



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE TECNOLOGIA E CIÊNCIA

FACULDADE DE ENGENHARIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Procedimento Para Solução de Problemas de
Condução de Calor Com Condutividade Térmica
Dependente da Temperatura**

04 – 07 – 01

Julho/2008

REITOR

Ricardo Vieiralves de Castro

VICE-REITOR

Maria Christina Paixão Maioli

SUB-REITORA DE GRADUAÇÃO

Lená Medeiros de Menezes

DIRETOR DO CENTRO DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS

Maria Georgina Muniz Washington

DIRETOR DA FACULDADE DE ENGENHARIA

Profª. Maria Eugênia Gouvêa

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Francisco José da Cunha Pires Soeiro

COORDENADOR DE PROJETO DE GRADUAÇÃO

Prof. Carlos Alberto Pereira Correia

ORIENTADOR

Prof. Rogério Martins Saldanha da Gama

CO-ORIENTADOR

Prof. Norberto Mangiavacchi

AUTOR

Leon Matos Ribeiro de Lima

BANCA EXAMINADORA

Prof. Rogério Martins Saldanha da Gama

Prof. Carlos Alberto Pereira Correa

Prof. Norberto Mangiavacchi

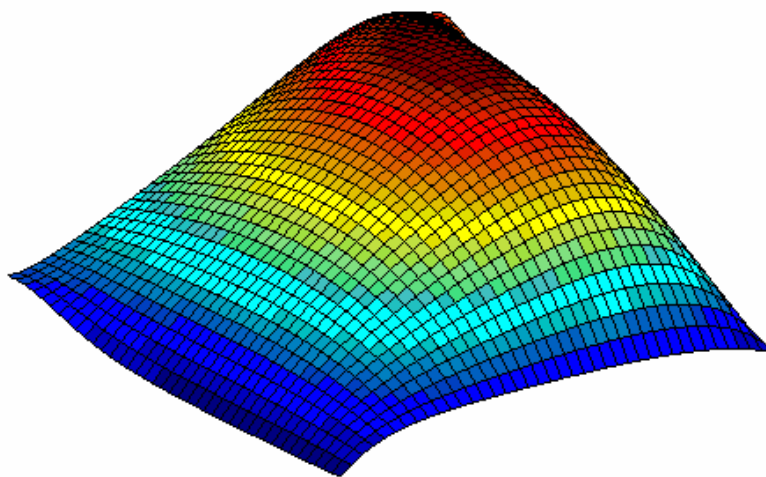
Leon Matos Ribeiro de Lima
matosleon@gmail.com

Orientador:
Rogério Martins Saldanha da Gama
rsgama@domain.com.br

Co-orientador:
Norberto Mangiavacchi
norberto.mangiavacchi@gmail.com

Procedimento Para Solução de Problemas de Condução de Calor Com Condutividade Térmica Dependente da Temperatura

***Objetivo:** A proposta deste trabalho é um procedimento sistemático que provê a solução exata de problemas de transferência de calor não-linear em corpos com condutividade térmica em função da temperatura, através de uma seqüência de problemas lineares, onde a solução é dada pelo limite da seqüência.*



RESUMO

Na grande maioria dos projetos de engenharia, problemas de condução de calor sofrem várias simplificações para que o sistema de equações permita solução exata. No entanto, tais aproximações possuem um custo, que se traduz em deturpações do fenômeno físico real, o que pode nos levar a resultados muito imprecisos. Um dos artifícios mais utilizados na modelagem de problemas de condução de calor é assumir a condutividade térmica invariante com a temperatura, fazendo com que o termo difusivo da equação da condução fique linear. Entretanto, a rigor, todo material, sem exceção, possui condutividade térmica dependente da temperatura. Os procedimentos analíticos conhecidos que levam em conta tal dependência se restringem, ainda, a um número limitado problemas. A proposta deste trabalho é um procedimento sistemático que provê a solução exata de problemas de transferência de calor em corpos com condutividade térmica em função da temperatura, através de uma seqüência de problemas lineares, onde a solução é dada pelo limite da seqüência. O método emprega a transformada de Kirchoff, a qual é a incógnita em cada elemento da seqüência e possui relação biunívoca com a temperatura. Esta última condição permite que, resolvendo o sistema de equações em termos da transformada, obtenhamos o campo de temperatura do corpo.

Neste trabalho, vários problemas são resolvidos por meio do procedimento proposto e os resultados são mostrados e analisados. Nos casos de geometrias mais complexas, empregamos o Método de Elementos Finitos (MEF) ou o Método de Diferenças Finitas (MDF). O MEF e o MDF são métodos numéricos de solução de EDP's bastante difundidos, amplamente utilizados em engenharia, e pouco discutidos nos cursos de graduação da UERJ. Por isso este trabalho conta também com alguns exemplos de resolução de problemas de transmissão de calor linear por meio destas ferramentas, com detalhes de cada passo de sua formulação, no intuito de prover uma fonte de consulta nas aplicações do MEF e do MDF em casos clássicos de transmissão de calor.

ABSTRACT

In most part of engineering projects, heat conduction problems are simplified in the intent that the equations system allows exact solution. Nevertheless, such simplifications are, in fact, distortions of the real physical phenomenon, which can induce us to very imprecise results. One of the most utilized artifices in heat transfer modeling is to assume thermal conductivity invariant with temperature, which makes the diffusive term in the conduction equation to be linear. Still, every material, with no exceptions, has temperature dependent thermal conductivity. The analytical procedures that take in account such dependence are restricted to a limited set of problems. This work presents a systematic procedure for exact solution of heat transfer problems in bodies with temperature dependent thermal conductivity, by means of a sequence of linear problems, where the solution is given by the limit of the sequence. The method employs the Kirchoff transform, which is the unknown in each sequence element, and has a biunivocal relation with temperature. This last condition allows that, by solving the system in terms of the transform, we obtain the temperature field of the body.

In this work, the method is employed to several problems and results are shown and analyzed. In cases of more complex geometries the Finite Element Method (FEM) or the Finite Differences Method (FDM) is applied. These methods are numerical procedures well diffused in PDE's solution, widely used in engineering, and little discussed in undergraduate courses in UERJ. For this reason, this work also counts with some resolution examples of linear heat transfer problems by means of such techniques, with details of each step of the numerical formulations, in order to provide a source of consultation on FEM and FDM applications in classical cases of heat transmission.

ÍNDICE

1 - Introdução	8
1.1 - Formas de Transmissão de Calor	9
1.2 - Modelo de Resolução Proposto	9
2 - Conceitos Básicos	10
2.1 - Condução	10
2.2 - Convecção	12
2.3 - Radiação	13
3 - Calculando a Distribuição de Temperaturas de um Corpo	15
4 - Procedimento Linear	23
4.1 - Equações Governantes	23
4.2 - Transformada de Kirchoff	23
4.3 - Construindo a Solução a Partir da Sequência de Problemas Lineares	28
4.4 - Convergência	29
4.5 - Exemplos	30
4.5.1 - Exemplo 1	30
4.5.2 - Exemplo 2	34
4.5.3 - Exemplo 3	38
5 - Métodos Numéricos em Problemas de Transmissão de Calor	42
5.1 - Diferenças Finitas	42
5.1.1 - Exemplo 1	45
5.1.2 - Exemplo 2	46
5.1.3 - Exemplo 3	47
5.2 - Elementos Finitos	48
5.2.1 - Em Busca da Forma Fraca das Equações Governantes	49
5.2.2 - Discretização do Domínio em Elementos Finitos	50
5.2.3 - Formulação do Elemento Finito Triangular Linear	51
5.2.4 - Formulação de Forma do Elemento	52
5.2.5 - Derivada das Funções de Forma do Elemento	55
5.2.6 - Forma Fraca por Elemento com as Temperaturas Nodais	56
5.2.7 - Atribuição das Temperaturas Nodais aos Elementos da Malha	64
5.2.8 - Exemplo 1	65
5.2.9 - Exemplo 2	68
6 - Simulações Numéricas	71
6.1 - Exemplo 1	72
6.2 - Exemplo 2	75
6.3 - Exemplo 3	77
6.4 - Exemplo 4	80
Conclusão	85
Referências	86
Publicações	88

SÍMBOLOS

c	calor específico
Φ_i	transformada de kirchoff do elemento i da sequência
\vec{g}	vetor aceleração da gravidade
h	coeficiente de troca de calor por convecção
k	condutividade térmica
\underline{K}	tensor condutividade térmica
L	comprimento
\vec{n}	vetor unitário normal exterior
ω	transformada de kirchoff
Ω	região do espaço ocupada pelo corpo que conduz calor
$\partial\Omega$	fronteira do domínio Ω
q	taxa de transferência de calor
\vec{q}	vetor fluxo de calor por unidade de área
\dot{q}	geração interna de energia por unidade de volume
R	raio
ρ	densidade
σ	constante de stefan-boltzmann
T	temperatura
\underline{T}	tensor tensão
T_∞	temperatura de referência
u	energia interna
\vec{v}	vetor velocidade

1 – INTRODUÇÃO

Estudos na área de transferência de calor são de fundamental importância em vários ramos de engenharia. Engenheiros eletricitas, por exemplo, estão sempre preocupados em evitar danos materiais devidos a pontos de superaquecimento, causados por *design* impróprio das trocas de calor em motores elétricos, geradores e transformadores. Um engenheiro eletrônico está interessado em conhecer métodos eficientes de dissipação de calor em *chip*'s e outros semicondutores de maneira que possam operar dentro de faixas seguras de temperatura. Engenheiros químicos estão interessados em processos de transferência de calor inerentes a diversas reações químicas. Um engenheiro metalúrgico estaria interessado em conhecer a taxa de transferência de calor necessária para um processo de tratamento térmico particular, como, por exemplo, numa fundição, onde a qualidade final do produto está intimamente ligada à taxa de resfriamento do processo. Engenheiros agropecuários estão interessados na secagem de grãos, processamento de alimentos e conservação. Um engenheiro civil deve ter controle sobre o estresse térmico desenvolvido em certos tipos de concreto, bem como o efeito da transferência de massa e calor na construção e em materiais de construção. Um engenheiro ambiental está preocupado com o efeito da temperatura na dispersão de poluentes no ar, difusão de poluentes em solos, poluição térmica em lagos e mares e seus impactos na vida terrestre e aquática. O engenheiro mecânico é o mais envolvido com fenômenos de transmissão de calor e conhece os processos térmicos associados à operação de equipamentos como *boilers*, condensadores, pré-aquecedores de ar, entre muitos outros, sempre buscando ganho de desempenho. Usinas nucleares requerem informação precisa acerca dos processos de transferência de calor, tendo em vista que condições seguras de operação são um fator fundamental em seu projeto. Refrigeração e sistemas de condicionamento de ar também envolvem dispositivos de troca de calor, exigindo *design* cuidadoso (*e.g.*: satélites artificiais).

Tanto a pesquisa fundamental quanto a pesquisa operacional em fenômenos de transferência de calor são essenciais para a obtenção de soluções econômicas e eficientes para problemas críticos encontrados em muitos projetos de engenharia. Mais do que isso, se devemos proteger o ambiente, então é imprescindível entender os processos de transferência de energia envolvidos e, se necessário, tomar as providências devidas.

1.1 – Formas de transmissão de calor

Há três modos básicos de transmissão de calor: *condução*, *radiação* e *convecção*. A rigor, somente a condução e a radiação devem ser classificadas como processos de transferência de calor, pois podem existir independentes um do outro, enquanto que a convecção não ocorre sem a condição física fundamental, que é a condução térmica. Ela depende do transporte mecânico de massa, sendo uma forma de transmissão que combina movimento com condução de calor. Ainda assim, a convecção é um meio de transmissão de energia poderoso e muito utilizado em engenharia, e por isso merece atenção especial.

A maioria dos problemas de transferência de calor por condução é descrita sob a hipótese de condutividade térmica independente da temperatura. Tal suposição é matematicamente conveniente porque, em geral, resulta em equações diferenciais parciais lineares. No entanto, a condutividade térmica é sempre uma função dependente da temperatura, e, muitas vezes, negligenciar tal dependência (supondo condutividade térmica constante) nos leva a uma descrição matemática imprecisa do processo de condução de calor.

1.2 – Modelo de resolução proposto

O objetivo principal deste trabalho é prover um procedimento sistemático e confiável para descrição da transferência de calor por condução em um sólido rígido, homogêneo e em repouso com condutividade térmica dependente da temperatura. O procedimento fornece solução exata e emprega apenas o ferramental utilizado em problemas de condutividade térmica constante.

O método consiste na obtenção da solução de problemas não-lineares de transferência de calor (condutividade térmica variando com a temperatura) através de uma sequência de problemas lineares. A passagem do modelo matemático original para esta sequência é feita pelo emprego da transformada de Kirchoff e a convergência é garantida, desde que atendida uma simples condição, conforme será visto.

2 – CONCEITOS BÁSICOS

2.1 – Condução

Sempre que existir um gradiente de temperatura dentro de um sistema ou entre sistemas em contato térmico, haverá transferência de calor por condução. Desta forma, em um corpo com diferenças internas de temperatura, existe um fluxo de calor por condução dos pontos de maior temperatura para os de menor temperatura, seja ele corpo rígido ou fluido. Este fluxo será tanto maior ou menor dependendo da *condutividade* (ou *condutibilidade*, como alguns autores preferem) *térmica* do material, que representa, em poucas palavras, a facilidade com que o calor é conduzido, e é sempre uma função da temperatura, seja qual for o material.

A **Lei de Fourier** relaciona o fluxo de calor por condução com o gradiente de temperaturas e é expressa por:

$$\vec{q} = -\underline{K} \text{grad}(T) \quad (2.1)$$

onde:

\vec{q} é o vetor fluxo de calor (energia por unidade de tempo e área);

$\underline{K} = \hat{K}(T)$, sendo \underline{K} o tensor condutividade térmica, simétrico e positivo definido, e T é a temperatura. No caso de materiais isotrópicos, $\underline{K} = k\mathbf{1}$, onde k é um escalar positivo. Para estes casos o fluxo de calor passa a ser apenas:

$$\vec{q} = -k \text{grad}(T) \quad (2.2)$$

Esta equação nos permite conhecer a taxa de transferência de energia térmica, mas não nos permite determinar o campo de temperaturas, ou seja, a distribuição de temperaturas, num dado corpo. A equação da conservação da energia (Primeira Lei da Termodinâmica), tomada para corpos opacos, rígidos e em repouso, nos dará meios para tanto.

Em sua forma integral, a Equação da Conservação da Energia completa é dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left(u + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) dV = \int_{\Omega_t} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T} \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (2.3)$$

onde:

ρ representa a densidade;

u é a energia interna;

\vec{v} é o vetor velocidade;

\vec{g} é o vetor aceleração da gravidade;

\underline{T} é o tensor tensão;

\vec{n} é o vetor normal unitário exterior;

\dot{q} representa a geração interna de energia por unidade tempo e volume;

\vec{q} é vetor fluxo de energia por unidade de tempo e área

Ω_t é uma região no espaço no instante t

$\partial\Omega_t$ é a fronteira de Ω_t

Levando em conta a conservação da massa e da quantidade de movimento, a equação fica, na forma local

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\text{div}(\vec{q}) + \underline{T} \text{grad}(\vec{v}) + \dot{q} \quad (2.4)$$

Pela condição de corpo rígido temos que $\text{grad}(\vec{v}) = -[\text{grad}(\vec{v})]^T$. Logo, como $\underline{T} = \underline{T}^T$,

$$\underline{T} \text{grad}(\vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

A condição de corpo em repouso resulta em $\vec{v} \equiv 0$, ou seja,

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + [\text{grad}(u)] \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.6)$$

Considerando que a energia interna é tal que $u = \hat{u}(T)$ e

$$c = \frac{du}{dT} \quad (2.7)$$

onde c representa o calor específico do material, e as condições de corpo rígido, opaco e em repouso, a equação da energia passa a ser, então, dada pela equação (sem mudança de fase)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{q}) + \dot{q} \quad (2.8)$$

que também pode ser chamada *equação da condução de calor*.

Neste trabalho será levada em conta a equação da condução em regime estacionário, para corpos homogêneos com isotropia térmica:

$$\text{div}[k \text{grad}(T)] + \dot{q} = 0 \quad (2.9)$$

2.2 – Convecção

A convecção é uma forma de transmissão de calor que combina condução térmica e movimento. De acordo com o que provoca o transporte mecânico de massa a convecção é classificada em *natural* ou *forçada*. Na convecção natural o deslocamento de massa ocorre apenas devido à alteração na densidade da porção que recebeu ou cedeu alguma parcela de calor. Na convecção forçada o movimento é provocado por algum fator externo. Por exemplo, a convecção promovida por um ventilador é forçada, enquanto que a convecção térmica utilizada em geladeiras caseiras é natural. As correntes de convecção natural transferem a energia interna armazenada no fluido essencialmente da mesma maneira que as correntes de convecção forçada. Entretanto, a intensidade do movimento de mistura é geralmente menor na convecção natural e, portanto, as taxas de transmissão de calor são menores do que na convecção forçada. Ainda assim muitos dispositivos em engenharia dependem basicamente de convecção natural para arrefecimento.

Neste trabalho a convecção será considerada apenas para fins de condição de contorno dos problemas abordados. A *Lei de Newton do Resfriamento* (devida de fato a Fourier) representa o fluxo de calor transferido por convecção natural pela equação

$$q = h(T - T_{\infty}) \quad (2.10)$$

onde:

q é um escalar que representa o fluxo normal de calor por unidade de tempo e área;

h é o coeficiente de transferência de calor por convecção;

T_{∞} é uma temperatura referente a um ponto no fluido suficientemente afastado da fronteira de modo que a temperatura do fluido não seja afetada pela presença de uma fonte de aquecimento (ou resfriamento).

2.3 – Radiação

A radiação térmica pode ser encarada como o fluxo de radiação eletromagnética emitido por uma entidade material (corpo sólido, banho de líquido, mistura de gases) devido a uma temperatura absoluta não nula (Bejan, 1992, [1]). Ou seja, todo corpo com temperatura absoluta diferente de zero (considerando a impossibilidade de temperatura absoluta negativa) emite energia térmica por radiação, através de ondas eletromagnéticas.

Ao contrário da condução e da convecção, a radiação não necessita de meio para transferir calor, embora ele seja influente no processo. Dependendo do meio, o estudo da troca de calor por radiação é dividido em duas grandes áreas: *radiação em meio participante* e *radiação em meio não participante*. O meio é dito participante quando absorve e/ou emite radiação térmica, interferindo no processo de transmissão de calor. Nos casos de radiação térmica em meio não-participante considera-se vácuo o meio onde se propagam as ondas eletromagnéticas.

A taxa de energia emitida por radiação térmica por um corpo é chamada *poder emissivo*. A *Lei de Stefan-Boltzmann* fornece o poder emissivo para corpos negros pela equação

$$q = \sigma T^4 \quad (2.11)$$

onde q representa a energia radiante emitida por unidade de tempo e área, T é a temperatura absoluta e σ é a *constante de Stefan-Boltzmann* ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$).

Seja G o fluxo total de radiação que atinge uma dada superfície. Três processos podem ocorrer com G :

- uma porção αG é absorvida;
- uma outra porção ρG é refletida pela superfície;
- uma terceira porção τG atravessa o corpo, devido a transparência.

α , ρ e τ são coeficientes tais que (conservação de energia)

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (2.12)$$

e são denominados absorvidade total (α), reflexividade total (ρ) e transmissividade total (τ) da superfície.

O conceito de *corpo negro*, idealizado por Gustav Kirchoff, representa um corpo capaz de absorver toda radiação incidente sobre ele, isto é, $\rho = \tau = 0$, para qualquer comprimento de onda, e que emite energia por radiação numa taxa (por unidade de área) igual a σT^4 . Para corpos reais usa-se, muitas vezes, o modelo de *corpo cinzento*, que absorve energia eletromagnética em qualquer comprimento de onda e a emite proporcionalmente a um parâmetro chamado emissividade (ε , com $0 < \varepsilon < 1$), tal que a taxa de energia q emitida por unidade de área de um corpo cinzento por radiação é dada por

$$q = \varepsilon \sigma T^4 \quad (2.13)$$

Na equação seguinte, a quantidade q representa o fluxo de energia trocada por radiação através de uma superfície:

$$q = \varepsilon \sigma T^4 - \alpha G \quad (2.14)$$

sendo α a absorvidade (ou absortância) relativa à superfície e G a energia incidente.

Obs.: para problemas com troca de calor por radiação entre mais de dois corpos é necessário considerar as parcelas de radiação refletida e transmitida (que passou através do corpo por “transparência”). Neste trabalho não será levada em conta tal situação.

3 – CALCULANDO A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS DE UM CORPO

A distribuição de temperatura num determinado corpo contínuo, rígido, opaco e em repouso, sujeito a troca de calor por convecção e radiação na superfície, em regime permanente, é obtida a partir da solução do sistema de equações diferenciais parciais seguinte (assumindo que o corpo ocupe a região Ω com fronteira $\partial\Omega$):

$$\begin{aligned} \text{div}[k\text{grad}(T)] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ [-k\text{grad}(T)] \cdot \vec{n} &= h(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma T^4 - \alpha G \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

Muitas vezes o efeito da radiação é desprezível em relação à convecção, e a condutividade térmica pode ser aproximada para uma constante. Com isso, o sistema anterior passa a ser

$$\begin{aligned} \text{div}\left[\text{grad}(T)\right] + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ [-k\text{grad}(T)] \cdot \vec{n} &= h(T - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

que é uma equação diferencial parcial *linear* sujeita a condição de contorno linear. Este é um problema clássico de engenharia, e conta com amplo ferramental de resolução.

Por exemplo, consideremos um corpo cilíndrico de raio R e comprimento L , que gera energia uniformemente a uma taxa \dot{q} (W/m³). Se L for muito maior do que R ($L \gg R$), é razoável supor que as duas extremidades estejam isoladas termicamente. O corpo troca calor por convecção com o ambiente, que está a uma temperatura T_∞ , que não é afetada pela temperatura do corpo. Assumindo condutividade térmica k constante, a equação da energia para este problema (em regime permanente) e os balanços de fluxo de calor na superfície, em coordenadas cilíndricas, são descritos por

$$\begin{aligned} \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } 0 \leq r < R \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} &= h(T - T_\infty) \quad \text{em } r = R \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = L \end{aligned} \quad (3.3)$$

cuja solução é única e representada por

$$T = \frac{\dot{q}}{4k} (R^2 - r^2) + \frac{\dot{q}R}{2h} + T_{\infty} \quad (3.4)$$

Imaginando agora um caso mais prático, considere um cabo elétrico, muito comprido, de cobre, com 10 mm de diâmetro, pelo qual passa uma corrente elétrica, sujeito a condução apenas na direção radial, trocando calor por convecção com o ambiente, que está a uma temperatura média de 25°C (298 K). Assumindo condutividade térmica k constante e igual a 399 W/mK (para temperatura de 293 K), e coeficiente de troca de calor por convecção (ou coeficiente de filme) h igual a 30 W/m²K, se o fio conduz uma corrente de 5 A submetida a uma tensão de 200 volts, o campo de temperaturas em qualquer seção transversal do fio será aproximadamente como mostra a figura seguinte:

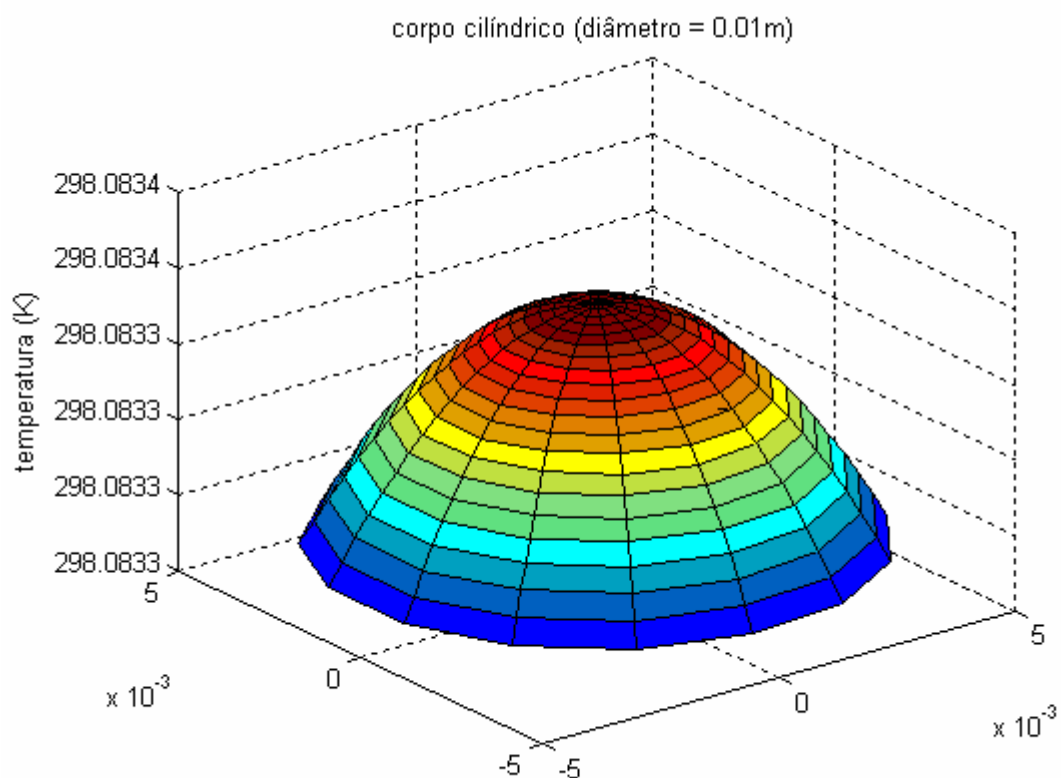


Figura 3.1 – campo de temperatura em cabo elétrico.

Note que a temperatura é praticamente igual em toda a área, como podemos comprovar pela diferença entre as temperaturas máxima e mínima:

$$T_{\max} = 298,08334900 \text{ K}$$

$$T_{\min} = 298,08333333 \text{ K}$$

$$T_{\max} - T_{\min} = 0,00001566 \text{ K}$$

No entanto, se analisarmos a distribuição de temperatura de um outro corpo cilíndrico, com cinco metros de diâmetro, de fibra de vidro (suponhamos que seja isotrópico), com condutividade térmica a 293 K igual a 0,035W/mK, fonte de energia interna igual a 10 W/m³, veremos que há gradientes de temperatura consideráveis:

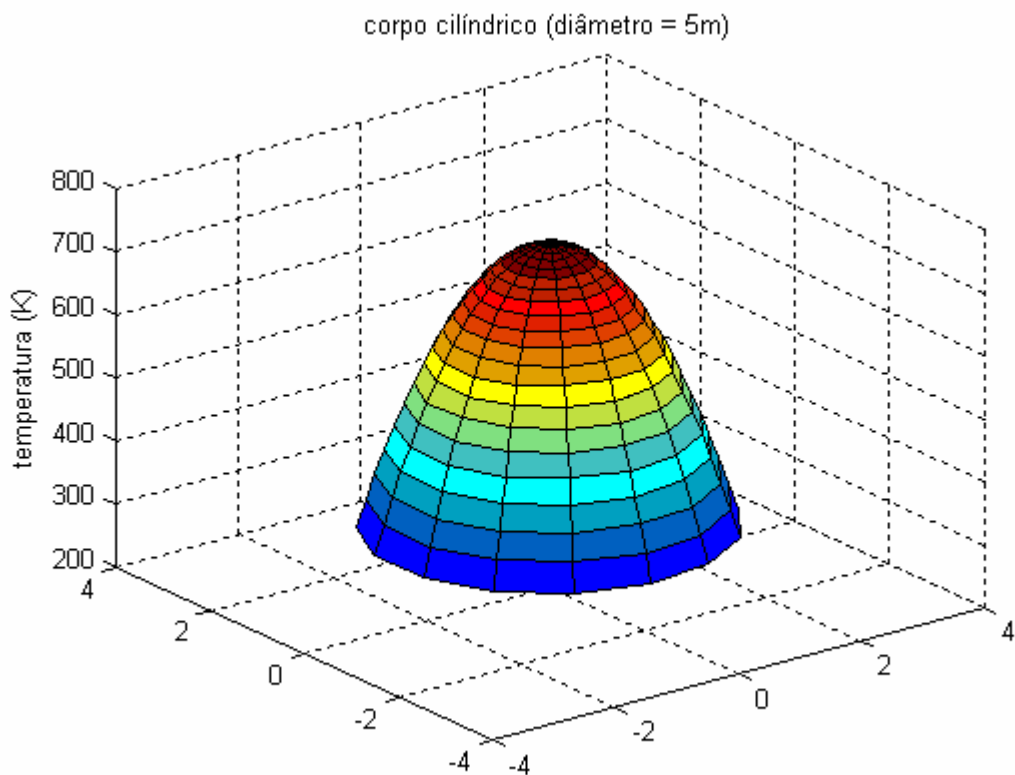


Figura 3.2 – campo de temperatura em corpo cilíndrico com 2,5m de raio.

$$T_{\max} = 744,84523810 \text{ K}$$

$$T_{\min} = 298,41666667 \text{ K}$$

$$T_{\max} - T_{\min} = 446,42857143 \text{ K}$$

A campo da distribuição de temperaturas para o cabo elétrico talvez não seja necessária durante o projeto, mas no caso da fibra de vidro ela nos permitiu detectar um gradiente de temperaturas acentuado. Ao contrário deste problema, em que a geometria é simples e torna fácil saber *a priori* onde estão as maiores temperaturas, bem como as menores, há problemas com geometrias complexas, que tornam isso muito difícil sem o cálculo da distribuição de temperatura.

Também com relação aos dois problemas anteriores, vimos que a condutividade térmica foi aproximada para uma constante. Há materiais, entretanto, cuja condutividade térmica possui forte dependência da temperatura, como mostra a tabela seguinte.

	condutividade térmica (W/mK)						
	200 K	273 K	400 K	600 K	800 K	1000 K	1200 K
Berílio	301,0	218,0	161,0	126,0	107,0	89,0	73,0
Boro	52,5	31,7	18,7	11,3	8,1	6,3	5,2
Germânio	96,8	66,7	43,2	27,3	19,8	17,4	17,4
Ferro	94,0	83,5	69,4	54,7	43,3	32,6	28,2
Silício	264,0	168,0	98,9	61,9	42,2	31,2	25,7

Tabela 3.1 – condutividade térmica de elementos metálicos.

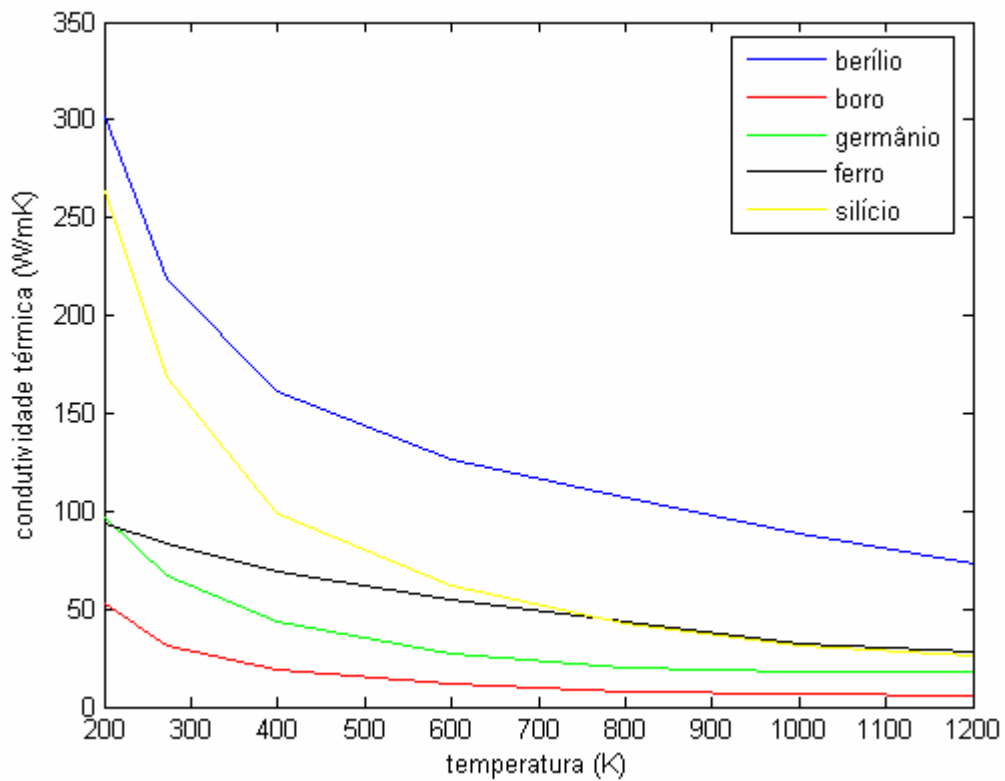


Figura 3.3 – curvas de condutividade térmica

De fato, a condutividade térmica, para muitos materiais, varia exponencialmente com a temperatura:

$$k(T) = \alpha \exp(-\beta T) + k_0 \quad (3.5)$$

sendo α e β constantes positivas. Para estes materiais (e muitos outros), resolver o sistema (3.2) com k constante pode conduzir a resultados extremamente longe da realidade física do problema.

Comparemos agora dois problemas iguais, a não ser por uma diferença: no primeiro a condutividade térmica é uma função da temperatura, e, no segundo, ela é aproximada para uma constante (média da utilizada no primeiro).

1º problema

Corpo cilíndrico de raio $R = 10$ m com fluxo apenas na direção radial, trocando calor por convecção com o ambiente, com condutividade térmica variável e dada por

$$k = 700 \exp(-0,01T) \quad (3.6)$$

A temperatura ambiente é 298K, o coeficiente de filme h é 30 W/m²K e a geração interna de calor uniforme e igual a 100 W/m³. O campo de temperatura é dado por

$$T = -100 \ln \left[\frac{1}{2800} (r^2 - 10^2) + \exp \left(-\frac{236}{75} \right) \right] \quad (3.7)$$

e graficamente representado por

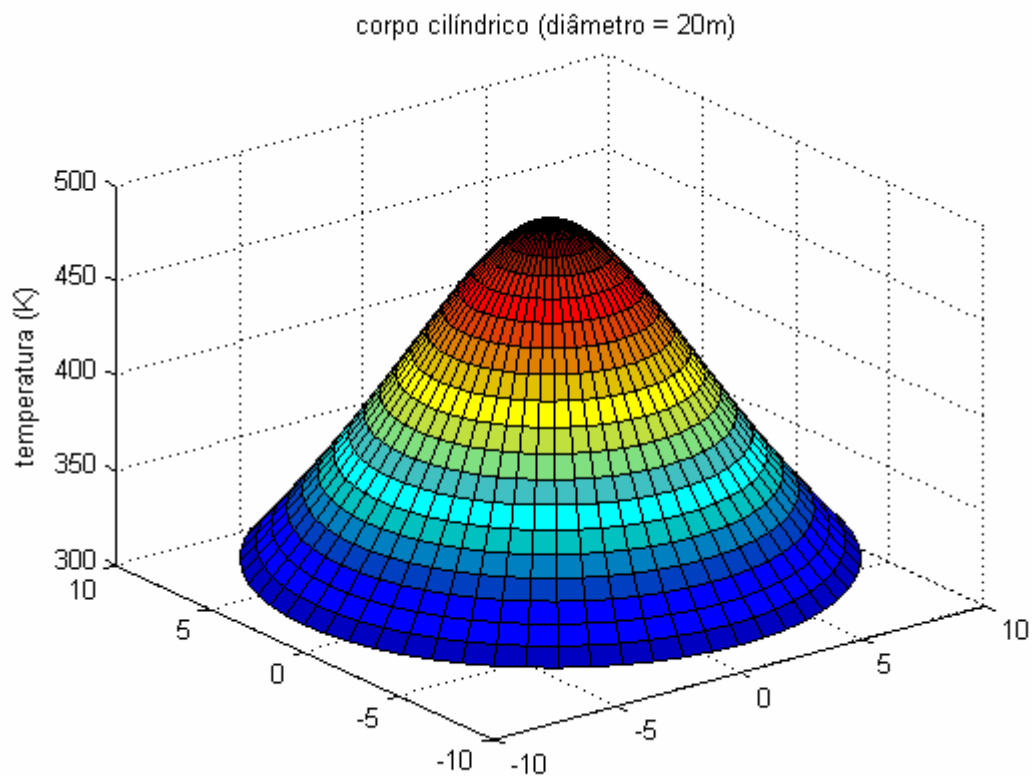


Figura 3.4 – curvas de temperatura para corpo com condutividade térmica variável

2º problema

Igual ao anterior exceto pela condutividade térmica, que será a média da utilizada acima, ou seja, $k = \sim 13 \text{ W/mK}$. A solução do problema e o gráfico do campo de temperatura são apresentados a seguir.

$$T = \frac{25}{13}(10^2 - r^2) + \frac{944}{3} \quad (3.8)$$

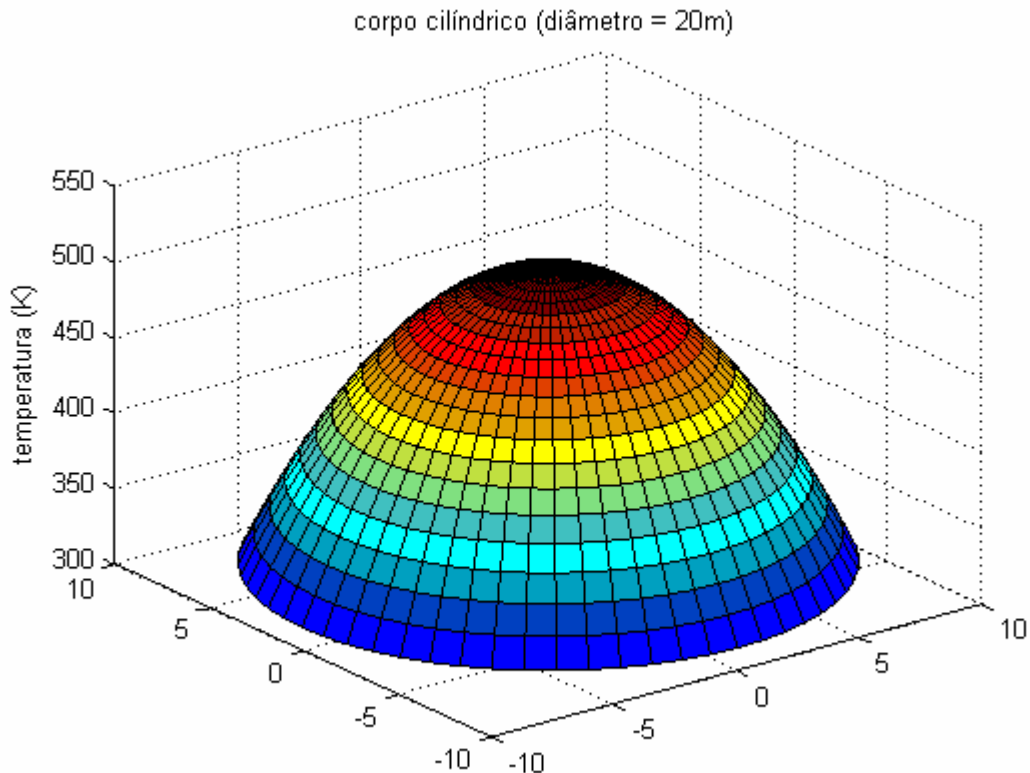


Figura 3.5 – campo de temperatura para corpo com condutividade térmica constante

As diferenças entre os resultados são evidentes. Por exemplo, no primeiro problema, a temperatura em $r = 5 \text{ m}$ é 412 K, enquanto que no segundo, também para $r = 5 \text{ m}$, a temperatura é 458 K. Há projetos de engenharia onde essa diferença de 46°C (que não é pequena) é determinante, podendo decidir se o projeto é factível ou não.

O problema em que levamos em conta a dependência da temperatura para a condutividade térmica é simples, permitindo a obtenção da solução analítica com facilidade. No entanto, a maioria dos casos envolve geometrias mais complexas. Normalmente, em situações nas quais os métodos analíticos de solução não são praticáveis e a condutividade térmica não pode ser tomada como constante, devido a

restrições de *design* que exigem maior precisão na determinação do campo de temperatura, utiliza-se métodos numéricos, que fornecem uma solução aproximada. Uma aplicação de metodologia numérica de resolução pode ser vista em De Andrade e Zapparoli [2], onde, a cada iteração, a condutividade térmica é calculada a partir do campo de temperatura do passo anterior. Este tipo de procedimento possui sempre um erro associado, porém, há problemas de engenharia que não abrem muito espaço para aproximações.

4 – PROCEDIMENTO LINEAR

4.1 – Equações Governantes

Consideremos um corpo rígido, opaco e isotrópico em repouso, cuja configuração é representada pelo conjunto aberto Ω com contorno $\partial\Omega$. O processo estacionário de transferência de calor dentro do corpo é matematicamente descrito pela seguinte equação diferencial parcial elíptica:

$$\text{div}[k\text{grad}(T)] + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.1)$$

onde T , \dot{q} e k denotam, respectivamente, o campo de temperatura, a taxa de geração interna de calor (por unidade de volume) e a condutividade térmica. O foco deste trabalho são os problemas de condução de calor com condutividade térmica dependente da temperatura, ou seja, tomada como uma função da temperatura local. Em outras palavras,

$$k = \hat{k}(T) \quad (4.2)$$

Supondo que as faces do corpo trocam calor com o ambiente de acordo com a lei de Newton do resfriamento, as condições de contorno associadas à equação (4.1) são dadas por

$$-[k\text{grad}(T)] \cdot \vec{n} = h(T - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (4.3)$$

onde \vec{n} é o vetor normal externo unitário (definido sobre $\partial\Omega$), h é o coeficiente de transferência de calor por convecção e T_∞ é a temperatura de referência (ambiente). O problema resultante (não-linear) é dado por

$$\begin{aligned} \text{div}[k\text{grad}(T)] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -[k\text{grad}(T)] \cdot \vec{n} &= h(T - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2 – Transformada de Kirchoff

Como a condutividade térmica é sempre um valor positivo, uma nova variável ω (transformada de Kirchoff) pode ser definida por

$$\omega = \int_{T_0}^T \hat{k}(\xi) d\xi = \hat{f}(T) \quad (4.5)$$

sendo ω uma função inversível de T . Calculemos o gradiente da integral acima:

$$\text{grad}\omega = \text{grad}\left[\int_{T_0}^T \hat{k}(\xi) d\xi\right] \quad (4.6)$$

Se representarmos o gradiente em coordenadas cartesianas retangulares

$$\left(\text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}\right), \text{ teremos, para cada componente,}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{T_0}^T \hat{k}(\xi) d\xi \right] \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{T_0}^T \hat{k}(\xi) d\xi \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{T_0}^T \hat{k}(\xi) d\xi \right] \quad (4.9)$$

Se analisarmos apenas a componente x teremos, por analogia, a resposta para as componentes y e z . Sabendo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{T_0}^{\hat{T}(x,y,z)} k(\xi) d\xi &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{T_0}^{\hat{T}(x,y,z)} k(\xi) d\xi - \int_{T_0}^{\hat{T}(x_0,y_0,z_0)} k(\xi) d\xi}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\int_{\hat{T}(x_0,y_0,z_0)}^{\hat{T}(x,y,z)} k(\xi) d\xi \right] \frac{1}{x - x_0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Podemos introduzir a função $\hat{G}(T)$ tal que $\hat{G}'(T) = k(T)$, de maneira que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{G}(\hat{T}(x, y, z)) - \hat{G}(\hat{T}(x_0, y_0, z_0))}{x \rightarrow x_0} = \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{dG}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} = k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.11)$$

Note que

$$\hat{G}(\hat{T}(x, y, z)) - \hat{G}(\hat{T}(x_0, y_0, z_0)) = \int_{\hat{T}(x_0, y_0, z_0)}^{\hat{T}(x, y, z)} k(\xi) d\xi \quad (4.12)$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{T_0}^{\hat{T}(x, y, z)} k(\xi) d\xi = k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.13)$$

Dessa forma, as equações 4.7 a 4.9 resultam em, respectivamente,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.16)$$

ou seja,

$$\text{grad}(\omega) = k \text{grad}(T) \quad (4.17)$$

A relação acima independe de sistema de coordenadas. Desta forma, o problema original pode ser reescrito como segue:

$$\begin{aligned} \text{div}[\text{grad}(\omega)] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -[\text{grad}(\omega)] \cdot \vec{n} &= h(\hat{f}^{-1}(\omega) - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $T \equiv \hat{f}^{-1}(\omega)$. O problema acima permanecer não-linear, mas esta não-linearidade está associada apenas ao contorno, não à equação diferencial parcial escrita para o interior do corpo. Como a condutividade térmica é positiva para todo domínio (do contrário estaríamos violando a 2ª Lei da Termodinâmica, com fluxo de calor no sentido da menor para a maior temperatura) é possível notar que

$$k > 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dT} > 0 \text{ e } \frac{dT}{d\omega} > 0 \text{ para todo o domínio} \quad (4.19)$$

ou seja, a temperatura é uma função estritamente crescente de ω – existe uma relação biunívoca entre ω e T . A consequência disso é muito importante, pois garante que, em se conhecendo ω , seja possível obter T , e vice-versa. Em outras palavras, a partir da solução em ω do sistema (4.18) tem-se a solução de (4.4). Mais ainda, podemos concluir que a transformada de Kirchoff sempre terá inversa.

Por exemplo, se tivermos

$$k = \begin{cases} k_1 & \text{para } T < T_0 \\ k_2 & \text{para } T \geq T_0 \end{cases} \quad (4.20)$$

sendo k_1 e k_2 constantes, a transformada é dada por

$$\omega = \begin{cases} \int_{T_0}^T k_1 d\xi & \text{para } T < T_0 \\ \int_{T_0}^T k_2 d\xi & \text{para } T \geq T_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

ou ainda

$$\omega = \begin{cases} k_1(T - T_0) & \text{para } T < T_0 \\ k_2(T - T_0) & \text{para } T \geq T_0 \end{cases} \quad (4.22)$$

cuja inversa é

$$T = \begin{cases} T = \frac{\omega}{k_1} + T_0 & \text{para } T < T_0 \\ T = \frac{\omega}{k_2} + T_0 & \text{para } T \geq T_0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Somemos, agora, as inversas definidas nos intervalos $T < T_0$ e $T \geq T_0$. Para que esta soma valha para todo $T \in (-\infty, +\infty)$ introduzimos uma função F da seguinte forma:

$$T = \begin{cases} T = \frac{\omega}{k_1} + T_0 + F & \text{para } T < T_0 \\ T = \frac{\omega}{k_2} + T_0 + F & \text{para } T \geq T_0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Somando, temos

$$2T = 2T_0 + \omega \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + 2F \quad (4.25)$$

$$T = T_0 + \omega \left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + F \quad (4.26)$$

F deve ser uma função tal que, em $T < T_0$, $T = T_0 + \omega / k_1$, e em $T \geq T_0$, $T = T_0 + \omega / k_2$, mantendo a equação (4.23). Desta forma, F é determinada a partir de:

$$\begin{aligned} \text{para } T < T_0, \quad T_0 + \frac{\omega}{k_1} &= T_0 + \omega \left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + F \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \omega \left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{para } T \geq T_0, \quad T_0 + \frac{\omega}{k_2} &= T_0 + \omega \left[\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + F \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \omega \left[\frac{1}{2k_2} - \frac{1}{2k_1} \right] = -\omega \left[\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

É fácil ver que F pode ser escrita como

$$F = |\omega| \left[\frac{1}{2k_2} - \frac{1}{2k_1} \right] \quad (4.29)$$

e a inversa de (4.21) é dada por

$$T \equiv \hat{f}^{-1}(\omega) = |\omega| \left[\frac{1}{2k_2} - \frac{1}{2k_1} \right] + \omega \left[\frac{1}{2k_2} + \frac{1}{2k_1} \right] + T_0 \quad (4.30)$$

Ou ainda, se a condutividade térmica for uma função exponencial da temperatura:

$$k = \alpha \exp(-\beta T) \quad (4.31)$$

sendo α e β constantes positivas, a inversa da transformada de Kirchoff

$$\omega = \int_{T_0}^T \alpha \exp(-\beta \xi) d\xi = -\frac{\alpha}{\beta} [\exp(-\beta T) - \exp(-\beta T_0)] \quad (4.32)$$

é facilmente calculada:

$$T = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\exp(-\beta T_0) - \frac{\beta \omega}{\alpha} \right] \quad (4.33)$$

Obs.: nem sempre a inversa poderá ser determinada analiticamente. A alternativa é uma inversão numérica.

4.3 – Construindo a solução a partir de uma seqüência de problemas lineares

A solução de

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{grad}(\omega)] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -[\operatorname{grad}(\omega)] \cdot \vec{n} &= h(\hat{f}^{-1}(\omega) - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.34)$$

pode ser representada pelo limite da seqüência não-decrescente $[\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots]$, cujos elementos são obtidos a partir da solução dos problemas lineares abaixo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{grad}(\Phi_{i+1})] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -[\operatorname{grad}(\Phi_{i+1})] \cdot \vec{n} &= \alpha \Phi_{i+1} + \beta_i \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \beta_i &= h[\hat{f}^{-1}(\Phi_i) - T_\infty] - \alpha \Phi_i \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde α é uma constante (suficientemente grande para que a seqüência seja não-decrescente) e $\Phi_0 \equiv 0$.

É importante notar que, para cada i , a função Φ_{i+1} é a incógnita e a função Φ_i é conhecida. Então, $\hat{f}^{-1}(\Phi_i)$ é sempre conhecida em (4.35), sendo estimada a partir da seguinte equação:

$$\Phi_i = \int_{T_0}^{\hat{f}^{-1}(\Phi_i)} \hat{k}(\xi) d\xi \quad (4.36)$$

Para cada posição espacial, a raiz da equação acima é única. Esta unicidade é garantida pela equação (4.19).

Mais uma vez, a constante α deve ser grande o suficiente para garantir que, em qualquer ponto de Ω , $\Phi_{i+1} \geq \Phi_i$. Em Gama [3] tal resultado é provado, assim como é fornecido um limite superior para o valor de α , Gama, 2000 [4]. Para o problema considerado neste trabalho é suficiente escolher α tal que

$$\alpha \geq \frac{h}{k_{\min}} \quad (4.37)$$

onde k_{\min} é o menor valor da condutividade térmica.

4.4 – Convergência

O limite da seqüência $[\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots]$, denotada aqui por Φ_∞ existe e é, de fato, uma solução do problema. Para provar esta assertiva, comecemos mostrando que Φ_∞ é uma solução de (4.34). Em outras palavras

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\operatorname{grad}(\Phi_\infty)] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -[\operatorname{grad}(\Phi_\infty)] \cdot \vec{n} &= h(\hat{f}^{-1}(\Phi_\infty) - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.38)$$

Desde que β_∞ seja dado por

$$\beta_\infty = h[\hat{f}^{-1}(\Phi_\infty) - T_\infty] - \alpha\Phi_\infty \quad (4.39)$$

temos que (4.35) e (4.38) coincidem. Então, Φ_∞ é uma solução. Agora, levando em conta que a seqüência é não-decrescente e tem um limite superior, garantimos a convergência, uma vez que a solução de (4.38) pertence ao mesmo espaço de soluções de (4.35) para cada i , Helmborg, 1974 [5], John, 1982 [6].

Vejamos agora três exemplos de aplicação do procedimento apresentado.

4.5 – Exemplos

4.5.1 – Exemplo 1

Seja uma região ocupada por um corpo esférico com geração de calor uniforme, inserida num único meio, com $h = 1$ e $T_\infty = 0$, em um certo sistema de unidades.

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \right] + 1 &= 0 \quad \text{em } 0 \leq r < 1 \\ -k \frac{dT}{dr} &= T \quad \text{sobre } r = 1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Assume-se que T representa uma temperatura absoluta e $k = 3T + 2$. A solução é facilmente alcançada e dada por

$$T = -\frac{2}{3} + \left[\frac{(1-r^2)}{9} + 1 \right]^{1/2} \quad (4.41)$$

Agora, empreguemos o procedimento proposto. Com a transformada de Kirchoff, o problema resulta em

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\omega}{dr} \right) \right] + 1 &= 0 \quad \text{em } 0 \leq r < 1 \\ -\frac{d\omega}{dr} &= \hat{f}^{-1}(\omega) = -\frac{2}{3} + \left[\frac{4}{9} + \frac{2\omega}{3} \right]^{1/2} \quad \text{sobre } r = 1 \end{aligned} \quad (4.42)$$

O procedimento linear para obter os elementos da seqüência é representado como segue:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_{i+1}}{dr} \right) \right] + 1 &= 0 \quad \text{em } 0 \leq r < 1 \\ -\frac{d\Phi_{i+1}}{dr} &= \alpha\Phi_{i+1} + \beta_i \quad \text{sobre } r = 1 \\ \beta_i &= -\frac{2}{3} + \left[\frac{4}{9} + \frac{2\Phi_i}{3} \right]^{1/2} - \alpha\Phi_i \end{aligned} \quad (4.43)$$

ou, simplesmente por

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_{i+1}}{dr} \right) \right] + 1 &= 0 \quad \text{em } 0 \leq r < 1 \\ -\frac{d\Phi_{i+1}}{dr} &= \alpha\Phi_{i+1} - \alpha\Phi_i - \frac{2}{3} + \left[\frac{4}{9} + \frac{2\Phi_i}{3} \right]^{1/2} \quad \text{sobre } r = 1 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Como o problema só tem sentido físico para $T > 0$, temos que $k_{\min} > 2$. Desta forma, podemos trabalhar com qualquer $\alpha \geq 1/2$. Usemos $\alpha = 3$!

A solução geral da equação

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_{i+1}}{dr} \right) \right] + 1 = 0 \quad \text{para } 0 \leq r < 1 \quad (4.45)$$

é

$$\Phi_{i+1} = -\frac{r^2}{6} + C_{i+1} \quad \text{para } 0 \leq r < 1 \quad (4.46)$$

onde a constante C_{i+1} , para $i > 0$, é obtida das condições de contorno. Em outras palavras

$$\frac{1}{3} = 3 \left[-\frac{1}{6} + C_{i+1} \right] - 3 \left[-\frac{1}{6} + C_i \right] - \frac{2}{3} + \left[\frac{4}{9} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{6} + C_i \right) \right]^{1/2} \quad (4.47)$$

Então,

$$C_{i+1} = C_i + \frac{1}{3} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} C_i} \right] \quad (4.48)$$

A constante C_0 é obtida a partir de

$$\frac{1}{3} = 3 \left[-\frac{1}{6} + C_0 \right] \Rightarrow C_0 = \frac{5}{18} \quad (4.49)$$

Se usássemos $\alpha = 20$, teríamos

$$C_{i+1} = C_i + \frac{1}{20} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} C_i} \right] \quad (4.50)$$

e a constante C_0 seria obtida de

$$\frac{1}{3} = 20 \left[-\frac{1}{6} + C_0 \right] \Rightarrow C_0 = \frac{11}{60} \quad (4.51)$$

A tabela 4.1 apresenta uma comparação entre os valores obtidos para C_i com os dois valores distintos de α .

	$\alpha = 3$	$\alpha = 20$
i	C_i	
0	0,277777777778	0,183333333333
1	0,371083677837	0,199585905448
2	0,450399852543	0,215439507262
3	0,518403223232	0,230908373791
4	0,577078085378	0,246005929421
5	0,627951577530	0,260744857179
20	0,940194181288	0,445715286583
30	0,981726950410	0,539636862099
40	0,994386255552	0,616301353085
50	0,998272529117	0,679342560741
75	0,999909120823	0,793587180353
100	0,999995217617	0,866108261467
150	0,999999986756	0,942978495962
200	0,99999999963	0,975528309462
250	1,000000000000	0,989464062823
300	1,000000000000	0,995457766269
350	1,000000000000	0,998040626122
400	1,000000000000	0,999154578360
450	1,000000000000	0,999635182181
500	1,000000000000	0,999842565888
750	1,000000000000	0,999997643444
1000	1,000000000000	0,999999964725
1250	1,000000000000	0,999999999472
1500	1,000000000000	0,999999999992
1750	1,000000000000	1,000000000000

Tabela 4.1 – comparação entre resultados obtidos com $\alpha = 3$ e $\alpha = 20$.

É fácil mostrar que $C_\infty = 1$. Portanto, o limite da seqüência é dado por

$$\Phi_\infty = -\frac{r^2}{6} + 1 \quad \text{para } 0 \leq r < 1 \quad (4.52)$$

A solução é exatamente o limite da seqüência. Levando em conta que

$$\hat{f}^{-1}(\omega) = T = -\frac{2}{3} + \left[\frac{4}{9} + \frac{2\omega}{3} \right]^{1/2} \quad (4.53)$$

temos o seguinte resultado (coincidente com a solução exata, previamente obtida)

$$T = -\frac{2}{3} + \left[\frac{4}{9} + \frac{2}{3} \left(-\frac{r^2}{6} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (4.54)$$

4.5.2 – Exemplo 2

Pensemos em outro caso, representado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[rk \frac{dT}{dr} \right] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \frac{dT}{dr} &= h(T - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde \dot{q} , T_∞ e h são constantes positivas conhecidas e k é uma função da temperatura dada por

$$k = \frac{1}{T^2} + k_0 \quad (4.56)$$

sendo k_0 uma constante positiva e conhecida. Este modelo descreve um problema de condução de calor num corpo cilíndrico de raio R , que ocupa uma região Ω com fronteira $\partial\Omega$, e cujas faces circulares são isoladas termicamente.

Aplicamos então o procedimento proposto. A transformada de Kirchoff para este problema, bem como sua inversa, são representadas por

$$\omega = \int_{T_0}^T \left(\frac{1}{\psi^2} + k_0 \right) d\psi \Rightarrow T = \hat{f}^{-1}(\omega) = \frac{\omega + k_0 T_0 - \frac{1}{T_0} + \left[\left(\frac{1}{T_0} - k_0 T_0 - \omega \right)^2 + 4k_0 \right]^{1/2}}{2k_0} \quad (4.57)$$

A transformada nos permite reescrever o problema na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\omega}{dr} \right] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -\frac{d\omega}{dr} &= h(\hat{f}^{-1}(\omega) - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.58)$$

Tomemos a solução como sendo o limite da seqüência de problemas lineares cujas soluções são $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_\infty$ e onde cada elemento da seqüência é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\Phi_{i+1}}{dr} \right] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -\frac{d\Phi_{i+1}}{dr} &= \alpha\Phi_{i+1} + \beta_i \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ \beta_i &= h[\hat{f}^{-1}(\Phi_i) - T_\infty] - \alpha\Phi_i \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde

$$\hat{f}^{-1}(\Phi_i) = \frac{\Phi_i + k_0 T_0 - \frac{1}{T_0} + \left[\left(\frac{1}{T_0} - k_0 T_0 - \Phi_i \right)^2 + 4k_0 \right]^{1/2}}{2k_0} \quad (4.60)$$

Resolvendo a equação que carrega o termo difusivo temos que

$$\Phi_{i+1} = -\frac{\dot{q}}{4} r^2 + C_{i+1} \quad (4.61)$$

com $C_{i+1} = \Phi_{i+1} + \frac{\dot{q}}{4} R^2$ em $r = R$.

A constante C_{i+1} pode ser determinada a partir da condição de contorno ($r = R$):

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi_{i+1}}{dr} &= \frac{\dot{q}}{2} R = \alpha\Phi_{i+1} + \beta_i \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_{i+1} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\dot{q}}{2} R - \beta_i \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Reescrevendo C_{i+1} apenas em função de Φ_i temos

$$C_{i+1} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\dot{q}}{2} R - h \left[\hat{f}^{-1}(\Phi_i) - T_\infty \right] + \alpha \Phi_i \right\} + \frac{\dot{q}}{4} R^2 \quad (4.63)$$

Lembrando que $\hat{f}^{-1}(\Phi_i)$ é calculada a partir de (4.60). Finalmente, a solução geral de (4.58) será

$$\Phi_\infty = -\frac{\dot{q}}{4} R^2 + C_\infty \quad (4.64)$$

A partir da transformada – equação (4.57) – podemos determinar a solução de (4.55), utilizando a solução encontrada para Φ_∞ :

$$T = \frac{\Phi_\infty + k_0 T_0 - \frac{1}{T_0} + \left[\left(\frac{1}{T_0} - k_0 T_0 - \Phi_\infty \right)^2 + 4k_0 \right]^{1/2}}{2k_0} \quad (4.65)$$

Utilizemos os seguintes valores para os parâmetros físicos e geométricos para encontrar o valor da constante C :

$$k_0 = 10 \text{ W/mK};$$

$$h = 30 \text{ W/m}^2\text{K};$$

$$T_\infty = 298 \text{ K};$$

$$\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3;$$

$$R = 10 \text{ m}.$$

Levando em conta a condição de convergência da sequência $\alpha \geq \frac{h}{k_{\min}} = \frac{30}{10}$ temos

que $\alpha \geq 3$. Analisemos três valores para α : 1, 3 e 200.

	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 200$
i	C_i		
1	11910,0000000000	5636,6666666667	2547,0500000000
2	-6907,0031850511	5637,6634876935	2593,4065822827
3	2532,9936227818	5637,6634887006	2639,0690201930
4	11846,3023660300	5637,6634887006	2684,0469723106
5	-6779,6079387972	5637,6634887006	2728,3504909214
20	-3320,3791438943	5637,6634887006	3318,4827811853
30	8162,8359947414	5637,6634887006	3643,7922373002
40	6769,0540807767	5637,6634887006	3923,4710262886
50	2633,4824388331	5637,6634887006	4163,9195819009
75	8845,3296413020	5637,6634887006	4627,6479356905
100	3944,9871584594	5637,6634887006	4945,4595712770
150	-3262,7667081292	5637,6634887006	5312,5417762152
200	-1356,4651868267	5637,6634887006	5484,9568706465
250	10231,8800607091	5637,6634887006	5565,9386252994
300	10167,3606861651	5637,6634887006	5603,9749949109
350	3490,8219642144	5637,6634887006	5621,8403201039
400	-4114,4594062589	5637,6634887006	5630,2314952960
450	5091,0823332555	5637,6634887006	5634,1727513335
500	1226,1778444351	5637,6634887006	5636,0239222082
750	255,3961523117	5637,6634887006	5637,6260096718
1000	-5323,2140271331	5637,6634887006	5637,6626319634
1250	-3488,5920928178	5637,6634887006	5637,6634691163
1500	2949,7403570522	5637,6634887006	5637,6634882529
1750	5206,9611311792	5637,6634887006	5637,6634886903
2000	6186,3269573446	5637,6634887006	5637,6634887003
2500	9944,4073327144	5637,6634887006	5637,6634887006
3000	-627,8248247291	5637,6634887006	5637,6634887006
4000	568,4609335424	5637,6634887006	5637,6634887006
5000	3005,7036367856	5637,6634887006	5637,6634887006

Tabela 4.2 – comparação entre resultados obtidos com $\alpha = 1$, $\alpha = 3$ e $\alpha = 200$.

Resolvendo o sistema (4.55) por métodos clássicos chegamos à solução:

$$T = \frac{-\frac{\dot{q}}{4}r^2 + M + \sqrt{\left(M - \frac{\dot{q}}{4}r^2\right)^2 + 4k_0}}{2k_0} \quad (4.66)$$

onde a constante de integração M é calculada a partir de

$$M = \frac{\dot{q}R^2}{4} - \frac{2h}{\dot{q}R + 2hT_\infty} + k_0 \left(\frac{\dot{q}R}{2h} + T_\infty \right) \quad (4.67)$$

que, inserindo os valores das constantes do problema é igual a 5646,6635 WK/m. Para que as duas soluções sejam iguais é necessário que

$$M = C + k_0 T_0 - \frac{1}{T_0} \quad (4.68)$$

Para dois valores de $\alpha - 3$ e 200 – a constante C convergiu para (5637,6635), que atende à condição estabelecida em (4.68), com a diferença que, para $\alpha = 3$, C atingiu o limite muito mais rapidamente do que para $\alpha = 200$. Note ainda que para $\alpha = 1$, que viola a restrição $\alpha \geq 3$, a série simplesmente não converge. A conclusão final é que ambos os métodos resultam na mesma solução:

$$T = \frac{-25r^2 + 5646,6635 + \sqrt{(5646,6635 - 25r^2)^2 + 40}}{20} \quad (4.69)$$

4.5.3 – Exemplo 3

Como foi dito na seção 4.3, a sequência de funções Φ_i , que representa a transformada de Kirchoff para cada iteração, é não-decrescente, desde que seja escolhido um α adequado. Os dois exemplos anteriores já confirmam esta propriedade. Ainda assim, consideremos um outro problema, no qual será possível observar graficamente o crescimento da sequência e a convergência das soluções obtidas em cada passo do processo iterativo para a solução final.

O problema é matematicamente representado pelo sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } 0 < x < L \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_\infty) \quad \text{em } x = L \\ k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_\infty) \quad \text{em } x = 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde a condutividade térmica k é dada por

$$k = T + 1000 \quad (4.71)$$

A solução analítica deste problema é representada implicitamente pela equação

$$\frac{1}{2}T^2 + 1000T = -\frac{\dot{q}}{2}x^2 + (hT_0 - hT_\infty)x + \frac{T_0^2}{2} + 1000T_\infty \quad (4.72)$$

onde T_0 é a temperatura em $x = 0$ e é dada por

$$T_0 = \frac{\frac{\dot{q}L^2}{2} + hLT_\infty - (hL + 1000)\left(\frac{qL}{h} + 2T_\infty\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{qL}{h} + 2T_\infty\right)^2}{hL + \frac{qL}{h} + 2T_\infty + 2000} + \frac{qL}{h} + 2T_\infty \quad (4.73)$$

Usando os seguintes valores para as constantes:

$$h = 30 \text{ W/m}^2\text{K};$$

$$T_\infty = 300 \text{ K};$$

$$\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3;$$

$$L = 20 \text{ m.}$$

obtemos o campo de temperatura mostrado na próxima figura:

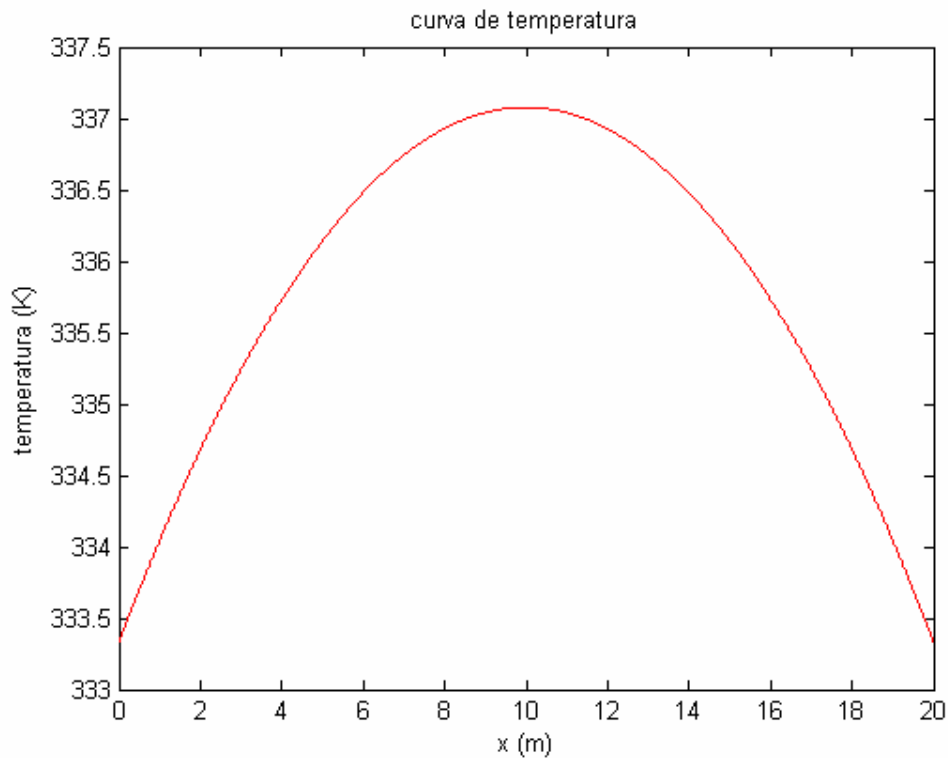


Figura 4.1 – curva de temperatura representando solução do sistema (4.70).

Empreguemos o procedimento iterativo proposto para o mesmo problema. Plotando as soluções obtidas a partir da centésima iteração em diante (plotar os resultados desde o primeiro elemento da seqüência prejudicaria a visualização) podemos ver claramente o processo de convergência para a solução mostrada pela figura anterior, obtida por métodos clássicos de resolução de sistema de EDP's – o campo de temperatura do centésimo elemento da seqüência é o mais inferior da figura.

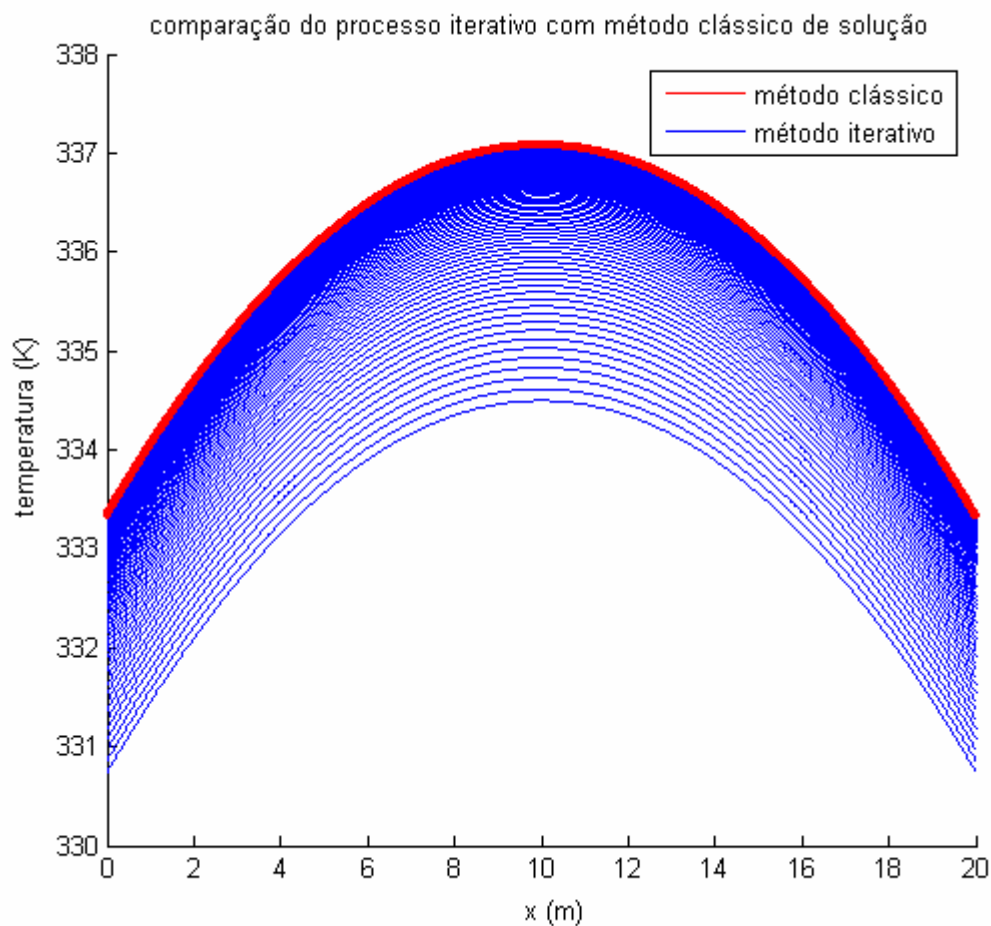


Figura 4.2 – seqüência de soluções obtidas pelo método iterativo (curvas em azul) comparada com a solução dada por (4.72) e (4.73) (curva em vermelho).

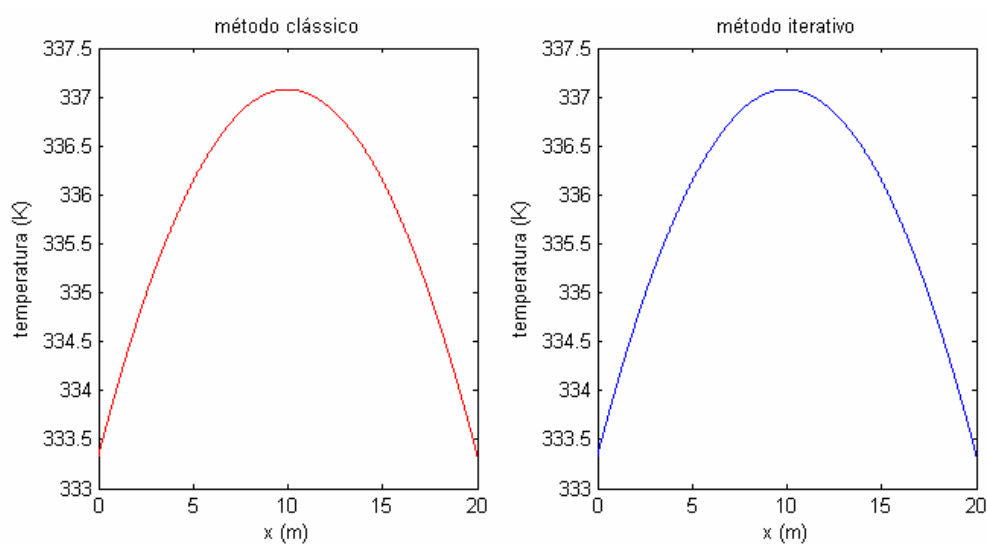


Figura 4.3 – comparação do resultado final obtido pelo procedimento iterativo com a solução dada por (4.72) e (4.73).

É fácil notar o comportamento crescente da seqüência de problemas lineares e o processo de convergência para a solução exata do sistema (4.70).

5 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO DE CALOR

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[k \operatorname{grad}(T)] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ [-k \operatorname{grad}(T)] \cdot \vec{n} &= h(T - T_{\infty}) + \varepsilon \sigma T^4 - \alpha G \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

Este modelo descreve a distribuição de temperaturas de um certo corpo que ocupa uma região Ω . Para que conheçamos o valor da temperatura em cada ponto do domínio Ω é preciso resolver a EDP sujeita às condições de contorno definidas sobre $\partial\Omega$. Os métodos analíticos de solução, quando praticáveis, provêem solução exata do sistema (5.1). No entanto, o número de problemas de engenharia que podem ser resolvidos analiticamente é extremamente limitado, seja devido à presença de termos não-lineares ou em consequência de geometrias complexas. Os métodos numéricos são uma alternativa para muitos dos casos não alcançados pelo ferramental analítico conhecido, porém fornecem sempre soluções que carregam algum erro associado. Nos procedimentos numéricos o domínio, antes contínuo, é discretizado, bem como a EDP definida nele, que pode ainda ser discretizada no tempo (o que não é necessário para problema (5.1), que não possui dependência do tempo). Os métodos de análise numérica, ao tratar a solução em um número finito de pontos discretos, simplificam a resolução do sistema de equações diferenciais transformando-o num sistema de equações algébricas. Dentre os métodos numéricos clássicos de resolução de EDP's estão o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método de Elementos Finitos (MEF). Neste trabalho serão empregados o MDF e o MEF.

5.1 – Diferenças Finitas

O MDF consiste em reescrever equações diferenciais de forma que as derivadas sejam tomadas em intervalos finitos, ao invés de infinitesimais. Ou seja, a derivada da função $f = \hat{f}(x)$, definida por

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.2)$$

seria, em diferenças finitas, escrita como segue:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.3)$$

onde Δx é uma variação finita (positiva). Vejamos uma aplicação do MDF para o seguinte problema de transmissão de calor

$$\begin{aligned} \text{div}[\text{grad}(T)] + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ [-k \text{grad}(T)] \cdot \vec{n} &= h(T - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.4)$$

Se as equações acima estiverem em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares e o domínio Ω for uma placa retangular de largura L e altura H , o sistema (5.4) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } 0 < x < L \text{ e } 0 < y < H \\ k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_\infty) \quad \text{para } x = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_\infty) \quad \text{para } x = L \\ k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_\infty) \quad \text{para } y = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_\infty) \quad \text{para } y = H \end{aligned} \quad (5.5)$$

Discretizemos o domínio Ω . Devemos estipular um número de nós nc para a direção x e nl para a direção y . Desta forma criamos uma malha de diferenças finitas, ilustrada na figura 5.1. Digamos que $nc = 7$ e $nl = 6$.

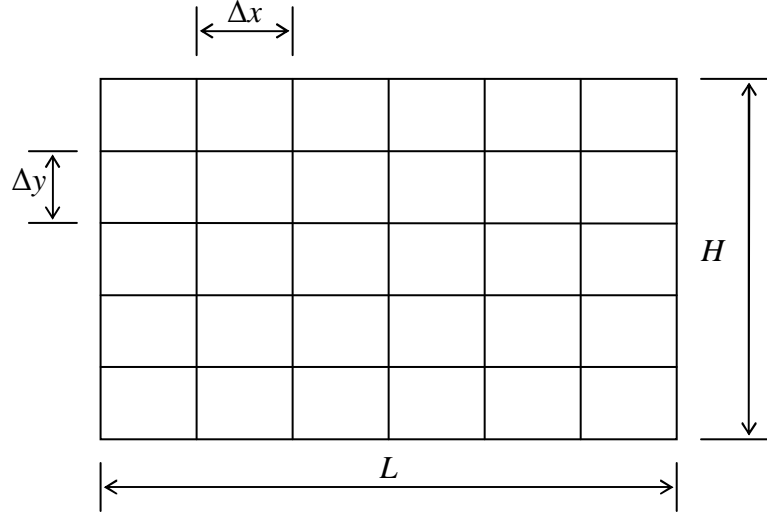


Figura 5.1 – malha de diferenças finitas

Os valores de Δx e Δy são calculados a partir de

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{L}{nc - 1} \\ \Delta y &= \frac{H}{nl - 1}\end{aligned}\tag{5.6}$$

A partir do domínio discreto o sistema de equações diferenciais (5.5) pode ser aproximado para o seguinte sistema de equações lineares algébricas:

$$\begin{aligned}\frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}}{k} &= 0 \quad \text{em } 1 < m < nl \text{ e } 1 < n < nc \\ k \frac{T_{m,2} - T_{m,1}}{\Delta x} &= h(T_{m,1} - T_\infty) \quad \text{para } 1 < m < nl \\ -k \frac{T_{m,nc} - T_{m,nc-1}}{\Delta x} &= h(T_{m,nc} - T_\infty) \quad \text{para } 1 < m < nl \\ k \frac{T_{2,n} - T_{1,n}}{\Delta y} &= h(T_{1,n} - T_\infty) \quad \text{para } 1 < n < nc \\ -k \frac{T_{nl,n} - T_{nl-1,n}}{\Delta y} &= h(T_{nl,n} - T_\infty) \quad \text{para } 1 < n < nc\end{aligned}\tag{5.7}$$

Em Kreith e Bohn [7] há mais detalhes de como se chega às equações acima. A cada nó da malha há uma equação associada. No caso de placas retangulares, os nós das

“quinas” – $T_{1,1}$, $T_{1,nc}$, $T_{nl,1}$, $T_{nl,nc}$ – não fazem parte do sistema linear, podendo ser calculados pela média aritmética dos dois nós “vizinhos”. Desta forma, para este exemplo, a solução aproximada do problema (5.5) seria obtida da solução de um sistema de 38 equações lineares (generalizando, para placas retangulares, são $nl \times nc - 4$ equações). Quanto à resolução do sistema linear há diversas metodologias, sejam aproximadas (*e.g.* métodos iterativos de Gauss-Seidel ou Jacobi) ou exatas (por meio de decomposição LU, inversão direta da matriz dos coeficientes, entre outros caminhos).

5.1.1 – Exemplo 1

Vejamos uma aplicação do MDF para o problema 2-D representado por (5.5), com os seguintes valores para as propriedades físicas:

$$h = 50 \text{ W/m}^2\text{K};$$

$$k = 5 \text{ W/mK};$$

$$T_{\infty} = 300 \text{ K};$$

$$\dot{q} = 50 \text{ W/m}^3;$$

A placa tem 15m de largura e 10m de altura. É utilizada uma malha 40×40 , e para resolver o sistema de equações lineares empregamos o método iterativo Gauss-Seidel. O resultado é apresentado na figura 5.2.

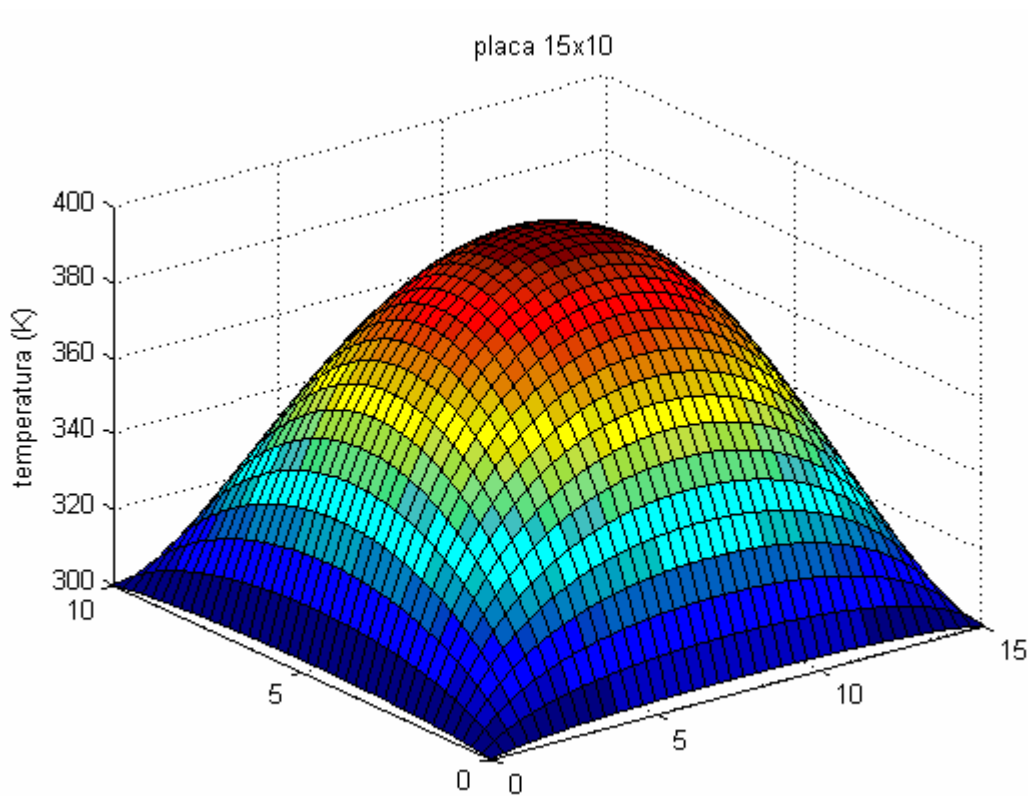


Figura 5.2 – campo de temperaturas em placa retangular. Todas propriedades físicas são constantes.
Como esperado, a distribuição de temperaturas apresenta várias simetrias.

5.1.2 – Exemplo 2

Consideremos o mesmo problema do exemplo anterior porém com geração interna de energia dependente da posição – $\dot{q} = \hat{q}(x, y)$. Utilizemos

$$\dot{q} = 2x^2 + 2y^2 \quad (5.8)$$

O campo de temperaturas calculado é graficamente representado a seguir.

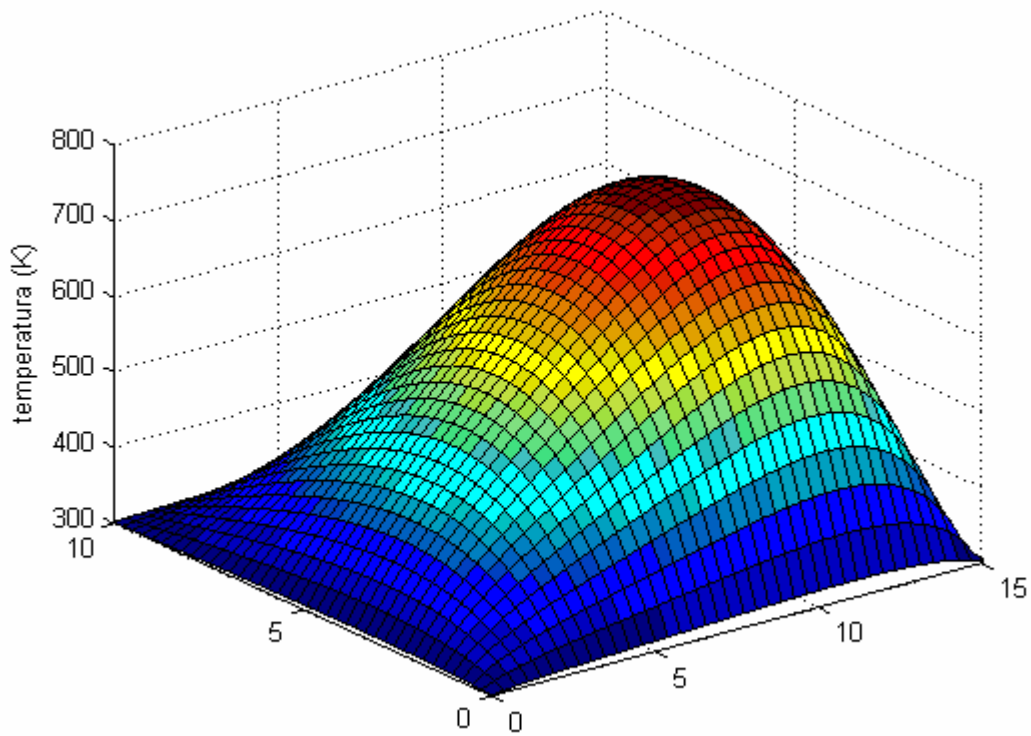


Figura 5.3 – campo de temperaturas em placa com geração de energia dependente da posição.

5.1.3 – Exemplo 3

Ainda fazendo pequenas mudanças no mesmo problema, consideremos o coeficiente de troca de calor por convecção h variável com a posição, mantendo a relação para \dot{q} dada pela equação (5.8). Utilizemos as seguintes funções para h (absolutamente arbitrárias e sem comprometimento físico):

$$\begin{aligned}
 h &= \bar{h}_1 y^2, \bar{h}_1 = 1 \text{ W/m}^4\text{K}, \text{ para } x = 0 \\
 h &= \bar{h}_2 y, \bar{h}_2 = 1 \text{ W/m}^3\text{K}, \text{ para } x = L \\
 h &= \bar{h}_3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \bar{h}_3 = 1 \text{ W/m}^2\text{K}, \text{ para } y = 0 \\
 h &= \bar{h}_4 (x+1), \bar{h}_4 = 1 \text{ W/m}^3\text{K}, \text{ para } y = H
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Resultado:

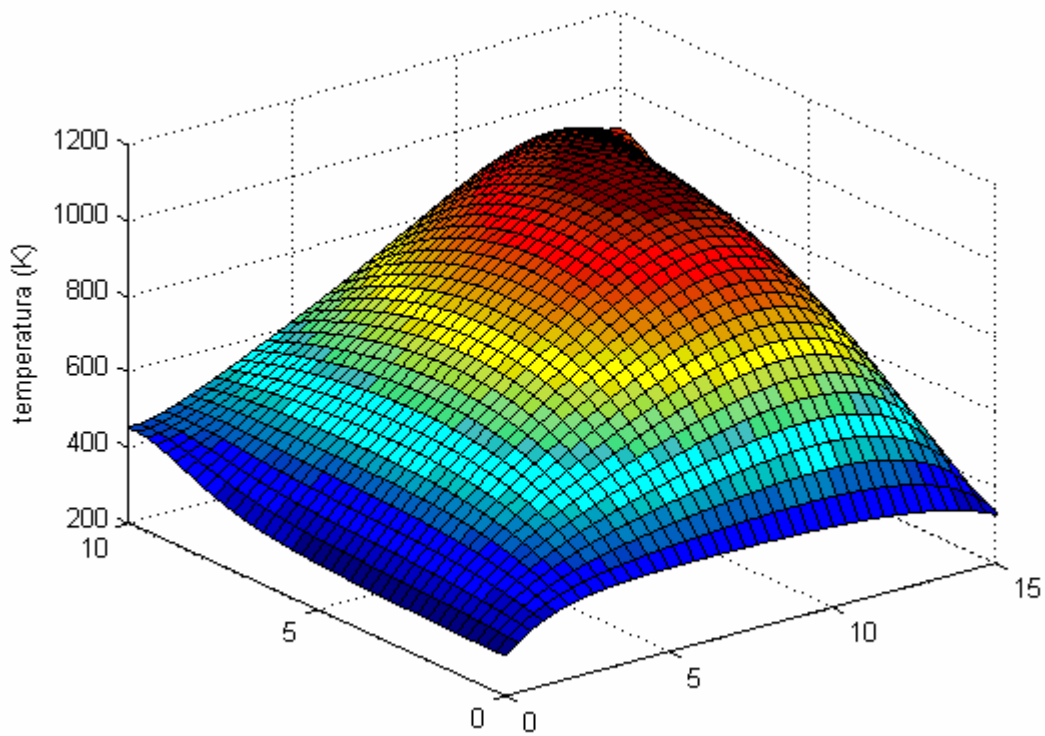


Figura 5.4 – campo de temperaturas em placa com geração de energia e coeficiente de filme dependentes da posição.

5.2 – Elementos Finitos

Formulemos a solução em elementos finitos para a equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5.10)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} \right) \right] \cdot \vec{n} = h(T - T_{\infty}) \quad \text{sobre } \Gamma \quad (5.11)$$

Este é um problema bidimensional de condução de calor num corpo sujeito à lei de Newton do resfriamento. Os parâmetros físicos k (condutividade térmica), \dot{q} (geração

interna de calor) e h (coeficiente de troca de calor por convecção) serão considerados constantes.

5.2.1 – Em busca da forma fraca das equações governantes

A forma fraca das equações que governam o problema consiste no estabelecimento de equações integrais sobre o domínio Ω e o contorno Γ do corpo, referentes à satisfação destas equações em um sentido “médio”, em oposição ao sentido restrito pontual da forma forte da equação (5.10).

Obs.: Nesta seção utilizaremos letras em negrito, maiúsculas e minúsculas, para indicar matrizes.

Multiplicando a EDP definida em Ω por uma função arbitrária $\hat{w}(x, y)$, denominada função teste ou função peso, obtemos a equação

$$\hat{w}(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} \right] = 0 \quad (5.12)$$

a qual, se integrada sobre o domínio Ω , resulta em

$$\int_{\Omega} \hat{w}(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} \right] d\Omega = 0 \quad (5.13)$$

Note que, caso seja determinado o campo de temperatura para o qual a equação (5.10) seja satisfeita, então a equação (5.13) também é satisfeita para qualquer que seja a função $\hat{w}(x, y)$. Por outro lado, caso se determine uma solução $\hat{T}(x, y)$ que satisfaça a equação (5.13) para qualquer função $\hat{w}(x, y)$, então $\hat{T}(x, y)$ também é solução de (5.10).

Utilizando o conceito de derivada do produto, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} \right] d\Omega = \\
& = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(wk \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(wk \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + w\dot{q} \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Agora, pelo teorema de Gauss ou da divergência, temos que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(wk \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(wk \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} w \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} \right) \vec{n} d\Gamma \tag{5.15}$$

Fazendo

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} - k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} = \vec{q} \tag{5.16}$$

a equação (5.13) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + w\dot{q} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} w(\vec{q} \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0 \tag{5.17}$$

O fluxo de calor $\vec{q} \cdot \vec{n}$ que cruza a fronteira Γ é igual a $h(T - T_{\infty})$, o qual, inserido na segunda integral de (5.17), resulta em

$$\int_{\Gamma} w(\vec{q} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma} w(hT - hT_{\infty}) d\Gamma \tag{5.18}$$

e a equação (5.17) passa a ser dada por

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + w\dot{q} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} w(hT - hT_{\infty}) d\Gamma = 0 \tag{5.19}$$

5.2.2 – Discretização do domínio em elementos finitos

O solução pelo MEF consiste em discretizar o domínio do problema em uma malha de elementos finitos interligados através de nós. Os elementos podem ser de vários tipos, seja com relação ao número de graus de liberdade, seja com o formato do elemento. Em malhas 2-d são muito utilizados os elementos triangulares, que podem ser lineares (nós apenas nos vértices), mini (nós nos vértices e no centróide), ou quadráticos (nós nos vértices e no meio de cada lado do triângulo). Neste problema utilizaremos elementos triangulares lineares. No problema discreto de condução de calor as incógnitas passam a ser as temperaturas nodais, ou seja, os valores do campo de temperatura avaliados nos nós da malha. Para uma malha de N nós, as temperaturas nodais serão armazenadas numa única matriz, da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde T_1 é a temperatura correspondente ao nó 1, T_2 é a temperaturas correspondente ao nó 2, e assim por diante, até o número total de nós da malha N . O Método de Elementos Finitos transforma a equação diferencial governante do problema em um sistema de equações algébricas que podemos representar por

$$\mathbf{KT} = \mathbf{F} \quad (5.21)$$

onde \mathbf{K} é a matriz dos coeficientes, em geral denominada matriz de rigidez, de ordem $N \times N$, e \mathbf{F} é a matriz coluna de termos independentes, em geral denominada vetor de forças, de ordem $N \times 1$. \mathbf{T} é a matriz (5.20).

A essência do MEF baseia-se na idéia, comum na engenharia, de resolver um problema complexo dividindo-o em problemas menores e simples. Veremos agora, na formulação do elemento finito, que a equação (5.19) é resolvida isoladamente para cada elemento, de maneira a compor uma aproximação para a solução do problema original dado por (5.10) e (5.11).

5.2.3 – formulação do elemento finito triangular linear

O elemento finito triangular linear é um dos mais simples e caracteriza-se, como já foi dito, por possuir nós apenas nos vértices. A partir dos valores das temperaturas nos vértices do triângulo pode-se calcular a temperatura em qualquer ponto do elemento por interpolação linear.

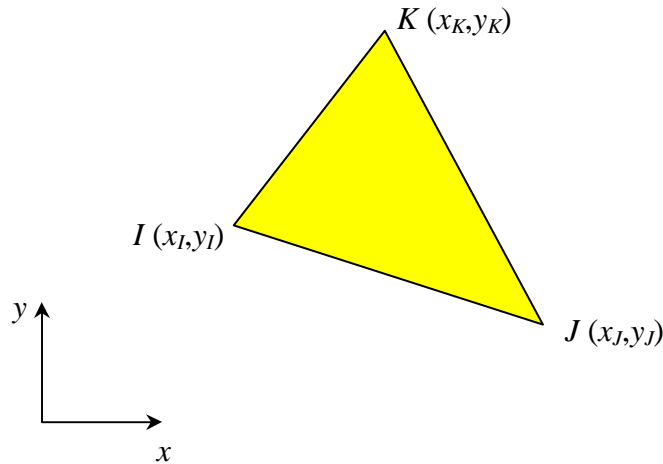


Figura 5.5 – elemento triangular linear, com referência ao sistema de eixos cartesianos.

No elemento triangular, a matriz de incógnitas é organizada da seguinte forma:

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} T_I \\ T_J \\ T_K \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

onde T_I , T_J e T_K são as temperaturas nos nós I , J e K , respectivamente.

5.2.4 – Funções de forma do elemento:

O MEF provê uma solução aproximada para cada nó da malha. Como já dissemos, a temperatura no interior de cada elemento, numa malha de elementos triangulares lineares, pode ser facilmente obtida por interpolação linear. A seguinte relação permite o cálculo da temperatura interpolada em qualquer ponto do triângulo:

$$T = \mathbf{x}\mathbf{a} \quad (5.23)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

a_1 , a_2 e a_3 são constantes a serem determinadas. A matriz 3×1 \mathbf{a} pode ser calculada através da imposição do valor da temperatura em cada nó, ou seja

$$\begin{aligned} T(x_I, y_I) &= a_1 + a_2 x_I + a_3 y_I = T_I \\ T(x_J, y_J) &= a_1 + a_2 x_J + a_3 y_J = T_J \\ T(x_K, y_K) &= a_1 + a_2 x_K + a_3 y_K = T_K \end{aligned} \quad (5.26)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_I \\ T_J \\ T_K \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Numa notação mais compacta temos

$$\mathbf{Ga} = \mathbf{T}^e \quad (5.28)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

que é a matriz que contém as coordenadas dos nós do elemento. A matriz de constantes \mathbf{a} é, portanto, calculada por

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{T}^e \quad (5.30)$$

sendo

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\det(\mathbf{G})} \begin{bmatrix} x_J y_K - x_K y_J & x_K y_I - x_I y_K & x_I y_J - x_J y_I \\ y_J - y_K & y_K - y_I & y_I - y_J \\ x_K - x_J & x_I - x_K & x_J - x_I \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Substituindo a equação (5.30) na equação (5.23) chegamos a

$$\mathbf{T} = \mathbf{x} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{T}^e \quad (5.32)$$

ou ainda

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \mathbf{T}^e \quad (5.33)$$

onde

$$\mathbf{N} = \mathbf{x} \mathbf{G}^{-1} \quad (5.34)$$

Considerando a equação (5.31) e desenvolvendo o produto acima, temos

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

onde

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A_t} [(x_J y_K - x_K y_J) + (y_J - y_K)x + (x_K - x_J)y] \\ N_2 &= \frac{1}{2A_t} [(x_K y_I - x_I y_K) + (y_K - y_I)x + (x_I - x_K)y] \\ N_3 &= \frac{1}{2A_t} [(x_I y_J - x_J y_I) + (y_I - y_J)x + (x_J - x_I)y] \end{aligned} \quad (5.36)$$

\mathbf{N} é a matriz que contém as funções de interpolação dos graus de liberdade nodais, isto é, as temperaturas nodais T_I , T_J e T_K . Esta matriz é usualmente denominada matriz de funções de forma.

5.2.5 – Derivada das funções de forma do elemento

As derivadas do campo de temperatura, na formulação do elemento finito, podem ser facilmente determinadas a partir da equação (5.33) e representadas por

$$\text{grad}(T) = \text{grad}(\mathbf{N}\mathbf{T}^e) = \mathbf{B}\mathbf{T}^e \quad (5.37)$$

De maneira análoga ao campo de temperatura, a função de teste $\hat{w}(x, y)$ é calculada, dentro do elemento, por

$$w = \mathbf{N}\mathbf{w}^e \quad (5.38)$$

sendo

$$\mathbf{w}^e = \begin{bmatrix} w_I \\ w_J \\ w_K \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

E o gradiente de w é calculado por

$$\text{grad}(w) = \text{grad}(\mathbf{N}\mathbf{w}^e) = \mathbf{B}\mathbf{w}^e \quad (5.40)$$

Tanto para a temperatura quanto para a função teste, a matriz \mathbf{B} é tal que

$$\mathbf{B} = \text{grad}(\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Calculando as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas, chega-se a

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A_t} \begin{bmatrix} y_J - y_K & y_K - y_I & y_I - y_J \\ x_K - x_J & x_I - x_K & x_J - x_I \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

5.2.6 – Forma fraca por elemento com as temperaturas nodais

A equação (5.19), forma fraca do problema original, tomada para cada elemento é representada por

$$\int_{\Omega^e} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + w \dot{q} \right) d\Omega - \int_{\Gamma^e} w (hT - hT_\infty) d\Gamma = 0 \quad (5.43)$$

ou por

$$\int_{\Omega^e} \text{grad} w (k \text{grad} T) d\Omega + \int_{\Gamma^e} w h T d\Gamma - \int_{\Gamma^e} w h T_\infty d\Gamma - \int_{\Omega^e} w \dot{q} d\Omega = 0 \quad (5.44)$$

Agora, inserindo em (5.44) as equações (5.33), (5.37), (5.38) e (5.40), chegamos a

$$\int_{\Omega^e} (\mathbf{B} \mathbf{w}^e)^T (k \mathbf{B} \mathbf{T}^e) d\Omega + \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N} \mathbf{w}^e)^T h (\mathbf{N} \mathbf{T}^e) d\Gamma - \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N} \mathbf{w}^e)^T h T_\infty d\Gamma - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N} \mathbf{w}^e)^T \dot{q} d\Omega = 0 \quad (5.45)$$

Levando em conta que \mathbf{T}^e e \mathbf{w}^e são constantes em Ω^e e Γ^e , podemos reescrever a equação (5.45) da seguinte forma:

$$(\mathbf{w}^e)^T \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} k d\Omega \mathbf{T}^e + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h d\Gamma \mathbf{T}^e - \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T h T_\infty d\Gamma - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \dot{q} d\Omega \right] = 0 \quad (5.46)$$

Como \mathbf{w}^e é completamente arbitrário, a equação acima resulta em

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} k d\Omega \mathbf{T}^e + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h d\Gamma \mathbf{T}^e - \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T h T_\infty d\Gamma - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \dot{q} d\Omega = 0 \quad (5.47)$$

Utilizando a forma compacta apresentada em (5.21) tomada por elemento temos

$$\mathbf{K}^e \mathbf{T}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.49)$$

onde

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} k dA + \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h dL \quad (5.50)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \dot{q} dA + \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T h T_\infty dL \quad (5.51)$$

A seguir resolveremos cada uma das integrais. Depois de calculadas o sistema de equações algébricas estará pronto para ser resolvido.

Cálculo de $\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} k dA$:

Como \mathbf{B} depende apenas das coordenadas dos vértices, que são constantes por elemento, a integral acima pode ser calculada por

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} k dA = \mathbf{B}^T \mathbf{B} k A_e \quad (5.52)$$

Vale lembrar que a matriz \mathbf{B} é facilmente calculada pela equação (5.42). Note que, tendo em vista que \mathbf{B} é uma matriz de ordem 2×3 , a ordem do produto $\mathbf{B}^T \mathbf{B} k A_e$ será, evidentemente, 3×3 .

Cálculo de $\int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h dL$:

Vamos renomear alguns elementos, apenas para facilitar o desenvolvimento.

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (5.53)$$

Primeiro elemento (N_1):

$$N_1 = a_1 + b_1 x + c_1 y \quad (5.54)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2A_t} (x_J y_K - x_K y_J) \\ b_1 &= \frac{1}{2A_t} (y_J - y_K) \\ c_1 &= \frac{1}{2A_t} (x_K - x_J) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Segundo elemento (N_2):

$$N_2 = a_2 + b_2 x + c_2 y \quad (5.56)$$

onde

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2A_t} (x_K y_I - x_I y_K) \\ b_2 &= \frac{1}{2A_t} (y_K - y_I) \\ c_2 &= \frac{1}{2A_t} (x_I - x_K) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Terceiro elemento (N_3):

$$N_3 = a_3 + b_3 x + c_3 y \quad (5.58)$$

onde

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{2A_t}(x_I y_J - x_J y_I) \\
b_3 &= \frac{1}{2A_t}(y_I - y_J) \\
c_3 &= \frac{1}{2A_t}(x_J - x_I)
\end{aligned} \tag{5.59}$$

A matriz resultante da multiplicação $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$ é dada por

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

Generalizando cada elemento do produto acima para $N_i N_j$, teremos, para cada posição da matriz $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$, expressões da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&(a_i + b_i x + c_i y)(a_j + b_j x + c_j y) = \\
&= a_i a_j + (a_i b_j + a_j b_i)x + (a_i c_j + a_j c_i)y + (b_j c_i + b_i c_j)xy + b_i b_j x^2 + c_i c_j y^2
\end{aligned} \tag{5.61}$$

O domínio da integral

$$\int_{\partial \Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h dL \tag{5.62}$$

será sempre um segmento de reta – um lado de elemento triangular que compõe o contorno da malha. As figuras a seguir mostram uma malha de elementos triangulares e um elemento em destaque.

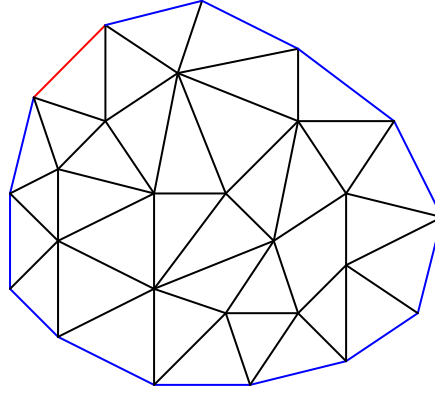


Figura 5.6 – malha triangular. Os lados em azul e o lado em vermelho destacam o contorno da malha.

O triângulo com lado grifado em vermelho é mostrado com detalhes na próxima figura.

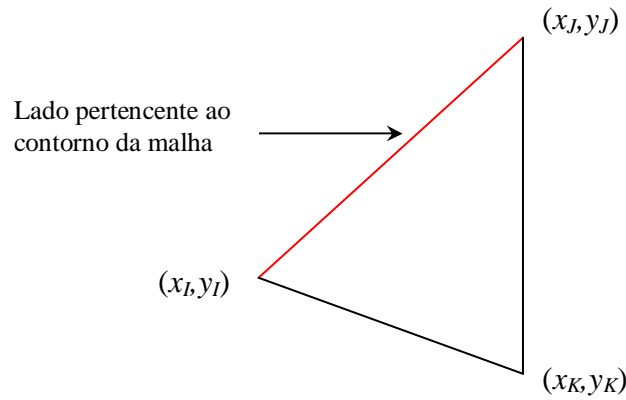


Figura 5.7 – elemento triangular com lado compondo o contorno, mostrando as coordenadas dos vértices.

A integral de linha (5.62) é calculada sobre o lado em vermelho, que possui um comprimento S . Substituindo (5.61) em (5.62), ficamos com a seguinte integral:

$$\int_0^S [a_i a_j + (a_i b_j + a_j b_i)x + (a_i c_j + a_j c_i)y + (b_j c_i + b_i c_j)xy + b_i b_j x^2 + c_i c_j y^2] h dL = \quad (5.63)$$

$$= h(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

com

$$I_1 = \int_0^S a_i a_j dL \quad (5.64)$$

$$I_2 = \int_0^S (a_i b_j + a_j b_i) x dL \quad (5.65)$$

$$I_3 = \int_0^S (a_i c_j + a_j c_i) y dL \quad (5.66)$$

$$I_4 = \int_0^S (b_j c_i + b_i c_j) x y dL \quad (5.67)$$

$$I_5 = \int_0^S b_i b_j x^2 dL \quad (5.68)$$

$$I_6 = \int_0^S c_i c_j y^2 dL \quad (5.69)$$

Fazendo $\Delta x = x_J - x_I$ e $\Delta y = y_J - y_I$, e parametrizando as coordenadas x e y da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= s \frac{\Delta x}{S} + x_I \\ y &= s \frac{\Delta y}{S} + y_I \end{aligned} \quad (5.70)$$

as soluções das integrais acima são dadas por

$$I_1 = a_i a_j S \quad (5.71)$$

$$I_2 = (a_i b_j + a_j b_i) \left(x_I + \frac{\Delta x}{2} \right) S \quad (5.72)$$

$$I_3 = (a_i c_j + a_j c_i) \left(y_I + \frac{\Delta y}{2} \right) S \quad (5.73)$$

$$I_4 = (b_i c_j + b_j c_i) \left(x_I y_I + \frac{x_I \Delta y}{2} + \frac{y_I \Delta x}{2} + \frac{\Delta x \Delta y}{3} \right) S \quad (5.74)$$

$$I_5 = b_i b_j \left(x_l^2 + x_l \Delta x + \frac{\Delta x^2}{3} \right) S \quad (5.75)$$

$$I_6 = c_i c_j \left(y_l^2 + y_l \Delta y + \frac{\Delta y^2}{3} \right) S \quad (5.76)$$

Cálculo de $\int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T h T_\infty dL$:

Utilizando a mesma representação por índices utilizada na integral (5.62), esta integral representa três integrais da seguinte forma:

$$\int_0^S (a_i + b_i x + c_i y) h T_\infty dL \quad (5.77)$$

com $i = 1, 2, 3$. Os índices i correspondem aos elementos da matriz $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3]$. A solução para cada N_i é, então, dada por

$$\int_0^S (a_i + b_i x + c_i y) h T_\infty dL = h T_\infty S \left(\frac{b_i \Delta x}{2} + \frac{c_i \Delta y}{2} + b_i x_l + c_i y_l + a_i \right) \quad (5.78)$$

Cálculo de $\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \dot{q} dA$:

Esta integral está definida sobre toda a área do elemento triangular. A integral sobre o triângulo pode ser calculada a partir da soma das integrais sob cada lado do triângulo. A próxima figura ilustra a idéia.

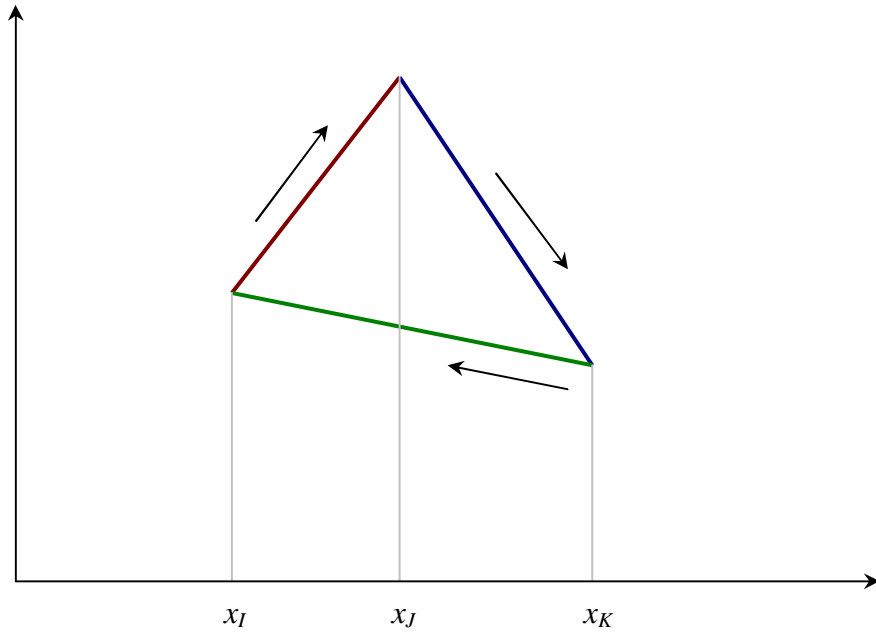


Figura 5.8 – elemento triangular, com as indicações dos sentidos de integração.

A área compreendida dentro do triângulo é igual a soma das áreas sob cada um dos lados dele, se mantido o sentido de integração. Com isso, podemos escrever $\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \dot{q} dA$

como sendo

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \dot{q} dA = \int_{x_I}^{x_J} \int_{y_I}^{\hat{y}_1(x)} \mathbf{N}^T \dot{q} dy dx + \int_{x_J}^{x_K} \int_{y_J}^{\hat{y}_2(x)} \mathbf{N}^T \dot{q} dy dx + \int_{x_K}^{x_I} \int_{y_K}^{\hat{y}_3(x)} \mathbf{N}^T \dot{q} dy dx \quad (5.79)$$

Lembrando que cada integral, na prática, são três integrais, cada uma referente a um elemento N_i da matriz \mathbf{N}^T . A função que atua como limite superior da integral interna da primeira parcela de (5.79), denotada por $\hat{y}_1(x)$, é determinada por, levando em conta que os pontos inicial e final da reta são (x_I, y_I) e (x_J, y_J) ,

$$\hat{y}_1(x) = \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} x + y_I - \frac{y_J - y_I}{x_J - x_I} x_I \quad (5.80)$$

ou, numa forma mais compacta,

$$\hat{y}_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1 \quad (5.81)$$

onde α_1 e β_1 representam os coeficientes angular e linear da reta, respectivamente. As funções $\hat{y}_2(x)$ e $\hat{y}_3(x)$ são obtidas de maneira análoga. Então, para cada elemento N_i , teremos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} N_i \dot{q} dA = & \int_{x_I}^{x_J} \int_{y_I}^{\hat{y}_1(x)} (a_i + b_i x + c_i y) \dot{q} dy dx + \\ & + \int_{x_J}^{x_K} \int_{y_J}^{\hat{y}_2(x)} (a_i + b_i x + c_i y) \dot{q} dy dx + \int_{x_K}^{x_I} \int_{y_K}^{\hat{y}_3(x)} (a_i + b_i x + c_i y) \dot{q} dy dx \end{aligned} \quad (5.82)$$

Finalmente, chegamos à solução de cada parcela acima:

$$\begin{aligned} \int_{x_I}^{x_J} \int_{y_I}^{\hat{y}_1(x)} (a_i + b_i x + c_i y) \dot{q} dy dx = & a_i \dot{q} \left[\frac{\alpha(x_J^2 - x_I^2)}{2} + \beta(x_J^2 - x_I^2) \right] + \\ & + b_i \dot{q} \left[\frac{\alpha(x_J^3 - x_I^3)}{3} + \frac{\beta(x_J^2 - x_I^2)}{2} \right] + \frac{c_i \dot{q}}{2} \left[\frac{\alpha^2(x_J^3 - x_I^3)}{3} + \alpha\beta(x_J^2 - x_I^2) + \beta^2(x_J - x_I) \right] \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_J}^{x_K} \int_{y_J}^{\hat{y}_2(x)} (a_i + b_i x + c_i y) \dot{q} dy dx = & a_i \dot{q} \left[\frac{\alpha(x_K^2 - x_J^2)}{2} + \beta(x_K^2 - x_J^2) \right] + \\ & + b_i \dot{q} \left[\frac{\alpha(x_K^3 - x_J^3)}{3} + \frac{\beta(x_K^2 - x_J^2)}{2} \right] + \frac{c_i \dot{q}}{2} \left[\frac{\alpha^2(x_K^3 - x_J^3)}{3} + \alpha\beta(x_K^2 - x_J^2) + \beta^2(x_K - x_J) \right] \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_K}^{x_I} \int_{y_K}^{\hat{y}_3(x)} (a_i + b_i x + c_i y) \dot{q} dy dx = & a_i \dot{q} \left[\frac{\alpha(x_I^2 - x_K^2)}{2} + \beta(x_I^2 - x_K^2) \right] + \\ & + b_i \dot{q} \left[\frac{\alpha(x_I^3 - x_K^3)}{3} + \frac{\beta(x_I^2 - x_K^2)}{2} \right] + \frac{c_i \dot{q}}{2} \left[\frac{\alpha^2(x_I^3 - x_K^3)}{3} + \alpha\beta(x_I^2 - x_K^2) + \beta^2(x_I - x_K) \right] \end{aligned} \quad (5.85)$$

5.2.7 – Atribuição das temperaturas nodais aos elementos da malha

Em Souza [8] é apresentada a forma de atribuir (5.50) e (5.51) aos elementos corretos na malha através da matriz de incidência, que constitui uma etapa fundamental do método de elementos finitos.

Agora vejamos alguns problemas de condução de calor resolvidos pelo MEF.

5.2.8 – Exemplo 1

Consideremos o problema de condução de calor com os seguintes parâmetros físicos:

$$k = 0,5$$

$$\dot{q} = 5$$

$$h = 5$$

$$T_{\infty} = 250$$

em algum sistema de unidades. A placa possui largura e altura iguais a 2. O problema é matematicamente descrito pela equação

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{5}{2} = 0 \quad \text{em } 0 < x < L \text{ e } 0 < y < H \quad (5.86)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{5}{2}(T - 250) & \text{para } x = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{5}{2}(T - 250) & \text{para } x = L \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{5}{2}(T - 250) & \text{para } y = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -\frac{5}{2}(T - 250) & \text{para } y = H \end{aligned} \quad (5.87)$$

O domínio foi discretizado numa malha de elementos triangulares, conforme a figura 5.9.

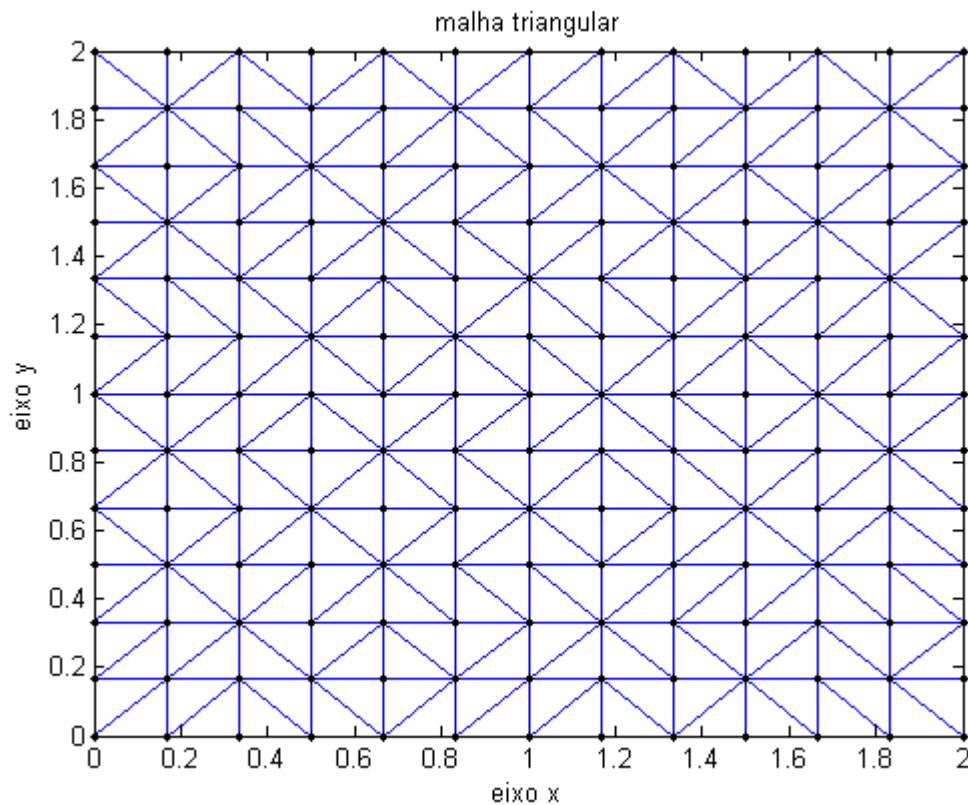


Figura 5.9 – Malha de elementos finitos. Os lados pintados de preto são os que compõem o contorno. Os nós da malha estão representados pelos pontos pretos. Note que há apenas três nós por triângulo, característica do elemento linear.

O campo de temperatura encontrado pelo MEF como solução aproximada é representado pela figura a seguir.

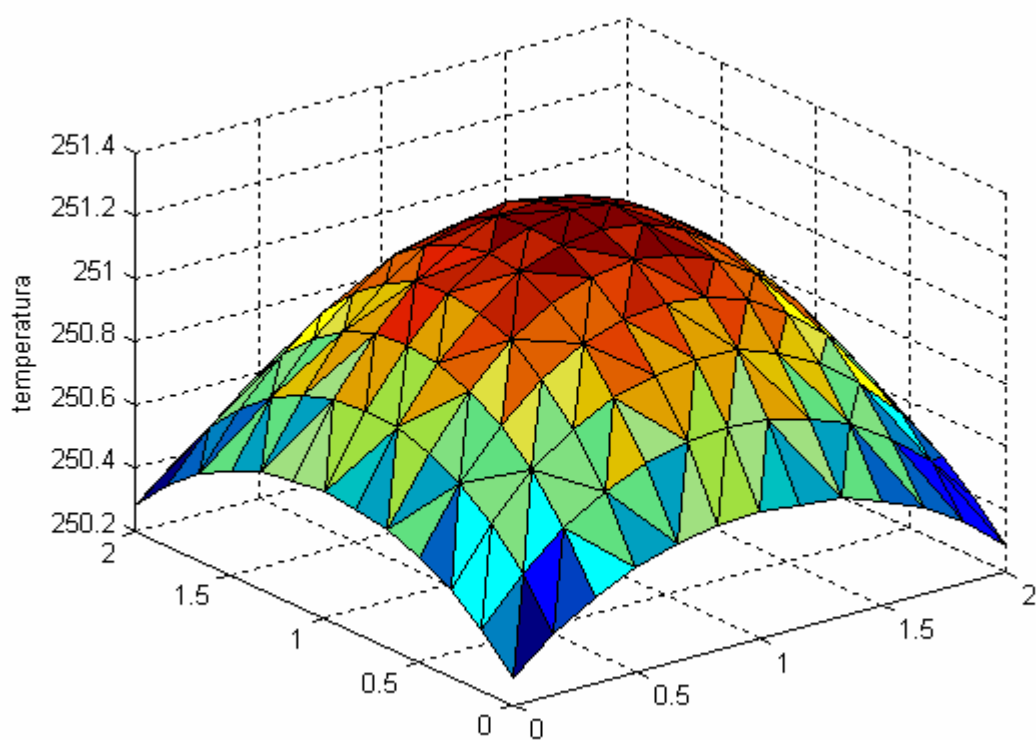


Figura 5.10 – Solução obtida pelo MEF.

Comparando a solução obtida por elementos finitos com a solução obtida por diferenças finitas, a qual é mostrada na figura 5.11, é fácil perceber que ambos procedimentos chegaram a respostas praticamente iguais.

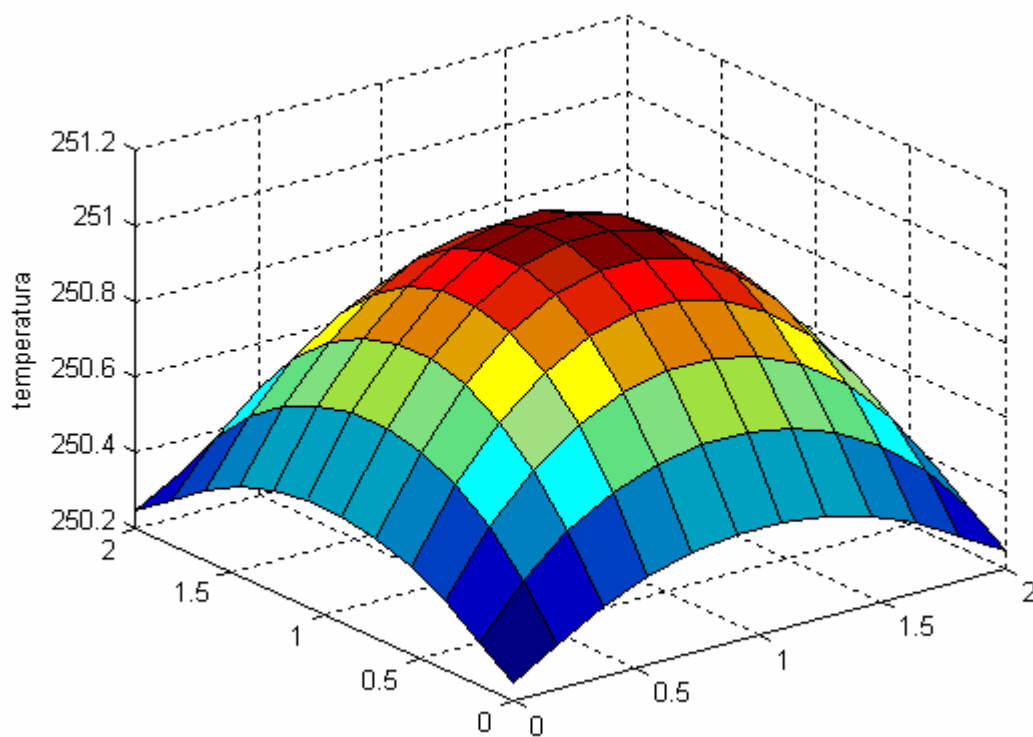


Figura 5.11 – Campo de temperatura obtido pelo MDF. Foi utilizada uma malha com 12 nós na direção x e na direção y .

5.2.9 – Exemplo 2

Resolvamos, agora, um outro problema, com as mesmas constantes utilizadas no exemplo anterior, porém num domínio diferente, discretizado na malha apresentada na figura 5.12.

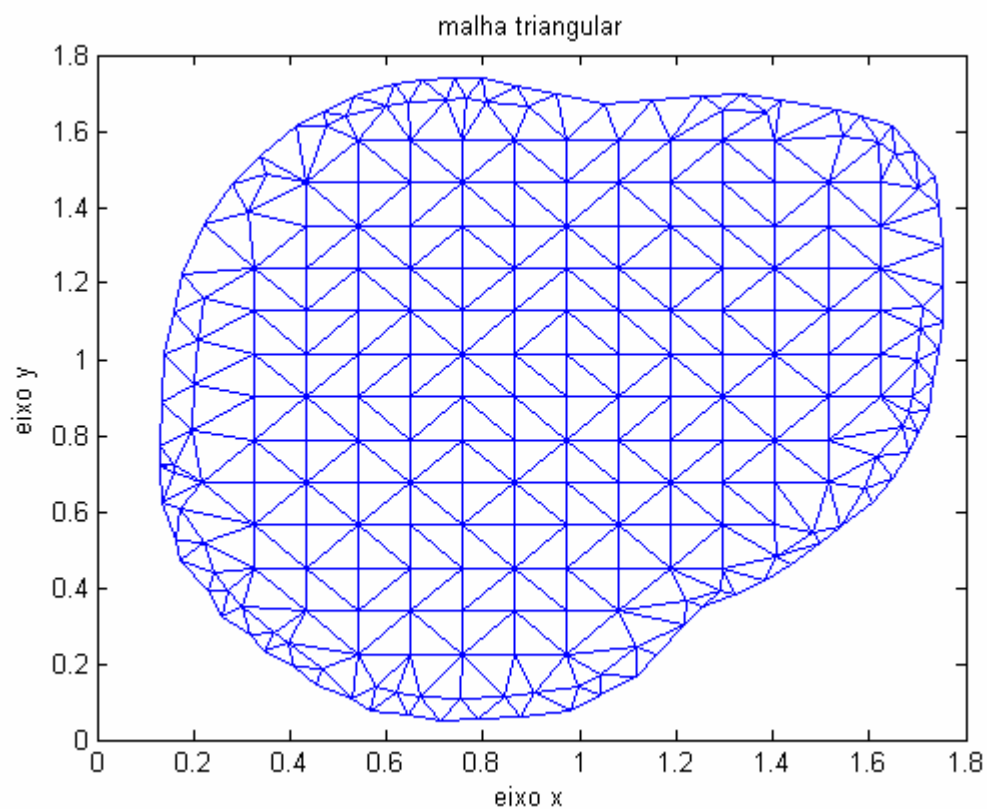


Figura 5.12 – Malha de elementos finitos discretizando domínio com contorno irregular

A próxima figura mostra o campo de temperatura encontrado pelo MEF.

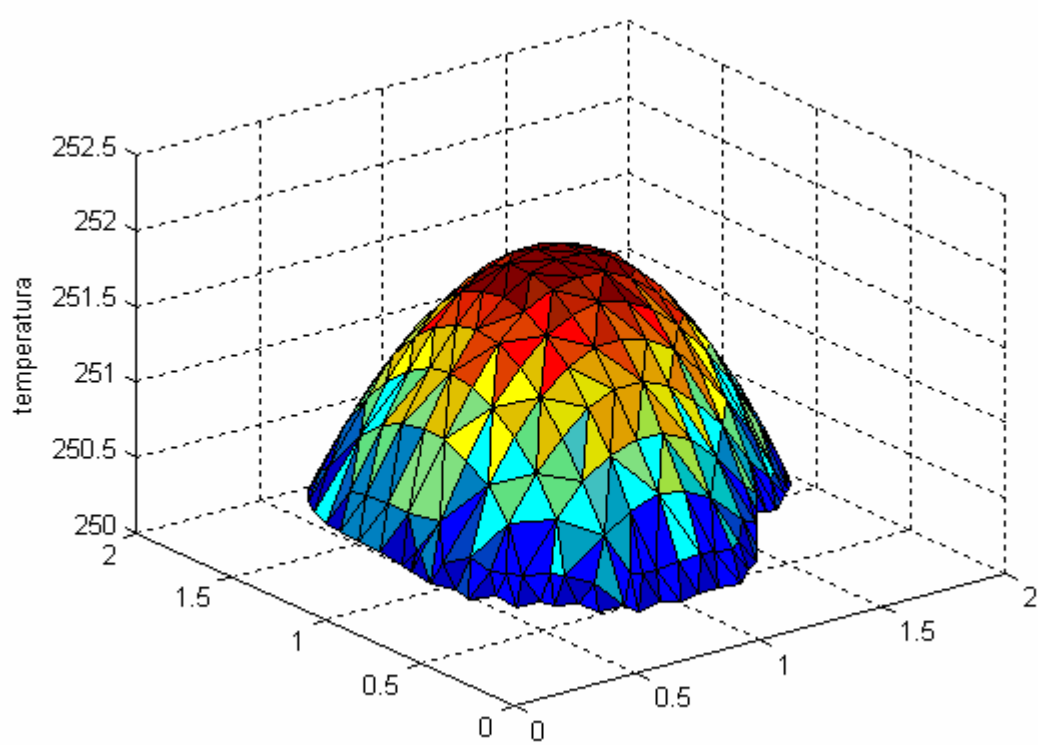


Figura 5.13 – Solução numérica do exemplo 2.

6 – SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

O procedimento proposto neste trabalho consiste na busca da solução através de uma seqüência de problemas lineares, onde o limite da seqüência é a solução do problema original (não-linear). O método fornece a solução exata do problema, desde que se conheça o limite exato da seqüência. Entretanto, há casos em que os elementos da seqüência, constituídos de EDP's lineares sujeitas a condições de contorno não-lineares, são restritos com relação aos recursos analíticos de solução. Uma alternativa para tais situações são os métodos numéricos, apresentados no capítulo 5. Neste capítulo trataremos quatro problemas bidimensionais de transmissão de calor por condução, utilizando a lei de Newton do resfriamento como condição de contorno. Os problemas são matematicamente descritos por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot \vec{n} &= h(T - T_{\infty}) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde $k = \hat{k}(T)$, empregando o Método de Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos na resolução dos problemas lineares, elementos de cada passo do procedimento iterativo. Nos exemplos a seguir consideraremos a seguinte função da condutividade térmica com a temperatura:

$$k = \begin{cases} k_1 = \text{constante} & \text{para } T < T_0 \\ k_2 = \text{constante} & \text{para } T \geq T_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Em todos os exemplos empregaremos o procedimento iterativo proposto neste trabalho, usando a transformada de Kirchoff e determinando a temperatura a partir da inversa da transformada. Dessa forma, conforme dito na seção 4.3, em cada elemento i da seqüência será resolvido o seguinte sistema de EDP's lineares:

$$\begin{aligned} \text{div}[\text{grad}(\Phi_i)] + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -[\text{grad}(\Phi_i)] \cdot \vec{n} &= \alpha\Phi_i + \beta_{i-1} \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (6.3)$$

com β_{i-1} determinado a partir de

$$\beta_{i-1} = h \left[\hat{f}^{-1}(\Phi_{i-1}) - T_{\infty} \right] - \alpha \Phi_{i-1} \quad (6.4)$$

Os resultados esperados são campos de temperatura com duas regiões distintas de condutividade térmica constante, divididas pela temperatura T_0 . Os valores atribuídos às constantes em cada exemplo variarão um pouco, de acordo com conveniência numérica e de visualização.

6.1 – Exemplo 1

O domínio do problema é uma placa quadrada com cinco metros de lado, trocando calor por convecção com o ambiente, que está a uma temperatura $T_{\infty} = 298$ K. O coeficiente de troca de calor por convecção h é igual a 30 W/m²K e a geração interna de energia \dot{q} é igual a 100 W/m³. A condutividade térmica, como já foi dito, é definida pela relação (6.2) e as constantes k_1 e k_2 são iguais a, respectivamente, 45 W/mK e 10 W/mK, usando $T_0 = 304$ K. Os problemas lineares da seqüência serão resolvidos por meio do MDF. O domínio é discretizado em uma malha 30×30 (900 nós) e a constante α é igual a 3. As figuras a seguir mostram a evolução da seqüência.

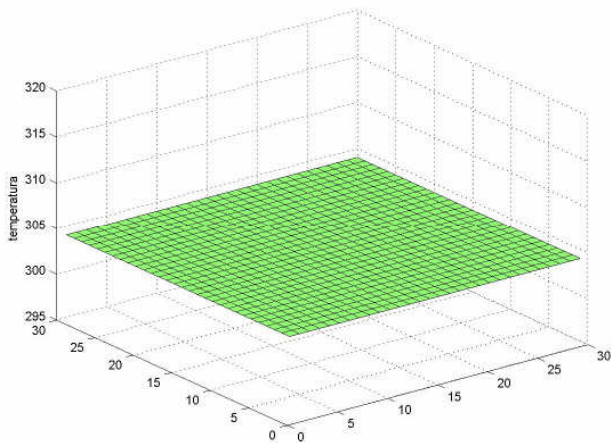


Figura 6.1 – malha de diferenças finitas.

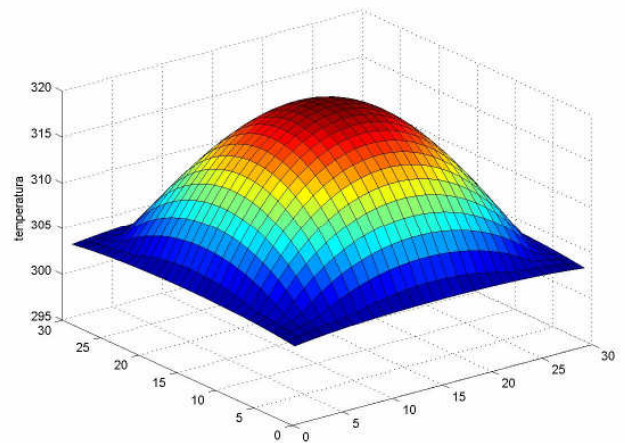


Figura 6.2 – iteração 1.

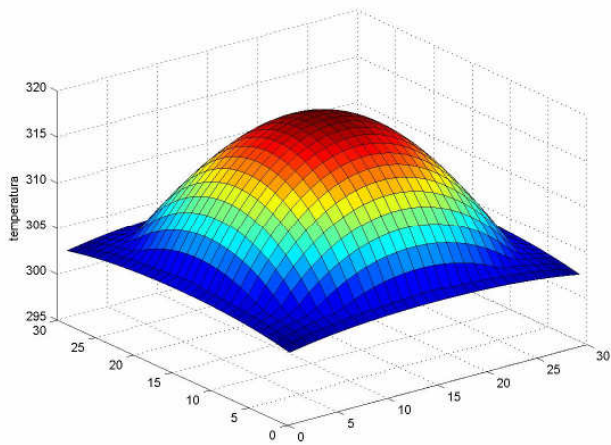


Figura 6.3 – iteração 2.

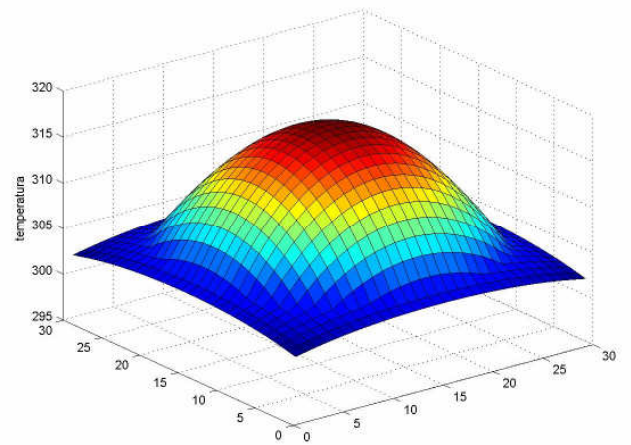


Figura 6.4 – iteração 3.

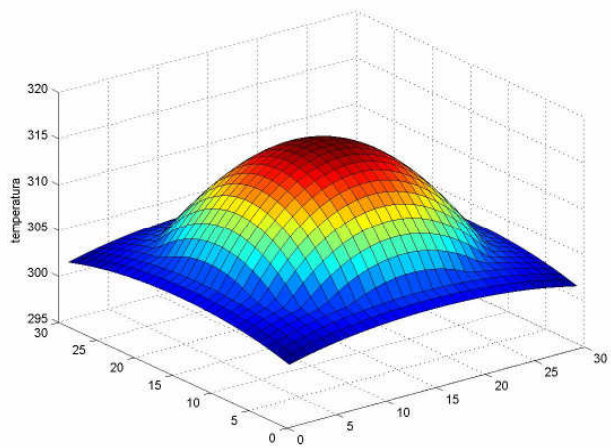


Figura 6.5 – iteração 5.

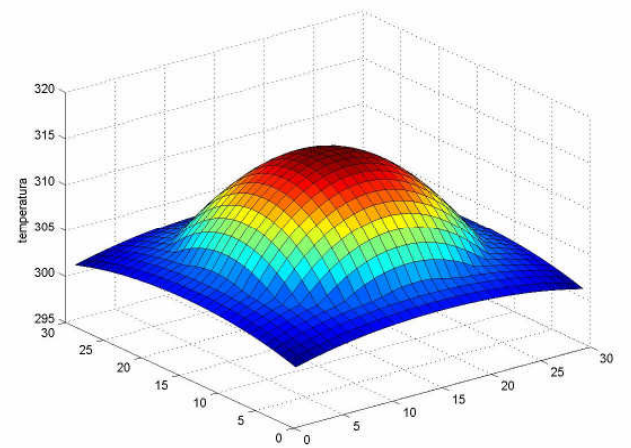


Figura 6.6 – iteração 7.

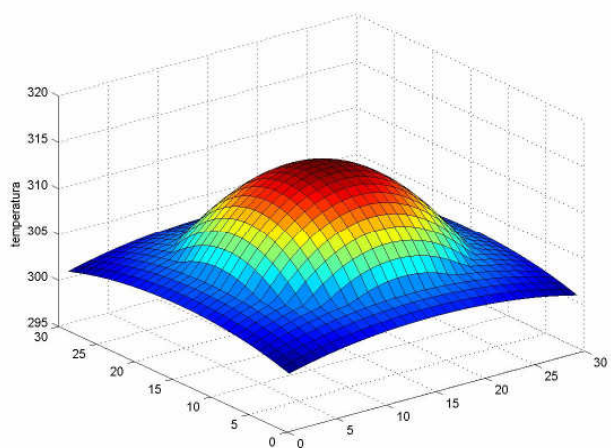


Figura 6.7 – iteração 11.

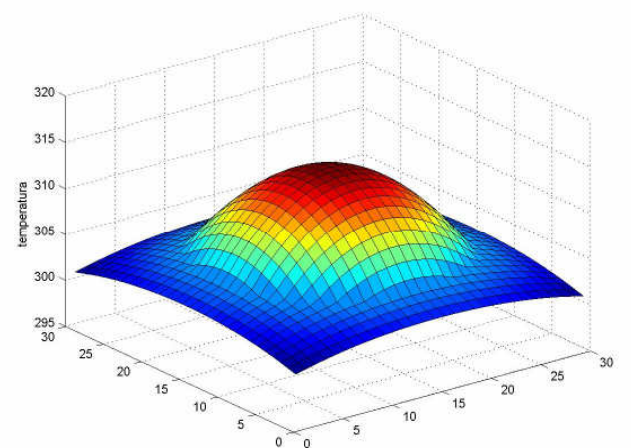


Figura 6.8 – iteração 15.

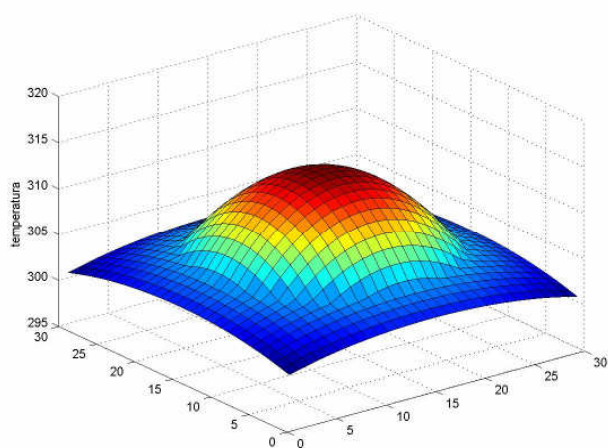


Figura 6.9 – iteração 26.

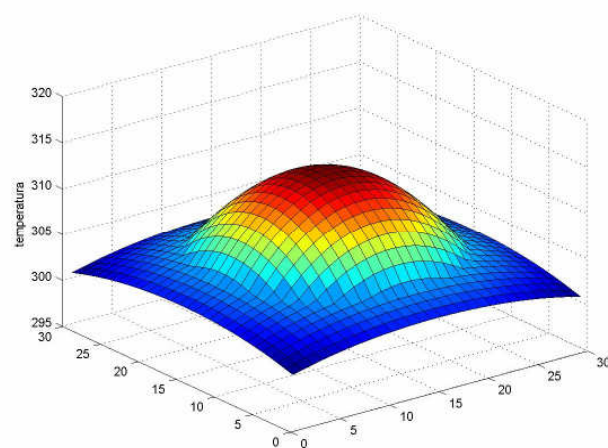


Figura 6.10 – iteração 38 (última).

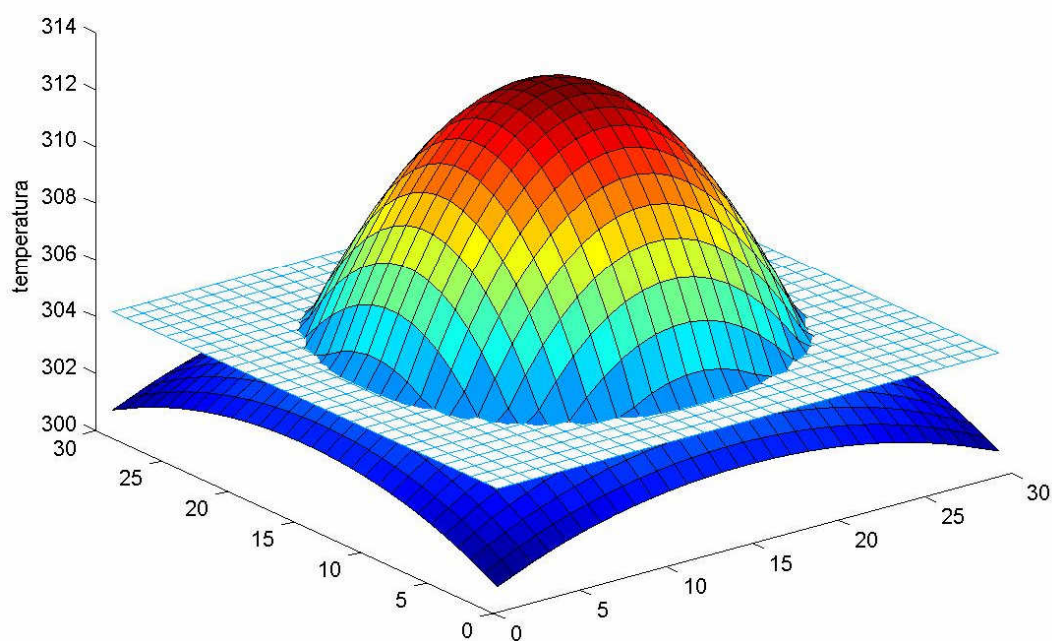


Figura 6.11 – resultado final com plano dividindo as duas regiões de condutividade térmica constante

O aspecto da distribuição de temperatura é coerente, pois mostra que a região mais interna da placa, com temperatura acima de 304K, possui os maiores gradientes de temperatura, enquanto que a região abaixo deste patamar tem os menores gradientes, o que é condizente com a função adotada para a condutividade térmica.

6.2 – Exemplo 2

Neste exemplo a transferência de calor também ocorre numa placa quadrada, porém com lados de 4m. A geração interna de energia \dot{q} e o coeficiente de troca de calor por convecção h são constantes iguais às do problema anterior, assim como a temperatura de referência T_∞ . Porém, a região de maior condutividade térmica está acima de T_0 (igual a 312K) e é igual a 8 W/mK, enquanto que a menor condutividade térmica é igual a 1 W/mK. Usaremos $\alpha = 100$ e uma malha de diferenças finitas também 30×30 . A seguir os resultados gráficos.

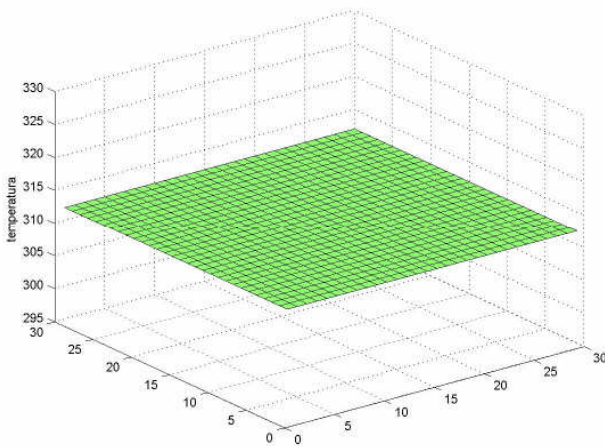


Figura 6.12 – malha de diferenças finitas.

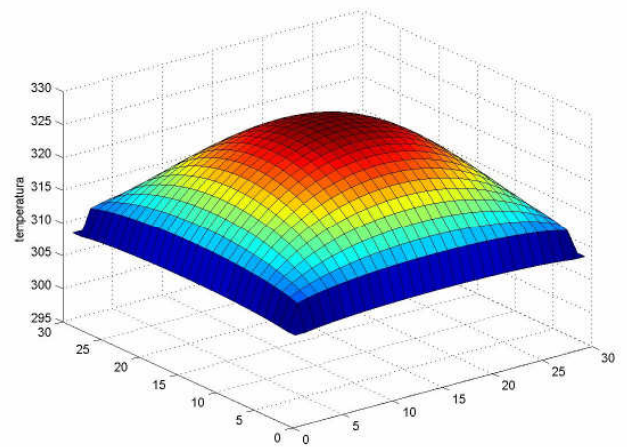


Figura 6.13 – iteração 1.

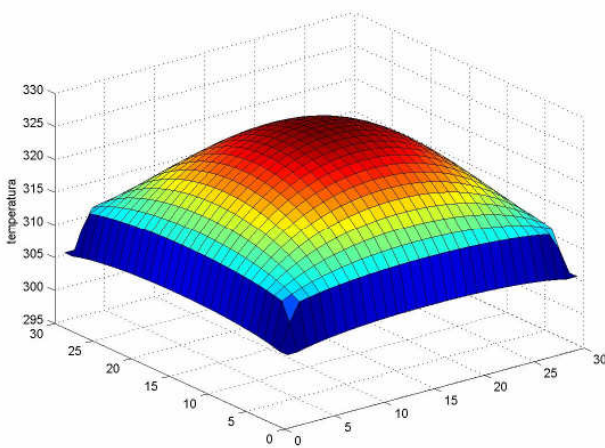


Figura 6.14 – iteração 2.

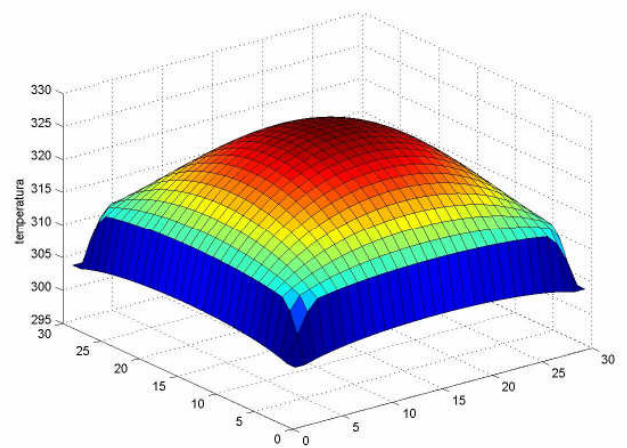


Figura 6.15 – iteração 3.

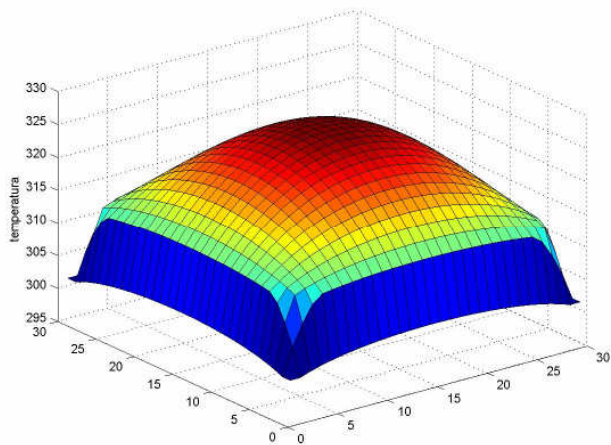


Figura 6.16 – iteração 5.

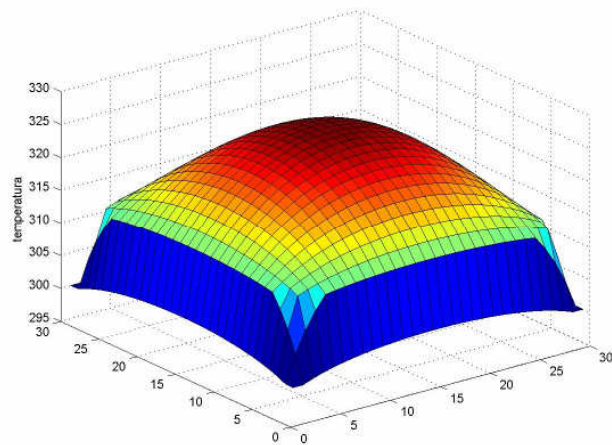


Figura 6.17 – iteração 7.

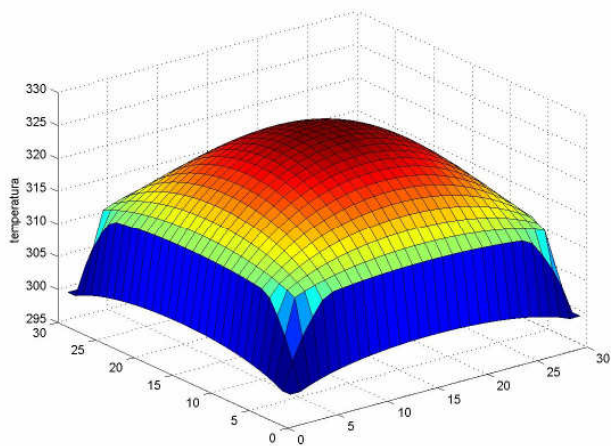


Figura 6.18 – iteração 12.

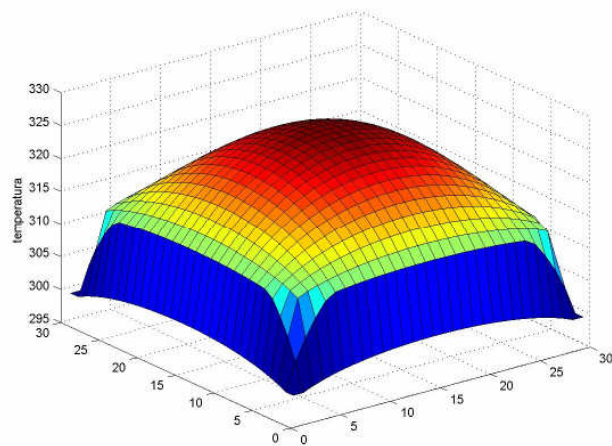


Figura 6.19 – iteração 17.

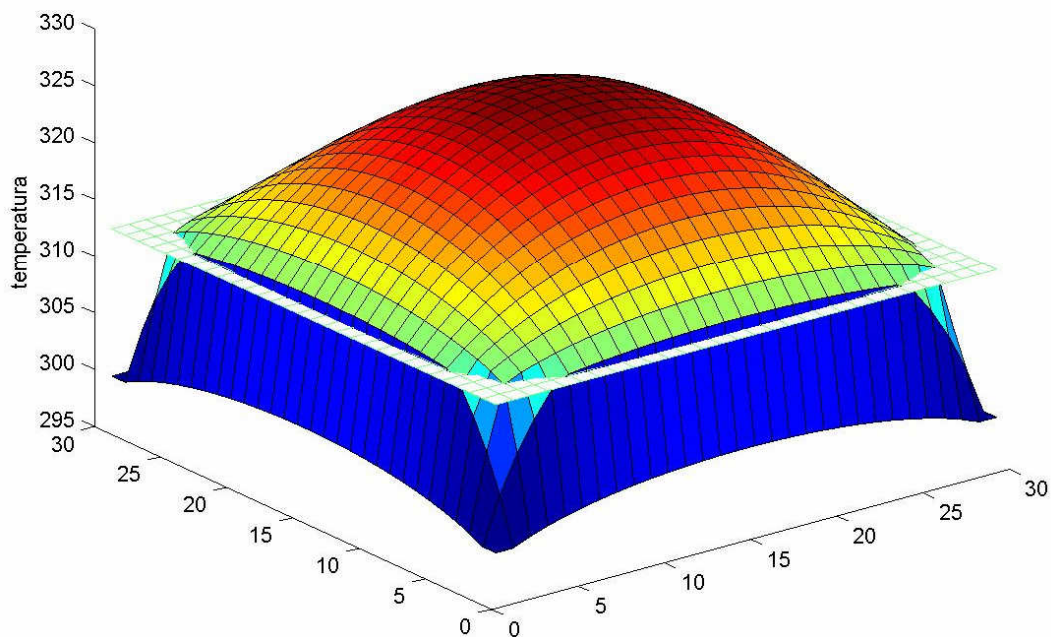


Figura 6.20 – resultado final (iteração 22).

Observando o resultado gráfico podemos concluir mais uma vez que a distribuição de temperatura está condizente com o esperado. É possível concluir ainda que, apesar da utilização de um valor bem maior para α em relação ao exemplo anterior, a seqüência convergiu até mais rapidamente do que no exemplo 1.

6.3 – Exemplo 3

Neste exemplo e no próximo aplicaremos o MEF para resolução dos problemas lineares componentes de cada elemento da seqüência. Aqui, os valores atribuídos às constantes do problema são os seguintes:

$$h = 30 \text{ W/m}^2\text{K};$$

$$T_{\infty} = 300 \text{ K};$$

$$\dot{q} = 100 \text{ W/m}^3;$$

A condutividade térmica da placa é também dada por (6.2), com $k_1 = 10 \text{ W/mK}$, $k_2 = 1 \text{ W/mK}$ e $T_0 = 304 \text{ K}$. Usando $\alpha = 20$ obtemos os seguintes resultados:

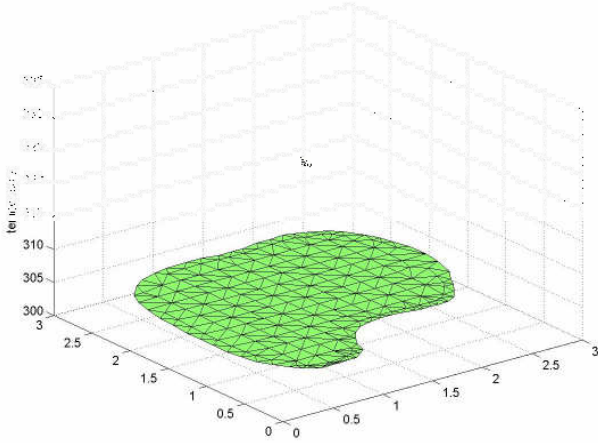


Figura 6.21 – malha de elementos finitos.

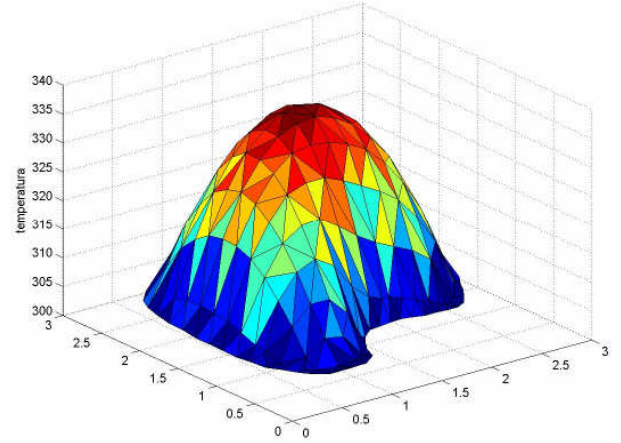


Figura 6.22 – iteração 1.

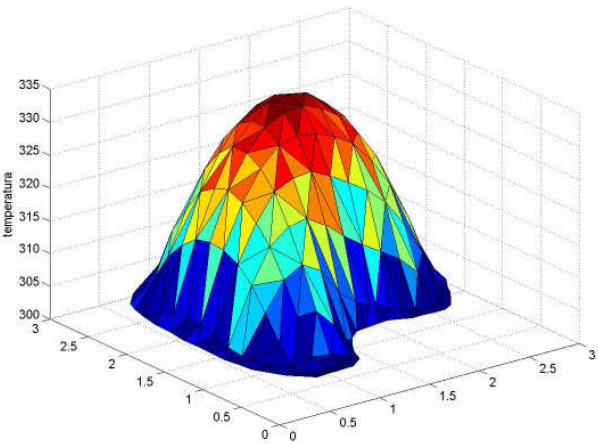


Figura 6.23 – iteração 2.

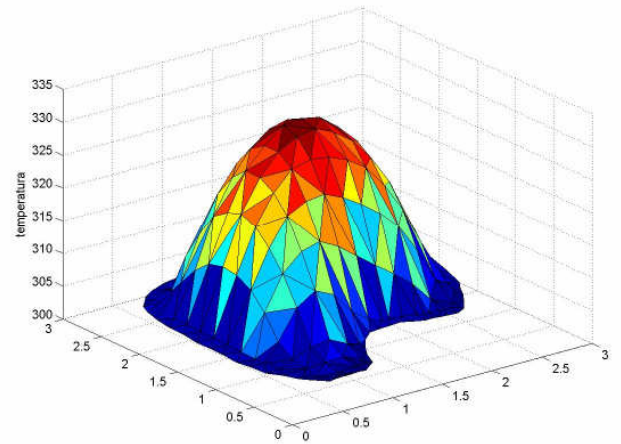


Figura 6.24 – iteração 4.

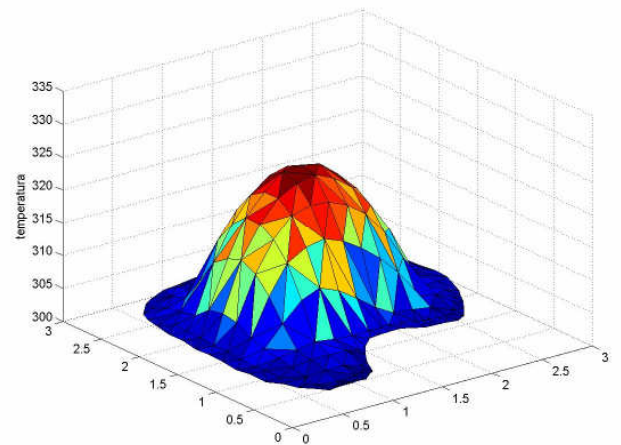
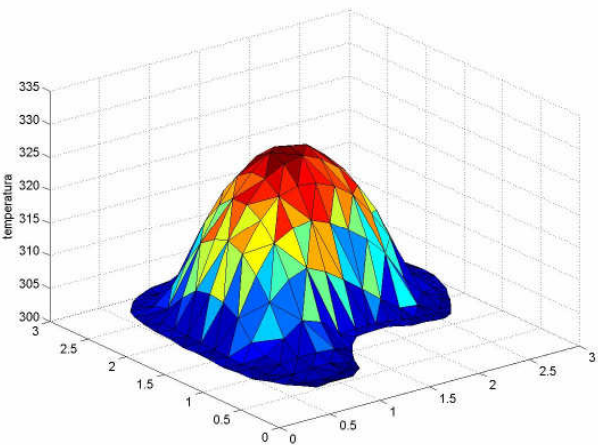


Figura 6.25 – iteração 7.

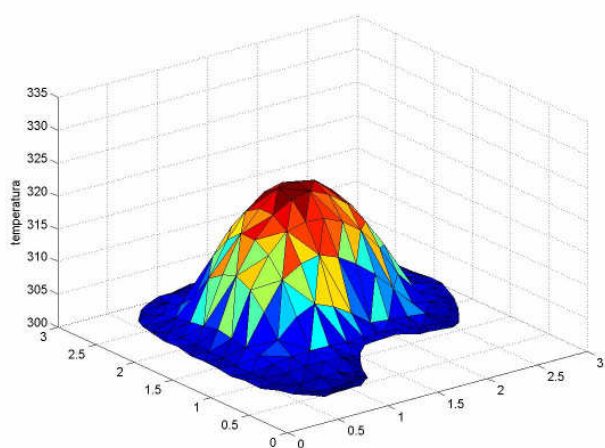


Figura 6.26 – iteração 11.

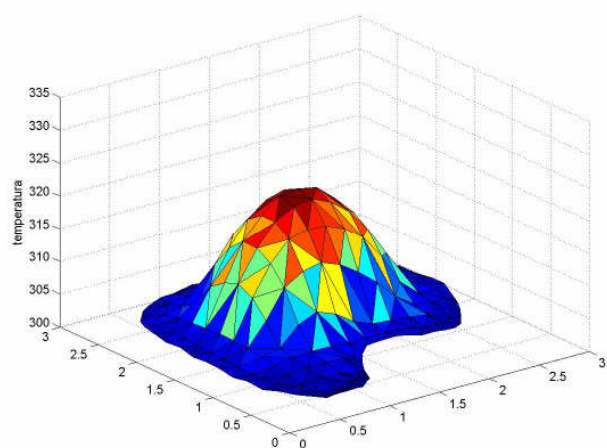


Figura 6.27 – iteração 15.

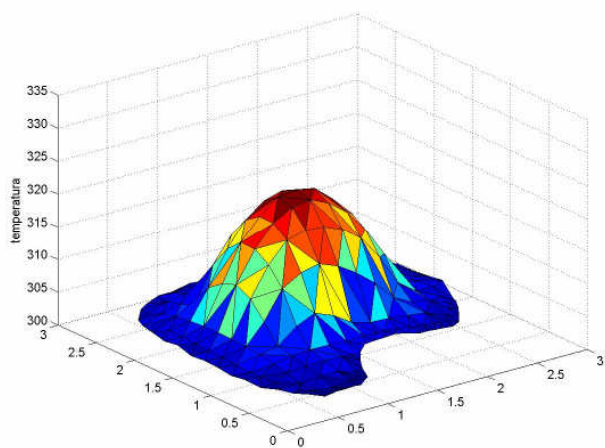


Figura 6.28 – iteração 22.

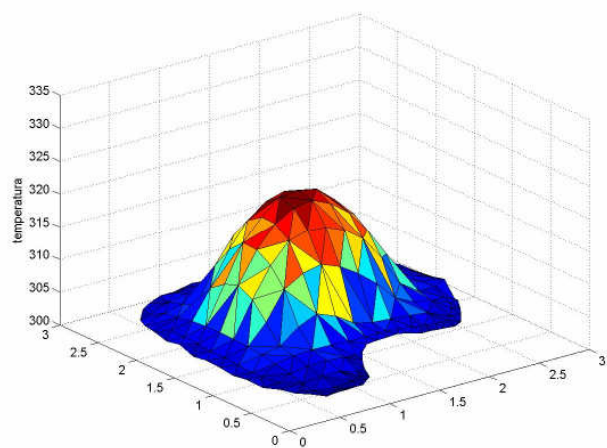


Figura 6.29 – iteração 32.

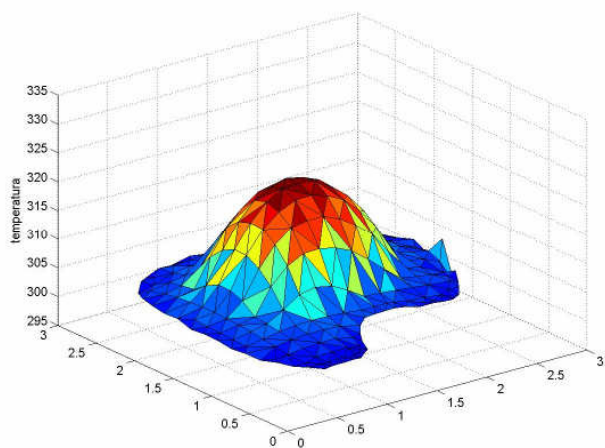


Figura 6.30 – iteração 42.

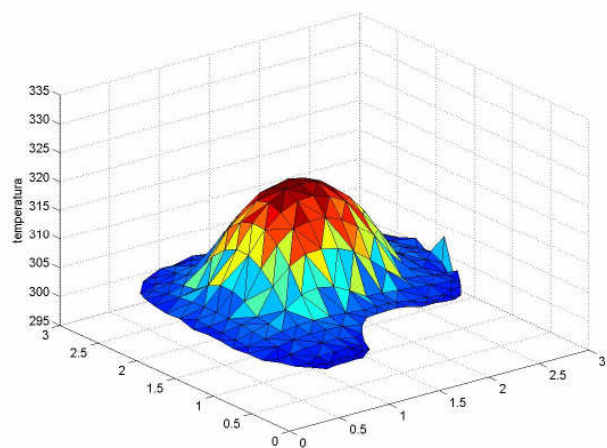


Figura 6.31 – iteração 52.



Figura 6.32 – iteração 62.



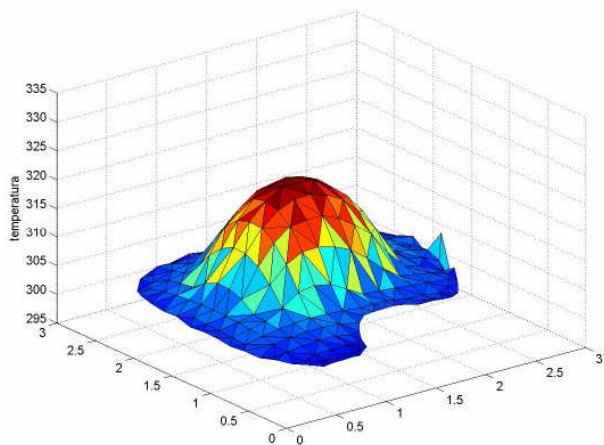


Figura 6.33– iteração 72.

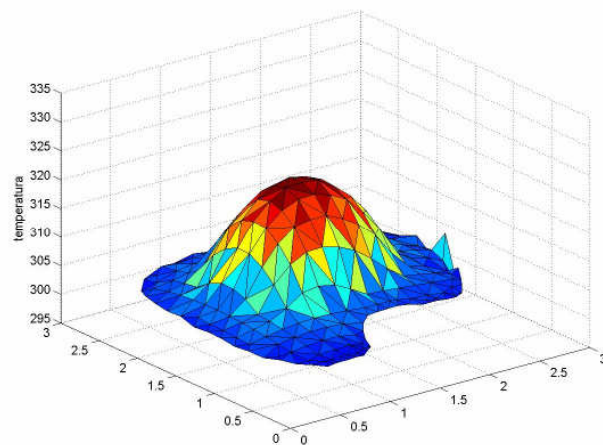


Figura 6.34– iteração 87 (resultado final).

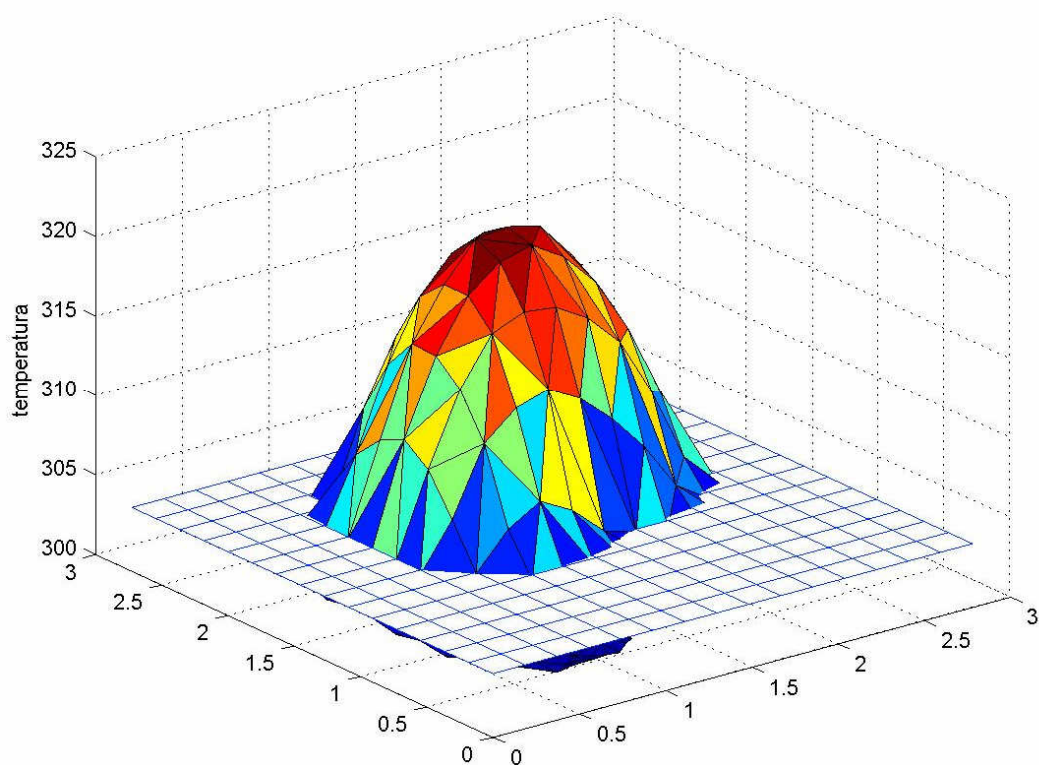


Figura 6.35 – resultado final (iteração 82) com plano dividindo regiões de condutividade térmica constante.

6.4 – Exemplo 4

Neste último exemplo resolveremos um problema cuja região de menor condutividade térmica, ao contrário do exemplo anterior, está acima da temperatura T_0 .

A região que apresenta os maiores gradientes de temperatura possui condutividade térmica $k_1 = 1 \text{ W/mK}$ e a que tem os menores gradientes possui condutividade térmica $k_2 = 45 \text{ W/mK}$. A temperatura T_0 que divide ambas as regiões é igual a 300 K . O problema se passa numa placa quadrada de lado igual a 2 m , numa taxa de geração interna de energia de 100 W/m^3 , trocando calor com o ambiente por convecção – temperatura de referência de 298 K e coeficiente de filme de $30 \text{ W/m}^2\text{K}$. O domínio é discretizado em uma placa 15×15 . Usando $\alpha = 16$ obtemos os seguintes resultados:

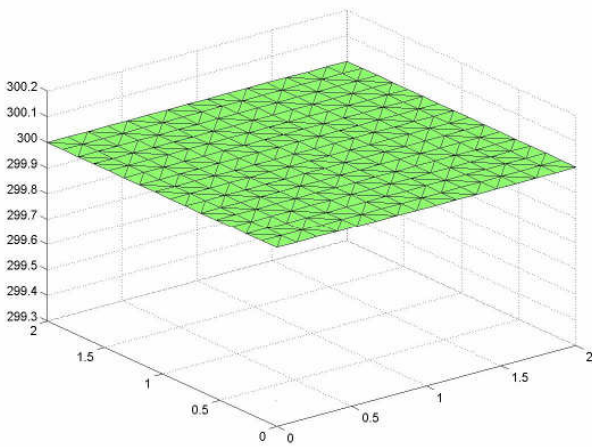


Figura 6.36 – malha de elementos finitos.

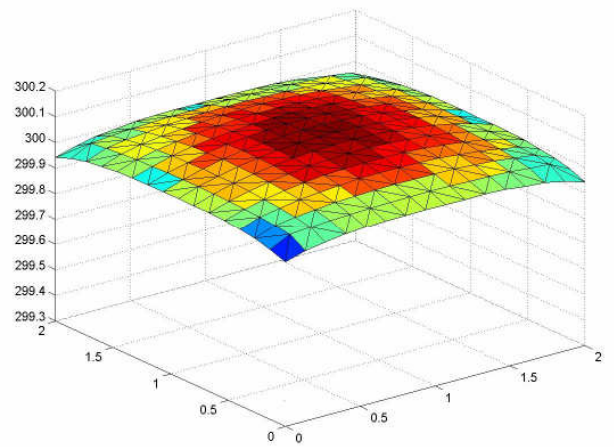


Figura 6.37 – iteração 1.

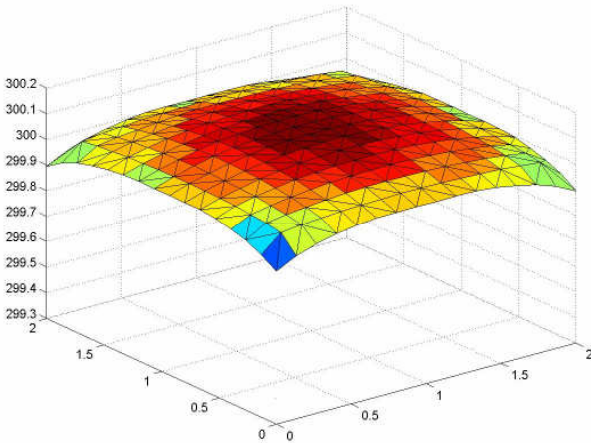


Figura 6.38 – iteração 2.

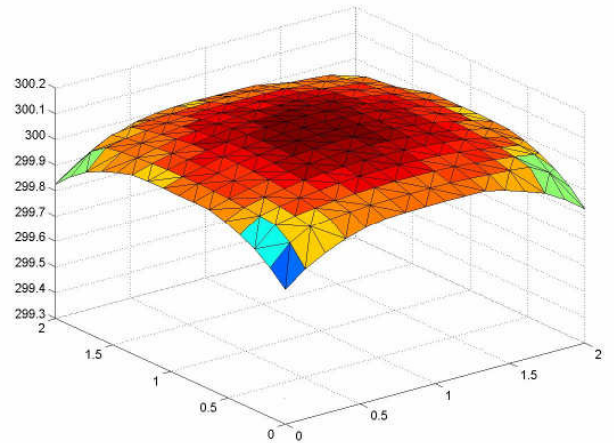


Figura 6.39 – iteração 4.

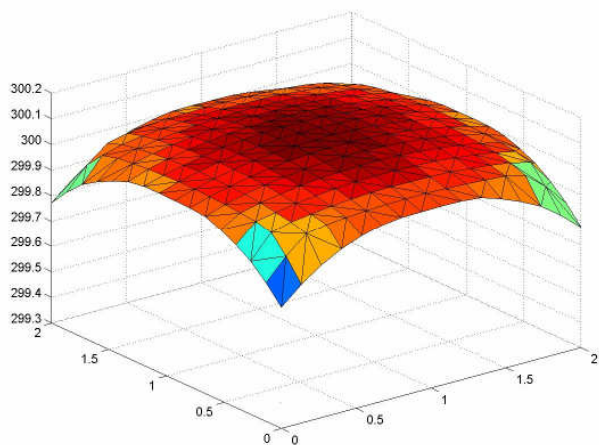


Figura 6.40 – iteração 6.

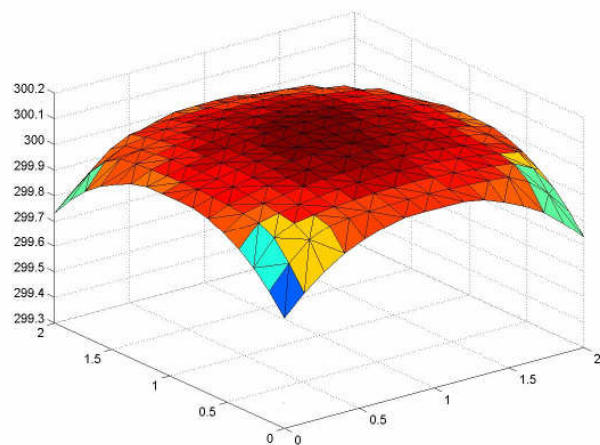


Figura 6.41 – iteração 8.

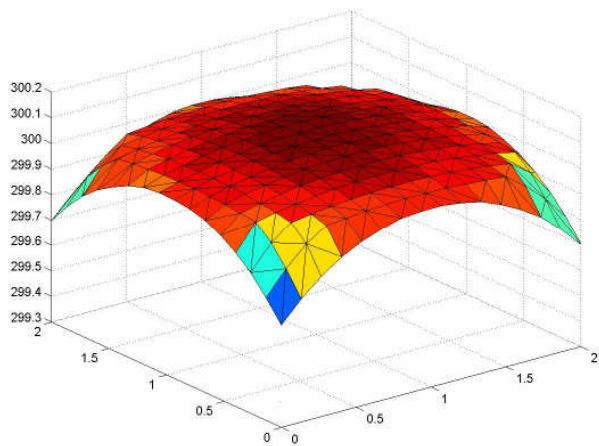


Figura 6.42 – iteração 10.

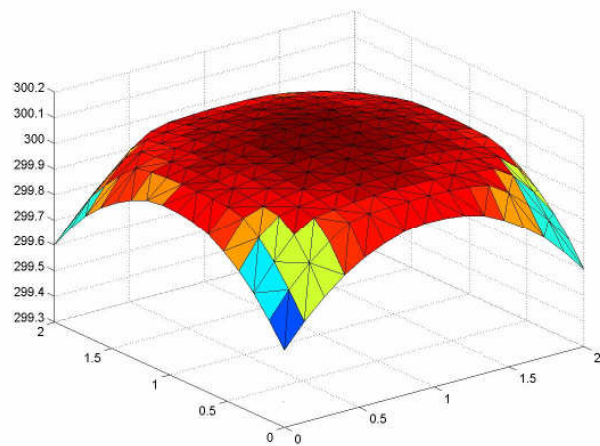


Figura 6.43 – iteração 20.

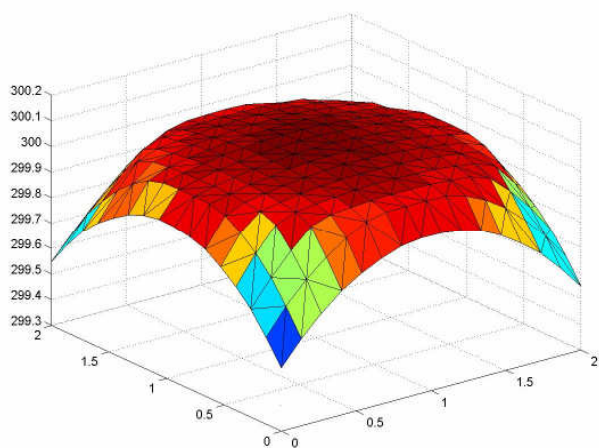


Figura 6.44 – iteração 30.

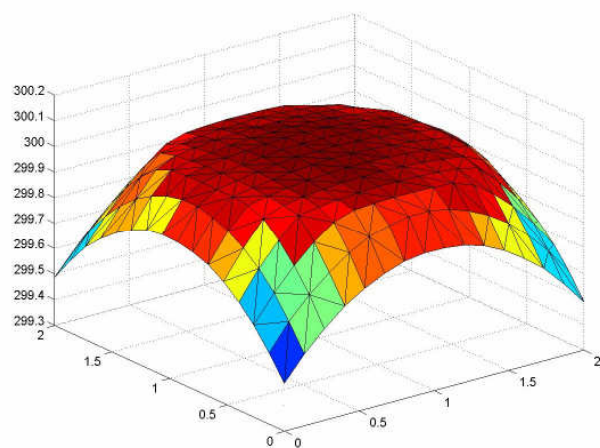


Figura 6.45 – iteração 50.

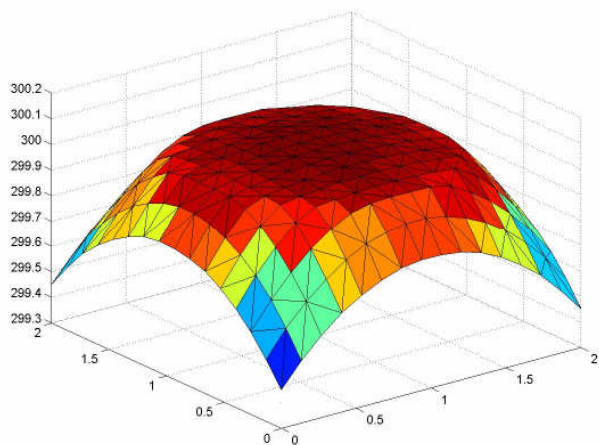


Figura 6.46 – iteração 75.

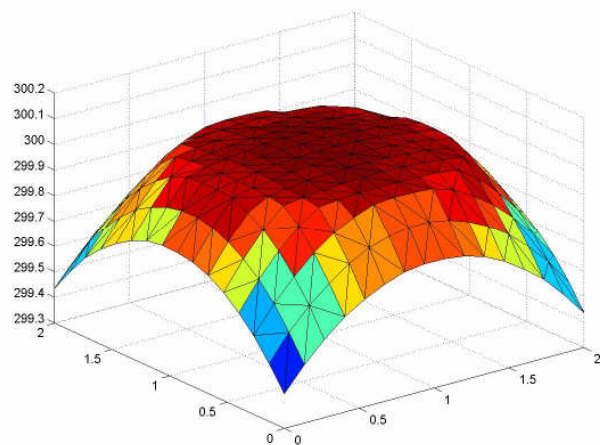


Figura 6.47 – iteração 100.

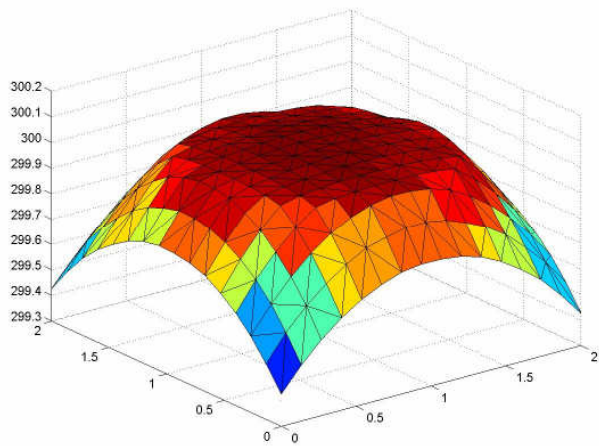


Figura 6.48– iteração 150.

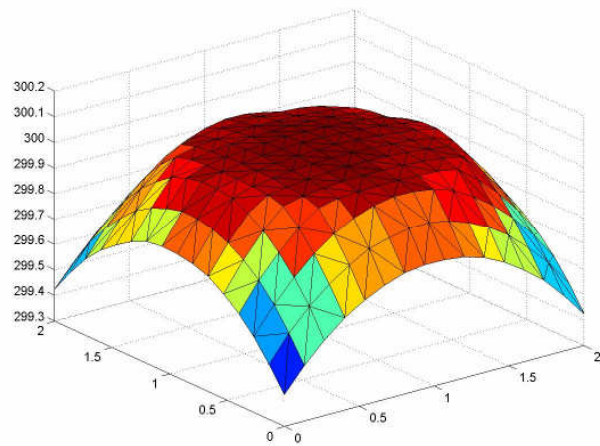


Figura 6.49 – iteração 200.

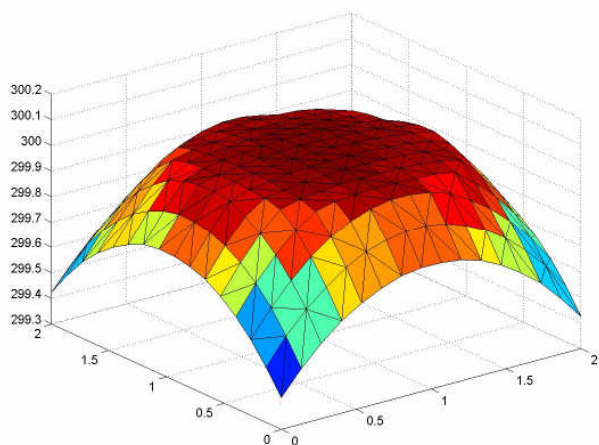


Figura 6.50– iteração 250.

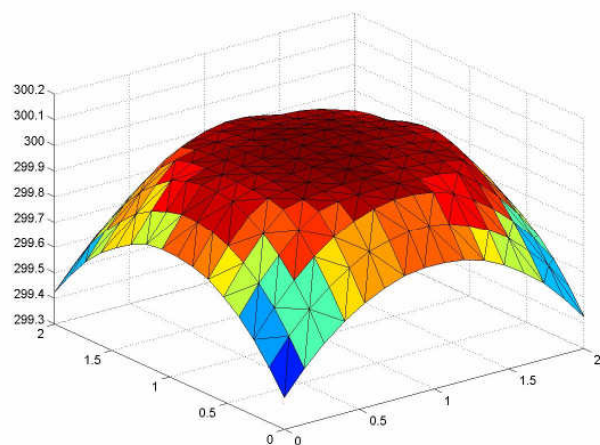


Figura 6.51– iteração 296 (resultado final).

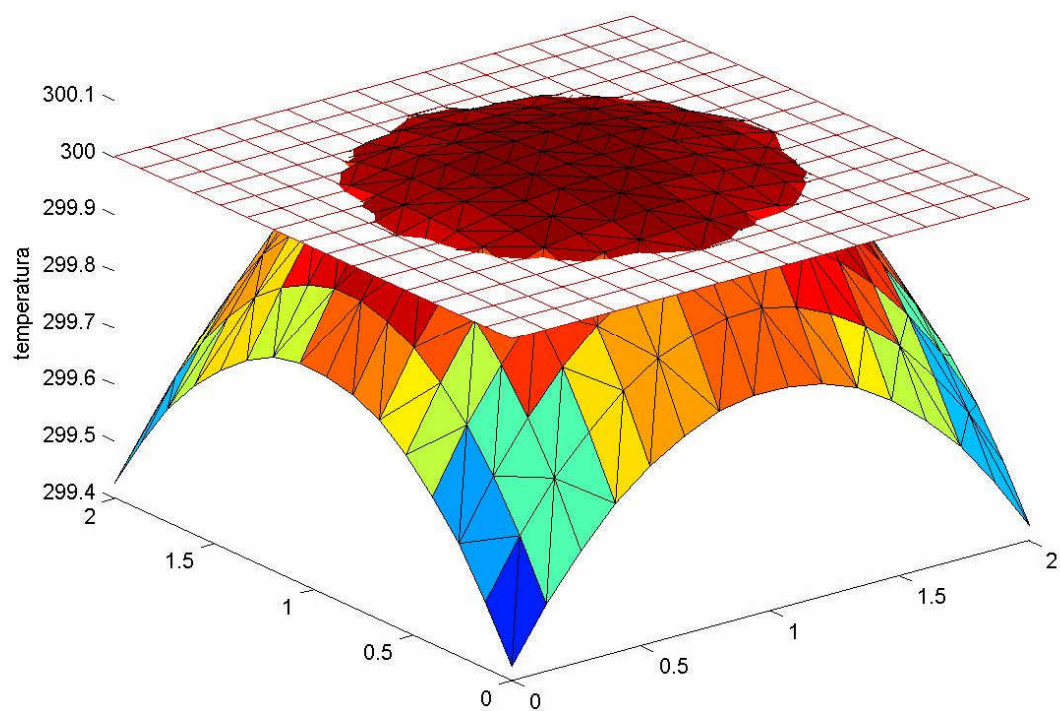


Figura 6.52 – resultado final com plano dividindo regiões de condutividade térmica constante.

CONCLUSÃO

Os resultados apresentados mostram que a metodologia proposta é confiável, simples e possui grande aplicabilidade. Ao contrário das técnicas numéricas de resolução de problemas de transmissão de calor não-linear, o procedimento aqui proposto, apesar de ser um método iterativo, garante a convergência da sequência (desde que atendida a restrição para a constante α) e o resultado obtido será tão próximo do exato quanto quisermos – dependendo de onde se queira truncar a sequência. Se for possível determinar o limite exato da sequência a solução fornecida pelo método será efetivamente a exata, como mostra claramente o exemplo da seção 4.5.1.

O emprego de métodos numéricos – diferenças e finitas e elementos finitos – teve o objetivo de mostrar o procedimento proposto aplicado a problemas bidimensionais, pois estão muito presentes em várias áreas de engenharia e fornecem uma boa visualização dos resultados.

A pesquisa feita até que se chegasse a este trabalho resultou em dois artigos científicos publicados em congressos, conforme apresentado nas páginas 88 e 89. Estas publicações representam muito bem a importância deste trabalho de levar o nome da UERJ para o mundo científico nacional e também de reafirmar o papel da universidade de produzir resultados científicos. As grandes universidades do mundo são conhecidas pela sua capacidade de pesquisa e de praticar ciência.

REFERÊNCIAS

- [1] Bejan, A., 1992, “Transferência de Calor”, Editora Edgard Blücher LTDA.
- [2] De Andrade, C. R., Zaporoli, E. L., 2002, “Condução de Calor Bidimensional com Condutividade Térmica Dependente da Temperatura.” Em: VIII ENCITA - Encontro de Iniciação Científica e Pós-Graduação do ITA, 2002, São José dos Campos, SP. Anais do VIII ENCITA – Encontro de Iniciação Científica e Pós-Graduação do ITA, São José dos Campos, ITA, 2002. v. 0. p. 61-66.
- [3] Gama, R. M. S., (a ser publicado) “An a priori upper bound estimate for conduction heat transfer problems with temperature-dependent thermal conductivity” Int. J. Non-Linear Mech.
- [4] Gama, R. M. S., 2000, “An upper bound estimate for a class of conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions”, Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 27, pp.955-964.
- [5] Helmberg, G., 1974, “Introduction to spectral theory in Hilbert space”, North-Holland.
- [6] John, F., 1982, “Partial differential equations”, Springer-Verlag.
- [7] Kreith, F., Bohn, M. S., 2003, “Princípios de Transferência de Calor”, Pioneira Thomson Learning.
- [8] Souza, R. M., 2003, “O Método de Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor”, Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia, Departamento de Engenharia Civil, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Pará.
- [9] Lima, L. M. R., Gama, R. M. S. “A Procedure For Exact Solution of Nonlinear Conduction Heat Transfer Problems In a Body With Temperature Dependent

Thermal Conductivity”, 19th International Congress of Mechanical Engineering, 2007, Brasília. 19th International Congress of Mechanical Engineering, 2007.

- [10] Lima, L. M. R., Dongala, A. M., Gama, R. M. S., “A Procedure For Simulating The Nonlinear Conduction Heat Transfer In A Body With Temperature Dependent Thermal Condcutivity”, 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, 2006, Curitiba. 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, 2006.

PUBLICAÇÕES

*Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering -- ENCIT 2006
Braz. Soc. of Mechanical Sciences and Engineering -- ABCM, Curitiba, Brazil, Dec. 5-8, 2006*

Paper CIT06-0917

A PROCEDURE FOR SIMULATING THE NONLINEAR CONDUCTION HEAT TRANSFER IN A BODY WITH TEMPERATURE DEPENDENT THERMAL CONDUCTIVITY.

ABRÃO MACANDI DONGALA

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia.
Rua São Francisco Xavier, 524 – 20550-013 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
abramado1@hotmail.com

LEON MATOS RIBEIRO DE LIMA

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia.
Rua São Francisco Xavier, 524 – 20550-013 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
leonmatos@hotmail.com

ROGÉRIO MARTINS SALDANHA DA GAMA

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ.
Rua São Francisco Xavier, 524 – 20550-013 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
rsgama@terra.com.br

Abstract. *In this work a systematic procedure is proposed for simulating the conduction heat transfer process in a solid with a strong dependence of the thermal conductivity on the temperature. Such kind of inherently nonlinear partial differential equation, subjected to classical linear boundary conditions, will be solved with the aid of a Kirchoff Transform by means of a sequence of very simple linear problems. The proposed procedure provides the exact solution of the problem and induces finite dimensional approximations that can be used for computational simulations. Some typical cases are simulated by means of a finite difference scheme.*

Keywords: *Temperature dependent thermal conductivity, Kirchoff transform, heat transfer, nonlinear equations system.*

A PROCEDURE FOR EXACT SOLUTION OF NONLINEAR CONDUCTION HEAT TRANSFER PROBLEMS IN A BODY WITH TEMPERATURE DEPENDENT THERMAL CONDUCTIVITY

Leon Matos Ribeiro de Lima, leonmatos@hotmail.com

Rogério Martins Saldanha da Gama, rsgama@terra.com.br

Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rua São Francisco Xavier 524, 20550-900, Rio de Janeiro – RJ, Brasil.

Abstract. *In this work a systematic procedure is proposed for simulating the conduction heat transfer process in a solid with a strong dependence of the thermal conductivity on the temperature. Most of this kind of problem is translated in nonlinear partial differential equations, subjected to classical linear boundary conditions, such as Newton's law of cooling. These problems will be solved with the aid of a Kirchhoff Transform by means of a sequence of very simple linear problems. The proposed procedure provides the exact solution of the problem and induces finite dimensional approximations that can be used for computational simulations. Some typical cases will be simulated by employing the Finite Element Method.*

Keywords: *Temperature Dependent Thermal Conductivity, Nonlinear Equations System, Heat Transfer, Finite Element Method, Kirchhoff Transform.*