CURSO DE ESCOAMENTOS
MULTIFÁSICOS

ESCOAMENTO EM CANAL - Modelos 1D

Preparado por: Leon Lima e Gustavo Anjos
26 de Fevereiro de 2015

Resumo. Este texto apresenta os pontos principais da modelagem matemática de escoamento incompressível, desenvolvido, em regimes laminar e turbulento, permanente e transiente, em canal aberto. Conceitos básicos de turbulência são sucintamente apresentados. Além disso, a discretização das equações de escoamento em canal 1D utilizando o método das diferenças finitas e o método de elementos finitos é apresenta para os perfis laminar e turbulento.

Conteúdo

1 PERFIL LAMINAR

1.1 Regime laminar permanente

Considere as componentes x e y das equações de Navier Stokes para escoamento incompressível (com viscosidade constante[1] e sem termo das forças de corpo):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{1b}$$

[1] Para um escoamento isotérmico, a hipótese de viscosidade constante é muito realista, uma vez que, embora ela dependa também da pressão do fluido (além da temperatura), as variações com a pressão são extremamente baixas.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

Para o regime permanente do escoamento, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

Suponha também que o escoamento seja desenvolvido, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

o que implica em

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Esse resultado significa que $v =$ constante ao longo de qualquer seção do canal. Mais do que isso: por causa das condições de contorno de não deslizamento, $v = 0$, em todo o domínio do escoamento.

Temos portanto

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 && \text{(5a)} \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 && \text{(5b)} \end{aligned}$$

A condição de que a derivada parcial da pressão em relação a y seja nula significa que $p = p(x)$, ou seja, o campo de pressão não depende da coordenada y. Este resultado significa que o escoamento incompressível, desenvolvido e estacionário em um canal cujos fluxos na direção z são irrelevantes é modelado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

Uma vez que a pressão depende apenas de x e a velocidade u depende apenas de y, podemos concluir que a pressão depende linearmente de x, de maneira que $\partial p/\partial x$ é constante. Dado um gradiente de pressão, a equação 6 se torna uma EDO homogênea de segunda ordem, cuja solução é o perfil laminar do escoamento com as características citadas, expresso por

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{7}$$

com

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{u(L) - u(0)}{L} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}L && \text{(8a)} \\ C_2 &= u(0) && \text{(8b)} \end{aligned}$$

onde L é a largura do canal. Se $u(0) = u(L) = 0$, obtemos

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y^2 - Ly\right) \tag{9}$$

Considere que $u(y = L/2) = U$. Para o perfil dado pela equação 9, temos portanto que

$$U = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(-\frac{L^2}{4}\right) \tag{10}$$

o que resulta em

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8\frac{\mu U}{L^2} \tag{11}$$

Definindo $\mathrm{Re} = UL\rho/\mu$, obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8\frac{\mu^2\,\mathrm{Re}}{\rho L^3} \tag{12}$$

1.2 Regime laminar transiente

O regime transiente do mesmo escoamento pode ser representado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{13}$$

Note que agora a equação depende da densidade ρ do fluido. De fato, para o regime transiente, a variação do perfil de velocidade com o tempo deve ser influenciada pela inércia do fluido, convergindo, no entanto, para um valor comum para qualquer valor de ρ. Note ainda que a pressão agora é também função do tempo, isto é, $p = p(x, t)$ e seu gradiente não pode mais ser calculado pela expressão 12.

1.2.1 Discretização

Para cada nó i da malha, para passo de tempo ΔT e distância entre nós uniforme igual a Δy, a discretização da equação 13 em diferenças finitas centradas é expressa por

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad &+ \quad \alpha\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{\Delta y^2} + \\ &+ \quad (1-\alpha)\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n} - u_i^{n}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n} - u_{i-1}^{n})}{\Delta y^2}\end{aligned} \tag{14}$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$, e com $\nu_{i+1/2} = (\nu_i + \nu_{i+1})/2$ e $\nu_{i-1/2} = (\nu_{i-1} + \nu_i)/2$.

2 PERFIL TURBULENTO

Para números de Reynolds acima de um certo limite[2], eventuais perturbações introduzidas ao escoamento podem gerar oscilações cujas amplitudes cresçam monotonicamente, tornando-o instável hidrodinamicamente e convertendo o regime laminar em turbulento. Escoamentos turbulentos são caracterizados por

- alto grau de mistura
- riqueza de escalas
- caos

[2] Reynolds observou em experimento os regimes pelos quais um escoamento pode passar e quais os parâmetros influenciavam na transição. Suas conclusões em cima desse trabalho foram publicadas em 1883[**? ?**]

Osborne Reynolds introduziu a abordagem estatística ao estudo de escoamentos turbulentos em 1895 [?], segundo a qual o escoamento médio é resolvido. Para escoamentos quase estacionários, médias temporais podem ser usadas [?]. Matematicamente, o conceito introduzido por Reynolds consistia na média das equações de Navier-Stokes, cujo resultado são as equações RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes. Para escoamentos incompressíveis, elas são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathrm{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}} \tag{15}$$

Expandindo em coordenadas cartesianas temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{\tilde{u}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tilde{u}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tilde{u}\tilde{w}}\right) \tag{16a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{\tilde{v}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tilde{v}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tilde{v}\tilde{w}}\right) \tag{16b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{\tilde{w}\tilde{u}} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tilde{w}\tilde{v}} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tilde{w}\tilde{w}}\right) \tag{16c}$$

É importante notar que o campo de velocidade $\mathbf{v}$ e suas componentes, bem como o campo de pressão p, expressam aqui os respectivos valores médios, enquanto que o campo $\tilde{\mathbf{v}}$ e suas componentes representam as flutuações em torno dos valores médios, conforme a decomposição de Reynolds.

A dissipação introduzida pelos termos não-lineares de flutuação pode ser interpretada como um campo de tensão adicional atuando no escoamento, representado pelo tensor de tensões turbulentas dado por $\tau_t = -\rho\overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}$, cujo divergente é

$$\nabla \cdot \tau_t = -\rho \nabla \cdot \overline{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}} \tag{17}$$

A equação 15 pode portanto ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathrm{p} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\mu \nabla \mathbf{v} + \tau_{\mathrm{t}}\right) \tag{18}$$

Esta formulação introduz novas variáveis ao modelo, indeterminando o sistema de equações. A estratégia clássica de fechamento do sistema é a aplicação da hipótese de Boussinesq, proposta em 1877[?][3], segundo a qual os processos de difusão da quantidade de movimento molecular e turbulento são análogos. Matematicamente, isso equivale a

$$\tau_t = \mu_t \nabla \mathbf{v} \tag{19}$$

onde μ_t é dita viscosidade turbulenta, ou viscosidade de Boussinesq. É mais conveniente agora nos referirmos à viscosidade molecular μ_m. No caso da viscosidade cinética temos portanto ν_t e ν_m. Para a maioria dos números de Reynolds, ν_t é algumas ordens de grandeza superior a ν_m, ou seja, as dissipações turbulentas são muito maiores do que as dissipações viscosas. Introduzindo o conceito de viscosidade turbulenta na equação 18, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathrm{p} + \nabla \cdot \left[\left(\nu_{\mathrm{m}} + \nu_{\mathrm{t}}\right) \nabla \mathbf{v}\right] \tag{20}$$

[3] O artigo de Reynolds propondo a decomposição dos campos em parcelas média e flutuante e dando origem ao hoje chamado tensor de Reynolds foi publicado somente em 1895. O que havia como base de conhecimento para Boussinesq fazer essa proposta em 1877?

A viscosidade adicional μ_t pode ser interpretada como um acréscimo dos efeitos de dissipação ao escoamento, e deve estar associada às características do escoamento.

Para o escoamento desenvolvido no canal, a equação 20 se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu_m + \nu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \tag{21}$$

2.1 Camada limite turbulenta

A região do escoamento próxima à parede passa por transições importantes até chegar ao escoamento principal[4]. Essa região é a camada limite do escoamento. É bem aceito que a camada limite possui duas regiões distintas: uma adjacente à parede, na qual os efeitos viscosos predominam – subcamada viscosa – e uma seguinte na qual os efeitos turbulentos são mais importantes – subcamada turbulenta. Cada uma delas possui um perfil de velocidade diferente. Essa composição é conhecida como a estrutura assintótica da camada limite turbulenta.

Na subcamada viscosa, a condição do escoamento pode ser descrita por

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{22}$$

Após integração, chegamos a

$$u = \frac{Cy}{\mu} \tag{23}$$

Tendo em vista que a tensão cisalhante τ_w na parede é

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \tag{24}$$

temos que

$$u = \frac{\tau_w y}{\mu} \tag{25}$$

Finalmente, introduzindo uma velocidade u_τ, denominada velocidade de atrito, definida por

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{26}$$

podemos adimensionalizar a equação 25 definindo

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \tag{27a}$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \tag{27b}$$

De tal forma que, para a subcamada viscosa, temos

$$u^+ = y^+ \tag{28}$$

Para a subcamada turbulenta, é necessária uma avaliação das ordens de grandeza dos termos importantes, utilizando o conceito de comprimento de mistura. **?**] descrevem o desenvolvimento da expressão para a região

[4] A expressão em inglês para o escoamento principal seria "bulk flow".

turbulenta da camada limite. Aqui, vamos nos limitar a dizer que o perfil de velocidade na subcamada turbulenta é expresso por

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \tag{29}$$

onde κ é a constante de Von Kármán, sendo normalmente $\kappa = 0,41$, e $B = 5$ é um valor constante bem aceito para escoamentos em parede, baseado em resultados experimentais. A figura 3.13 de **?**] apresenta um conjunto de perfis para a camada limite turbulenta obtidos de experimentos diversos.

2.2 Comprimento de mistura de Prandtl

A viscosidade turbulenta ν_t pode ser determinada através de modelo algébrico ou de modelo a uma equação diferencial ou de modelo a duas equações diferenciais (neste se enquadram os modelos κ-ϵ e κ-ω).

O modelo algébrico é baseado no conceito de comprimento de mistura, concebido por Ludwig Prandtl (ver **?**], capítulo 3), segundo o qual

$$\nu_t = l_c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \tag{30}$$

onde l_c é o comprimento de mistura. Para escoamentos próximos a paredes sólidas (caso do escoamento no canal),

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \tag{31a}$$

$$l_c = \kappa \delta, \text{ para } y > \delta \tag{31b}$$

onde κ é a constante de Von Kármán, e δ é a espessura da camada limite.

Com essa definição, a variação do comprimento de mistura passa por uma descontinuidade da parede para o interior da camada limite. O comprimento de mistura pode ser calculado ainda com a aplicação de uma função de amortecimento. Normalmente é usada a função de amortecimento de Van Driest. Neste caso,

$$l_c = D\kappa y, \text{ para } y \leq \delta \tag{32}$$

com

$$D = 1 - \exp\left(-y\frac{u_\tau}{A\nu}\right) \tag{33}$$

onde $A = 26$.

Cabe ressaltar que a modelagem do escoamento através da introdução da viscosidade turbulenta é uma das formas de solução do Problema de Fechamento dos modelos RANS e é dito modelo de turbulência de primeira ordem. Existem modelos nos quais as componentes do tensor de Reynolds são decompostas, dando a origem a termos com produtos de três componentes de velocidade, classificados como modelos de turbulência de segunda ordem. Um outro ponto é que, no caso particular do escoamento no canal, considerando que ele possua largura

L, o comprimento de mistura é dado por

$$l_c = \kappa y, \text{ para } y \leq \delta \tag{34a}$$

$$l_c = \kappa\delta, \text{ para } \delta < y < L - \delta \tag{34b}$$

$$l_c = \kappa(L - y), \text{ para } y \geq (L - \delta) \tag{34c}$$

2.3 Discretização

A forma discreta da equação 21 é igual à equação 14, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &+ \alpha \frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{\Delta y^2} + \\ &+ (1-\alpha)\frac{\nu_{i+1/2}(u_{i+1}^{n} - u_i^{n}) - \nu_{i-1/2}(u_i^{n} - u_{i-1}^{n})}{\Delta y^2} \end{aligned} \tag{35}$$

Porém com $\nu = \nu_m + \nu_t$.

3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

4 TESTES

Uma implementação dos modelos descritos possibilitará os seguintes testes:

- Para um mesmo problema, integre a solução final ao longo do domínio espacial para duas resoluções de malha diferentes. Tente observar o efeito da dissipação numérica. Quanto menor o número de pontos, maior é a quantidade de informação perdida na aproximação das derivadas. Um escoamento mais dissipativo (ainda que falsamente) resultará em valores menores de $\int_0^L u dy$.
- Os perfis turbulentos são mais "achatados" do que os laminares, o que é possível de ser explicado a partir da definição do comprimento de mistura. Uma vez que a intensidade da turbulência é proporcional ao número de Reynolds, é possível notar que o perfil se torna mais "achatado" para maiores números de Reynolds.
- A solução do perfil turbulento não representa o escoamento "real". De fato, uma vez que a solução das equações RANS fornece os campos médios, as flutuações do escoamento não são vistas pelos perfis obtidos da solução de 35.
- Tente reproduzir os perfis da camada limite turbulenta. Calcule a solução permanente do escoamento turbulento e tente observar as subcamadas viscosa e turbulenta.