



# Matériaux et structures composites

Contraintes hors-plan & endommagement interlaminaire

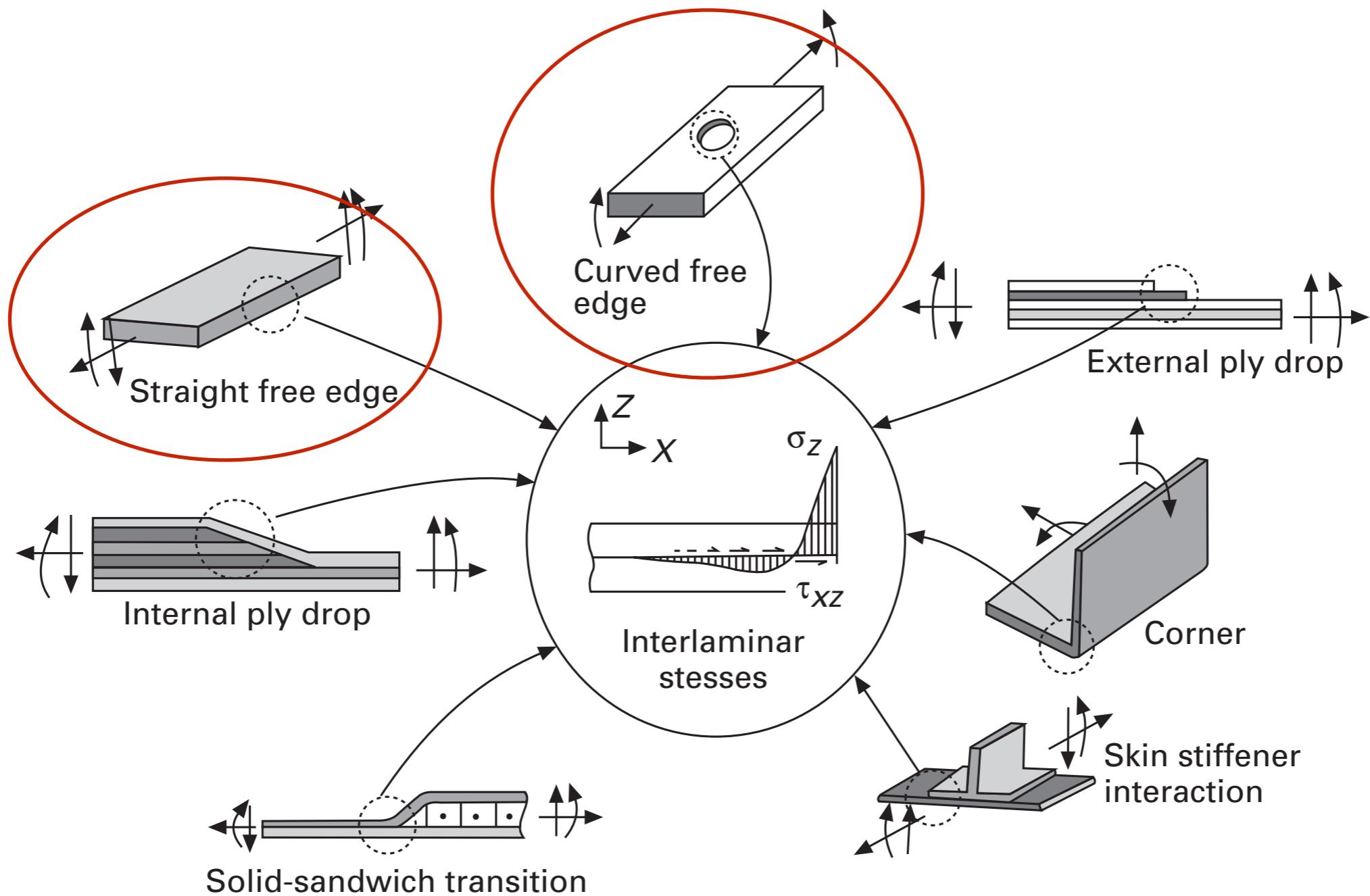
**Guillaume Couégnat**  
[couegnat@lcts.u-bordeaux.fr](mailto:couegnat@lcts.u-bordeaux.fr)

# Objectifs

- **Bords libres & contraintes hors-plan**
  - Effet Poisson 0/90
  - Cisaillement  $\pm 45$
- **Modèle de zone cohésive**

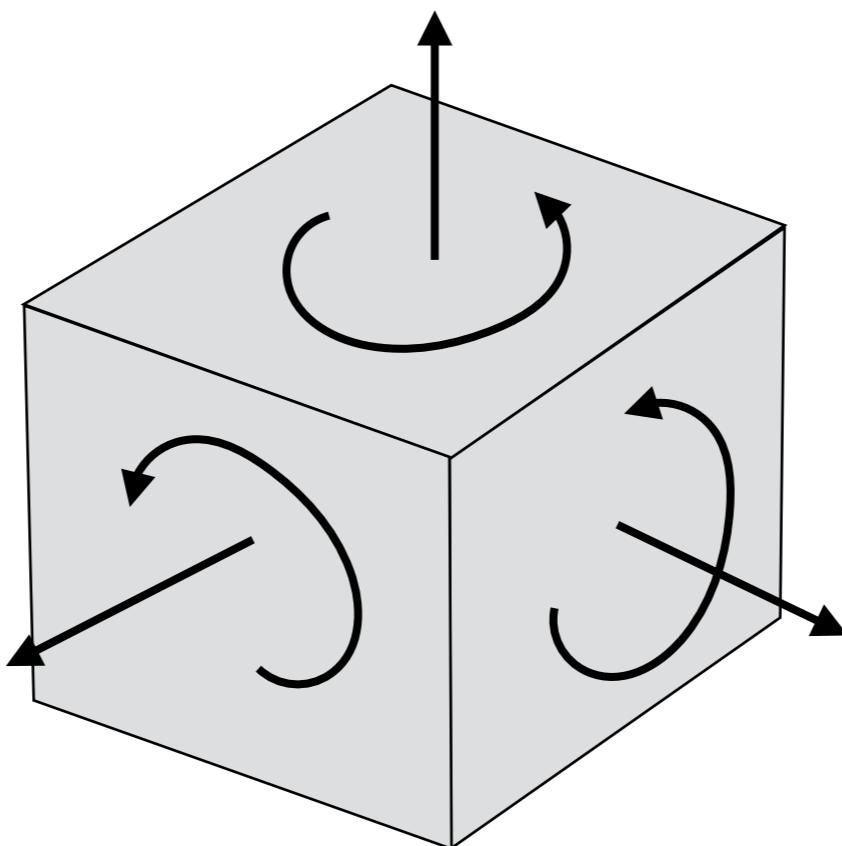
# Origines des contraintes interlaminaires

- Singularités géométriques et matériau
- Bords libres



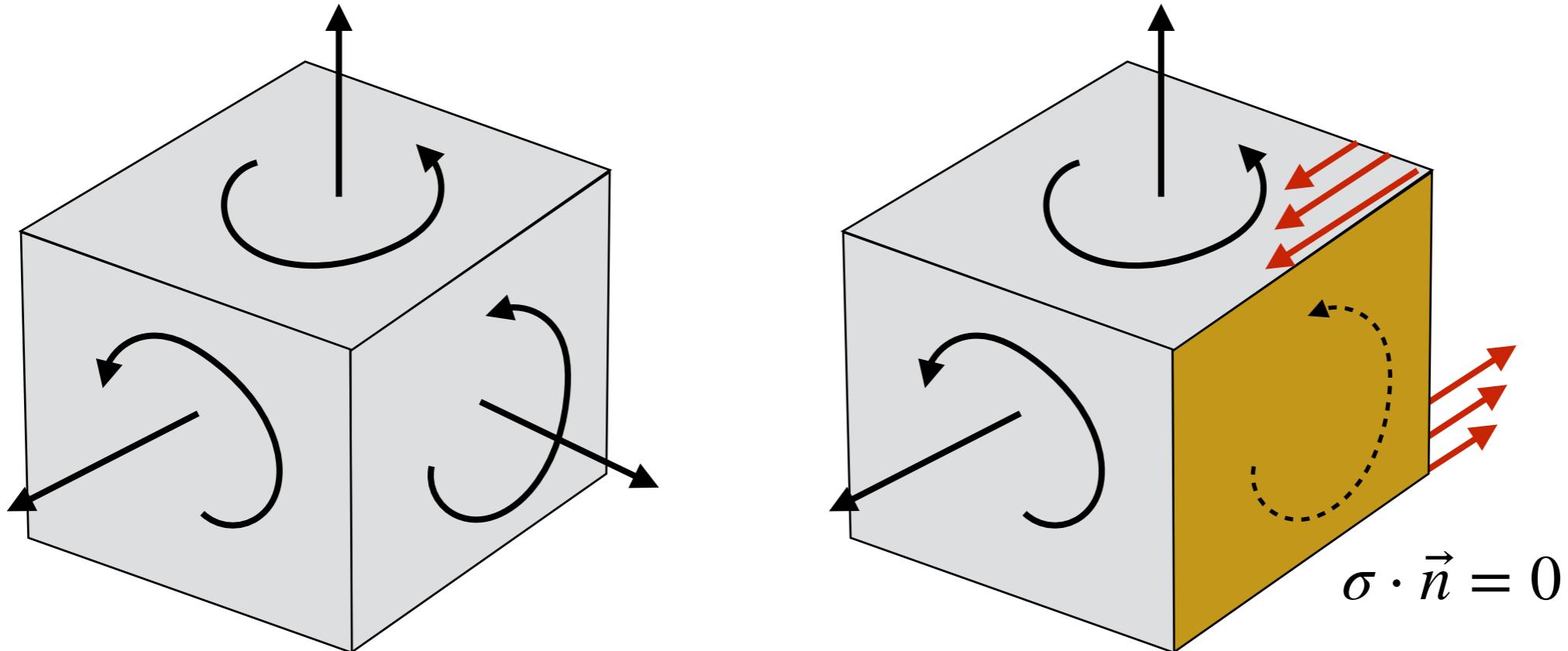
# Théorie classique des stratifiés

- Equilibre statique d'un élément de volume
- Principe de Saint-Venant
- Milieu infini en  $x-y$



# Bords libres

- Eprouvettes, pièces de taille finie : bords physiques
- Mais aussi trou, entaille, fissure, ...
- Contrainte normale nulle

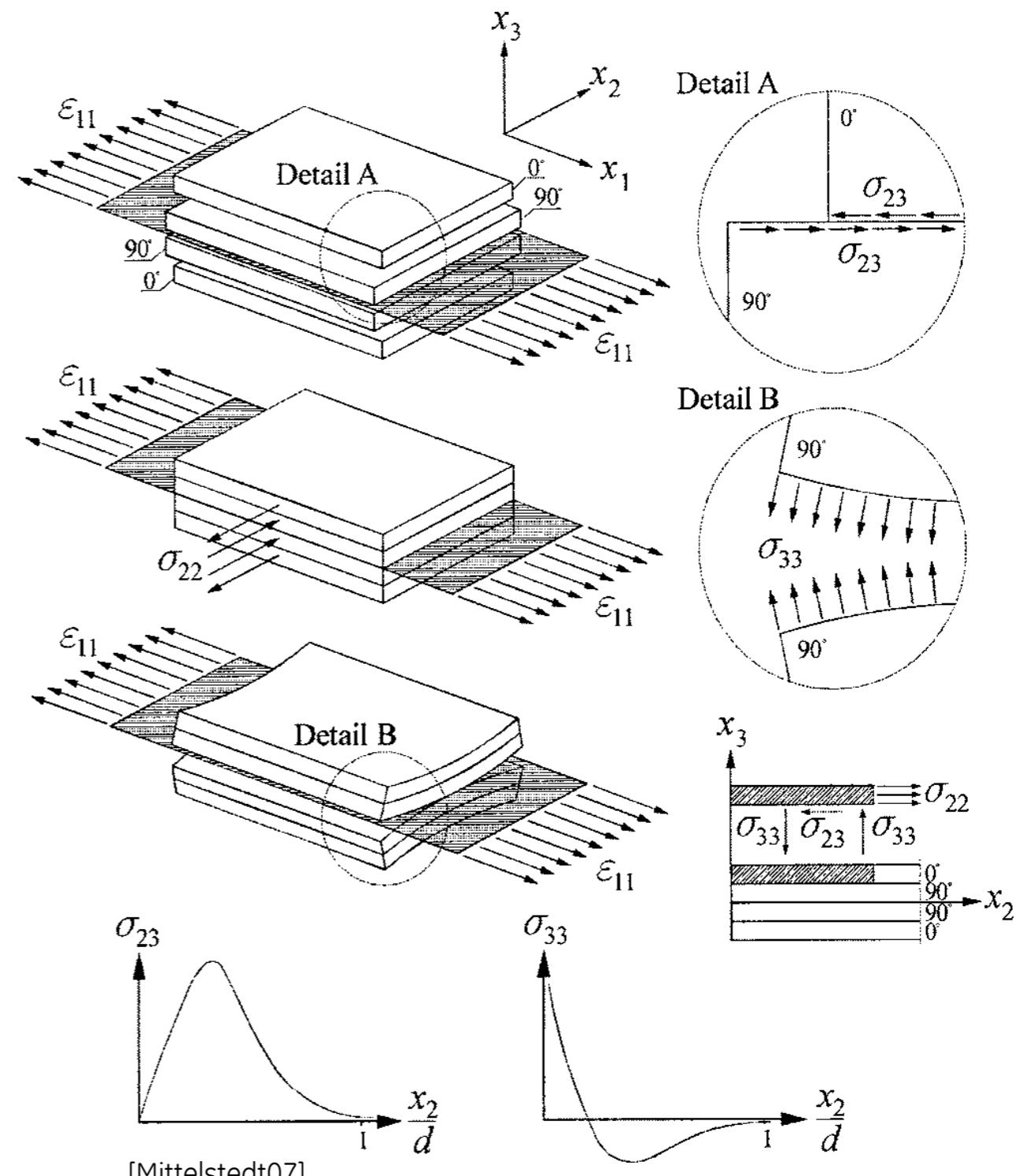


Modification du champ de contrainte local  
pour assurer l'équilibre

# Interface plis 0/90

- Effet Poisson
- Différentiel de contraction en  $x_2$
- Continuité du déplacement à l'interface

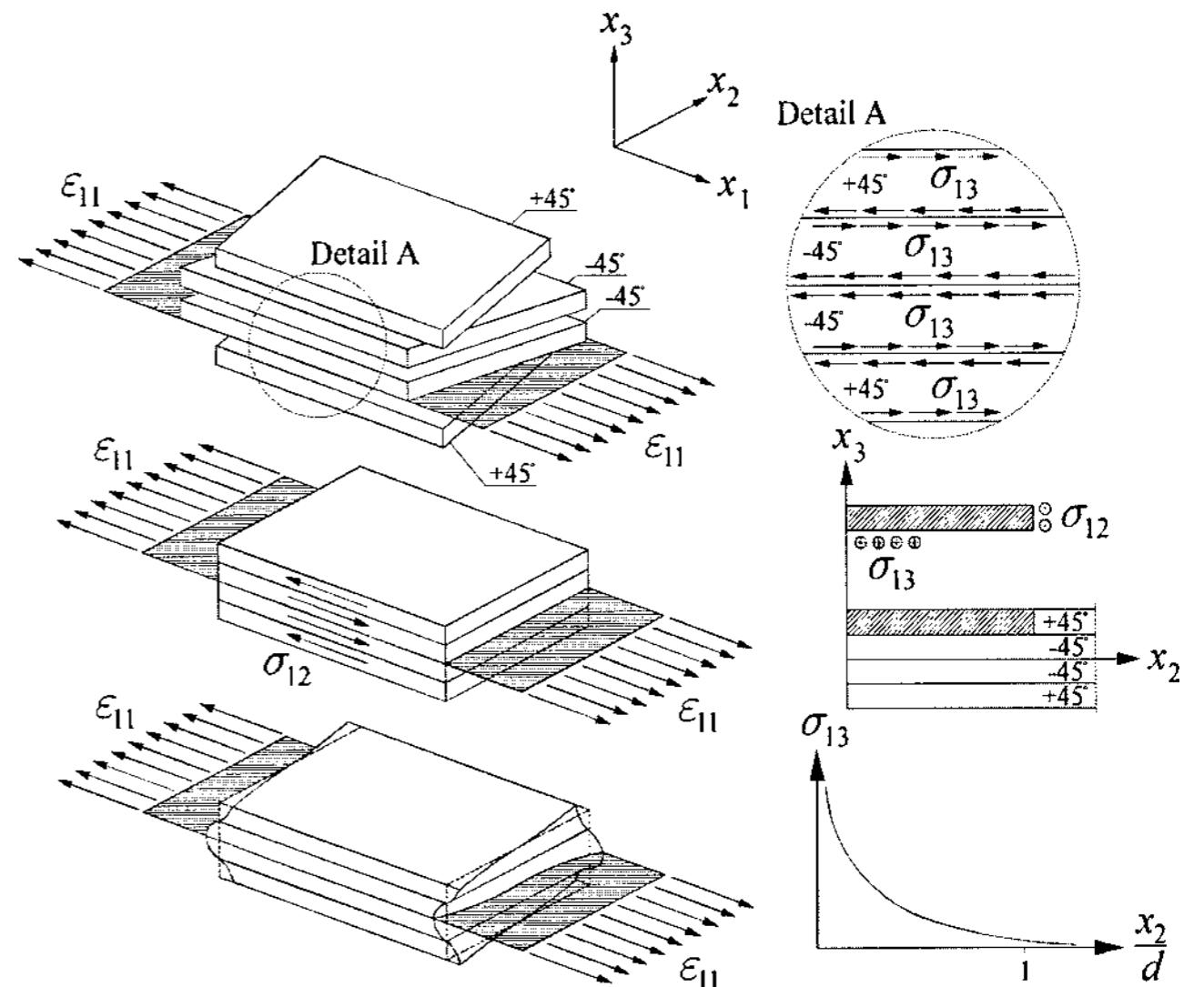
- Contrainte hors-plan  $\sigma_{33}$
- Contrainte de cisaillement inter-laminaire  $\sigma_{23}$



# Interface plis $\pm\theta$

- Les plis essaient de se réaligner avec le chargement
- Différentiel de cisaillement

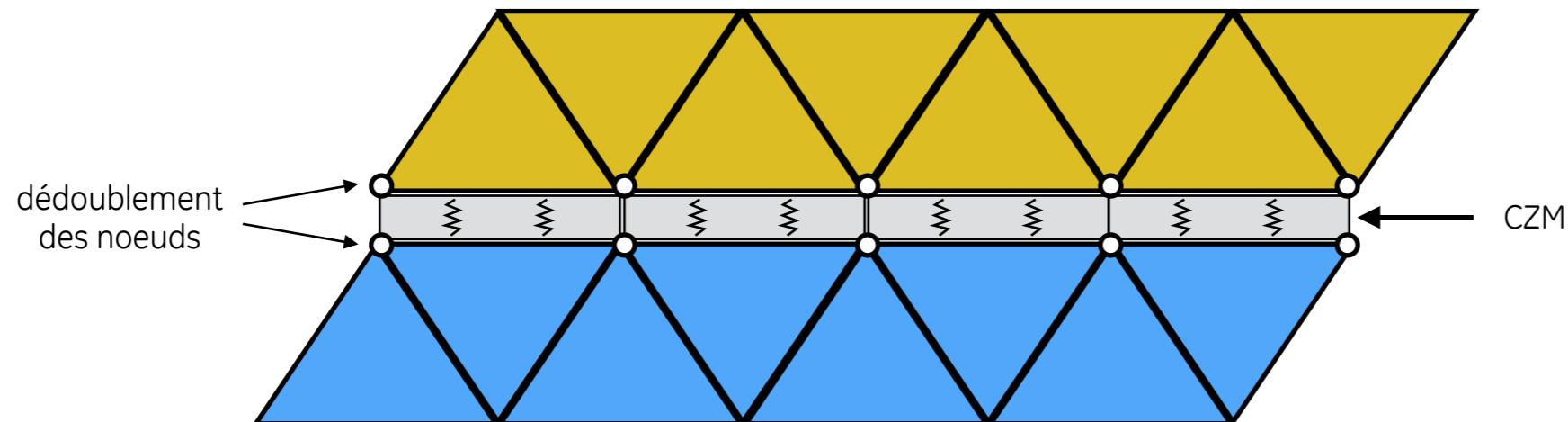
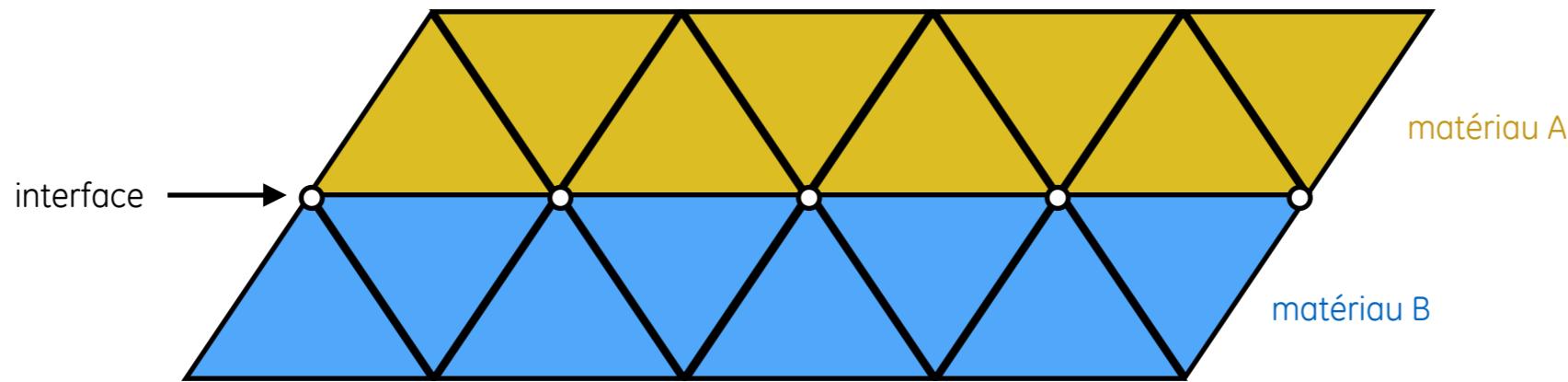
- Contrainte de cisaillement inter-laminaire  $\sigma_{13}$



[Mittelstedt07]

# Modèle de zone cohésive (CZM)

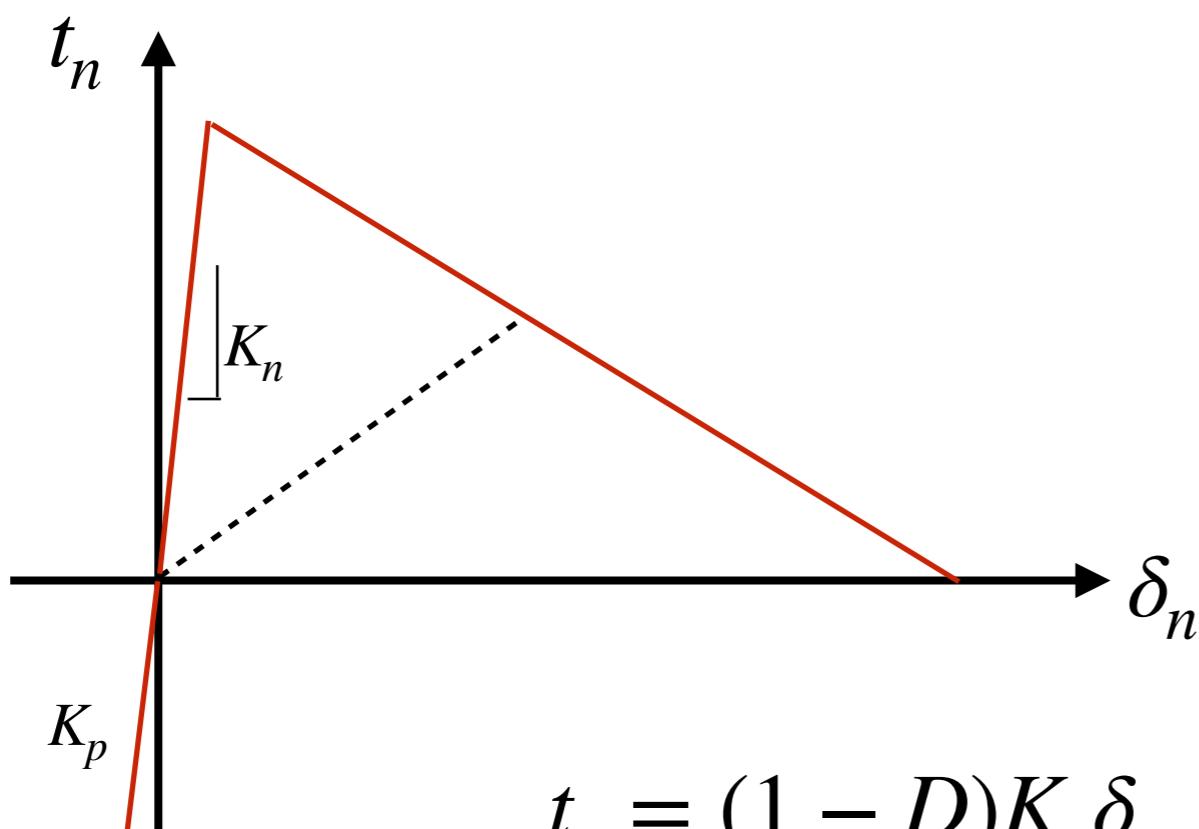
- Eléments d'interfaces



- CZM ~ "ressort volumique" endommageable

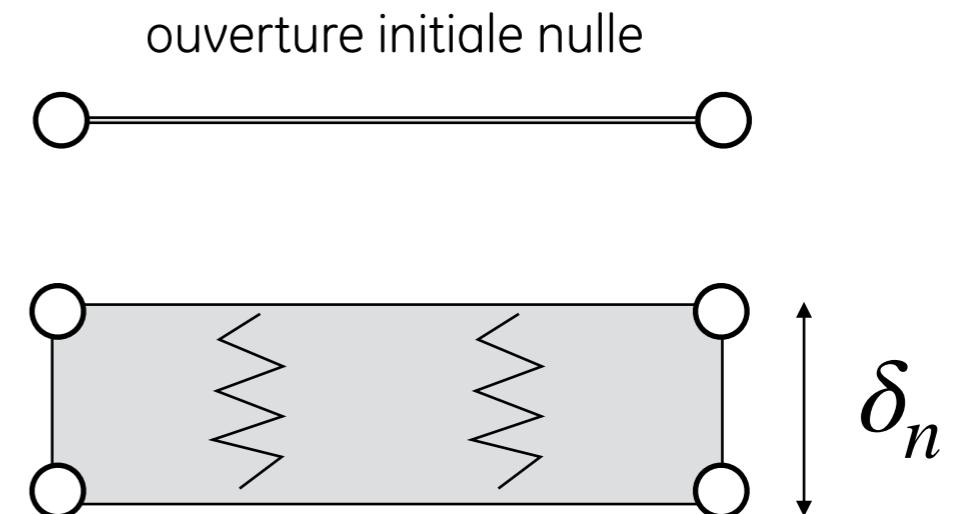
# Modèle de zone cohésive

- Ouverture/fermeture normale



$$t_n = (1 - D)K_n \delta_n \quad \delta_n > 0$$

$$K_p \delta_n \quad \delta_n < 0$$



Remarque : formulation en force/ouverture naturellement régularisée  
(≠ élément volumique)

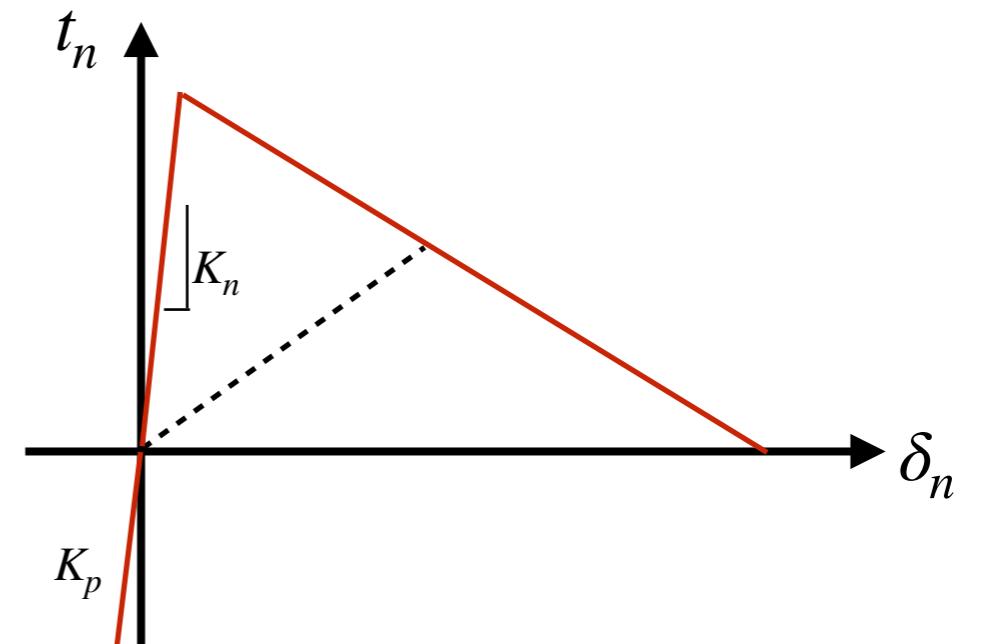
# Modèle de zone cohésive

Choix de la rigidité initiale  $K_n$  ?

$$K_n \propto E/h \quad h \rightarrow 0 \quad K_n \rightarrow \infty$$

Caractère unilatéral

$$\delta_n \geq 0 \implies K_p \rightarrow \infty$$



Numériquement, on se sait pas traiter (facilement)  $\infty$

Si  $K_n$  trop faible : assouplissement de la structure

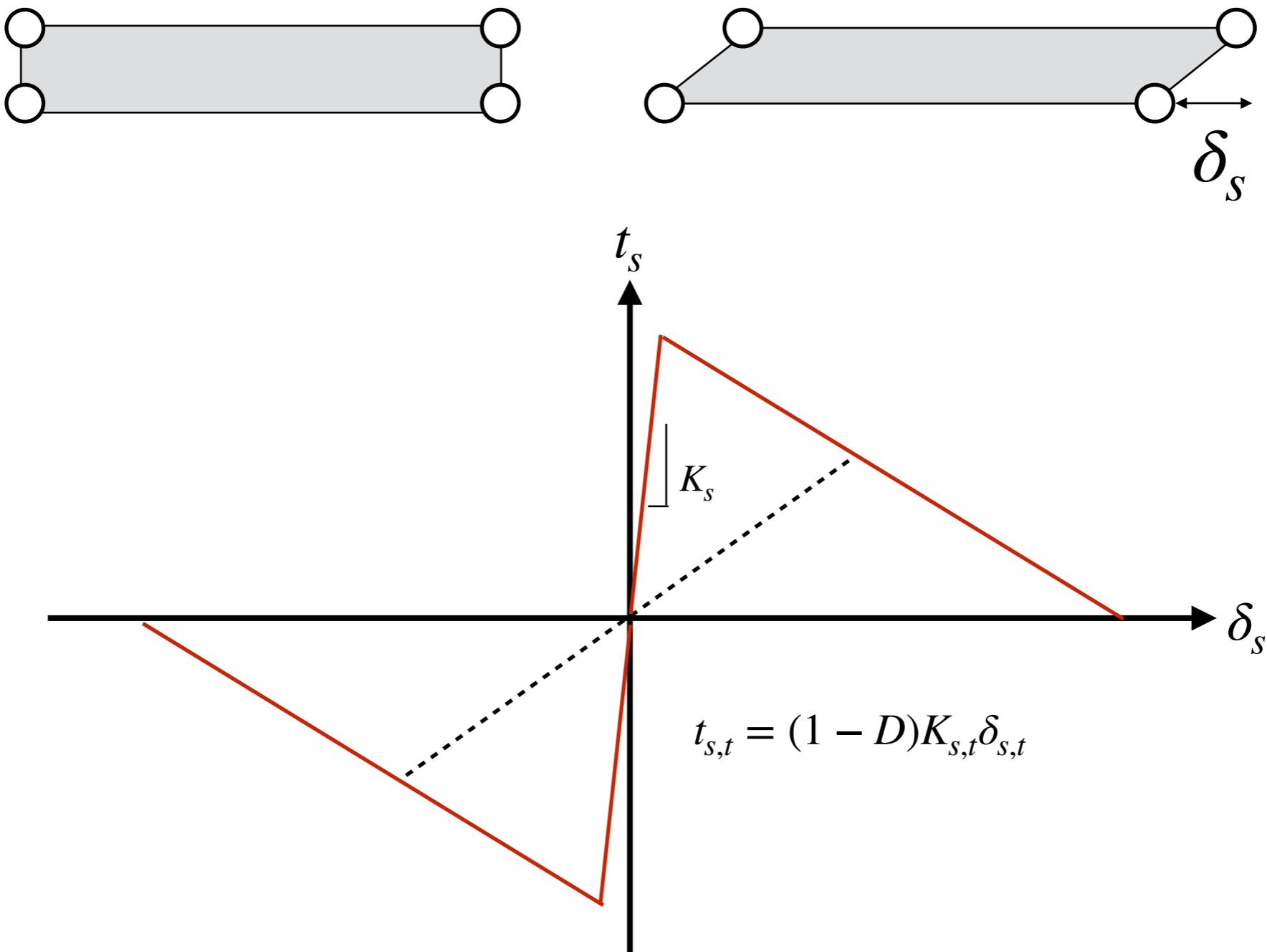
Si  $K_n$  trop élevé : problème précision machine (float/double précision finie)

En pratique :

$$K_p = K_n > 10^3 - 10^4 K_{max}$$

# Modèle de zone cohésive

- Cisaillement



# Modèle de zone cohésive

- Formulation couplée/découplée

$$\begin{bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{ns} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{nt} & K_{st} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \\ \delta_t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \\ \delta_t \end{bmatrix}$$

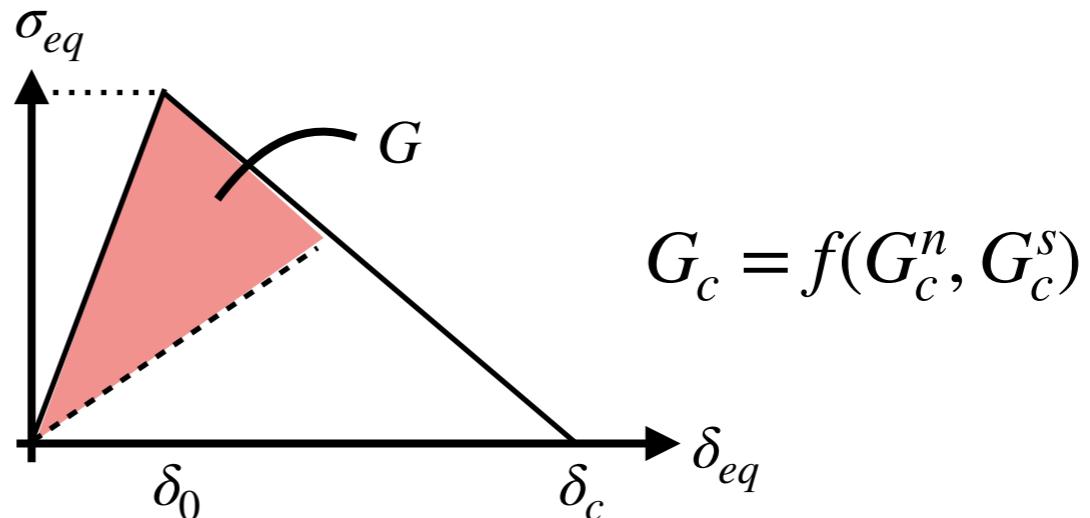
# Modèle de zone cohésive

- Critère d'amorçage

$$F(t) = \left( \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0} \right)^2 + \left( \frac{t_s}{t_s^0} \right)^2 + \left( \frac{t_t}{t_t^0} \right)^2 \leq 1$$

- Critère de propagation

$$\delta_{eq} = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2}$$



- Effet de l'endommagement

$$\begin{aligned} t_n &= (1 - D)K_n \delta_n & \delta_n > 0 \\ K_n \delta_n & & \delta_n < 0 \end{aligned}$$

$$t_{s,t} = (1 - D)K_{s,t} \delta_{s,t}$$