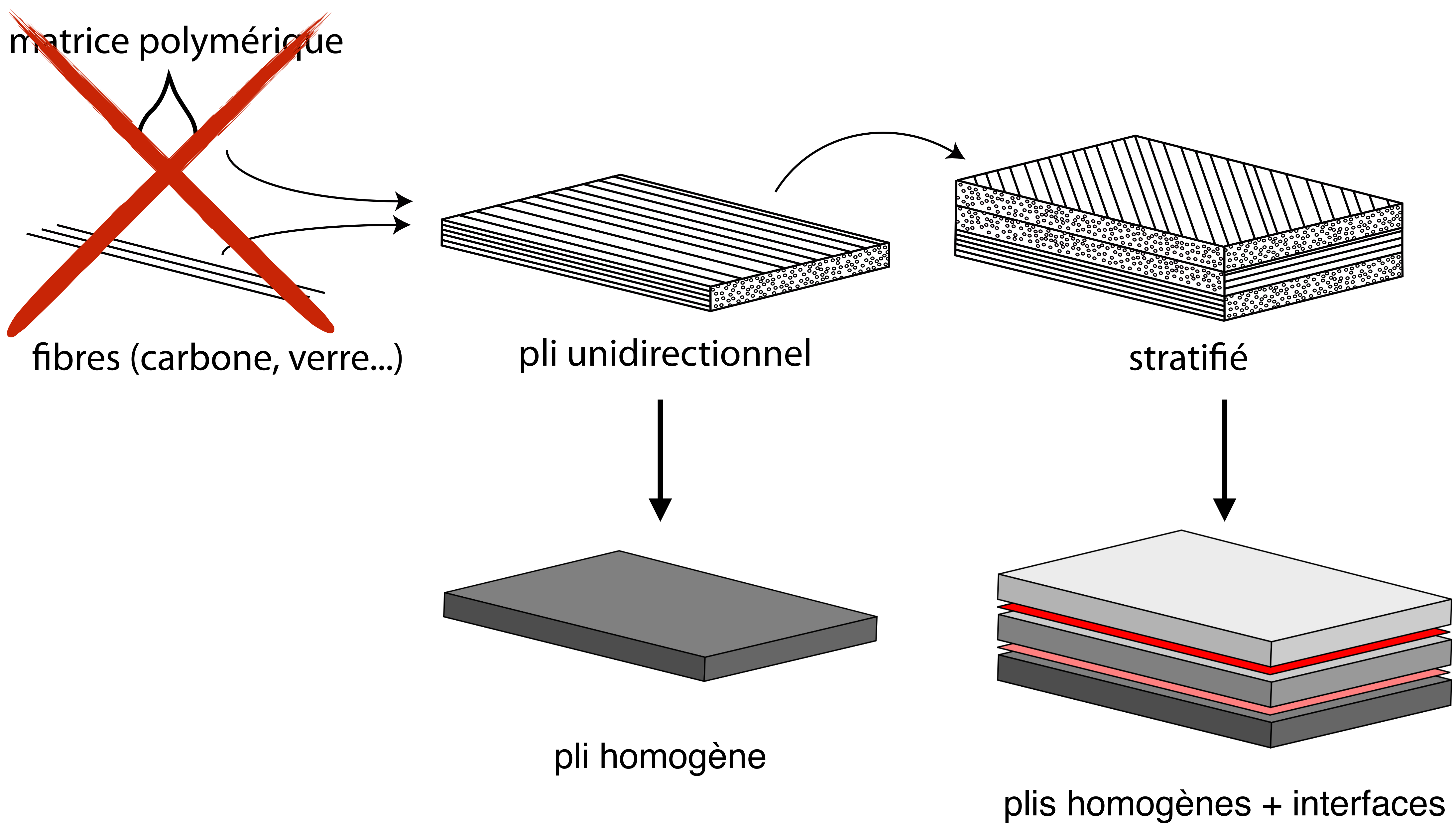
- “Matériau” multiéchelle (micro/méso/macro), hétérogène, anisotrope
  - Echelle micro : fibre/matrice
  - Echelle méso : pli UD
  - Echelle macro : stratifié



- Composite stratifié = *structure*

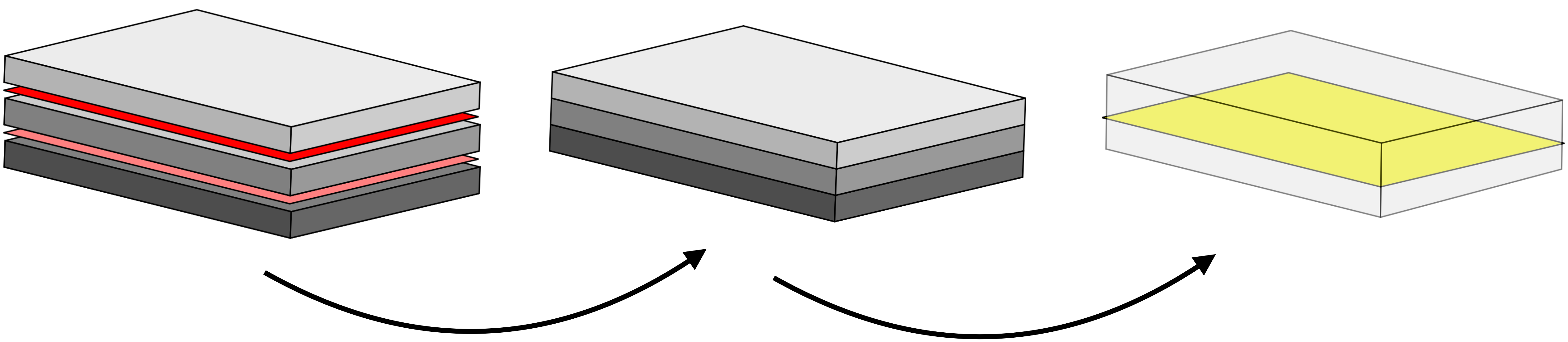
Modèle mésoscopique “plis/interfaces”

- Plis = matériaux homogènes orthotropes
- Stratifié = plis + interfaces



Modèle de plaque équivalente

- Plis homogènes + hyp. contraintes planes: $\bar{Q}$
- Interfaces parfaites
- Hypothèse plaque mince (Kirchhoff-Love) : $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$



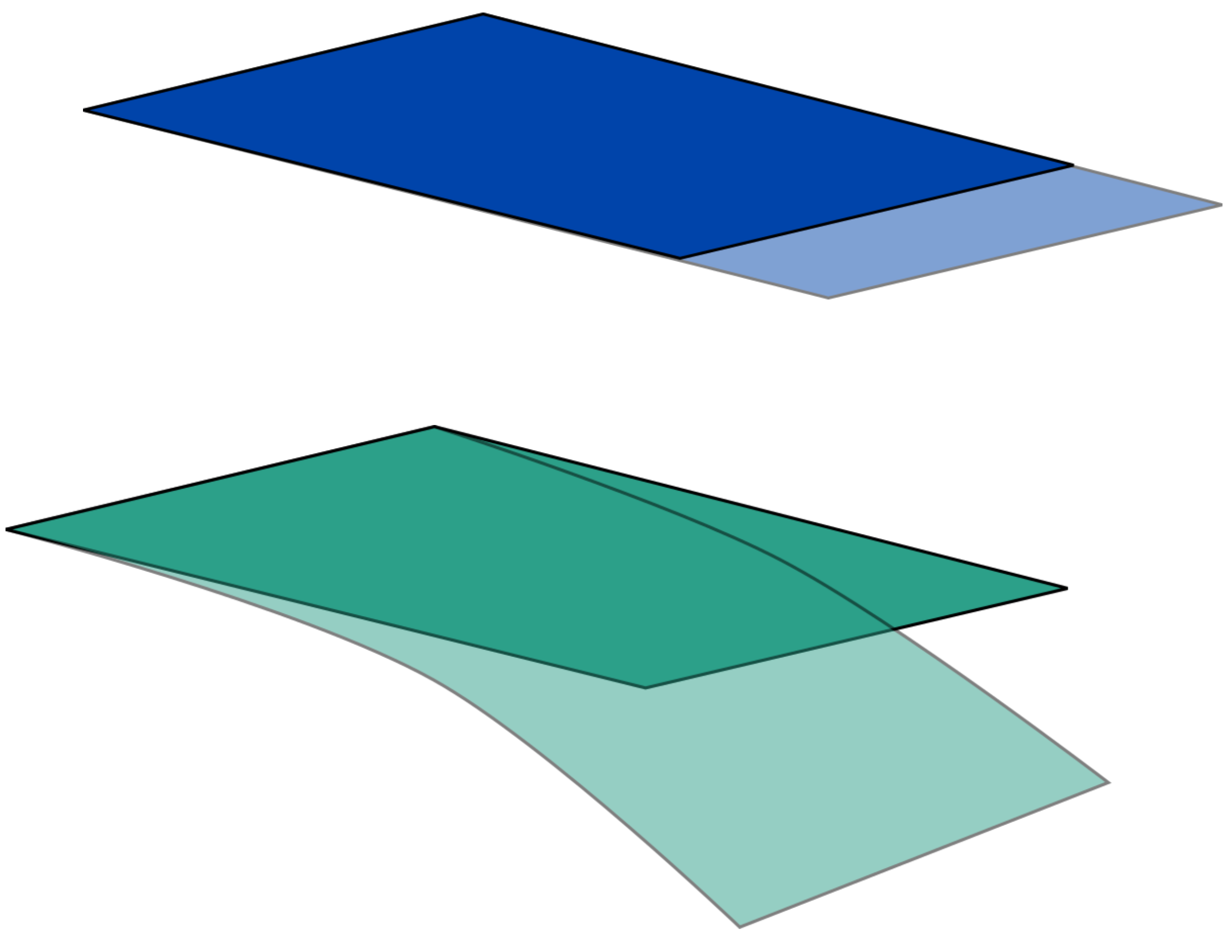
$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix}$$

Modèle de plaque équivalente

membrane couplage

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix}$$

flexion



$$A = \sum_k (z_k - z_{k-1})\bar{Q}_k$$

$$B = \frac{1}{2}\sum_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)\bar{Q}_k$$

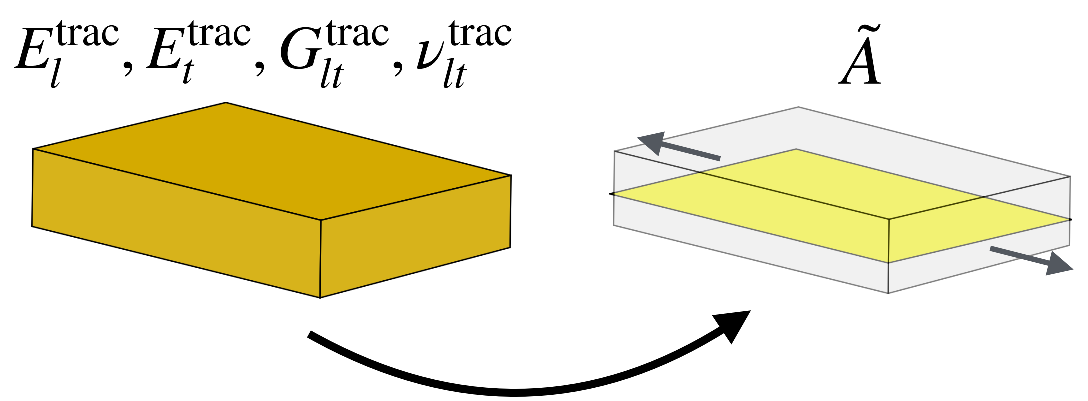
$$D = \frac{1}{3}\sum_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)\bar{Q}_k$$

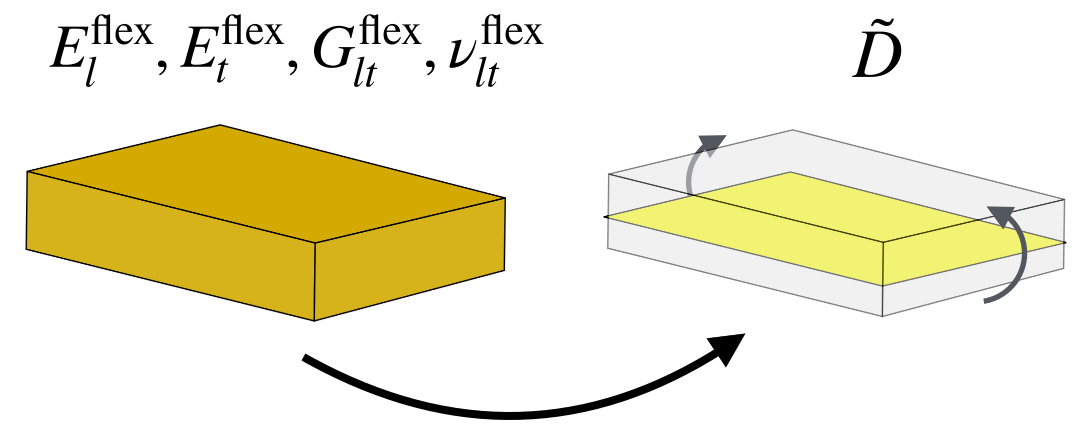
Matériau homogène équivalent

- Si empilement symétrique *et* équilibré : $B = 0$, pas de couplage

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} N = A\epsilon \\ M = D\kappa \end{matrix}$$

- On peut définir des matériaux orthotropes équivalents tels qu’une coque homogène ait la même rigidité en membrane $\tilde{A}$ ou en flexion $\tilde{D}$ que le stratifié de départ.





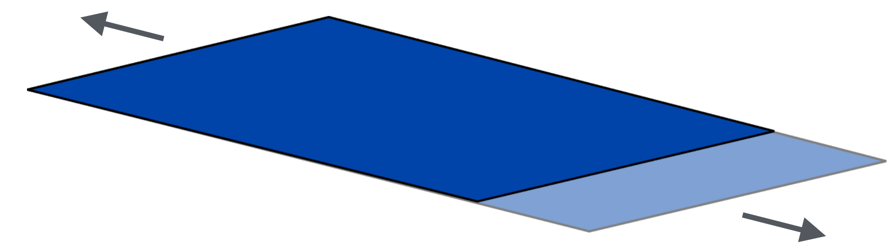
$$\tilde{A}\left(E_l^{\text{trac}}, E_t^{\text{trac}}, G_{lt}^{\text{trac}}, \nu_{lt}^{\text{trac}}\right) = A \qquad \tilde{D}\left(E_l^{\text{flex}}, E_t^{\text{flex}}, G_{lt}^{\text{flex}}, \nu_{lt}^{\text{flex}}\right) = D$$

- En général, $\square^{\text{trac}} \neq \square^{\text{flex}}$

Matériau homogène équivalent

- Chargement membrane

$$\begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$



- On peut trouver un matériau équivalent tel qu'il ait la même rigidité en membrane A que le stratifié

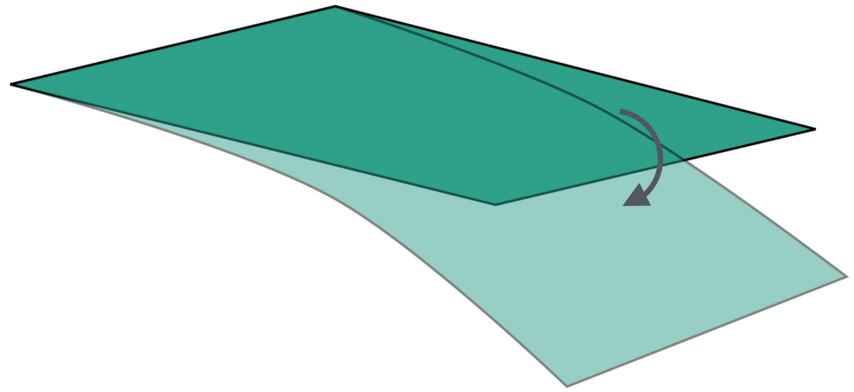
$$E_x^{\text{trac}} = \frac{1}{h} \frac{A_{11}A_{22} - {A_{12}}^2}{A_{22}} \qquad G_{xy}^{\text{trac}} = \frac{1}{h} A_{66}$$

$$E_y^{\text{trac}} = \frac{1}{h} \frac{A_{11}A_{22} - {A_{12}}^2}{A_{11}} \qquad \nu_{xy}^{\text{trac}} = A_{12}/A_{22}$$

Matériau homogène équivalent

- Chargement flexion pure

$$\begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix}$$

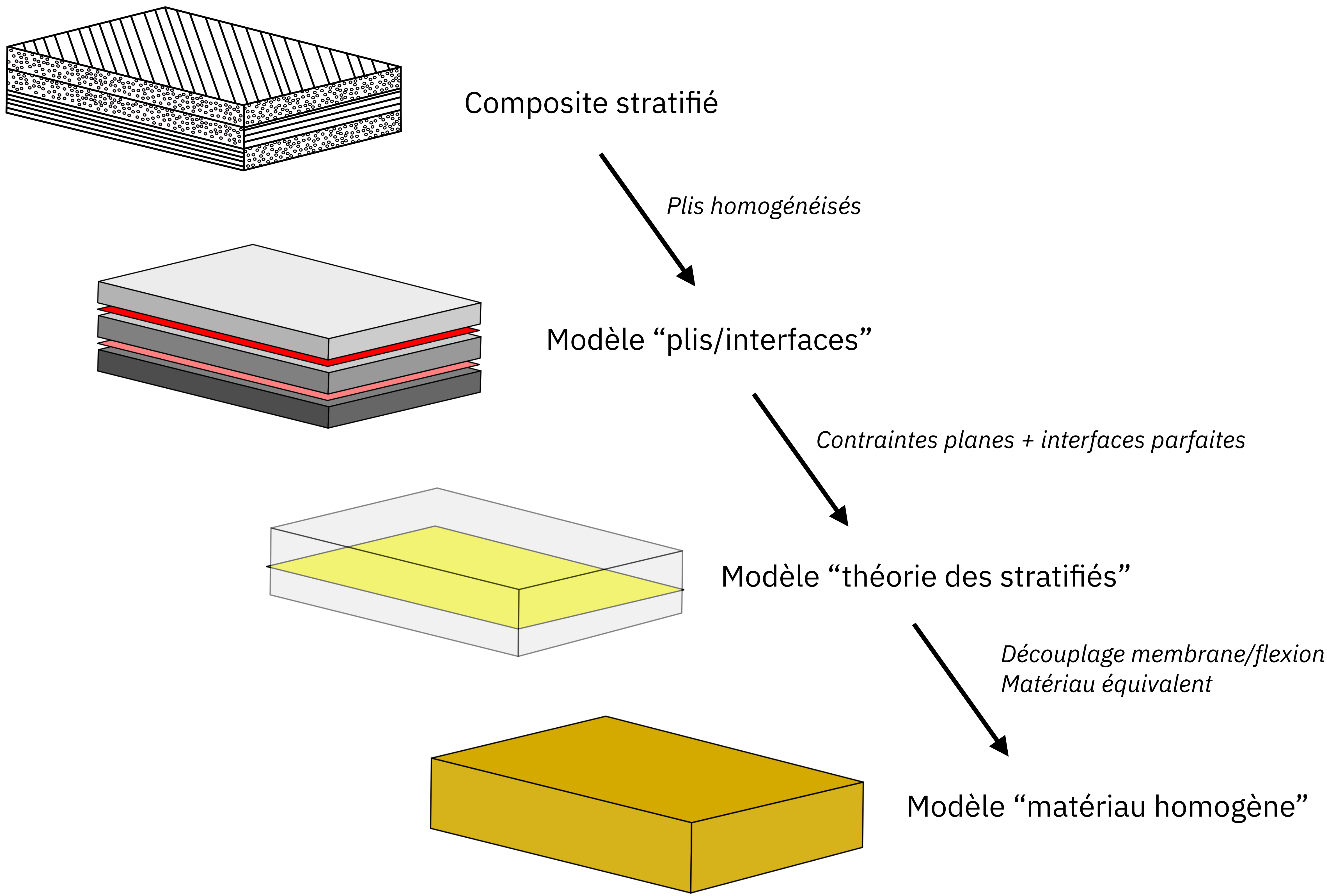


- On peut trouver un matériau équivalent tel qu'il ait la même rigidité en flexion D que le stratifié

$$E_x^{\text{flex}} = \frac{12}{h^3} \frac{D_{11} D_{22} - {D_{12}}^2}{D_{22}} \qquad G_{xy}^{\text{flex}} = \frac{12}{h^3} D_{66}$$

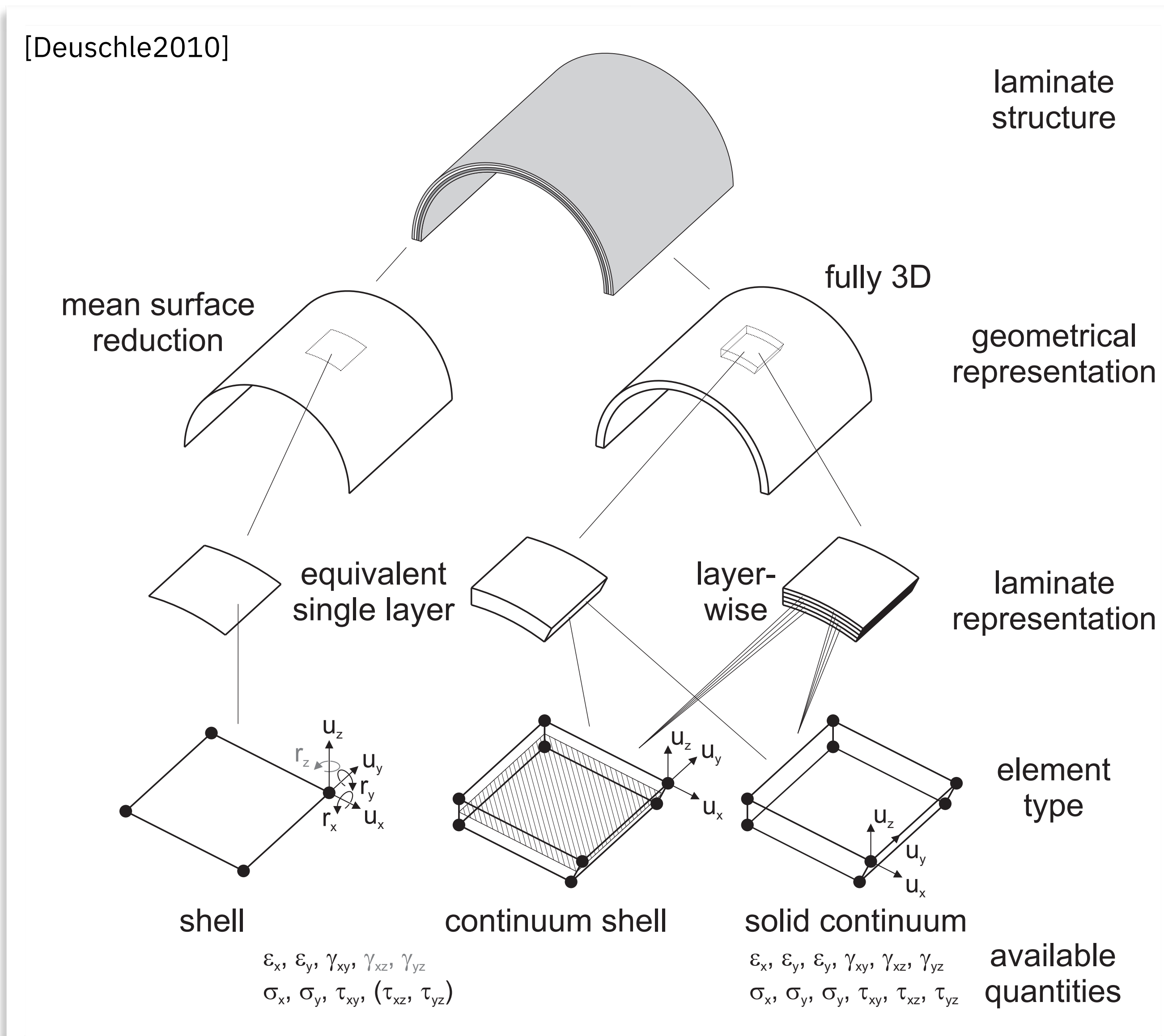
$$E_y^{\text{flex}} = \frac{12}{h^3} \frac{D_{11} D_{22} - {D_{12}}^2}{D_{11}} \qquad \nu_{xy}^{\text{flex}} = D_{12}/D_{22}$$

En résumé


Composite stratifié
Plis homogénéisés
Modèle “plis/interfaces”
Contraintes planes + interfaces parfaites
Modèle “théorie des stratifiés”
Découplage membrane/flexion
Matériau équivalent
Modèle “matériau homogène”

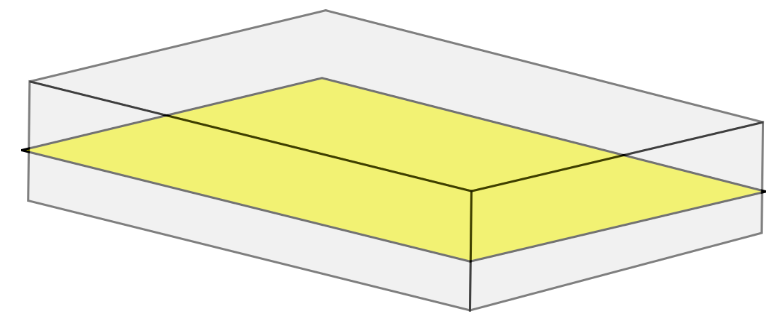
Modélisation numérique

- Différentes approximations matériaux
- Quels types d’éléments sont compatibles avec ces représentations
  - 2D/3D, cinématique (plaque, solide), homogène/composite ?

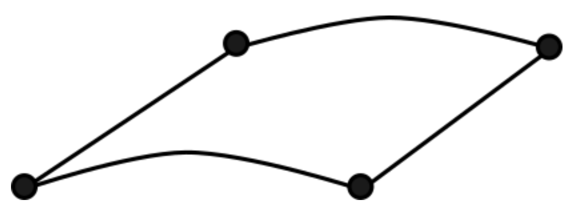


Eléments coques

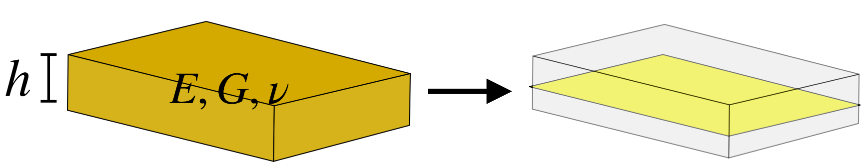
- Modélisation *shell*
- Cinématique 3D (plaque mince)
- Contraintes planes : $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$
- 6 DDL par noeud : 3 translations + 3 rotations



Homogeneous shell

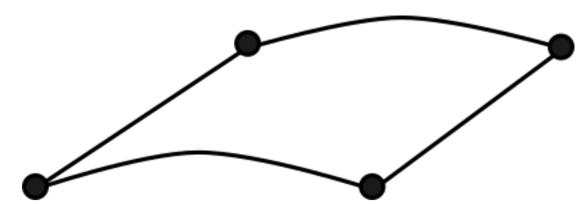


- Matériau homogène + épaisseur



⚠ Pas de couplage !

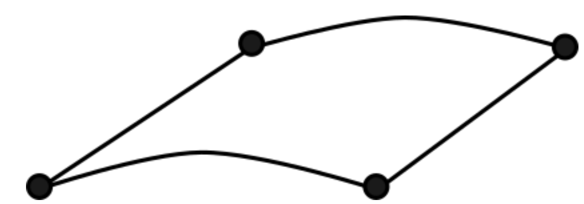
General shell



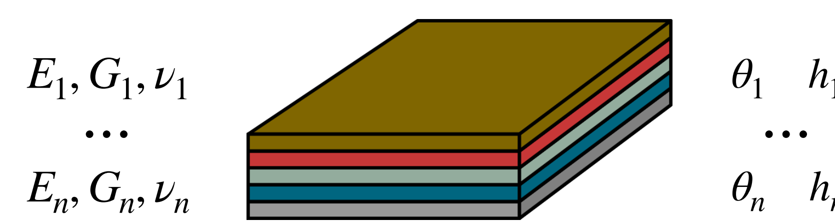
- Matrice [ABBD]

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix}$$

Composite shell



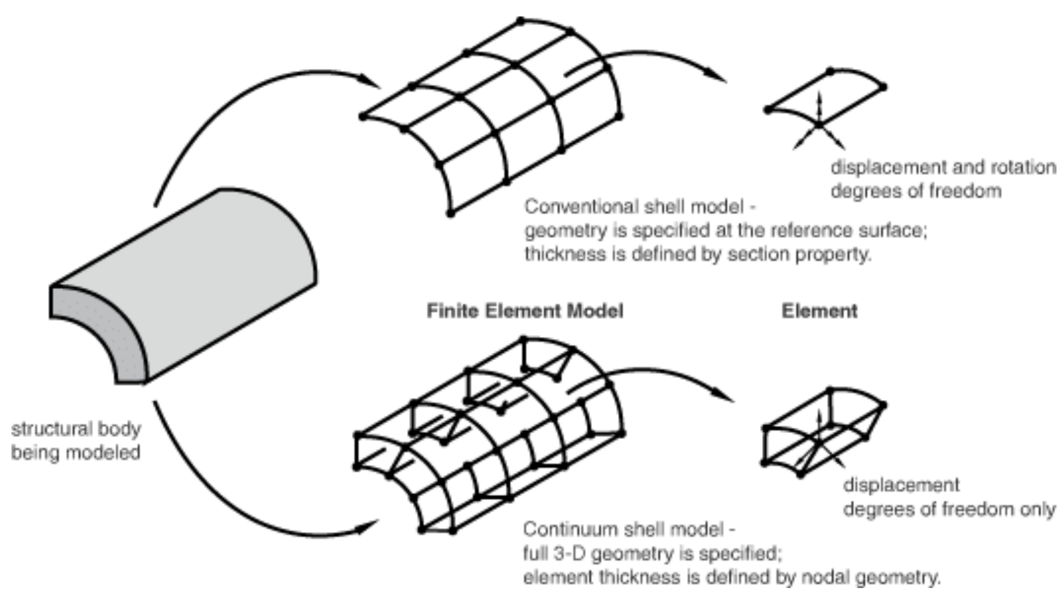
- Propriétés plis + stratification

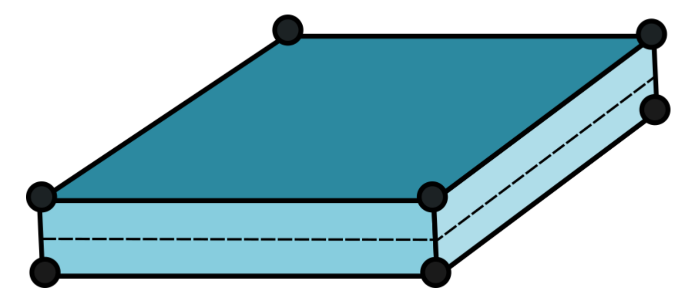


ⓘ Accès aux contraintes par pli

Eléments *continuum shell*

- Element volumique, 3 DDL par noeud : 3 translations u_x, u_y, u_z
- Cinématique plaque (*épaisse*) : contraintes planes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (+ *approximation* τ_{xz}, τ_{yz}), mais toujours $\sigma_z = 0$





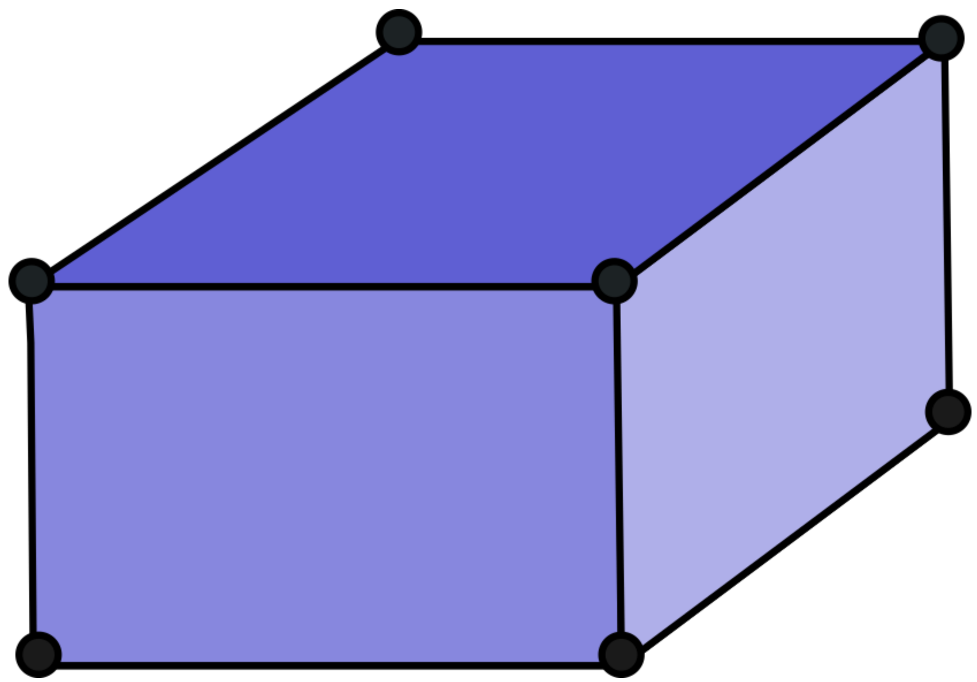
- Par rapport à coque classique, on gagne (un peu) en contrainte (approx. cisaillement interlaminaire), mais on perd en cinématique.
- Pas de DDL de rotation = pas de flexion !
- Pièce avec épaisseur variable -> épaisseur “coque” depuis la CAO sans avoir à définir plusieurs *sections*

Eléments volumiques

- Element *solid*
- 3 DDL par noeud : 3 translations u_x, u_y, u_z
- Tenseur des contraintes 3D complet

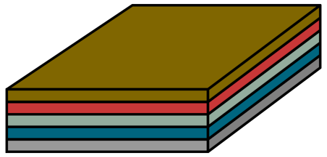
Homogeneous

Matériau homogène



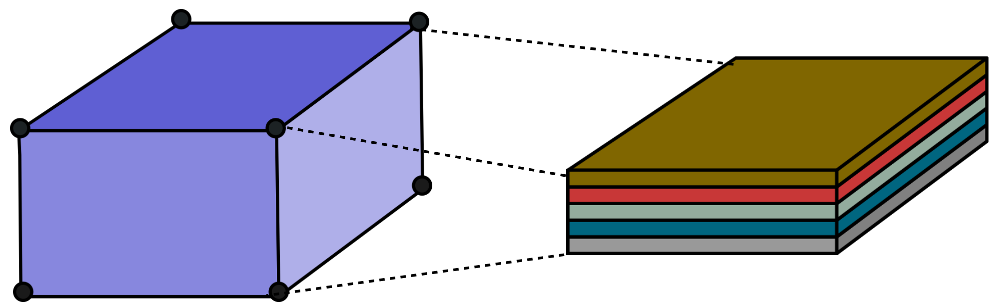
Composite

Matériau pli +

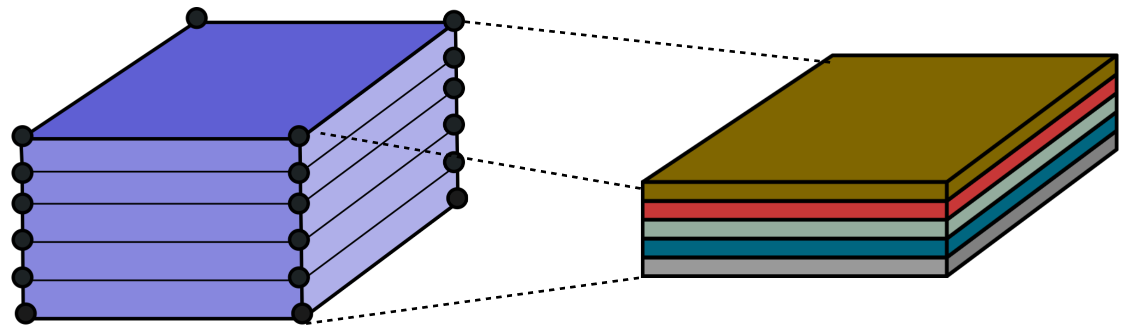


Eléments de type *solid*

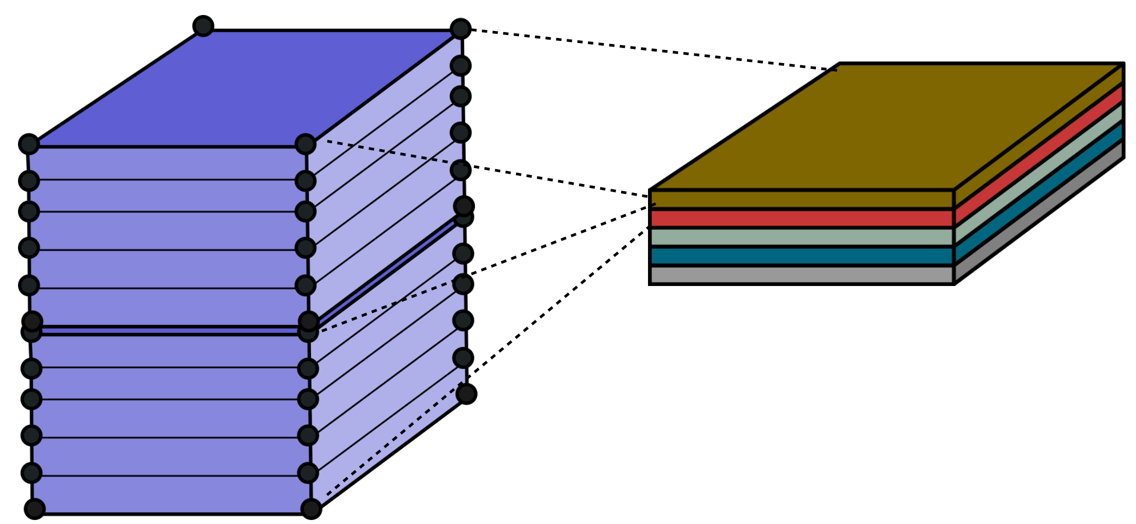
1 élément dans l’épaisseur



1 élément par pli



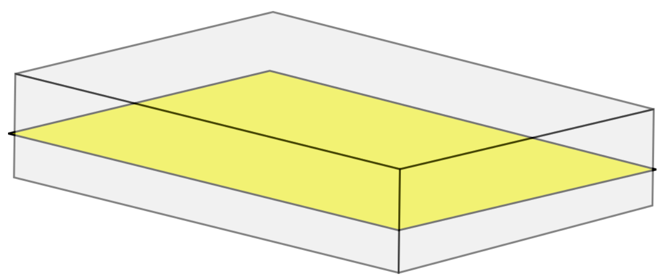
Plusieurs éléments par pli



En pratique

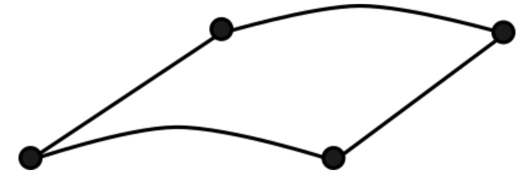
- Dans 95% des cas, on peut s’en sortir avec :

Théorie des stratifiés



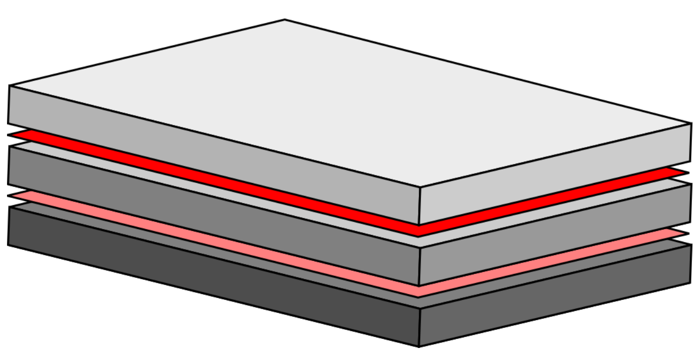
+

Shell



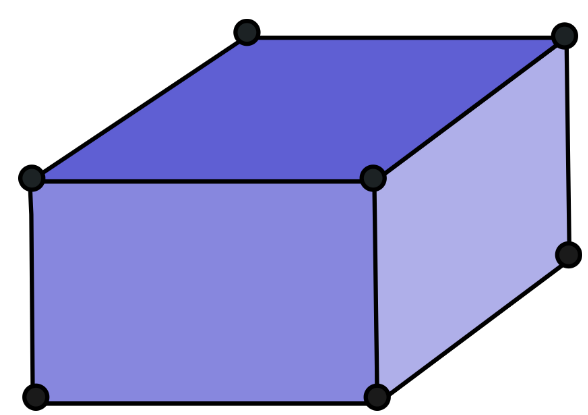
- Suffisant pour dimensionnement global (déformée, effort) **TP1**
- OK pour endommagement intralaminaire (plis) **TP2**

Plis (+ interfaces)



+

Solid



- Nécessaire pour contraintes hors-plan + endommagement interlaminaire (délaminage) **TP3**