

ESTUDO DO CAMPO HIDRODINÂMICO ENTRE DOIS DISCOS ROTATÓRIOS

Davi Vaz de Andrade Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Metalúrgica e de Materiais.

Orientadores: José da Rocha Miranda
Pontes
Norberto Mangiavacchi

Rio de Janeiro
Novembro de 2012

ESTUDO DO CAMPO HIDRODINÂMICO ENTRE DOIS DISCOS
ROTATÓRIOS

Davi Vaz de Andrade Ferreira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
METALÚRGICA E DE MATERIAIS.

Examinada por:

Prof. José da Rocha Miranda Pontes, D.Sc.

Prof. Norberto Mangiavacchi, Ph.D.

Prof. Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

Prof. Oscar Rosa Mattos, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
NOVEMBRO DE 2012

Ferreira, Davi Vaz de Andrade

Estudo do Campo Hidrodinâmico Entre Dois Discos Rotatórios/Davi Vaz de Andrade Ferreira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XIV, 102 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: José da Rocha Miranda Pontes

Norberto Mangiavacchi

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 99 – 102.

1. Campo Hidrodinâmico. 2. Diferenças Finitas . 3. Elementos Finitos. I. Pontes, José da Rocha Miranda *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais. III. Título.

*Aos meus pais, Geraldo e
Helenice, que acreditaram
totalmente em meu trabalho.*

Agradecimentos

Ao meu orientador o professor José da Rocha Miranda Pontes por me instruir ao longo da dissertação e contribuir imensamente para minha formação.

Ao meu coorientador o professor Norberto Mangiavacchi pelas dicas importantíssimas na elaboração de alguns métodos computacionais utilizados nessa dissertação. Ao laboratório GESAR (Grupo de Ensaios e Simulações Ambientais para Reservatórios) pela utilização dos computadores na compilação do programa fem-SIM3D.

Aos amigos Áquila Vieira, Fabrício Gardingo, Rodrigo Garcia, Rodrigo Brackmann, Giovani, Agmar José e Jorge Rebello pelas trocas incessantes de ideias durante o curso de mestrado.

Ao Gustavo Oliveira pelas dicas importantíssimas na compilação do programa e em elementos finitos e também ao Gustavo Rabello, com quem não tive contato tão próximo, mas que foi de extrema importância na parte final dessa dissertação.

A Danyella Freitas que teve muita paciência e compreendido que o tempo que não pude dedicar-lhe é porque estava dedicando a esse trabalho. Agradeço constantemente o carinho que tens por mim.

Ao amigo e ex-professor Rogério Arving Serra que incentivou a fazer o mestrado e que foi um dos grandes responsáveis na escolha do programa onde realizei essa dissertação.

Aos professores Roberto Fernandes e Álvaro Coutinho que foram responsáveis pela minha formação. Ao professor Oscar Mattos que, apesar de não ter contribuído diretamente na minha formação, foi um dos grandes idealizadores do estudo da hidrodinâmica em células eletroquímicas no Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais/COPPE/UFRJ.

A CAPES pelo apoio financeiro na realização desse trabalho.

Aos meus familiares e a todos que foram importantes, um muito obrigado!

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO DO CAMPO HIDRODINÂMICO ENTRE DOIS DISCOS ROTATÓRIOS

Davi Vaz de Andrade Ferreira

Novembro/2012

Orientadores: José da Rocha Miranda Pontes

Norberto Mangiavacchi

Programa: Engenharia Metalúrgica e de Materiais

Nesta dissertação procuramos melhorar a compreensão do campo hidrodinâmico compreendido entre dois discos rotatórios coaxiais resolvendo as equações diferenciais que governam seu comportamento pelo método de diferenças finitas e de elementos finitos para resolver as equações de governo do problema. A principal contribuição desse trabalho consiste em comparar as soluções encontradas pelos dois métodos em três configurações distintas, com um dos discos em repouso, com os discos girando em condição de contrarrotatórios e de corrotatórios.

As equações ordinárias que governam o comportamento estacionário do campo entre dois discos diferenciam-se das equações clássicas de von Kármán, que governam o campo próximo a um único disco pela dependência, no primeiro caso, da pressão em relação a coordenada radial ($\partial p / \partial r \neq 0$). Essa dependência leva ao aparecimento de um parâmetro k no sistema de equações ordinárias não lineares. As condições de contorno aplicáveis ao problema de dois discos alteram-se também, em relação às prescritas nas análises do campo nas proximidades de um disco, até aqui conduzidas pelo grupo de pesquisa de Eletroquímica Aplicada do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais/COPPE/UFRJ.

Na condução desse trabalho optou-se apenas pelo estudo do campo estacionário com viscosidade constante pelos dois métodos de solução citados acima. Utilizando o método de elementos finitos verificamos a influência da mudança do número de *Reynolds* na solução do campo hidrodinâmico.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STUDY OF THE HIDRODYNAMIC FIELD BETWEEN TWO ROTATING DISKS

Davi Vaz de Andrade Ferreira

November/2012

Advisors: José da Rocha Miranda Pontes

Norberto Mangiavacchi

Department: Metallurgical and Materials Engineering

This dissertation we seek to better understand the hydrodynamic field induced by the rotation of two coaxial disks, solving the governing equations of the problem both with the finite differences and the finite element methods. Our main contribution consists in comparing solutions obtained with both methods for the three configurations herein considered, namely with one disc at rest, with both discs turning with opposite specified angular velocity (counter-rotating discs) and with both discs turning with same angular velocity (co-rotating discs).

The nonlinear ordinary differential equations governing the steady state flow between the two coaxial discs differ from the classical von Kármán equations, to which the hydrodynamic field close to a single disc obey, by the dependence of the pressure, on the radial coordinates ($\partial p / \partial r \neq 0$), in the former equations. This dependence leads to the existence of a new parameter in the ODEs. Boundary conditions also differ from the ones prescribed in the analysis performed by group of Applied Electrochemistry of the Graduate Program of Metallurgy and Materials Engineering of COPPE/UFRJ.

Throughout this work we focused on the study of a constant viscosity fluids only. The effect of varying the Reynolds number of the problem was also investigated solving the governing equations by the finite element method.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Proposta	4
1.2 Organização textual	4
2 Revisão Bibliográfica	6
3 Equações Fundamentais	13
3.1 Conservação da Massa	13
3.2 Conservação da Quantidade de Movimento	15
3.3 Fluidos Newtonianos	17
3.4 Equação de Navier-Stokes	19
3.5 Equação de Transporte de Espécie Química	20
3.6 Adimensionalização	21
3.7 Equações do Campo Estacionário	25
4 Solução Estacionária do Problema de Dois discos	28
4.1 Método de Diferenças Finitas	28
4.1.1 Representação de Derivadas em Forma Discreta	29
4.1.2 Discretização e Resolução das Equações de von Kármán Generalizadas (Fluido com Viscosidade Constante)	30
4.1.3 Método de procura automática do parâmetro k	36
4.2 Perfis do campo com dois discos	38
5 Elementos Finitos	43
5.1 Formulação Variacional	44
5.2 Método de Galerkin Semi-Discreto	47
5.3 Método Semi-Lagrangeano	52
5.4 Discretização Espacial	53

5.4.1	Elementos tetraédricos	54
6	Resultados do Problema	57
6.1	Perfis Estacionários Obtidos por Integração das Equações Generalizada de von Kármán	57
6.1.1	O número de Reynolds $\mathbf{Re_z = z_{max}}$ como parâmetro de bifurcação	58
6.1.2	Novas soluções das Equações de von Kármán Generalizadas . .	59
6.1.3	Teste de refinamento de malha	64
6.2	O código de elementos finitos	66
6.2.1	Condições de contorno	67
6.2.2	Resolução do sistema linear	68
6.3	Resultados dos perfis de velocidade obtidos com o código tridimensional de elementos finitos	68
6.3.1	Resultados para $z_{max} = 5$ com um dos discos parado	73
6.3.2	Resultados para $z_{max} = 5$, contrarrotatório	75
6.3.3	Resultados para $z_{max} = 5$, corrotatório	77
6.3.4	Resultados para $z_{max} = 10$ com um dos discos parado	79
6.3.5	Resultados para $z_{max} = 10$, contrarrotatório	80
6.3.6	Resultados para $z_{max} = 10$, corrotatório	82
6.3.7	Resultados para $z_{max} = 30$, com um dos discos parado	83
6.3.8	Resultados para $z_{max} = 30$, contrarrotatório	86
6.3.9	Resultados para $z_{max} = 30$, corrotatório	91
7	Conclusão	93
A	Teorema e Condições Importantes	97
A.1	Teorema II de Buckingham	97
A.2	A condição de Babuska-Brezzi	97
	Referências Bibliográficas	99

Lista de Figuras

1.1	Célula eletroquímica e o eletrodo de disco rotatório	2
1.2	Configuração dos discos rotatórios retirada de Gauthier <i>et al.</i> [1] . .	3
1.3	Configuração dos discos rotatórios coaxiais separados por uma distância adimensional z_{max}	3
3.1	Deformação de um elemento fluido	17
4.1	Malhas de pontos uniformemente espaçados	29
4.2	Perfis iniciais	32
4.3	Estrutura da matriz esparsa A	34
4.4	Conteúdo dos blocos internos de matriz esparsa A	34
4.5	Diagramas mostrando $H(z_{max}) \times k$, para $z_{max} = 1$ e $z_{max} = 5$	37
4.6	Solução em regime contrarrotatório com $k = -0.002956$	38
4.7	Solução em regime contrarrotatório e $k = -0.057678$	39
4.8	Solução em regime contrarrotatório e $k = 2.530180$	39
4.9	Solução com um dos discos parado e $k = 0.0155780$	40
4.10	Solução com um dos discos parado e $k = 0.000040$	40
4.11	Solução com um dos discos parado e $k = 0.098264$	40
4.12	Solução corrotatório e $k = 0.023612$	41
4.13	Solução corrotatório e $k = 0.020168$	41
4.14	Solução corrotatório e $k = -0.002663$	42
4.15	Solução corrotatório e $k = -0.056366$	42
5.1	Elemento global e local	54
5.2	Volume tetraédrico	54
5.3	Elemento Mini	56
6.1	Gráfico mostrando os valores do parâmetro k	58
6.2	Soluções do Ramo de von Kármán para discos próximos ($z_{max} = 1, 5$ e 10)	61
6.3	Soluções do Ramo de von Kármán para as demais configurações de distâncias ($z_{max} = 15, 20, 30, 40$ e 50)	62

6.4	Soluções do segundo ramo. ($z_{max} = 15, 20, 30, 40$ e 50)	63
6.5	Configuração (# 12) do terceiro ramo de soluções	64
6.6	Refinamento para malha com $z_{max} = 30$	65
6.7	Refinamento para malha $z_{max} = 30$	65
6.8	Refinamento para malha $z_{max} = 30$	65
6.9	Malhas tridimensionais	70
6.10	Campos de pressão e velocidade	70
6.11	Campo de pressão e velocidade mostrado por linhas	71
6.12	Campo de velocidade na direção azimutal e axial mostrado por linhas	71
6.13	Divisão do disco	72
6.14	Campo de velocidade na direção axial para $z_{max} = 5$	72
6.15	Perfis de velocidade F e G para $z = 5$ com $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	73
6.16	Perfil de H e comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes para $z_{max} = 5$	73
6.17	Perfis de F e G para $z_{max} = 5$ com os parâmetros $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	74
6.18	Comparativo dos perfis para $z_{max} = 5$ e os parâmetros foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	74
6.19	Perfis de velocidade em raios diferentes caso contrarrotatório para $z_{max} = 5$	75
6.20	Comparando os perfis para $z_{max} = 5$, no caso contrarrotatório, e parâmetros iguais $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	75
6.21	Perfis de F e G para $z_{max} = 5$ no caso contrarrotatório com $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	76
6.22	Perfil de H para $z_{max} = 5$ no caso contrarrotatório com $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$ e um comparativo entre os perfis	76
6.23	Perfis F e G para $z_{max} = 5$ para o caso corrotatório com $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	77
6.24	Perfil H para $z_{max} = 5$ para o caso corrotatório com $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$ e comparativo entre as soluções	77
6.25	Perfis F e G para $z_{max} = 5$ para o caso corrotatório com $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	78
6.26	Perfil de H para $z_{max} = 5$ para o caso corrotatório com $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$	78
6.27	Perfis F e G para $z_{max} = 10$ para o caso com um dos discos parado, com $Re = 1$, $Re_d = 100$ e $\Gamma = 10$	79
6.28	Perfil de H para $z_{max} = 10$ para o caso com um dos discos parado, com $Re = 1$, $Re_d = 100$ e $\Gamma = 10$	79

6.29	Comparativo $z_{max} = 10$ para o caso com um dos discos parado, com $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	80
6.30	Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso de um dos discos está repouso, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	80
6.31	Comparativo dos perfis obtidos com os métodos iterativos, para o caso contrarrotatório, com $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	81
6.32	Comparativo dos perfis de velocidade nas direções radial, azimutal e axial para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	81
6.33	Comparativo dos perfis de F e G do caso corrotatório, com $z_{max} = 10$ e $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	82
6.34	Comparativo dos perfis de H do caso corrotatório, com $z_{max} = 10$ e $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	82
6.35	Comparativo dos perfis de F e G do caso corrotatório, com $z_{max} = 10$ e $Re = 100$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	83
6.36	Comparativo dos perfis de H do caso corrotatório, com $z_{max} = 10$ e $Re = 100$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$	83
6.37	Comparativo dos perfis de F e G do caso de um dos discos está em repouso, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	84
6.38	Comparativo dos perfis de H e dos métodos iterativos do caso de um dos discos está em repouso, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	84
6.39	Comparativo dos perfis de F e G do caso de um dos discos está em repouso, com $z_{max} = 30$ e $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	85
6.40	Comparativo dos perfis de H do caso de um dos discos está em repouso, com $z_{max} = 30$ e $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	85
6.41	Campo de velocidade na direção axial com $z_{max} = 30$	86
6.42	Comparativo dos perfis de F e G do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 0.1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$	86
6.43	Comparativo dos perfis de H do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 0.1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$	87
6.44	Comparativo dos perfis de F e G do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 0.1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$	87
6.45	Comparativo dos perfis de H do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$	87
6.46	Comparativo dos perfis de F e G do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	88

6.47	Comparativo dos perfis de H do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	88
6.48	Comparativo dos perfis de F e G do caso contrarrotatório, com $z_{max} =$ 30 e $Re = 1$, $Re_d = 30$ e $\Gamma = 1$	89
6.49	Comparativo dos perfis H do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 30$ e $\Gamma = 1$	89
6.50	Comparativo dos perfis de F e G do caso contrarrotatório, com $z_{max} =$ 30 e $Re = 0.3$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	90
6.51	Comparativo dos perfis de H do caso contrarrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 0.3$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	90
6.52	Comparativo dos perfis de F e G do caso corrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	91
6.53	Comparativo dos perfis de H do caso corrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	91
6.54	Comparativo dos perfis de F e G do caso corrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	92
6.55	Comparativo dos perfis de H do caso corrotatório, com $z_{max} = 30$ e $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$	92

Lista de Tabelas

3.1	Equivalência entre a notação utilizada por diversos autores no estudo do campo hidrodinâmico entre dois discos coaxiais. A primeira linha da tabela contém as variáveis com a notação utilizada nessa dissertação e as demais linhas, a notação equivalente de outros autores. d representa a distância entre os dois discos e R é o número de Reynolds. Em todos os casos $\xi = z/d$	27
6.1	Relação de novas soluções das Equações de von Kármán (Eqs. 3.86 a 3.88) obtidas nesse trabalho os parâmetros correspondentes. A tabela indica também o código empregado na obtenção de cada resultado. Nos casos em que há solução com os dois códigos as duas soluções coincidem.	59
6.2	Relação de novas soluções das Equações de von Kármán (Eqs. 3.86 a 3.88) obtidas nesse trabalho.	69

Capítulo 1

Introdução

A Mecânica dos Fluidos é parte integrante do ramo da Física que estuda o comportamento de fluidos em diversos meios.

Os aspectos teóricos e práticos da mecânica dos fluidos são de fundamental importância para a solução de diversos problemas encontrados habitualmente na engenharia, sendo suas principais aplicações destinadas ao estudo do escoamento de líquidos e gases, entre outros.

Esses estudos são feitos pela resolução de equações como as de conservação (massa, quantidade de movimento), suplementadas por equações constitutivas que prescrevem características do meio. Exemplos de equações constitutivas são leis que relacionam viscosidade e massa específica com a temperatura, ou com a concentração de espécies químicas presentes no fluido. O conjunto dessas equações, uma vez resolvidas, descrevem o comportamento do campo hidrodinâmico em estudo.

Na abordagem dessa dissertação leva-se em consideração apenas os fluidos newtonianos. Escoamentos de tais fluidos obedecem às equações de Navier-Stokes e da Continuidade. O estudo da mecânica dos fluidos tem uma vasta aplicação: na eletroquímica, na aerodinâmica, em máquinas de fluxo (bombas, turbinas, entre outras), dimensionamento de tubulações, dentre outras.

O presente trabalho dá continuidade aos estudos desenvolvido no LNDC/PEMM/COPPE/UFRJ(Laboratório de Ensaio Não-Destrutivos, Corrosão e Soldagem / Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais / Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia / Universidade Federal do Rio de Janeiro) em parceria com o GESAR/UERJ(Grupo de Ensaio e Simulações Ambientais para Reservatórios / Universidade Estadual do Rio de Janeiro) sobre o estudo da hidrodinâmica de células eletroquímicas contendo um eletrodo de disco rotatório. O funcionamento da mesma será apresentado ao longo dos próximos parágrafos e também a configuração de dois discos rotatórios coaxiais, objeto do presente estudo. Cabe ressaltar que os estudos da hidrodinâmica induzida pela rotação de um disco serviu de base e foi estendido no presente trabalho ao

estudo do campo que se desenvolve na presença de dois discos coaxiais giratórios.

Consideremos o esquema de uma célula eletroquímica como a utilizada no Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da COPPE-UFRJ, conforme Fig. (1.1). A célula eletroquímica possui um eletrodo de disco rotatório de ferro que dissolve-se no eletrólito, composto de uma solução **1M** de **H₂SO₄**. Os eletrodos de disco rotatório são amplamente utilizados, por tratar-se de arranjo de fácil construção e por ser a hidrodinâmica do problema modelada pela solução de von Kármán para o campo próximo a um disco rotatório.

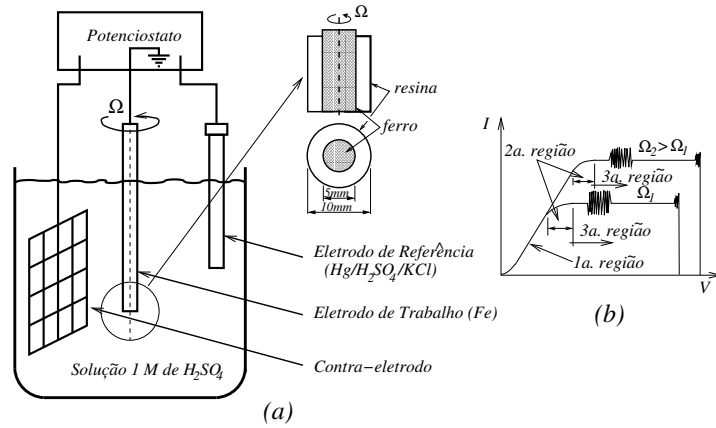


Figura 1.1: Célula eletroquímica e o eletrodo de disco rotatório em (a) e a curva de polarização típica, com três regiões em (b).

O arranjo é composto por uma célula e três eletrodos. O contra-eletrodo é composto por uma malha ao longo de toda parede lateral da célula de forma a garantir uniformidade na distribuição do potencial eletroquímico no interior da célula. O eletrodo central é composto por um cilindro revestido com uma resina, e na sua base existe um pequeno disco, por onde a flui a corrente. Esse eletrodo está acoplado a um motor de velocidade ajustável. As curvas de polarização, obtidas pela aplicação de uma diferença de potenciais entre o eletrodo de trabalho e o contra-eletrodo, apresentam três regiões distintas: A primeira região refere-se ao trecho da curva de polarização em que a diferença de potencial aplicada entre os eletrodos de trabalho e o contra-eletrodo é baixa. Nessa região a corrente depende apenas do potencial aplicado. A segunda região caracteriza-se por valores de potencial aplicado maiores do que na primeira região. A corrente depende não apenas da diferença de potencial aplicado, mas também da velocidade angular imposta ao eletrodo de trabalho. Na terceira região, o potencial aplicado é maior do que o correspondente à segunda região. A corrente depende apenas da velocidade angular imposta ao eletrodo. Para maiores informações ver a referência [2].

Na extensão dos estudos de sistemas cuja configuração é ilustrada na Fig.(1.1), observamos no presente trabalho o caso de dois discos coaxiais, sendo que um possível

conjunto desses discos pode ser visto em [3].

O arranjo experimental de discos rotatórios proposto pelo autor citado acima e encontrado em seus textos é mostrado pela Fig.(1.2).

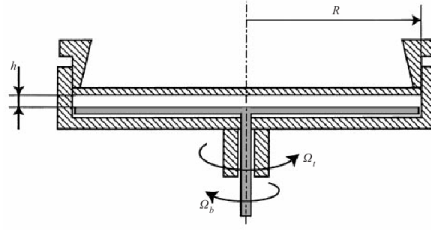


Figura 1.2: Configuração dos discos rotatórios retirada de Gauthier *et al.* [1]

A configuração do arranjo consiste em um cilindro de tamanho pequeno de altura h fechado por um disco no topo e um disco na base. Os raios dos discos têm 14 cm. O disco superior é feito de acrílico e move-se junto com o cilindro, feito de PVC. O disco inferior é confeccionado em latão retificado com uma camada preta de modo a permitir bom contraste na visualização do campo hidrodinâmico.

A configuração considerada no presente trabalho é mostrada na Fig.(1.3):

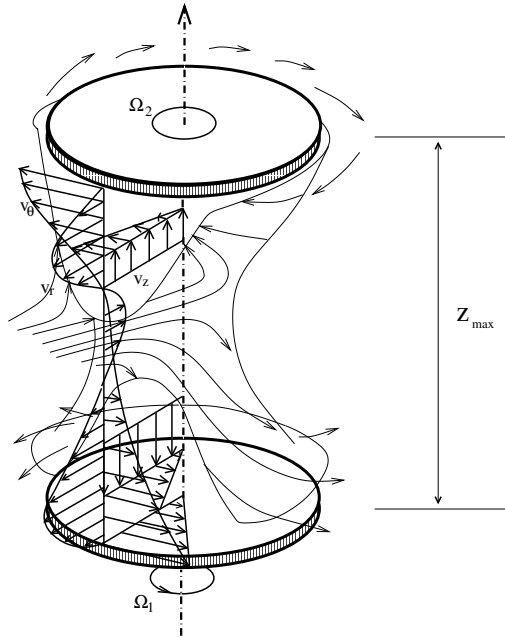


Figura 1.3: Configuração dos discos rotatórios coaxiais separados por uma distância adimensional z_{max}

Esse desenho esquemático mostra os dois discos rotatórios coaxiais separados por uma distância z onde escolhemos valores dessa amplitude com base no número de *Reynolds*. Podemos aproximar os discos de forma que a distância entre eles seja bem pequena, com isso as camadas limites criadas nos discos possam estar bem

próximas. Observamos também as componentes da velocidade, v_r , v_θ e v_z , que são, respectivamente, as velocidades nas direções radial, azimutal e axial.

O movimento de rotação de disco induz o surgimento de uma velocidade radial e para satisfazer a conservação da massa, gera-se uma vazão na direção axial que repõe a que se afasta do eixo. Nos casos das velocidades dos discos que foram objetos de estudo dessa dissertação de mestrado esse princípio foi mantido.

O presente texto prossegue os trabalhos do grupo que estuda o comportamento de fluidos em disco rotatório do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, dando continuidade aos trabalhos de [2], [4], [5], [6], [7], [8].

1.1 Proposta

Essa dissertação tem o objetivo de elaborar um estudo sobre o campo hidrodinâmico entre dois discos rotatórios coaxiais. Os objetivos são:

1. Desenvolvimento de código de diferenças finitas para resolução do sistema de equações ordinárias que descrevem a dependência das componentes da velocidade na direção axial. O código é usado para reproduzir resultados existentes na literatura.
2. O código de diferenças finitas é então utilizado para a obtenção de novas soluções, não encontradas na literatura.
3. Estudo do campo estacionário tridimensional resolvendo-se, pelo método de elementos finitos, as equações tridimensionais e dependentes do tempo, aplicáveis a fluidos com viscosidade constante.

A proposta final desse estudo é comparar as soluções obtidas pelo dois métodos em um momento reproduzindo da literatura e em um outro obtendo novas.

1.2 Organização textual

A dissertação de mestrado está organizada da seguinte maneira:

O Cap. 1 contém a introdução, com breve explicação do problema a ser estudado, como também a explicação sobre o funcionamento da célula eletroquímica.

O Cap. 2 contém a revisão bibliográfica, descrevendo trabalhos anteriores que serviram de base para elaboração dessa dissertação e outros textos que foram fundamentais na elucidação do problema tratado.

As Equações Fundamentais do problema encontram-se no Cap. 3. Trata-se das equações obtidas pela aplicação dos princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento do meio, das equações constitutivas do tensor de tensões

que agem nos elementos do fluido e da equação de conservação da massa de uma espécie química que é transportada pelo meio e que afeta a viscosidade do mesmo.

Essas equações são adimensionalizadas e simplificadas levando em consideração as simetrias e demais particularidades da geometria do problema. Introduz-se nas mesmas uma generalização da solução de von Kármán para o campo hidrodinâmico estacionário na vizinhança de um disco rotatório, de modo a generalizá-la para a configuração de dois discos coaxiais rotatórios. A generalização se dá pela inclusão de dependência da pressão com a coordenada radial. Obtém-se então um novo sistema de EDOs, que é resolvido numericamente.

O Cap. 4 descreve o método de resolução por diferenças finitas das EDOs de von Kármán generalizadas para o caso do campo estacionário de fluido com viscosidade constante. O método é usado para reproduzir resultados dos perfis generalizados de von Kármán encontrados na literatura. O método é codificado com o emprego do *software* comercial *Matlab*[®].

No Cap. 5 apresentamos os princípios do Método de Elementos Finitos, incluindo o método de Galerkin e o tratamento dos termos convectivos por abordagem Semi-Lagrangeana.

A resolução das equações da hidrodinâmica pelo Método de Elementos Finitos é feita de duas formas: utilizando-se rotinas do *software* *Matlab*[®] e utilizando os códigos desenvolvidos por Anjos (2007) [4], Oliveira (2011) [8] e por outros, no grupo GESAR/UERJ. Os resultados obtidos pelos dois métodos são apresentados e discutidos no Cap. 6.

O Cap. 7 apresenta as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

No estudo da hidrodinâmica que se desenvolve nas proximidades de discos rotatórios, há dois casos interessantes: um é o caso de um disco girando no infinito e o outro é o caso de dois discos girando no mesmo eixo. A primeira abordagem desses problemas foi apresentada por von Kármán [9]. Ele considerou o problema do escoamento provocado por um disco girando cujo movimento faz com que o fluido distante mova-se com velocidade uniforme em direção ao disco. Por identificar as variáveis e similaridades do problema, von Kármán foi capaz de reduzir o sistema de equações completas de Navier-Stokes para um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares dependentes da coordenada axial z .

Por causa da instabilidade hidrodinâmica observada no escoamento de discos rotatórios diversos estudos teóricos e experimentais foram realizados, para o caso em que a viscosidade não varia e também para o caso em que a viscosidade varia. A maioria dos estudos mostrou que o escoamento torna-se instável além de uma distância crítica do eixo de rotação.

Barcia *et al.* [2] propuseram uma hipótese simples, considerando que a viscosidade se altera em consequência da concentração de ferro proveniente da dissolução do eletrodo. Barcia *et al.* mostraram que a corrente depende da distribuição espacial da espécie química que a transporta e que também depende do campo hidrodinâmico. Sugeriram também que uma oscilação do campo hidrodinâmico causa oscilações na corrente elétrica. Os autores generalizaram a solução estacionária de von Kármán, em modelo no qual a viscosidade depende da coordenada axial z .

Barcia *et al.* [7] buscaram resolver o estado estacionário do campo hidrodinâmico próximo ao disco rotatório com viscosidade variável. Na solução considerou-se que a dissolução do eletrodo cria uma camada limite fina de concentração de espécie química e que a viscosidade e o coeficiente de difusão sejam dependentes da concentração.

Para a solução do problema em [7] a relação de Stokes-Einstein foi utilizada. Com isso as equações de von Kármán e do transporte de espécies químicas foram

resolvidas apenas para o caso estacionário. Para a obtenção da solução das equações ordinárias dos perfis de similaridade foi utilizado o método de Newton-Raphson.

Nas proximidades do disco a velocidade axial se reduz e os efeitos viscosos e centrífugo fazem com que o fluido gire afastando-se do eixo. Essa região onde o fluido se afasta é a camada limite. Foram colocadas algumas questões: a primeira é que se o acoplamento reduz a estabilidade do campo hidrodinâmico, então o número de Reynolds crítico será reduzido; a segunda é que oscilações do gradiente de concentração podem resultar em oscilações na corrente na célula.

Aqui uma fina camada limite de concentração possui cerca de 4% de espessura em relação a camada limite hidrodinâmica, o que implica em elevados valores do gradiente de concentração de espécie química.

Pontes *et al.* [5] estudaram a estabilidade do campo hidrodinâmico considerando a existência de um gradiente imposto de viscosidade na direção axial. Mostraram também que com o aumento da estratificação da viscosidade as perturbações serão amplificadas e haverá uma redução no número de Reynolds crítico. Esses resultados foram previstos baseando-se na hipótese de que se há oscilações de corrente, então estas poderão ser causadas por uma instabilidade no campo hidrodinâmico.

Nas equações que descrevem a estabilidade do sistema desenvolvidas em [5] os autovalores são complexos sendo as partes imaginária e real associadas a taxa de crescimento e a velocidade angular respectivamente.

Além disso os autores identificaram uma faixa de velocidades angulares da estrutura que emerge da primeira instabilidade, fora da qual as perturbações são sempre amortecidas.

A solução do estado estacionário obtida por Mangiavacchi *et al.* [6] incluiu o acoplamento, através da dependência da viscosidade com a concentração, da espécie química responsável pelo transporte da corrente, isto é da hidrodinâmica com o transporte. Uma análise da estabilidade temporal foi realizada, revelando que pequenas perturbações causam instabilidade do campo hidrodinâmico para valores de número de Reynolds inferiores ao valor crítico encontrado na literatura para o caso de fluido com viscosidade constante .

Pontes *et al.* [5] e Mangiavacchi *et al.* [6] mostraram que, no caso dos campos hidrodinâmico e de concentração desacoplados, mas com a viscosidade dependente da coordenada axial z , a estabilidade do campo só é alterada para espessuras de camada limite de concentração, definidas pelo número de Schmidt, pouco realistas.

Anjos em [4], simulou em sua dissertação de mestrado o problema de um disco rotatório. Variando o número de Reynolds, analisou os casos com a viscosidade constante e outros com a viscosidade variável e, por fim, conseguiu mostrar que as suas soluções convergiam para as soluções de von Kármán. Para a solução do problema utilizou o método de elementos finitos. No esquema de elementos finitos

utilizou para a discretização do problema o método de Galerkin e a formulação semi-Lagrangeana para a derivada substancial. Para a discretização espacial utilizou um elemento tri-dimensional baseado na condição de *Babuska-Brezzi*, neste caso o elemento MINI que é um elemento da família *Taylor-Hood*. E finalmente para a solução do sistema de equações algébricas não-lineares utilizou o método de projeção discreto e o método de gradientes conjugados pré-condicionado.

No início da década de 1950 alguns autores fizeram avanços importantes no estudo do campo hidrodinâmico entre dois discos coaxiais dentre eles Batchelor [10] e Stewartson [11]. Batchelor previu que no caso de dois discos com um girando e outro parado, o fluido no centro estaria girando com velocidade angular aproximadamente constante e a camada limite apareceria próxima aos dois discos. Ele também considerou que ambos os discos rodavam com a mesma velocidade angular, mas em sentidos opostos. Batchelor argumentou que nesse caso o corpo principal do fluido teria uma rotação contrária em duas partes, com uma camada de transição entre eles. A consequência é o surgimento de camada limite além das originadas nos discos. A diferença das equações tratadas para o problema de dois discos e as tratadas para um disco é a dependência da pressão em relação a coordenada radial, desse modo $\partial p / \partial r \neq 0$. Dessa forma as equações de Navier-Stokes simplificadas incluem um novo termo que caracteriza a dependência da pressão com a coordenada radial.

Stewartson afirmou que em ambos os casos o fluido acima do centro não giraria todo. Ele previu estes resultados com base no baixo número de *Reynolds* e em evidências experimentais. Nesse caso o número de *Reynolds* é definido como

$$Re = \frac{\Omega * z^2}{\nu}, \quad (2.1)$$

onde Ω , z e ν definidos, respectivamente, por velocidade angular do disco, componente axial e viscosidade do fluido.

Gauthier *et al.* [1] realizaram um estudo do campo hidrodinâmico entre dois discos rotatórios, investigando experimentalmente a instabilidade do escoamento. A configuração de dois discos no mesmo eixo dá origem a um grande número de padrões de instabilidade. O caso de corrotação e o caso de contrarrotação são muito similares ao caso rotor-estator, tanto para o escoamento básico quanto para os padrões de instabilidade: o escoamento básico consiste em duas camadas limite perto de cada disco e os padrões de instabilidade são os vórtices axissimétricos. O caso contrarrotação com maior taxa de rotação, onde taxa de rotação é a relação entre as velocidades dos discos no topo e na base, é mais complexo: acima de uma determinada taxa de rotação, a vazão de recirculação torna-se organizada em uma estrutura de duas células com a aparência de um círculo de estagnação no disco mais

lento. Um círculo de estagnação é a figura geométrica formada pelos pontos onde se acumulam as partículas de massas específicas diferentes, onde a aglomeração cria anéis, os quais recebem o nome de círculos de estagnação. Estes são produzidos pelo disco de rotação maior quando empurra o escoamento em direção ao disco mais lento. As principais características medidas deste modelo são apresentadas em [12], incluindo os tempos de crescimento, modos críticos e velocidades de fase. Propuseram também que, para dois discos girando, temos que usar dois números de Reynolds diferentes baseados na espessura da célula, onde a célula consiste em um cilindro de altura “ h ” pequeno e fechado por dois discos, um superior e outro inferior. E que a espessura da camada limite do disco superior não depende do raio, mas sim do número de Reynolds e do disco inferior. A espessura evolui com o raio atingindo a camada limite superior em um determinado raio chamado de raio de fusão.

Pearson em [13] solucionou o problema de dois discos com dependência no tempo. As simulações foram feitas com um disco parado e outro girando, com ambos os discos girando com velocidades iguais e com velocidades diferentes. Pearson mostrou que para valores elevados do número de Reynolds não há uma simetria estável do campo para o caso contrarrotatório. Identificou-se situações em que o corpo do cilindro de fluido localizado entre os discos move-se com velocidade angular maior do que as dos discos.

Roberts e Shipman em [14] utilizaram um método de “shooting” combinado com o método de continuação, com isso diminuiu-se a intervenção manual para encontrar o parâmetro que caracteriza a dependência da pressão com a velocidade, denominada como k . As equações ordinárias foram resolvidas transformando-as em um conjunto de equações de primeira ordem.

Holodniok *et al.* em [15] resolveram o problema de dois discos usando o método de Newton-Raphson, com o método de diferenças finitas centradas. Eles mostram que as equações ordinárias dos perfis de similaridade podem possuir várias soluções, dependendo da distância entre os discos, de um parâmetro k definido como em [16], que caracteriza a dependência da pressão com a coordenada radial. Soluções estacionárias distintas são encontradas também variando-se a velocidade dos discos. Mostraram que, para diferentes números de Reynolds e velocidades diferentes nos discos o problema pode exibir várias soluções. Nas equações de governo, mostraram que, dependendo do número de Reynolds e do valor do parâmetro k o problema pode ou não ter solução. Para encontrar esse parâmetro foi utilizado o método de “shooting”.

Holodniok *et al.* [15] mostraram, através de simulações, que para o caso dos discos estarem girando no mesmo sentido direção, mas com velocidades de magnitudes diferentes e, usando a distância entre os discos caracterizada por $Re = 625$,

onde “ Re ” é o número de *Reynolds* definido pela Eq.(2.1). Foram encontradas cinco soluções possíveis. Ainda constataram que a dependência do parâmetro k em Re pode ser calculada por continuação das soluções utilizando o método de Newton-Raphson. Também observaram que, dependendo do número de *Reynolds*, o problema pode exibir várias soluções, mas, especificamente, quanto maior esse número maior é o número de soluções.

Holodniok *et al.* em [17] posteriormente simularam o problema de dois discos para várias distâncias entre os discos e também para velocidades diferentes nos discos. Os resultados encontrados sugerem que com o aumento da distância entre os discos, dentro de certos limites, não é necessário aumentar o número de pontos da malha desde que não seja um aumento muito grande e isso foi constatado para o caso estacionário. Esses autores mencionaram também que para distâncias maiores entre os discos a probabilidade de encontrar as soluções aumenta.

Em um estudo comparativo entre os campos hidrodinâmicos próximo a um disco e entre dois discos coaxiais, os autores Zandbergen e Dijkstra [12] investigaram o comportamento do escoamento do fluido. Resolveram as equações de Navier-Stokes transformando-as em um sistema de equações equivalentes às de von Kármán, mas eliminando uma variável. Com isso, as equações ordinárias passam a incluir uma derivada de terceira ordem. As condições de contorno são as mesmas que von Kármán considerou, no caso, para um disco. Para o caso de dois discos as equações ordinárias incluem um termo de quarta ordem e as condições de contorno são as mesmas adotadas para os problemas contrarrotatório e corrotatório que encontra-se na bibliografia pesquisada. Além disso a distância entre os discos é dada por Re . Esse número de *Reynolds* aparece nas equações, caracterizando a distância entre os discos. Relataram em seus estudos uma grande similaridade, na solução, entre os dois problemas, ou seja, o problema de um disco e o problema de dois discos rotatórios.

Os autores relatam no artigo citado acima que, se não houverem técnicas numéricas especiais para encontrar a solução, então próximos aos discos, ou seja, nos pontos críticos a solução pode não existir.

Em um estudo experimental e numérico Gan *et al.*[18] compararam por sobreposição dos perfis de velocidade as condições em que ocorre a transição de uma estrutura do campo do tipo Batchelor para uma estrutura do tipo Stewartson. Em uma outra pesquisa os autores Gan e Macgregor [19] analisaram se as estruturas do campo entre dois discos são do tipo identificado por Batchelor ou pelo tipo identificado por Stewartson. Estes chegaram a conclusão que tanto no regime laminar quanto no regime turbulento não houveram mudanças significativas no campo para problemas onde um dos discos está parado. Já no caso contrarrotatório Gan e Macgregor [19] observaram que não houve uma contrarrotação óbvia dos núcleos, em vez

disso, houve um único núcleo entre as camadas limites. E por fim verificaram que a transição dos regimes laminar para o turbulento dar-se-á por um aumento do número de *Reynolds*. Para isso ocorrer é necessário mudar a configuração esquemática dos discos, como o tamanho dos discos, altura da célula, entre outros fatores.

No estudo do campo hidrodinâmico entre dois discos rotatórios Soong *et al.* [20] analisaram o comportamento do fluido por meio de experimentos. Observaram que a estrutura do campo entre dois discos coaxiais giratórios é fortemente influenciada por forças rotacionais, ocasionadas pelo movimento dos discos, que dificultam a cinemática do fluido. Tal efeito é percebido pela criação dos vórtices. Para discos de tamanhos diferentes há uma forte influência para o surgimento de vórtices, então os autores sugeriram uma redução no tamanho de um dos discos, reduzindo assim o tamanho dos vórtices. Provavelmente com essa redução, reduzirá-se a ingestão do líquido para fora que por fim diminuirá a instabilidade do escoamento.

Moisy *et al.* [21] investigaram a estabilidade das camadas limite que se formam próximo aos discos. Esses autores verificaram experimentalmente e numericamente que, para uma rotação muito grande, a camada limite que separa as duas regiões formadas pelo efeito de contrarotação dos discos, causa uma separação do campo em duas partes no ponto médio da distância entre os discos, sofrendo, então, uma quebra de simetria. Os resultados obtidos mostraram que as estruturas obtidas tanto as calculadas como as medidas apresentavam boa concordância. Na simulação numérica das equações de Navier-Stokes do problema proposto, mostrou-se que a camada de cisalhamento, formada no ponto médio da distância entre os discos, apresenta uma instabilidade. Para a discretização temporal utilizou um método de segunda ordem no tempo, com discretização implícita dos termos lineares e explícita (Adams-Bashforth) com extrapolação dos termos não-lineares.

Os autores Pécheux e Foucalt em [22] mostraram em um primeiro momento por um estudo teórico que, para números de Reynolds moderados ($Re \leq 50$) e taxas de rotação $s \in [-1, 1]$, onde $s = \Omega_2/\Omega_1$ é a relação entre as velocidades de rotação dos discos, as soluções de similaridade de von Kármán se tornam instáveis à perturbações axissimétricas. Para o problema de dois discos rotatórios em baixa rotação dois distúrbios apareceram no mesmo raio crítico. Na análise, descobriram que a uma distância crítica desse raio a perturbação torna-se absolutamente instável enquanto a segunda permanece convectivamente instável.

No estudo experimental fizeram um comparativo com os resultados obtidos através das equações, explorando a gama de parâmetros utilizados nas simulações. Observaram que na periferia dos discos apareceram estruturas tridimensionais instáveis que provavelmente destabilizavam o escoamento. A destabilização se dá no raio crítico e evidencia que as perturbações axissimétricas acontecem ali, mas os autores não conseguem afirmar se realmente acontece somente nesse lugar, por isso

sugeriram que os estudos sejam prolongados para verificar a partir de que distância do centro do disco isso passa a acontecer.

Chawla *et al.* em [23] realizaram um estudo analítico-numérico para analisar o movimento de fluidos induzido por sucção oscilatória, onde sucção oscilatória é a perturbação, de amplitudes pequenas, nas proximidades do disco giratório.

Os autores Kostrykin *et al.* em [24] fizeram um estudo do modelo de von Kármán. Para tal modificaram as equações para mostrar o comportamento dos vórtices. Na análise teórica apresentaram um estudo para mostrar a diferença de comportamento desses vórtices para fluidos viscosos. Nessas análises perceberam que não havia assimetria dos vórtices, a assimetria é devida as direções de seus movimentos, sendo tal efeito explicado pela não-linearidade devida ao atrito na base do disco, que por sua vez determina uma camada limite no disco.

Uma comparação dos resultados experimentais e numéricos tornou possível explicar o comportamento dos vórtices sugerindo que eles não podem surgir em regiões de gradientes acentuados de vorticidade, pois contribuem fortemente para a dissipação do escoamento.

Capítulo 3

Equações Fundamentais

3.1 Conservação da Massa

A exigência da conservação de massa do fluido impõe certas restrições ao campo de velocidade que, mesmo não sendo de ordem cinmática, devem ser consideradas.

O princípio da conservação de massa estabelece que: *a taxa de acumulação de massa dentro do volume por unidade de tempo é igual a menos o fluxo líquido de massa para fora do volume.*

Seja um fluido com massa específica ρ , que escoar através de um volume de controle V , e seja \mathbf{v} um vetor unitário perpendicular à superfície. Podemos expressar de forma matemática o enunciado acima como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm \quad (3.1)$$

Podemos expressar a quantidade infinitesimal de massa dm por uma igualdade da forma $dm = \rho dV$ que relaciona a porção de massa com a massa específica e com o volume de um fluido. Substituindo na equação 3.1, encontramos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.2)$$

O termo $\int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = 0$ devido o escoamento ser incompressível.

Podemos atribuir um sentido matemático ao fluxo líquido de massa que atravessa uma superfície S qualquer adotando \mathbf{n} o vetor unitário perpendicular à superfície e \mathbf{v} o vetor velocidade, com isso podemos expressar o fluxo de massa por uma equação da forma:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.3)$$

Obtemos então a forma integral da conservação da massa de acordo com [25],

[26]

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.4)$$

A equação 3.4 relaciona a taxa de acumulação de massa em um volume finito, fixo no espaço.

Entendemos agora que é preciso procurar uma equação local, ou seja, uma equação diferencial de conservação da massa. Usando o teorema de Gauss reescrevemos a Eq.(3.4) como:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \text{div } \rho \mathbf{v} dV \quad (3.5)$$

ou:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (3.6)$$

Essa equação é válida para qualquer volume de controle. para um volume infinitesimal e dividindo-a por dV obtemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (3.7)$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (3.8)$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (3.9)$$

Podemos expressar a equação 3.7 de uma outra forma para isso utilizaremos a identidade vetorial $\text{div } \rho \mathbf{v} = \rho \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho$ e o conceito de *Derivada Material* que se define por $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, obtendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0, \quad (3.10)$$

ou:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.11)$$

Algumas considerações:

- Para fluidos incompressíveis, temos que $\partial \rho / \partial t = 0$ e $\mathbf{grad} \rho = \mathbf{0}$, donde

conclui-se que a equação da continuidade se reduz a :

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3.12)$$

- Para o caso de escoamentos estratificados, temos que $\partial\rho/\partial t = 0$ e $\mathbf{grad} \rho \perp \mathbf{v}$, logo a equação se torna igual a:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.13)$$

3.2 Conservação da Quantidade de Movimento

Consideremos inicialmente a mudança de quantidade de movimento de um corpo rígido em um volume de controle. Para determinarmos a taxa de acumulação de quantidade de movimento, utilizaremos o princípio da conservação de quantidade de movimento. Esse por fim estabelece que, para um fluido qualquer com massa específica ρ que atravessa o volume de controle V , a taxa de variação de quantidade de movimento é igual ao fluxo líquido de quantidade de movimento para fora do volume mais a resultante das forças de superfície e de volume. Traduzimos o resultado acima por uma integral da forma:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV \quad (3.14)$$

Multiplicando a Eq. (3.3) por um vetor velocidade na direção do movimento, temos uma expressão para o fluxo líquido de quantidade de movimento na direção para fora do volume de controle, dado por:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (3.15)$$

A resultante de forças que age sobre a superfície de controle é:

$$\oint_S \sigma(\mathbf{n}) dA \quad (3.16)$$

enquanto a resultante de forças de volume se escreve como:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV. \quad (3.17)$$

Com isso, expressamos o princípio da conservação da quantidade de movimento por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV = \oint_S \sigma(\mathbf{n}) dA - \oint_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.18)$$

Transformamos as integrais de superfície em integrais de volume, com o emprego do teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \text{div } \sigma dV - \int_V (\text{div } \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.19)$$

Aplicando a equação acima a um volume infinitesimal e dividindo o resultado por dV , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + (\text{div } \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} = \text{div } \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (3.20)$$

Como $(\text{div } \rho \mathbf{v}) \mathbf{v}$ equivale à forma tensorial $\text{div}(\rho \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}$ obtemos, expandindo os termos do membro esquerdo da equação acima:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \\ \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right] \mathbf{v} + \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observa-se que $\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v})$ é igual a zero pela equação da continuidade. Reagrupando os termos acima obtém-se a forma vetorial:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \right] = \text{div } \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (3.22)$$

Decompondo o tensor de tensões σ em um tensor pressão p e um tensor τ de tensões viscosas:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (3.23)$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Trocando as parcelas do tensor de tensões na equação da quantidade de movimento, tem-se:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \right] = -\mathbf{grad} p + \text{div } \tau + \rho \mathbf{g} \quad (3.24)$$

que é a forma final da equação diferencial que expressa o princípio de conservação da quantidade de movimento.

Podemos, ainda, escrever a equação de conservação da quantidade de movimento

em coordenadas cilíndricas, na forma:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + g_r \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + g_\theta \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + g_z \quad (3.27)$$

3.3 Fluidos Newtonianos

Um certo volume de fluido escoar entre duas placas planas paralelas sendo a placa superior movendo-se com velocidade constante e a placa inferior fixa. Aplicando uma força tangencial na placa superior, como a da Fig.(3.1), ela se moverá com velocidade variável ∂u sob a influência de uma força constante ∂F_x , com isso o volume de fluido se deformará continuamente. Podemos agora definir tensão de cisalhamento que é a relação entre a componente tangencial da força F e a área da superfície onde ela está aplicada.

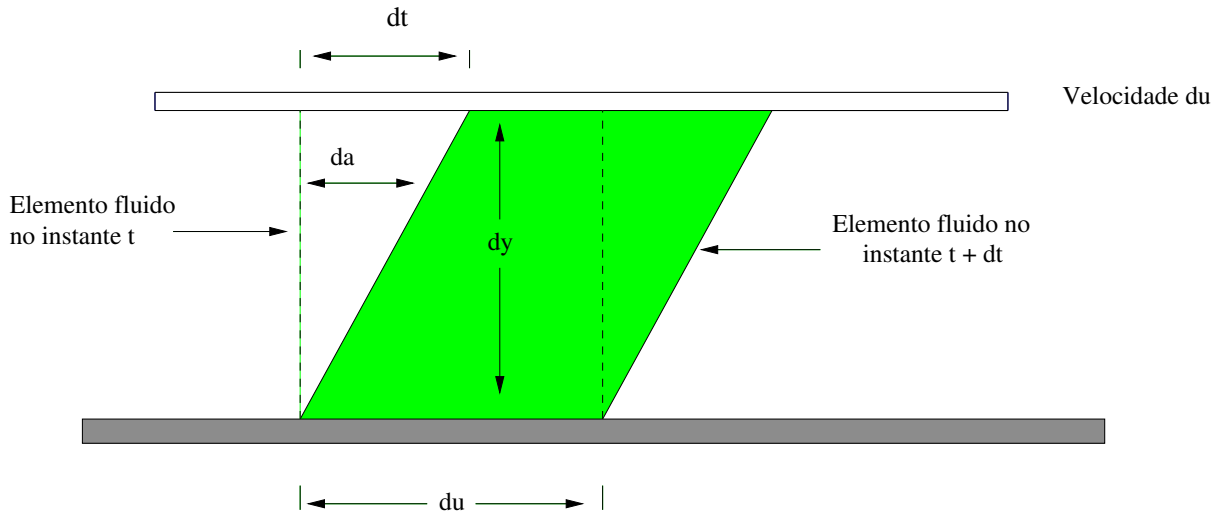


Figura 3.1: Deformação de um elemento fluido

Podemos traduzir o parágrafo anterior na forma de equações matemáticas que tomam as seguintes formas:

$$\tau_{yx} = \lim_{\partial A_y \rightarrow 0} \frac{\partial F_x}{\partial A_y} = \frac{dF_x}{dA_y} \quad (3.28)$$

sendo ∂A_y a área de contato do elemento fluido com a placa e ∂F_x a força aplicada pela placa ao elemento. A taxa de deformação do fluido é dada por:

$$\text{taxa de deformação} = \lim_{\partial t \rightarrow 0} \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{da}{dt} \quad (3.29)$$

Dessa forma, o elemento de fluido da Fig.(3.1), quando submetido à tensão de cisalhamento, τ_{yx} , experimenta uma taxa de deformação (*taxa de cisalhamento*) dada por du/dy . Os fluidos nos quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação são *fluidos newtonianos*. Os fluidos nos quais a tensão cisalhante não é diretamente proporcional à taxa de deformação, são chamados de *não-newtonianos*.

Se o fluido da Fig.(3.1) for newtoniano, então

$$\tau_{yx} \propto \frac{du}{dy} \quad (3.30)$$

Os fluidos que têm estruturas simples obedecem a essa relação, tais como água, ar. Já cremes dentais, sangue, óleos e fluidos plásticos não obedecem a essa relação de linearidade entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação.

E por fim escrevemos:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (3.31)$$

Podemos estabelecer a expressão seguinte:

$$\tau = 2\mu \mathbf{D} + \left[\lambda - \frac{2}{3}\mu\right](\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \quad (3.32)$$

que é a expressão do tensor de tensões viscosas de fluidos Newtonianos. O coeficiente μ representa a viscosidade dinâmica e λ o coeficiente de viscosidade volumétrica. Devido a incompressibilidade a Eq.(3.32) se torna:

$$\tau = 2\mu \mathbf{D}, \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ é um tensor que representa a parte simétrica a taxa de

deformação. Dessa forma:

$$\begin{aligned}\tau &= 2\mu\mathbf{D} \\ \tau &= 2\mu\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \\ \tau &= \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)\end{aligned}\tag{3.34}$$

3.4 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes é obtida substituindo o tensor de tensões τ , Eq.(3.34), na equação de quantidade de movimento, Eq.(3.24), e a equação da conservação de massa. Para um fluido incompressível, expressamos matematicamente como:

$$\rho \left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \right] = -\nabla p + \text{div} [\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)] + \rho\mathbf{g}\tag{3.35}$$

Podemos representar o membro esquerdo da Eq.(3.35) usando uma notação especial, onde o termo convectivo $[\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}]$ e o termo transiente $[\partial\mathbf{v}/\partial t]$ se unem. A representação agrupada desses dois termos recebe o nome de *Derivada Material* ou *Derivada Substancial*, escrevendo-a como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \text{div} [\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)] + \rho\mathbf{g}.\tag{3.36}$$

Dividindo a Eq.(3.36) por ρ e substituindo o termo μ/ρ por ν encontramos:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \text{div} [\nu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)] + \mathbf{g},\tag{3.37}$$

onde o termo ν é conhecido como *viscosidade cinemática*.

Fazendo o uso da notação indicial para a equação anterior, temos:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \mathbf{g}_i.\tag{3.38}$$

Assim:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \mathbf{g}_i.\tag{3.39}$$

Como $\partial v_j/\partial x_j = 0$, pela equação da continuidade, a equação de Navier-Stokes, toma a seguinte forma:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\nabla^2 v_i + \mathbf{g}_i.\tag{3.40}$$

Da mesma forma que procedemos para a representação da equação da quantidade de movimento podemos, também, utilizá-las para a equação de Navier-Stokes. Portanto a representação da mesma, em coordenadas cilíndricas, é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + g_r \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + g_\theta \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + g_z. \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.5 Equação de Transporte de Espécie Química

Podemos estabelecer o transporte de espécie química como sendo um fluido de viscosidade ρ que escoa através de um volume de controle V , onde a quantidade de massa de espécie química que entra no volume por unidade de tempo é igual ao fluxo de massa líquido para fora do volume, acrescido do consumo da espécie devido as reações químicas ocorridas. O enunciado acima pode ser interpretado, matematicamente, como:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \oint_S c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (3.44)$$

onde c representa a concentração da espécie química, \mathbf{v} a velocidade do fluido e \mathbf{n} a normal paralela ao escoamento. O fluxo de massa é dado por:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.45)$$

Utilizando o teorema de Gauss na Eq.(3.44) acima, obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \int_V \text{div } c \mathbf{v} dV - \int_V \text{div } \mathbf{J} dV, \quad (3.46)$$

ou,

$$\int_V \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } c \mathbf{v} \right] dV = - \int_V \text{div } \mathbf{J} dV. \quad (3.47)$$

Para um volume infinitesimal

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} c \mathbf{v} = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (3.48)$$

Expandindo os termos do lado esquerdo da expressão acima chega-se a:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c = -\operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (3.49)$$

ou:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (3.50)$$

Pela equação da continuidade (Eq. 3.12) o termo $[c \nabla \cdot \mathbf{v}]$ é igual a zero. Utilizando a primeira lei de Fick, dada por:

$$\mathbf{J} = -\kappa \nabla c, \quad (3.51)$$

onde κ é o coeficiente de difusão(molecular), a Eq.(3.50) toma a forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \operatorname{div} (\kappa \nabla c), \quad (3.52)$$

ou:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\kappa \nabla c) \quad (3.53)$$

Temos na equação de transporte de espécie química um termo transiente, um termo convectivo e um difusivo. Utilizando o conceito de *Derivada Substancial* encontramos:

$$\frac{Dc}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla c) \quad (3.54)$$

Essa última equação governa o transporte de uma espécie química em um fluido ([27]).

3.6 Adimensionalização

A adimensionalização é usada para agrupar os parâmetros do problema em alguns grupos adimensionais. O número de grupos adimensionais de um problema é definido pelo Teorema de Buckingham[ver no Apêndice A]. Usaremos a adimensionalização para o caso de um corpo imerso em um escoamento possuindo uma dimensão característica, onde também há uma velocidade imposta ao fluido. Faremos também a

adimensionalização das equações aplicáveis ao escoamento nas proximidades do eixo de um disco rotatório de grande diâmetro.

Para um corpo imerso, tomamos as seguintes equações,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla p + \operatorname{div} [\mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \rho \mathbf{g} \quad (3.55)$$

$$\operatorname{div} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.56)$$

Os fatores usados na adimensionalização das variáveis são:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\infty \rho^* & x &= Lx^* & \mathbf{g} &= g_\infty \mathbf{g}^* & c &= (c_s - c_\infty)c^* + C_\infty \\ \mu &= \mu_\infty \mu^* & \mathbf{v} &= U\mathbf{v}^* & t &= \frac{L}{U}t^* & \kappa &= \kappa_\infty \kappa^* \\ p &= \rho_\infty U^2 p^* & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t^*} & \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^* \end{aligned}$$

O asterisco indica as variáveis adimensionais. Trocando os parâmetros na Eq.(3.56), encontramos a equação da continuidade adimensionalizada:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0. \quad (3.57)$$

Substituindo na Eq.(3.55), encontramos:

$$\begin{aligned} \rho^* \left[\frac{\rho_0 U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 U^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right] = \\ - \frac{\rho_0 U^2}{L} \nabla^* p^* + \frac{\mu_0 U}{L^2} \operatorname{div} [\mu^* (\nabla^* \mathbf{v}^* + \nabla^* \mathbf{v}^{*T})] + \rho_0 g_0 \rho^* \mathbf{g}^*. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Multiplicando a Eq.(3.58) por $L/(\rho_0 U^2 \rho^*)$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = \\ - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\mu_0}{\rho_0 L U} \operatorname{div} [\nu^* (\nabla^* \mathbf{v}^* + \nabla^* \mathbf{v}^{*T})] + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \end{aligned} \quad (3.59)$$

A Eq.(3.59) contém dois grupos adimensionais:

- **Número de Reynolds(Re):** O número de Reynolds, que representa a razão entre forças inerciais e forças viscosas de escoamento. O número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho_0 L U}{\mu_0} = \frac{L U}{\nu_0},$$

onde ρ_0 , L , U e μ_0 são valores de referência para massa específica, comprimento, velocidade e viscosidade, respectivamente. O termo ν_0 representa a viscosidade

cinemática. Se o número de Reynolds for alto as forças são predominantemente inerciais, caso contrário as forças viscosas predominam.

• **Número de Froude**(Fr): Relaciona o efeito das forças de inércia e das forças de gravidade que atuam sobre um fluido:

$$Fr^2 = \frac{U^2}{gL}$$

O número de Froude é utilizado onde as forças gravitacionais são importantes, em particular, na presença de efeitos de empuxo.

Para escoamento próximo ao eixo de um disco rotatório de grande diâmetro, usa-se a unidade empregada para medir a espessura da camada limite, $(\nu(\infty)/\Omega)^{1/2}$, como padrão de comprimento. As componentes da velocidade e a pressão são divididas, respectivamente, por $r_e\Omega$ e por $\rho(r_e\Omega)^2$, onde r_e é o raio (dimensional) no qual a análise é feita. Então para as coordenadas espaciais, para uma componente qualquer da velocidade, v_i , e para a pressão adimensionalizadas:

$$r^* = r \left(\frac{\Omega}{\nu(\infty)} \right)^{1/2} \quad z^* = z \left(\frac{\Omega}{\nu(\infty)} \right)^{1/2} \quad v_i^* = \frac{v_i}{r_e\Omega} \quad p^* = \frac{p}{\rho(r_e\Omega)^2}.$$

O tempo e a frequência das perturbações, ω , são comparados com o tempo necessário para que uma partícula, deslocando-se com velocidade $r_e\Omega$, percorra a distância $(\nu(\infty)/\Omega)^{1/2}$, utilizada para medir a espessura da camada limite:

$$t^* = t r_e\Omega \left(\frac{\Omega}{\nu(\infty)} \right)^{1/2} = t \frac{r_e\Omega^{3/2}}{\nu(\infty)^{1/2}} \quad w^* = w \frac{\nu(\infty)^{1/2}}{r_e\Omega^{3/2}}.$$

Observe que os termos do tensor de tensões têm dimensões de $[\nu][v][r]^{-1}$, então a equação de Navier-Stokes torna-se:

$$\frac{r_e^2\Omega^{5/2}}{\nu(\infty)^{1/2}} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^* \right) = -\frac{r_e^2\Omega^{5/2}}{\nu(\infty)^{1/2}} \nabla p^* + \nu(\infty)r_e\Omega^2 \operatorname{div} \tau^*.$$

Simplificando e retirando os asteriscos, encontramos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \operatorname{div} \tau,$$

onde:

$$Re = r_e^* \left(\frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2} \tag{3.60}$$

Adimensionalizamos a equação do transporte de espécie química. Usando a Eq.(3.54)

e definindo:

$$c = (c_s - c_\infty)c^* + c_\infty,$$

obtém-se:

$$\frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t^*} [(c_s - c_\infty)c^* + c_\infty] + \frac{U \mathbf{v}^*}{L} \cdot \nabla^* [(c_s - c_\infty)c^*] = \frac{\kappa_\infty \kappa^*}{L} (\nabla^2)^* (c_s - c_\infty)c^* \quad (3.61)$$

$$\frac{U}{L} (c_s - c_\infty) \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \frac{U}{L} (c_s - c_\infty) \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{\kappa_\infty}{L^2} (c_s - c_\infty) \kappa^* (\nabla^2)^* c^*. \quad (3.62)$$

Multiplicando esta equação por $(L/c_s - c_\infty)U$, chega-se:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{\kappa_\infty}{UL} \kappa^* (\nabla^2)^* (c^*). \quad (3.63)$$

Na equação anterior encontramos um grupo adimensional importante, dado por:

- **Número de Peclet de Massa** (Pe_m): representa a relação entre dimensão característica de um corpo e a espessura da camada limite de concentração:

$$Pe_m = \frac{UL}{\kappa_\infty} \quad (3.64)$$

Para problemas de escoamento se faz o uso do número de *Reynolds*, então é conveniente separar a grandeza adimensional Pe_m em duas outras, sendo o número de *Reynolds* uma delas:

$$Pe_m = \frac{UL}{\kappa_\infty} = \frac{UL}{\nu_0} \frac{\nu_0}{\kappa_\infty} = ReSc. \quad (3.65)$$

- **Número de Schmitd** (Sc): mede a relação entre a espessura da camada limite hidrodinâmica e a camada limite de difusão de massa:

$$Sc = \frac{\nu_0}{\kappa_\infty}. \quad (3.66)$$

Retirando os asteriscos, obtém-se as equações adimensionalizadas em sua forma final:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{Re} \operatorname{div} [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (3.67)$$

$$\operatorname{div} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \kappa \nabla^2 c. \quad (3.69)$$

3.7 Equações do Campo Estacionário

Apresentamos abaixo as equações da continuidade, de Navier-Stokes e do transporte de uma espécie química em coordenadas cilíndricas, com as simplificações aplicáveis ao campo hidrodinâmico que se desenvolve em torno de dois discos rotatórios concêntricos. Desprezam-se os termos gravitacionais, as derivadas em relação ao tempo ($\partial/\partial t$), e em relação à coordenada azimutal θ . Admitindo, adicionalmente, que $\partial p/\partial r \neq 0$ as Eqs. 3.9 e 3.25 a 3.27 obtém-se:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.70)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \nu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2v_r}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (3.71)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (3.72)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.73)$$

$$v_z \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial \kappa}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} + \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \quad (3.74)$$

O campo hidrodinâmico de von Kármán incluindo o de transporte de uma espécie química e generalizado de modo a levar em consideração da dependência da pressão com a coordenada radial tem a forma:

$$v_r = r\Omega F(z^*) \quad (3.75)$$

$$v_\theta = r\Omega G(z^*) \quad (3.76)$$

$$v_z = (\nu\Omega)^{1/2} H(z^*) \quad (3.77)$$

$$c = C_\infty + (C_s - C_\infty) C(z^*) \quad (3.78)$$

$$p = \rho\nu\Omega P(z^*) + \frac{1}{2}\rho r^2 \Omega^2 k, \quad (3.79)$$

onde k é um parâmetro desconhecido. A coordenada adimensional z^* é definida como:

$$z^* = z \left(\frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2}. \quad (3.80)$$

A partir desse ponto denotamos por z a coordenada axial z^* , conforme definido na Eq. 3.80.

Substituindo as componentes da velocidade e da pressão, dadas pelas eqs.(3.75 a 3.79) nas eqs(3.70 a 3.73), obtemos um sistema de equações ordinárias não-lineares

para os perfis adimensionais F , G , H , P e C :

$$2F + H' = 0 \quad (3.81)$$

$$F^2 - G^2 + HF' - \nu F'' - \nu' F' + k = 0 \quad (3.82)$$

$$2FG + HG' - \nu G'' - \nu' G' = 0 \quad (3.83)$$

$$P' + HH' - \nu H'' - 2\nu' H' = 0 \quad (3.84)$$

$$ScHC' - \frac{C''}{\nu} + \frac{\nu'}{\nu^2} C' = 0. \quad (3.85)$$

Para o caso de fluido com viscosidade constante e na ausência de uma espécie química transportada pelo fluido as equações acima simplificam-se e tomam a forma:

$$2F + H' = 0 \quad (3.86)$$

$$F^2 - G^2 + HF' - F'' + k = 0 \quad (3.87)$$

$$2FG + HG' - G'' = 0 \quad (3.88)$$

$$P' + HH' - H'' = 0 \quad (3.89)$$

$$ScHC' - \frac{C''}{\nu} = 0. \quad (3.90)$$

Denominamos as Eqs. 3.81 a 3.85 e 3.86 a 3.90 como Equações de von Kármán Generalizadas para o campo hidrodinâmico e de uma espécie química transportada, que se desenvolve entre dois discos coaxiais. As quatro primeiras referem-se a fluido com viscosidade constante e as quatro últimas, a fluido com viscosidade dependente da concentração local da espécie química transportada.

As condições de contorno para F , G , H e P são:

$$\left. \begin{array}{l} z^* = 0 : \quad F = 0 \quad G = 1 \quad H = 0 \quad P = 0 \\ z^* = z_{max} : \quad F = 0 \quad G = 0 \quad \text{ou} \quad G = \pm 1 \quad H = 0. \end{array} \right\} \quad (3.91)$$

Os três valores acima indicados para a condição de contorno do perfil $G(z_{max})$ referem-se aos casos considerados nessa dissertação, em que um dos discos encontra-se parado, em movimento de corrotação ou de contrarrotação, respectivamente.

Observamos que a notação usada pelos autores que trataram do campo hidrodinâmico entre dois discos não é sempre a mesma. Alguns autores usam símbolos diferentes de outros e, em alguns casos, eliminam variáveis, trabalhando com número menor de equações, de ordem mais alta. A Tab. 3.1 apresenta a equivalência entre as variáveis, usadas por alguns autores.

Tabela 3.1: Equivalência entre a notação utilizada por diversos autores no estudo do campo hidrodinâmico entre dois discos coaxiais. A primeira linha da tabela contém as variáveis com a notação utilizada nessa dissertação e as demais linhas, a notação equivalente de outros autores. d representa a distância entre os dois discos e R é o número de Reynolds. Em todos os casos $\xi = z/d$.

Autor	F	G	H	k	z
Batchelor (1951)	$-\frac{1}{2}h'(\bar{\xi})$	$g(\bar{\xi})$	$h(\bar{\xi})$	$\frac{\Omega^2 + c}{\Omega^2}$	$\bar{\xi} = R^{1/2}\xi$
Stewartson (1953)	$\frac{1}{\Omega}H'(\bar{\xi})$	$\frac{1}{\Omega}G(\bar{\xi})$	$\frac{2}{(\nu\Omega)^{1/2}}H'(\bar{\xi})$	$\frac{\lambda}{\Omega^2}$	$\bar{\xi} = d(1 - \xi)$
Lance e Rogers (1962)	$F(\xi)$	$G(\xi)$	$H(\xi)$	k	$\xi = z/d$
Pearson (1965)	$-\frac{1}{2}H'(\xi)$	$G(\xi)$	$R^{1/2}H(\xi)$	-	-
Nguyen et. al(1975) [28]	$-\frac{1}{2R}f'(\bar{\xi})$	$\frac{1}{R}g(\bar{\xi})$	$-\frac{1}{R^{1/2}}f(\bar{\xi})$	-	$\bar{\xi} = 1 - \xi$
Dijkstra e van Heijst(1983)[29]	$rf'(z)$	$rg(z)$	$-2f(z)$	-	-

Capítulo 4

Solução Estacionária do Problema de Dois discos

A proposta de trabalho dessa dissertação consiste na obtenção do campo hidrodinâmico de fluido newtoniano com viscosidade constante, que se desenvolve entre dois discos coaxiais. O campo é obtido pelos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos. Esse capítulo aborda a obtenção dos perfis estacionários F , G e H , que satisfazem às Eqs. 3.86 a 3.88, pelo método de diferenças finitas. A descrição do método, do código em que se implementa o método e os resultados obtidos encontram-se nas Sec.^s 4.1, 4.1.1 e 4.2, respectivamente.

O método de elementos finitos foi usado para a resolução das equações da continuidade de Navier-Stokes tridimensionais e dependentes do tempo. A descrição do método e os resultados encontram-se nos Cap.^s 5 e 6.

As Eqs. 3.86 a 3.88 foram resolvidas com o emprego do *software* comercial *Matlab*[®]. Trata-se de poderosa ferramenta de solução de problemas envolvendo o uso de matrizes e de fácil utilização. A ferramenta tem a desvantagem de exigir o uso de máquinas com quantidade de memória superior à encontradas na maioria dos computadores pessoais e de processadores muito eficientes, quando se trabalha com número de equações acima de certo limite. Para problemas que não requerem muita memória, como é o caso da presente dissertação, o *software* mostrou-se capaz de realizar todas as tarefas a que foi solicitado de modo correto. Para a resolução de problemas de maior porte é necessário o emprego de códigos escritos em linguagem de programação como *C++*, *Fortran*, etc.

4.1 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas compreende inicialmente, a representação das derivadas espaciais e temporais das equações que governam o sistema em estudo por

diferenças entre valores das variáveis calculadas nos pontos de uma malha discreta. Essa representação é obtida por expansões em séries de Taylor. Transforma-se o sistema original, de equações diferenciais, em um sistema de equações algébricas, cujas incógnitas são as variáveis acima mencionadas. No presente caso, em que buscamos a solução de um sistema de equações ordinárias de equilíbrio (e não, de propagação), deve-se prescrever as condições de contorno do problema, que podem ser de Neumann ou de Dirichlet ou Mista. Dizemos que uma condição de contorno é do tipo Dirichlet quando prescreve-se o valor da função no contorno. Quando conhecemos a derivada normal à fronteira, a condição de fronteira é dita de Neumann. Quando prescreve-se os dois tipos dizemos que as condições de contorno são do tipo Mista (Fortuna [30]).

4.1.1 Representação de Derivadas em Forma Discreta

As Eqs. 3.86 a 3.88 contém derivadas de primeira e de segunda ordem que devemos representar sob forma discreta. Para fazê-lo utilizamos a expansão de uma função $f(x)$ em série de Taylor, na forma:

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_0} + \dots + R_N, \quad (4.1)$$

onde $\Delta x = x - x_0$ e R_N é o resto, definido como

$$R_N = \frac{(\Delta x)^N}{N!} \left. \frac{d^N f}{dx^N} \right|_{\zeta}, \quad \zeta \in [a, b].$$

A Fig. 4.1.1 mostra alguns pontos $i+m$ de uma malha unidimensional, com pontos igualmente espaçados. Nessas condições $x_i - x_{i-1} = \Delta x$. A representação discreta



Figura 4.1: Malhas de pontos uniformemente espaçados

da primeira derivada de uma função f no ponto $x_i = i\Delta x$ é obtida da seguinte forma: expande-se os termos de $f(x_i + \Delta x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i , encontrando-se:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i + \dots \quad (4.2)$$

De acordo com a expansão acima, determinamos a fórmula de diferenças centrais de 1ª ordem:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{fx_{i+1} - fx_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (4.3)$$

Para as derivadas segundas, obtemos:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = \frac{fx_{i+1} - 2fx_i + fx_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2. \quad (4.4)$$

A escolha de representações de diferenças finitas centrais reduz o erro à ordem $O(\Delta x)^2$, fazendo com que a precisão dos resultados aumente significativamente. Adotamos essa representação na presente dissertação, por ser de fácil implementação e por gerar resultados suficientemente precisos.

4.1.2 Discretização e Resolução das Equações de von Kármán Generalizadas (Fluido com Viscosidade Constante)

As Eqs. 3.86 a 3.88 são resolvidas pelo método de Newton. O método consiste em reescrevê-las com as derivadas representadas sob forma discreta e em arbitrar inicialmente valores para as variáveis F , G e H em todos os pontos da malha, satisfazendo às condições de contorno do problema. Introduzindo esses valores nas expressões discretizadas do membro esquerdo das Eqs. 3.86 a 3.88 obtém-se valores que denominamos por resíduo. O resíduo é diferente de zero em cada ponto da malha, a menos que os perfis inicialmente arbitrados satisfaçam às equações discretizadas. Procura-se então reduzir o resíduo a um valor abaixo de um mínimo especificado.

Consideremos uma malha deslocada (*staggered*), com n pontos i igualmente espaçados e $1 \leq i \leq n$. Nesse tipo de malha a fronteira do sistema localiza-se no ponto médio do intervalo entre os dois primeiros pontos da malha, de um dos lados, e no ponto médio do intervalo entre os dois últimos pontos da malha, do outro. Cada segmento compreendido entre dois pontos sucessivos da malha tem comprimento $\Delta x = L/(n-2)$, onde L é o comprimento do domínio (distância entre os dois discos) e n , o número de pontos da malha.

Reescrevendo as Eqs. 3.86 a 3.88 sob forma discreta de diferenças finitas de

segunda ordem encontramos:

$$F_i + \frac{1}{2\Delta x} (-H_{i-1} + H_{i+1}) = 0 \quad (4.5)$$

$$F^2 - G^2 + H \frac{1}{2\Delta x} (-F_{i-1} + F_{i+1}) - \frac{1}{2\Delta x} (F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1}) + k = 0 \quad (4.6)$$

$$2F_i G_i + H \frac{1}{2\Delta x} (-G_{i-1} + G_{i+1}) - \frac{1}{2\Delta x} (G_{i-1} - 2G_i + G_{i+1}) = 0. \quad (4.7)$$

Como em cada ponto i , de um dos n pontos da malha temos três variáveis a determinar, F_i, G_i e H_i , há $3n$ incógnitas a determinar, obtidas da solução de $3n$ equações. Dessas, $3n - 6$ equações são obtidas pela aplicação das Eqs. 4.5 a 4.7 entre o segundo e o último ponto da malha. As seis equações restantes são obtidas pela aplicação das condições de contorno a F_i, G_i e H_i , no primeiro e no último ponto da malha. Essas condições de contorno são as prescritas pelas Eqs. 3.91, que se traduzem, em forma discreta, por:

$$\left. \begin{aligned} z^* &= 0 : & F_1 + F_2 &= 0 & G_1 + G_2 &= 1 & H_1 + H_2 &= 0 \\ z^* &= z_{max}0 : & F_{n-1} + F_n &= 0 & G_1 + G_2 &= R & H_{n-1} - H_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

onde R assume os valores 0, ou +1, ou -1, nos casos do segundo disco encontrar-se parado, em movimento de corrotação, ou de contrarrotação, respectivamente.

Nesse ponto fazemos uma observação a respeito das condições de contorno impostas para a solução do problema representado pelas Eqs. 4.5 a 4.7. As equações originais do problema Eqs. 3.86 a 3.88 formam um sistema de quinta ordem, que, consequentemente, requerem cinco condições de contorno. Para o problema discretizado impomos *seis* condições, uma das quais é portanto redundante. A condição redundante é a que prescreve $H_{n-1} - H_n = 0$, pois a Eq. 3.86 requer $(dH/dz)_{z=z_{max}} = 0$.

Cada uma das Eqs. 4.5 a 4.7 pode ser escrita, de forma geral, como:

$$f_m(X_j^0) = r_m, \quad (4.9)$$

onde X_j^0 representa o conjunto de variáveis das quais f_m depende.

Na Eq. 4.9 $4 \leq m \leq 3n - 3$, X_j^0 representa o valor inicialmente arbitrado dos perfis que intervêm nas Eqs. 4.5 a 4.7 e r_m é o resíduo, que toma o valor zero se os perfis satisfizerem às equações discretas.

A Fig. 4.2 mostra os perfis inicialmente arbitrados para todos os pontos da malha, exceto quanto ao valor de G no último ponto, que é ajustado a que a condição de contorno dada pelas Eqs. 4.8 seja satisfeita. Esses perfis iniciais foram usados em todos os casos estudados nessa dissertação (um dos discos parados, ou os dois discos girando no mesmo sentido, ou os discos girando em sentidos opostos. Cabe ressaltar que, embora os perfis iniciais se aproximem mais dos que se obtém em um caso em

que os discos giram em sentidos opostos, o código logrou a obter solução, o que fornece indicação da robustez dos algoritmos empregados.

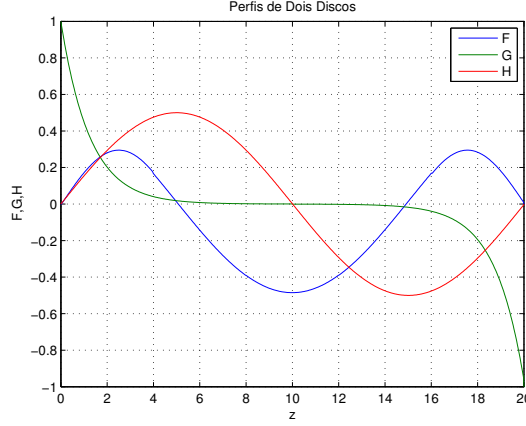


Figura 4.2: Perfis iniciais adotados para todos os pontos da malha, exceto para o valor de G do último ponto, que foi ajustado de modo a satisfazer a condição de contorno dada pelas Eqs. 4.8 em todos os casos estudados nessa dissertação. Esses perfis baseiam-se em solução apresentada por Holodniok [17]. Os valores de G no último ponto da malha são alterados de modo a que a condição de contorno especificadas na Eq. 4.8 seja satisfeita antes do início do cálculo iterativo dos perfis. Cabe ressaltar que, embora os perfis iniciais se aproximem mais dos que se obtém em um caso em que os discos giram em sentidos opostos, o código logrou a obter solução, o que fornece indicação da robustez dos algoritmos empregados.

Se o resíduo for, em cada ponto, maior do que um valor especificado, procura-se uma correção ΔX_j , para os valores X_j^0 inicialmente arbitrado. Escreve-se:

$$f_m(X_j^0 + \Delta X_j^0) = 0. \quad (4.10)$$

Sendo os perfis inicialmente arbitrados suficientemente próximos da solução buscada pode-se linearizar a Eq. 4.10, reescrevendo-a como:

$$f_m(X_j^0 + \Delta X_j^0) = f_m(X_j^0) + \frac{\partial f_m}{\partial X_j} \Delta X_j^0 = 0, \quad (4.11)$$

onde ΔX_j é a correção procurada, a ser aplicada aos perfis inicialmente arbitrados. Observando que $f_m(X_j^0) = r_m$ reescrevemos a Eq. 4.11 como:

$$r_m + \frac{\partial f_m}{\partial X_j} \Delta X_j^0 = 0, \quad (4.12)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial f_m}{\partial X_j} \Delta X_j^0 = -r_m, \quad (4.13)$$

donde obtém-se para a correção ΔX_j^0 :

$$\Delta X_j^0 = - \left(\frac{\partial f_m}{\partial X_j} \right)^{-1} r_m. \quad (4.14)$$

Como os perfis inicialmente arbitrados satisfazem às condições de contorno a correção aplicada aos valores arbitrados não os devem alterar. As condições de contorno do resíduo expressam-se então sob a forma:

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad \Delta F_1 + \Delta F_2 &= 0 & \Delta G_1 + \Delta G_2 &= 1 & \Delta H_1 + \Delta H_2 &= 0 \\ i = n : \quad \Delta F_{n-1} + \Delta F_n &= 0 & & & \Delta H_{n-1} - \Delta H_n &= 0. \end{aligned}$$

As Eqs. 4.5 a 4.7 são aplicadas sucessivamente entre o segundo e o último ponto da malha. Utilizando as condições de contorno conforme acima obtém-se um sistema de equações algébricas lineares da forma:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{r}. \quad (4.15)$$

Determinemos a expressão de cada uma das derivadas $\partial f_m / \partial X_j$. As derivadas da Eq. 4.5 são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial F_i} &= 2F_i + \frac{2}{(\Delta x)^2} & \frac{\partial f_m}{\partial F_{i+1}} &= \frac{H_i}{2\Delta x} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial f_m}{\partial F_{i-1}} &= \frac{H_i}{2\Delta x} - \frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{\partial f_m}{\partial H_i} &= \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial f_m}{\partial G_i} &= -2G_i \end{aligned}$$

Derivadas da Eq. 4.6:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial F_i} &= 2G_i & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial G_{i-1}} &= \frac{H_i}{2\Delta x} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial G_i} &= 2F_i + \frac{2}{(\Delta x)^2} & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial H_i} &= \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial G_{i+1}} &= \frac{H_i}{2\Delta x} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Derivadas da Eq. 4.7:

$$\frac{\partial f_{m+2}}{\partial F_i} = 2 \quad \frac{\partial f_{m+2}}{\partial H_{i-1}} = -\frac{1}{2\Delta x} \quad \frac{\partial f_{m+2}}{\partial H_{i+1}} = \frac{1}{2\Delta x}.$$

De posse das derivadas acima podemos montar a matriz de coeficientes A . Obtém-se uma matriz esparsa cuja estrutura é mostrada na Fig.(4.3). Apenas os elementos indicados na figura são diferentes de zero. Os elementos das três primeiras e das três últimas linhas são obtidos das condições de contorno aplicáveis à correção ΔX_j . Os seis elementos não nulos das três primeiras linhas são iguais a 1. Dos nove elementos não nulos das três últimas linhas o último é igual a -1 e os demais, iguais a 1.

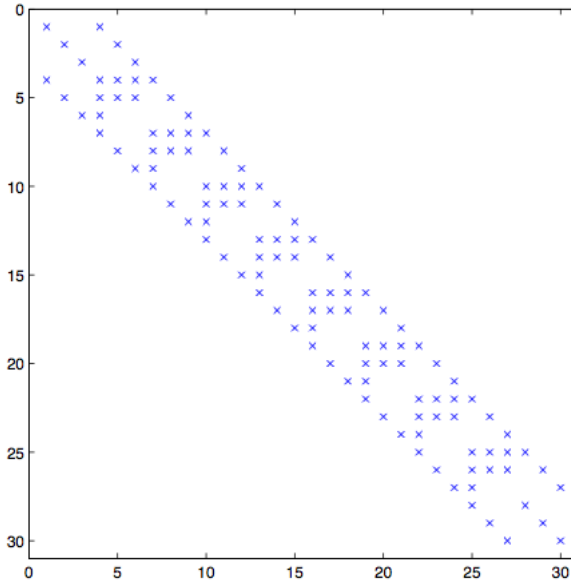


Figura 4.3: Estrutura da matriz esparsa A . Apenas os elementos indicados na figura são diferentes de zero. Os elementos das três primeiras e das três últimas linhas são obtidos das condições de contorno aplicáveis à correção ΔX_j . Os seis elementos não nulos das três primeiras linhas são iguais a 1. Dos nove elementos não nulos das três últimas linhas o último é igual a -1 e os demais, iguais a 1. Os demais elementos da matriz agrupam-se em blocos de três linhas. Cada bloco contém 13 elementos não nulos correspondentes às derivadas $\partial f_m / \partial X_j$. O conteúdo dos elementos de cada bloco de 3 linhas posicionados entre as linhas 4 e $n - 4$ são mostrados na Fig. 4.4.

$\frac{\partial f_m}{\partial F_{i-1}}$	0	0	$\frac{\partial f_m}{\partial F_i}$	$\frac{\partial f_m}{\partial G_i}$	$\frac{\partial f_m}{\partial H_i}$	$\frac{\partial f_m}{\partial F_{i+1}}$	0	0
0	$\frac{\partial f_{m+1}}{\partial G_{i-1}}$	0	$\frac{\partial f_{m+1}}{\partial F_i}$	$\frac{\partial f_{m+1}}{\partial G_i}$	$\frac{\partial f_{m+1}}{\partial H_i}$	0	$\frac{\partial f_{m+1}}{\partial G_{i+1}}$	0
0	0	$\frac{\partial f_{m+2}}{\partial H_{i-1}}$	$\frac{\partial f_{m+2}}{\partial F_i}$	0	0	0	0	$\frac{\partial f_{m+2}}{\partial H_{i+1}}$

Figura 4.4: Conteúdo de cada bloco de três linhas da matriz A , posicionadas entre as linhas 4 e $n - 4$. O índice m assume valores $m = 3i + 1$, com $1 \leq i < n$. Cada bloco contém 13 elementos não nulos.

O sistema linear representado pela Eq. 4.15 tem então, a forma mostrada na Eq. 4.16. A abreviação c.c refere-se a condições de contorno.

$$A \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta G_1 \\ \Delta H_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta G_2 \\ \Delta H_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta F_n \\ \Delta G_n \\ \Delta H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c.c \\ c.c \\ c.c \\ -\left(F_i^2 - G_i^2 + H_i \left[\frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \right] - \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{(\Delta x)^2} + k\right) \\ -\left(2F_i G_i + H_i \left[\frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} \right] - \frac{G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}}{(\Delta x)^2}\right) \\ -\left(2F_i + \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta x}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ c.c \\ c.c \\ c.c \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A solução desse sistema fornece uma estimativa da correção procurada para os valores inicialmente atribuídos aos perfis em todos os pontos da malha. Não sendo o problema original linear a aplicação integral da correção calculada conforme acima não conduz diretamente aos perfis que satisfazem às equações discretizadas. Adota-se então a estratégia de aplicar uma fração da correção aos perfis, tratar o resultado como novos valores iniciais dos mesmos e reiterar o procedimento até que a norma do resíduo não ultrapasse um valor especificado. A norma do resíduo é definida por:

$$L_1 = \frac{\sum_{m=1}^{m=3n} r_i}{3n}. \quad (4.17)$$

O limite acima do qual os perfis não são aceitos foi especificado nessa dissertação como $L_1 = 10^{-9}$.

Um método de resolução da Eq. 4.16 utiliza a decomposição $A = LU$. Dentre outros métodos possíveis citamos o de gradientes conjugados e o de Gauss-Seidel, que foi utilizado nesse trabalho. O método adota procedimento iterativo em que obtém-se sucessivamente resultados aproximados até que um critério de convergência seja satisfeito.

As Eqs. 3.86 a 3.88, juntamente com as condições de contorno aplicáveis ao problema de dois discos coaxiais, não apresenta solução para qualquer valor de k . No presente trabalho, resolvemos a forma discretizada dessas equações, dadas pelas Eqs. 4.5 a 4.7, complementadas pelas condições de contorno prescritas pelas Eqs. 4.8. Não prescrevemos valor para a componente axial da velocidade junto à superfície

do segundo disco, o que se traduz por $H(z_{max}) = 0$ nessa superfície. No código que desenvolvemos esse valor é calculado e só se obtém $H(z_{max}) = 0$ para alguns valores de k . Os valores do parâmetro que encontramos na literatura referem-se apenas a casos em que a distância adimensional z_{max} entre os dois discos é igual a 25. Utilizamos então esses valores para reproduzir os perfis que se, com o intuito de verificar a correção do código. Os perfis encontrados na literatura e que reproduzimos encontram-se no presente capítulo. Novos resultados, obtidos para outras distâncias adimensionais entre os discos são apresentados e discutidos no Cap. 6.

O código que desenvolvemos para resolução das Eqs. 4.5 a 4.7 foi escrito para uso no *software* comercial *Matlab*[®]. O código possui um módulo interno que resolve as equações acima para valores prescritos de k . Não sendo esses valores corretos obtém-se como solução valores de $H(z_{max})$ na superfície do segundo disco diferentes de zero.

A estrutura simplificada do módulo que resolve as Eqs. 4.5 a 4.7 encontra-se exposta abaixo para melhor compreensão do seu funcionamento. O código, apesar de simples permitiu que obtivéssemos os resultados desejados:

```

for p = 1 : itmax                                {loop das iterações }
    for i = 2 : n-1
        p = 3*i-3
        A(1+p,p-2) =      {Montagem da matriz A}
                           :
        A(3+p,6+p) =
        j = 3*i
        r(j-2,1) = resíduo
        r(j-1,1) = resíduo
        r(j,1) = resíduo
    end
                           :
end.

```

4.1.3 Método de procura automática do parâmetro k

A resolução das Eqs. 3.86 a 3.88 envolve a especificação do parâmetro k , que caracteriza a dependência da pressão com a coordenada radial. Conforme mencionado à pag. 36 apenas para alguns valores desse parâmetro obtém-se soluções daquelas equações com $H(z_{max}) = 0$ junto à superfície do segundo disco. Essa seção des-

creve o procedimento adotado para a determinação dos valores de k que conduzem a soluções buscadas dos perfis de velocidade.

O procedimento divide-se em duas etapas. Em uma primeira etapa utilizamos o método da bissecção, em que inserimos o procedimento que resolve as Eqs. 3.86 a 3.88 dentro de um laço que repete o cálculo para valores prescritos de k . Para alguns desses obtém-se $H(z_{max}) > 0$ na superfície do segundo disco e para outros, obtém-se $H(z_{max}) < 0$. Os valores de $H(z_{max})$ localizam-se ao longo de uma reta, conforme mostrado na Fig. 4.5 para dois valores da distância ente os discos: $z = 1$ e $z = 5$. Por interpolação, determina-se um valor de k próximo do buscado. Obtivemos, no primeiro caso ($z_{max} = 1$) $k \approx 0.29$ e, no segundo, ($z_{max} = 5$), $0.125 < k < 0.13$.

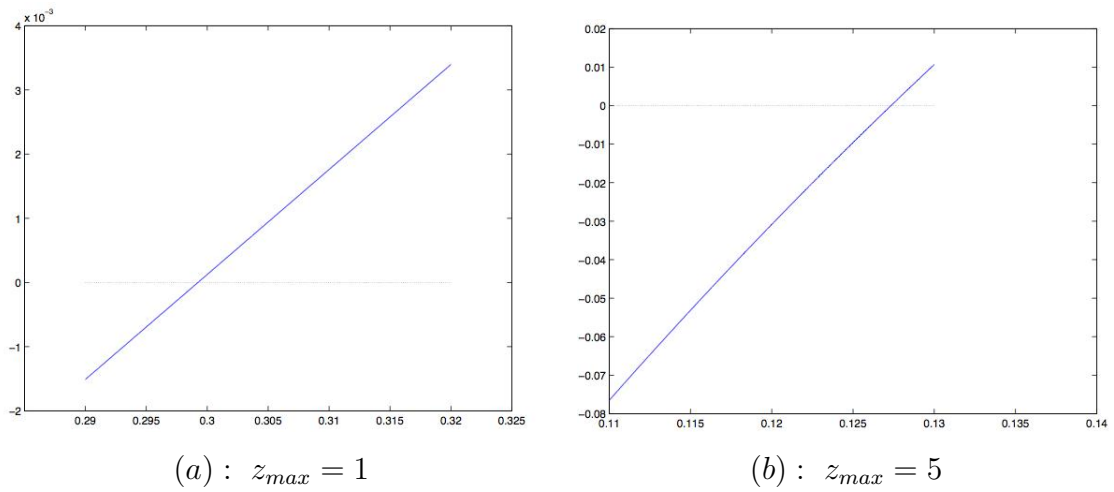


Figura 4.5: Diagramas mostrando $H(z_{max}) \times k$, para $z_{max} = 1$ (à esquerda) e $z_{max} = 5$ (à direita). O diagrama mostra também o uso do método de bissecção para a determinação de valores do parâmetro k (conforme Eq. 3.86). Arbitra-se valores de k e verifica-se o valor obtido para $H(z_{max})$. Para alguns valores de k encontra-se $H(z_{max}) > 0$ e, para outros, encontra-se $H(z_{max}) < 0$. Os gráficos acima mostram a dependência de $H(z_{max})$ com os valores especificados de k , para dois valores da distância entre os discos: $z_{max} = 1$ e $z_{max} = 5$. Por interpolação, determina-se um valor de k próximo do buscado. Esse é o método da bissecção. O valor assim obtido é usado como dado de entrada de um segundo procedimento que refina essa estimativa. Ressaltamos que, no uso do método da bissecção calculamos apenas alguns dos pontos mostrados nos gráficos acima.

Em uma segunda etapa utilizamos uma rotina do *software* comercial *Matlab*[®], para determinar com mais precisão valores de k que resultam nas soluções buscadas, com valores de $H(z_{max})$ suficientemente próximos de zero. A rotina, denominada *fsolve*, recebe como argumentos o parâmetro a ser variado para se chegar ao objetivo e o procedimento de resolução das equações, que deve incluir teste do valor obtido

para a variável objetivo, $H(z_{max})$. A rotina exige que o valor inicial de k seja suficientemente próximo do buscado e fornece uma estimativa geralmente melhor do que a obtida com o método da bissecção.

A seguir são mostrados os gráficos de perfis já existentes na literatura e que foram aqui reproduzidos segundo os procedimentos acima expostos.

4.2 Perfis do campo com dois discos

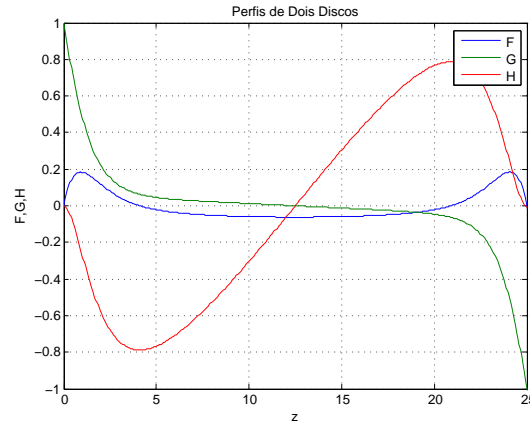


Figura 4.6: Solução em regime contrarrotatório com $k = -0.002956$.

A Fig. (4.6) mostra a solução obtida para o caso contrarrotatório, com o valor do parâmetro $k = -0.002956$, obtido do trabalho de Holodniok *et al* [17]. A velocidade angular do segundo disco foi arbitrada de forma a que tivéssemos $G = -1$. A malha utilizada contém 400 pontos e o cálculo prosseguiu até que se atingisse um valor para a norma do resíduo inferior a 10^{-9} .

As soluções apresentadas nas Figs. (4.7) e (4.8) referem-se igualmente ao caso contrarrotatório, com o segundo disco girando de forma a ter-se $G = -1$. Os valores da constante k são dados na legenda das figuras.

Os resultados apresentados na Fig. (4.6), mostram que os discos comportam-se como centrífugas, impulsionando o fluido para fora na direção radial. Na configuração a que se refere a Fig. (4.7) aproximadamente a metade da lâmina de fluido gira em um sentido, igual ao sentido de rotação do disco mais próximo, e a outra metade, gira no sentido inverso. No entanto, o campo hidrodinâmico não é simétrico, sendo a magnitude dos perfis de velocidade medidas a distâncias especificadas de um dos discos diferentes dos valores encontrados à mesma distância do segundo disco.

A Fig. (4.8) mostra solução em que o fluido se encontra quase estagnado próximo a um dos discos. Próximo ao outro, observa-se movimento de rotação com sentido *contrário* ao do disco.

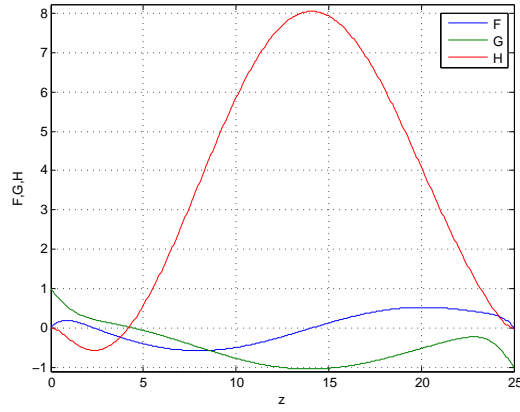


Figura 4.7: Solução em regime contrarrotatório e $k = -0.057678$.

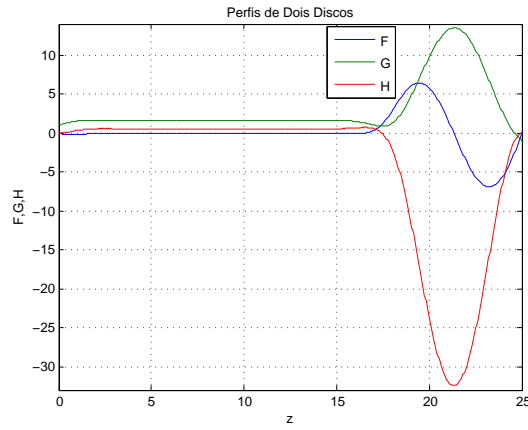


Figura 4.8: Solução em regime contrarrotatório e $k = 2.530180$

As soluções apresentadas nas Figs. (4.9), (4.10) e (4.11) correspondem aos casos de um dos discos parados.

No caso mostrado na Fig. (4.9) o fluido próximo ao disco em movimento gira no sentido desse disco e em sentido contrário, além de $z = 4$. O caso mostrado na Fig. (4.10) mostra perfis F e G semelhantes aos do campo que se desenvolve próximo a um único disco. Para $z > 5$ as componentes radial e azimuthal são pequenas quando comparadas à componente axial. No caso mostrado na Fig. (4.11) a componente radial da velocidade é negativa na proximidade do disco parado.

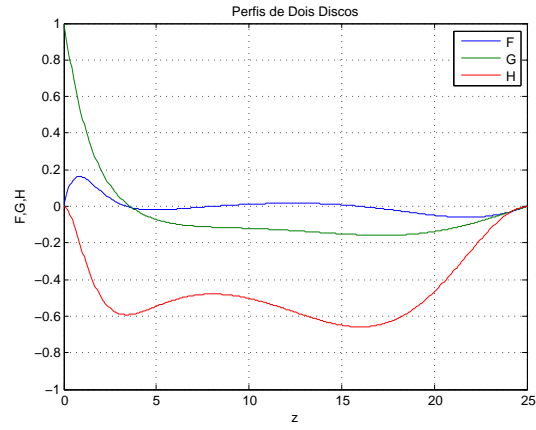


Figura 4.9: Solução com um dos discos parado e $k = 0.0155780$

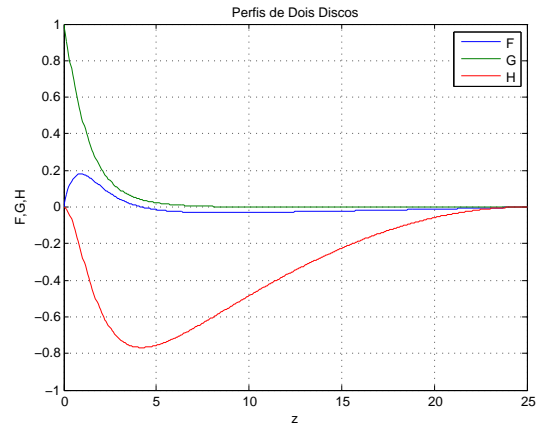


Figura 4.10: Solução com um dos discos parado e $k = 0.000040$

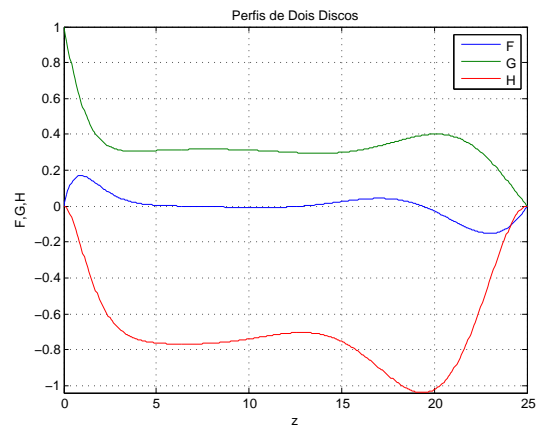


Figura 4.11: Solução com um dos discos parado e $k = 0.098264$

As soluções apresentadas nas Figs. (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) correspondem ao caso de dois discos girando no mesmo sentido com $G = 1$ na superfície do segundo disco.

A Fig. (4.12) mostra que, próximo ao ponto médio da distância entre os dois discos a componente axial da velocidade é voltada para o ponto médio. Nessa região, a componente azimutal da velocidade tem sentido *contrário* ao de rotação dos dois discos. Nota-se também a existência de regiões em que a componente radial da velocidade é voltada para dentro [17].

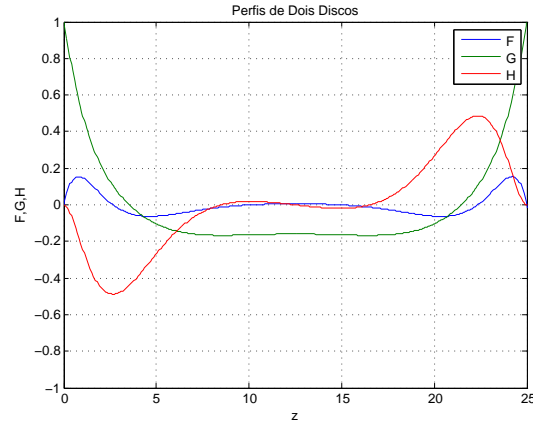


Figura 4.12: Solução corrotatório e $k = 0.023612$

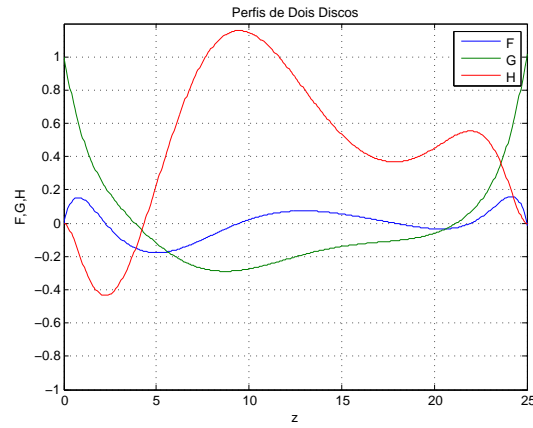


Figura 4.13: Solução corrotatório e $k = 0.020168$

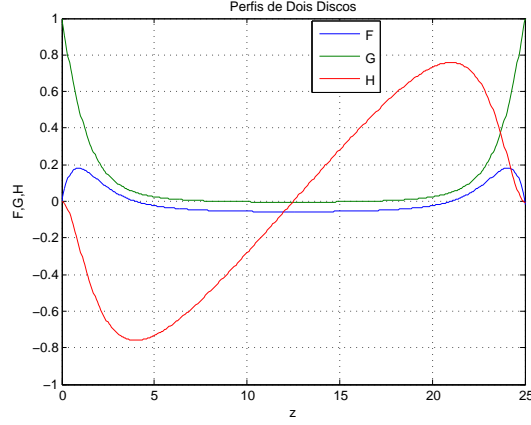


Figura 4.14: Solução corrotatório e $k = -0.002663$

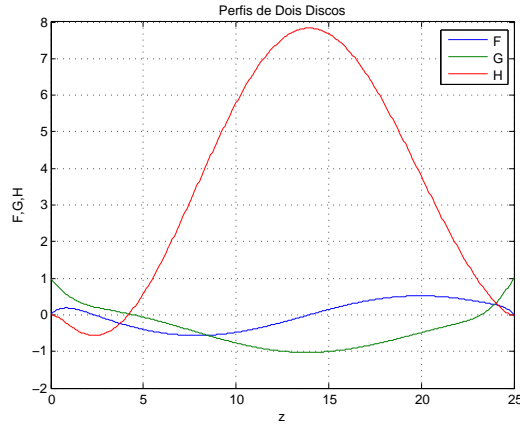


Figura 4.15: Solução corrotatório e $k = -0.056366$

Os perfis mostrados nesse capítulo sobre escoamento entre dois discos rotatórios, nos três casos estudados, ou seja, disco parado, contrarrotatório e corrotatório encontram-se na literatura, e foram reproduzidos com código numérico desenvolvido ao longo do presente programa de mestrado. Os perfis acima apresentados foram reproduzidos para dar crédito aos resultados apresentados adiante.

Reforçamos que não se trata de uma cópia. O código é novo e na literatura pesquisada não faz nenhuma referência de como criá-lo.

Utilizando o código reproduzimos diversos perfis de velocidades encontrados em artigos da literatura servindo de referência para o prosseguimento das pesquisas no programa de mestrado.

Capítulo 5

Elementos Finitos

A necessidade de métodos de resolução de equações de governo de problemas físicos fez com que muitos pesquisadores descobrissem diversas utilidades para o uso do método de elementos finitos. Inicialmente o método foi aplicado a sólidos e somente décadas depois ele passou a ter utilidade na mecânica dos fluidos, onde através de Galerkin pôde desenvolver o método para fluidos e a sua aplicação ganhou muito espaço e a utilização ficou mais evidente, tendo-se, assim, a necessidade de um conhecimento mais detalhado. O método de elementos finitos pode ser descrito por um procedimento ao qual, através da utilização de funções de aproximação de um modelo discretizado que consiste em dividir o intervalo em um número finito de pontos, com isso criando subintervalos; esses pequenos intervalos são chamados de subdomínios. Estes subdomínios são chamados de elementos finitos e a aproximação local da função de cada um dos elementos finitos é definida unicamente em termos da discretização de valores da função de um número finito pré-selecionado de pontos no seu domínio. Podemos citar alguns autores como [31], [32], [33].

Em sua dissertação de mestrado, Anjos [4] utilizou o método de elementos finitos para obter os perfis de velocidade do problema de escoamento do campo hidrodinâmico contendo um disco rotatório. Como essa dissertação tem por objetivo continuar o estudo elaborado em seu texto, então, para a solução do problema de dois discos o método descrito aqui baseou-se no método de elementos finitos descrito por ele.

A dificuldade do uso do método de elementos finitos decorre da presença do termo convectivo e do acoplamento entre velocidade e pressão que encontramos nas equações que regem o movimento dos fluidos, ou seja, nas equações de conservação. O produto das incógnitas do termo convectivo dar a origem a um efeito não-linear, que resulta em um sistema de equações cujo operador que atua sobre as incógnitas é não-simétrico. Ao se aumentar o número de *Reynolds* outra dificuldade é criada no termo convectivo, pois o termo passa a ter uma maior influência no movimento do fluido e torna a solução mais complicada.

5.1 Formulação Variacional

O cálculo variacional busca encontrar valores para minimizar um funcional. O funcional é uma integral que terá o seu valor especificado para cada função que será substituída no mesmo. A partir daqui é necessário o conhecimento de alguns conceitos de espaços, normas e produto interno de funções que encontramos as definições em [34], [35] e [36].

Para a solução da formulação variacional precisamos encontrar uma função tal que seja de quadrado integrável, de acordo com Hughes [31]. Primeiro vamos definir o espaço de funções $L^2(\Omega)$, caracterizado pela integral de Lebesgue, que para funções contínuas, é equivalente a integral de Riemann e dessa forma escrevemos:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} (u)^2 dx < \infty \right\} \quad (5.1)$$

Funções que satisfazem a Eq. (5.1) são chamadas de \mathbf{H}^1 -funções, onde H representa o espaço de funções de Hilbert de ordem 1 em Ω . Podemos escrever o subespaço de soluções dessas funções como:

$$S = \{u \mid u \in H^1(\Omega)\} \quad (5.2)$$

com

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, p\} \quad (5.3)$$

Consideremos agora que as equações de Navier-Stokes e de transporte de uma espécie química dadas em sua forma adimensional, sejam válidas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ sujeitas as condições de contorno

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\Gamma \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \quad (5.4)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \sigma^{nn} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_2 \quad (5.5)$$

$$c = c_\Gamma \quad \text{em} \quad \Gamma_3 \quad (5.6)$$

Agora fazendo $\mathbb{W} = H^1(\Omega)^p$ que representa o produto cartesiano de p espaços de $H^1(\Omega)$, definimos, então:

$$\mathbb{W}_{\mathbf{w}_\Gamma} = \{\mathbf{w}_\Gamma \in \mathbb{W} : \mathbf{w} = \mathbf{w}_\Gamma \quad \text{em} \quad \Gamma_1\} \quad (5.7)$$

$$\mathbb{P}_{p_\Gamma} = \{q \in L^2(\Omega) : q = p_\Gamma \quad \text{em} \quad \Gamma_2\} \quad (5.8)$$

$$\mathbb{C}_{c_\Gamma} = \{c \in L^2(\Omega) : c = c_\Gamma \quad \text{em} \quad \Gamma_3\} \quad (5.9)$$

Consideremos as equações de Navier-Stokes e de transporte de uma espécie química, para o caso de fluidos incompressíveis, descritas abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \mathbf{g} \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \kappa \nabla^2 c \quad (5.12)$$

O método de Galerkin consiste em utilizar funções peso nas Eq.(5.10) a Eq.(5.12) desde que pertençam ao mesmo espaço de funções de forma. Um melhor entendimento do método é dado na seção 5.2. Agora integrando-as, encontramos:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] - \mathbf{g} \right] \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (5.13)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q d\Omega = 0 \quad (5.14)$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \kappa \nabla^2 c \right] r d\Omega = 0 \quad (5.15)$$

Desenvolvendo os termos das equações acima, chegamos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] \right) \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q d\Omega = 0 \quad (5.17)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c \right) r d\Omega - \int_{\Omega} [\kappa \nabla^2 c] r d\Omega = 0 \quad (5.18)$$

No termo difusivo é necessário que baixemos a sua ordem. Para isso, usaremos o teorema da integração por partes de Green. Logo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] \cdot \mathbf{w} d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{w}] d\Gamma \\ &- \int_{\Omega} \nu [(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) : \nabla \mathbf{w}^T] d\Omega \end{aligned} \quad (5.19)$$

e

$$\int_{\Omega} [\kappa \nabla^2 c] r d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \kappa \nabla c) r d\Gamma + \int_{\Omega} [\kappa \nabla c] \cdot \nabla r^T d\Omega \quad (5.20)$$

As funções de ponderação devem ser nulas no contorno, assim, as integrais em Γ nas Eqs. (5.19) e (5.20) devem ser iguais a zero, pois, $\mathbf{w}|_{\Gamma_i} \equiv 0$ $r|_{\Gamma_i} \equiv 0$ em todo Γ_i

onde são definidas. O operador $(:)$ representa o produto escalar entre dois tensores. Aplicando novamente o teorema de Green no termo do gradiente de pressão, teremos:

$$\frac{1}{\rho} \int_{\Omega} [\nabla p] \cdot \mathbf{w} d\Omega = \frac{1}{\rho} \left[\int_{\Gamma} p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega \right] \quad (5.21)$$

Novamente a integral do contorno Γ é nula. Usando o conceito de derivada substancial e utilizando a hipótese do campo gravitacional não influenciar no escoamento próximo ao disco, então podemos escrever as seguintes equações:

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} \nu [(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] : \nabla \mathbf{w}^T d\Omega = 0 \quad (5.22)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q d\Omega = 0 \quad (5.23)$$

$$\int_{\Omega} \frac{Dc}{Dt} r d\Omega + \int_{\Omega} (\kappa \nabla c) \cdot \nabla \mathbf{v}^T d\Omega = 0 \quad (5.24)$$

Usando a notação na forma bilinear (\cdot, \cdot) podemos representar os termos anteriores como:

$$m\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \mathbf{w}\right) = \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (5.25)$$

$$f(\nu, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nu [(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] : \nabla \mathbf{w}^T d\Omega \quad (5.26)$$

$$g(p, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (5.27)$$

$$d(p, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) p d\Omega \quad (5.28)$$

$$\tilde{f}(\kappa, c, r) = \int_{\Omega} \kappa \nabla c \cdot \nabla r^T d\Omega \quad (5.29)$$

$$\tilde{m}\left(\frac{Dc}{Dt}, r\right) = \int_{\Omega} \frac{Dc}{Dt} r d\Omega \quad (5.30)$$

e assim podemos reescrever as equações 5.16 a 5.18, como:

$$m\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \mathbf{w}\right) - g(p, \mathbf{w}) + f(\nu, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad (5.31)$$

$$d(q, \mathbf{w}) = 0 \quad (5.32)$$

$$\tilde{m}\left(\frac{Dc}{Dt}, r\right) + \tilde{f}(\kappa, c, r) = 0 \quad (5.33)$$

5.2 Método de Galerkin Semi-Discreto

Apresentaremos agora a aproximação pelo método de Galerkin para as equações fundamentais. Discretizamos as equações apenas no domínio espacial, ficando contínuas no domínio do tempo.

Considere as equações de quantidade de movimento nas direções das componentes x, y e z , assim façamos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{Du}{Dt} w_x + \frac{Dv}{Dt} w_y + \frac{Dw}{Dt} w_z \right] d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \left[p \frac{\partial w_x}{\partial x} + p \frac{\partial w_y}{\partial y} + p \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] + \\ & \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Devemos determinar soluções $\mathbf{w} = (u, v, w) \in \mathbb{W}_{\mathbf{w}\Gamma}$ e $p \in \mathbb{P}$ para que as Eqs.(5.34) sejam válidas para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{W}_0$. Se as seguintes equações forem satisfeitas,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{Du}{Dt} w_x d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \frac{\partial w_x}{\partial x} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \right. \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{Dv}{Dt} w_y d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \frac{\partial w_y}{\partial y} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \right. \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{Dw}{Dt} w_z d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \frac{\partial w_z}{\partial z} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_z}{\partial y} + \right. \\ & \left. \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

para quaisquer w_x, w_y e $w_z \in \mathbb{W}_0$, então as Eqs.(5.34) serão satisfeitas. Podemos assim trabalhar com as equações na direção x (Eq.5.35), na direção y (Eq.5.36) e na direção z (Eq.5.37) separadamente sem prejuízo algum. Para a equação da

continuidade:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) q d\Omega = 0 \quad (5.38)$$

e para a equação de transporte de massa:

$$\int_{\Omega} \frac{Dc}{Dt} r d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \kappa \left(\frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \quad (5.39)$$

Consideramos NP o número de pontos de pressão, NV o número de pontos de velocidade, NC o número de pontos de concentração e NE de elementos na malha de elementos finitos cujo domínio é Ω . O método de Galerkin consiste em fazer as seguintes substituições na Eq.(5.34):

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NV} N_n(\mathbf{x}) u_n(t) \quad (5.40)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NV} N_n(\mathbf{x}) v_n(t) \quad (5.41)$$

$$w(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NV} N_n(\mathbf{x}) w_n(t) \quad (5.42)$$

$$c(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NC} N_n(\mathbf{x}) c_n(t) \quad (5.43)$$

$$p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NP} P_n(\mathbf{x}) p_r(t) \quad (5.44)$$

que são as aproximações semi-discretas, isto é, contínuas no tempo t e discretas no espaço \mathbf{x} .

A equação de quantidade de movimento é habitualmente mensurada em todos os nós de velocidade, com isso, as funções peso w_x , w_y e w_z são trocadas pelas funções de interpolação $N_m = N_m(x)$, $m = 1, \dots, NV$. Aplicando esse procedimento nas Eq.(5.35, 5.36, 5.37 e 5.38), encontramos:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \frac{Du_n}{Dt} N_m N_n d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_m}{\partial x} P_r p_r d\Omega \\ & + \frac{1}{Re} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \nu^e \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} u_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} u_n + \right. \\ & \left. \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} u_n + \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} u_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial x} u_n + \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial x} u_n \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \frac{Dv_n}{Dt} N_m N_n d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_m}{\partial y} P_r p_r d\Omega \\
& + \frac{1}{Re} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \nu^e \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} v_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n + \right. \\
& \left. \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} v_n + \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n + \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n \right) d\Omega = 0 \quad (5.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \frac{Dw_n}{Dt} N_m N_n d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_m}{\partial z} P_r p_r d\Omega \\
& + \frac{1}{Re} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \nu^e \left(\frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} w_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} w_n + \right. \\
& \left. \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} w_n + \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial z} w_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial z} w_n + \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} w_n \right) d\Omega = 0 \quad (5.47)
\end{aligned}$$

A equação do transporte de massa é uma equação diferencial sem acoplamento com pressão. As incógnitas são avaliadas nos vértices do tetraedro, dessa forma terão equivalência dimensional, portanto é válida a seguinte igualdade $\dim(NC) = \dim(NP)$. E, assim, utilizando os procedimentos adotados nas equações anteriores na Eq.(5.39), encontramos:

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \frac{Dc_n}{Dt} C_m C_n d\Omega - \frac{1}{ReSc} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n k^e \\
& \left(\frac{\partial C_m}{\partial x} \frac{\partial C_n}{\partial x} c_n + \frac{\partial C_m}{\partial y} \frac{\partial C_n}{\partial y} c_n + \frac{\partial C_m}{\partial z} \frac{\partial C_n}{\partial z} c_n \right) d\Omega = 0 \quad (5.48)
\end{aligned}$$

Como a equação da continuidade está relacionada com a pressão, então a função Eq.(5.38) é avaliada nos nós de pressão e dessa forma a função peso q é aproximada pelas funções de interpolação associadas à pressão $P_r(x)$; com isso chegamos a:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} u_n + \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n + \frac{\partial N_n}{\partial z} w_n \right) P_r d\Omega = 0 \quad (5.49)$$

para $r = 1, \dots, NP$. Restringindo as funções de interpolação a cada elemento e , chegamos a:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sum_{j,k \in e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} v_j + \frac{\partial N_j^e}{\partial z} w_j \right) P_k^e d\Omega = 0 \quad (5.50)$$

As equações (5.45, 5.46, 5.47, 5.48 e 5.50) serão mostradas na forma de equações diferenciais ordinárias:

$$M_x \dot{u} + \frac{1}{Re} (2K_{xx} + K_{yy} + K_{zz})u + K_{xy}v + K_{xz}w - G_x p = 0 \quad (5.51)$$

$$M_x \dot{v} + \frac{1}{Re} K_{yx}u + (K_{xx} + 2K_{yy} + K_{zz})v + K_{yz}w - G_y p = 0 \quad (5.52)$$

$$M_x \dot{w} + \frac{1}{Re} K_{zx}u + K_{zy}v + (K_{xx} + K_{yy} + 2K_{zz})w - G_w p = 0 \quad (5.53)$$

$$D_x u + D_y v + D_z w = 0 \quad (5.54)$$

$$M_c \dot{c} + \frac{1}{ReSc} (K_{cxx} + K_{cyy} + K_{czz})c = 0 \quad (5.55)$$

onde $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ e \dot{c} representam a derivada substancial, e são definidas por $\dot{u} = [Du_1/Dt, \dots, Du_{NV}/Dt]^T, \dot{v} = [Dv_1/Dt, \dots, Dv_{NV}/Dt]^T, \dot{w} = [Dw_1/Dt, \dots, Dw_{NV}/Dt]^T, \dot{c} = [Dc_1/Dt, \dots, Dc_{NC}/Dt]^T, u = [u_1, \dots, u_{NV}]^T, v = [v_1, \dots, v_{NV}]^T, w = [w_1, \dots, w_{NV}]^T, c = [c_1, \dots, c_{NC}]^T, p = [p_1, \dots, p_{NP}]^T$, são os valores dos vetores nos nós, para as variáveis velocidade, pressão e concentração. As matrizes deste sistema de equações são:

$$\begin{aligned} M_x &= \mathcal{A}_x(m^e), & M_y &= \mathcal{A}_y(m^e), & M_z &= \mathcal{A}_z(m^e) \\ K_{xx} &= \mathcal{A}_x(K_{xx}^e), & K_{xy} &= \mathcal{A}_x(K_{xy}^e), & K_{xz} &= \mathcal{A}_x(K_{xz}^e) \\ K_{yx} &= \mathcal{A}_y(K_{yx}^e), & K_{yy} &= \mathcal{A}_y(K_{yy}^e), & K_{yz} &= \mathcal{A}_y(K_{yz}^e) \\ K_{zx} &= \mathcal{A}_z(K_{zx}^e), & K_{zy} &= \mathcal{A}_z(K_{zy}^e), & K_{zz} &= \mathcal{A}_z(K_{zz}^e) \\ G_x &= \mathcal{A}_x(g_x^e), & G_y &= \mathcal{A}_y(g_y^e), & G_z &= \mathcal{A}_z(g_z^e) \\ D_x &= \mathcal{A}_x(d_x^e), & D_y &= \mathcal{A}_y(d_y^e), & D_z &= \mathcal{A}_z(d_z^e) \\ K_{cxx} &= \mathcal{A}_x(K_{cxx}^e), & K_{cyy} &= \mathcal{A}_y(K_{cyy}^e), & K_{czz} &= \mathcal{A}_z(K_{czz}^e) \\ M_c &= \mathcal{A}_c(m^e) \end{aligned}$$

As submatrizes $m^e, K_{xx}^e, K_{xy}^e, K_{xz}^e, K_{yx}^e, K_{yy}^e, K_{yz}^e, K_{zx}^e, K_{zy}^e, K_{zz}^e, g_x^e, g_y^e, g_z^e, d_x^e, d_y^e, d_z^e, K_{cxx}^e, K_{cyy}^e$ e K_{czz}^e , são definidas localmente por:

$$m_{ij}^e = \int_{\Omega} N_i^e N_j^e d\Omega \quad K_{xx,ij}^e = \int_{\Omega} \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) d\Omega \quad (5.56)$$

$$K_{xy,ij}^e = \int_{\Omega} \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) d\Omega \quad K_{xz,ij}^e = \int_{\Omega} \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) d\Omega \quad (5.57)$$

$$K_{yx,ij}^e = \int_{\Omega}^e \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad K_{yy,ij}^e = \int_{\Omega}^e \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5.58)$$

$$K_{yz,ij}^e = \int_{\Omega}^e \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad K_{zx,ij}^e = \int_{\Omega}^e \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.59)$$

$$K_{zy,ij}^e = \int_{\Omega}^e \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) d\Omega \quad K_{zz,ij}^e = \int_{\Omega}^e \nu^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.60)$$

$$g_{x,ik}^e = \int_{\Omega}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} P_K^e d\Omega \quad g_{y,ik}^e = \int_{\Omega}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} P_K^e d\Omega \quad (5.61)$$

$$g_{z,ik}^e = \int_{\Omega}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} P_K^e d\Omega \quad d_{x,kj}^e = \int_{\Omega}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} P_K^e d\Omega \quad (5.62)$$

$$d_{y,kj}^e = \int_{\Omega}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} P_K^e d\Omega \quad d_{z,kj}^e = \int_{\Omega}^e \frac{\partial N_j^e}{\partial z} P_K^e d\Omega \quad (5.63)$$

$$m_{c,ij}^e = \int_{\Omega}^e N_i^e N_j^e d\Omega \quad K_{cxx,ij}^e = \int_{\Omega}^e \kappa^e \left(\frac{\partial C_i^e}{\partial x} \frac{\partial C_j^e}{\partial x} \right) d\Omega \quad (5.64)$$

$$K_{cyy,ij}^e = \int_{\Omega}^e \kappa^e \left(\frac{\partial C_i^e}{\partial y} \frac{\partial C_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad K_{czz,ij}^e = \int_{\Omega}^e \kappa^e \left(\frac{\partial C_i^e}{\partial z} \frac{\partial C_j^e}{\partial z} \right) d\Omega \quad (5.65)$$

Observe que \mathcal{A} é o operador que monta as submatrizes de elementos nas matrizes do sistema de EDO's. Podemos escrever de forma mais simples o sistema de EDO's como:

$$M\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{Re} K\mathbf{v} - Gp = 0 \quad (5.66)$$

$$D\mathbf{v} = 0 \quad (5.67)$$

$$M_c \dot{c} + \frac{1}{ReSc} K_c c = 0 \quad (5.68)$$

onde $\dot{\mathbf{v}} = [D\mathbf{v}_1/Dt, \dots, D\mathbf{v}_{NV}/Dt]^T$, $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{NV}]^T$,

$G = [g_1^x, \dots, g_{NV}^x, g_1^y, \dots, g_{NV}^y, g_1^z, \dots, g_{NV}^z]^T$, $D = [d_1^x, \dots, d_{NV}^x, d_1^y, \dots, d_{NV}^y, d_1^z, \dots, d_{NV}^z]^T$, $c = [c_1, \dots, c_{NC}]^T$, $\dot{c} = [Dc/Dt, \dots, Dc_{NC}/Dt, c_1, \dots, c_{NC}]^T$ e $p = [p_1, \dots, p_{NP}]^T$, e as matrizes são dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} M_x & 0 & 0 \\ 0 & M_y & 0 \\ 0 & 0 & M_z \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 2K_{xx} & K_{yx} & K_{zx} \\ K_{xy} & 2K_{yy} & K_{zy} \\ K_{xz} & K_{yz} & 2K_{zz} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix}$$

5.3 Método Semi-Lagrangeano

O método semi-Lagrangeano consiste em usar um fator de integração em que o operador de convecção se desloca para um sistema de coordenadas móveis no fluido. A derivada material de um escalar qualquer em duas dimensões é dada por:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \quad (5.69)$$

Em um sistema de coordenadas móveis a derivada substantiva torna-se a derivada parcial ordinária e o termo convectivo desaparece. O problema de utilizar coordenadas lagrangeanas em códigos numéricos é complicado por causa da instabilidade que ocorre nas trajetórias das partículas, tornando-as desorganizadas em pouco tempo. Esse efeito acontece até em escoamentos laminares.

A utilização do método é explícita, pois é necessário que a informação da variável seja conhecida, para o caso de Navier-Stokes, a velocidade no passo de tempo anterior. A informação que se tem no passo anterior não necessariamente está localizada em um ponto da malha, tornando-se necessária a interpolação em nós vizinhos. Assim o método semi-Lagrangeano discretiza a Eq.(5.69) em um tempo t_i , e utilizando um esquema de primeira ordem toma a forma:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t} \quad (5.70)$$

onde $c_d^n = c^n(x_d, t^n)$ e x_d é o ponto de saída.

Na forma forte a derivada total é calculada ao longo da trajetória, determinando-se o ponto x_d e resolvendo uma equação como essa $\frac{Dc}{Dt} = f$ para trás no tempo $t^{n+1} \geq t \geq t^n$ usando a condição inicial $x(t^{n+1}) = x_i$.

Com os conhecimentos apresentados anteriormente podemos aplicar o método

semi-Lagrangeano na equação de Navier-Stokes. Substituindo a derivada material Eq.(5.69) na Eq.(5.31) obtemos:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (5.71)$$

$$\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nabla \cdot [\nu(\nabla \mathbf{v}^{n+1} + \nabla(\mathbf{v}^{n+1})^T)] \quad (5.72)$$

Depois de discretizadas as Eqs.(5.31, 5.32, 5.33) chegamos a:

$$M\left(\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t}\right) - \frac{1}{Re} K \mathbf{v}^{n+1} - G p^{n+1} = 0 \quad (5.73)$$

$$D \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (5.74)$$

$$M_c\left(\frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{ReSc} k_c c^{n+1} = 0 \quad (5.75)$$

5.4 Discretização Espacial

Devemos dividir o domínio do problema em sub-regiões de geometria simples. Obtemos após a partição elementos lineares, bidimensionais tais como: triangulares, quadrangulares, etc ou tridimensionais como os tetraedrais, hexaedrais, etc, portanto o domínio dependerá em qual espaço estamos resolvendo o problema e que tipos de problemas estamos solucionando para assim tomarmos a decisão de qual elemento utilizar.

Sabemos que os elementos da malha são interligados por nós, conforme a Fig.(5.1), e que para determinarmos os valores em qualquer ponto de um elemento é necessário interligá-los por meio de uma interpolação. Essa interpolação pode ser linear, quadrática, cúbica, entre outras.

Consideremos uma função $u(x)$ cujo domínio é Ω e o contorno dessa região é dado por Γ em um espaço n-dimensional euclidiano \mathbb{R}^n . Com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sendo um ponto em $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Precisamos agora construir um modelo de elemento finito de $u(x)$ com em [37], [38].

Consideremos um domínio $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ que é a união de um número finito E de sub-regiões de $\bar{\Omega}_e$ de \mathbb{R}^n , cada $\bar{\Omega}_e$ é a partição de $\bar{\Omega}$, dessa forma:

$$\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma_e \quad e = 1, 2, \dots, E \quad (5.76)$$

onde Γ_e é o contorno de Ω_e . As sub-regiões $\bar{\Omega}_e$ são chamadas de elementos finitos de $\bar{\Omega}$. Então escrevemos

$$\bar{\Omega} = \cup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e \quad (5.77)$$

A Fig.(5.1) representa no lado esquerdo um elemento global e à direita um elemento local.

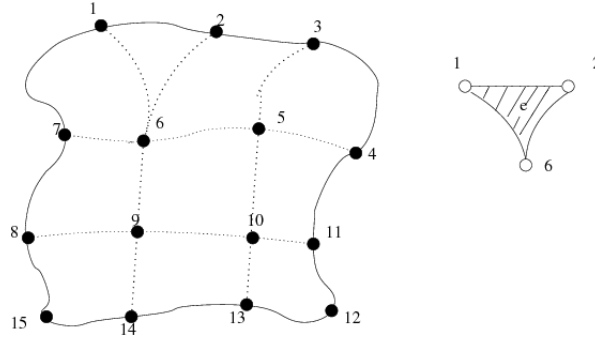


Figura 5.1: Elemento global e local

5.4.1 Elementos tetraédricos

Este é o caso mais simples para representação de elementos finitos em três dimensões. Para este caso podemos utilizar funções de interpolação de primeira ordem. A figura (Fig.5.2) representa um elemento tetraédrico.

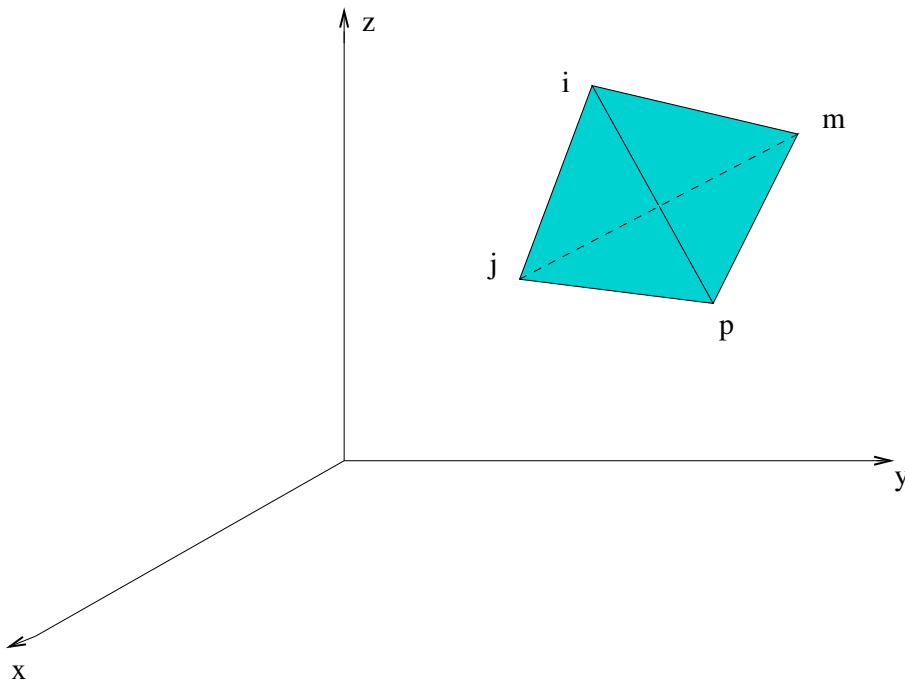


Figura 5.2: Volume tetraédrico

Utilizando uma representação vetorial para o deslocamento de um ponto, então, podemos defini-lo com as seguintes letras u, v e w . Esse vetor atua nas direções das

coordenadas x, y e z . Assim

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5.78)$$

Para calcular o valor da velocidade em nós vizinhos precisamos de um polinômio interpolador, portanto utilizando para esse elemento um polinômio linear, então os valores nodais ficarão dessa forma:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (5.79)$$

Com isso podemos igualar os valores do vetor velocidade nos nós, então teremos quatro equações definidas assim:

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \quad (5.80)$$

e poderemos avaliar as constantes de α_1 a α_4 .

Podemos escrever a representação do vetor deslocamento nas direções das componentes empregando a notação de determinante, que toma a forma seguinte:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{6V} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p] \quad (5.81)$$

com

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (5.82)$$

onde o valor de V representa o volume do tetraedro. Expandindo os outros determinantes, temos:

$$\begin{aligned} a_i &= \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} & b_i &= -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \\ c_i &= -\det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} & d_i &= -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.83)$$

determinamos assim as constantes pelos determinantes acima. Uma ordenação dos números nodais que pode ser usada é encontrada em Zienkiewicz [33].

A velocidade do elemento é definido pelas 12 componentes do vetor velocidade dos nós como:

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \\ a_p \end{Bmatrix} \quad (5.84)$$

com

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (5.85)$$

Podemos escrever os deslocamentos de um ponto arbitrário como

$$\mathbf{u} = [\mathbf{I}N_i, \mathbf{I}N_j, \mathbf{I}N_m, \mathbf{I}N_p]\mathbf{a}^e = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \quad (5.86)$$

com as funções de superfície definidas por:

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad (5.87)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade.

Elemento tetraédrico (Mini): esse elemento pertence a família *Taylor-Hood*. Esse elemento é o mesmo elemento tetraédrico só com um ponto a mais localizado no centróide do elemento, possuindo 5 pontos de interpolação. Os vértices são utilizados para calcular a pressão e os mesmos combinados com o centróide são usados para calcular a velocidade. Além disso, esse elemento satisfaz a condição de *Babuska-Brezzi*[ver em Apêndice].

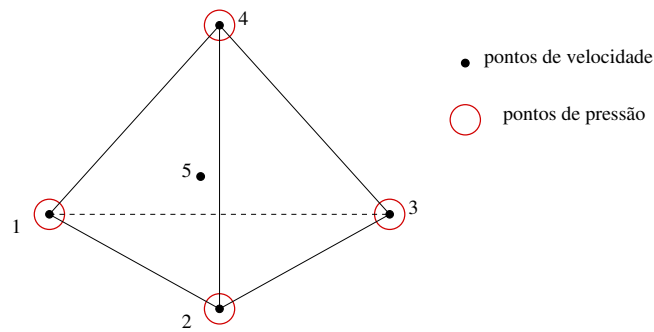


Figura 5.3: Elemento Mini

Capítulo 6

Resultados do Problema

Este capítulo apresenta novos resultados obtidos pelo método de diferenças finitas (Sec. 6.1), os obtidos pelo método de elementos finitos (Sec. 6.3) e comparação entre os resultados pelos dois métodos (Sec. 6.3).

6.1 Perfis Estacionários Obtidos por Integração das Equações Generalizada de von Kármán

Essa seção apresenta os resultados da investigação de soluções das Equações de von Kármán Generalizadas (Eqs. 3.81 a 3.89) na configuração em que o segundo disco encontra-se parado. Foram obtidas novas soluções, a nosso conhecimento não descritas na literatura, para distâncias $z_{max} = 1, 5, 10, 15, 20, 30, 40$ e 50 . Essa distância, quando adimensionalizada, resulta em um número de Reynolds definido por:

$$Re_z = z_{max} \left(\frac{\Omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.1)$$

Adotaremos a notação $Re_z = z_{max}$.

Dois códigos foram usados para a resolução das Equações de von Kármán Generalizadas: um desenvolvido em linguagem de prototipagem rápida (*Matlab*[®]) e o outro em linguagem C. O primeiro escrito por mim e o segundo aproveitado do grupo que estuda a hidrodinâmica de células eletroquímicas. Para mais informações ver em [2], [4], [5], [6], [7], [8]. Em todos os casos analisados utilizamos sempre malha contendo 400 pontos na direção de z .

6.1.1 O número de Reynolds $Re_z = z_{\max}$ como parâmetro de bifurcação

Nos casos de menor distância entre os discos observamos efeitos de interferência entre as camadas limite que se formam entre os discos e pequeno número de soluções. Para os casos de $z_{\max} = 1$ e $z_{\max} = 5$ obtivemos apenas uma solução. Nos casos de maior distância a interferência entre as camadas limite é pequena. Encontramos algumas soluções em que os perfis próximos aos discos se aproximam dos de von Kármán, desenvolvidos na vizinhança de um único disco rotatório. No entanto, esse não é sempre o caso, quando se aumenta a distância entre os discos. Constatamos que essa distância, sendo um número de Reynolds, atua como um parâmetro de bifurcação, cujo aumento resulta no surgimento de uma árvore com número crescente de soluções para cada valor do parâmetro k . Não obtivemos número de pontos suficientes para construir o diagrama de bifurcação completo no intervalo $0 < z_{\max} < 50$. No entanto, os resultados que obtivemos sugerem que as soluções ao longo de um mesmo ramo são qualitativamente similares. Os pontos que obtivemos encontram-se na Fig. 6.1 e dão ideia parcial do efeito do número de Reynolds representado pela distância entre os discos, sobre o número de soluções que o problema admite.

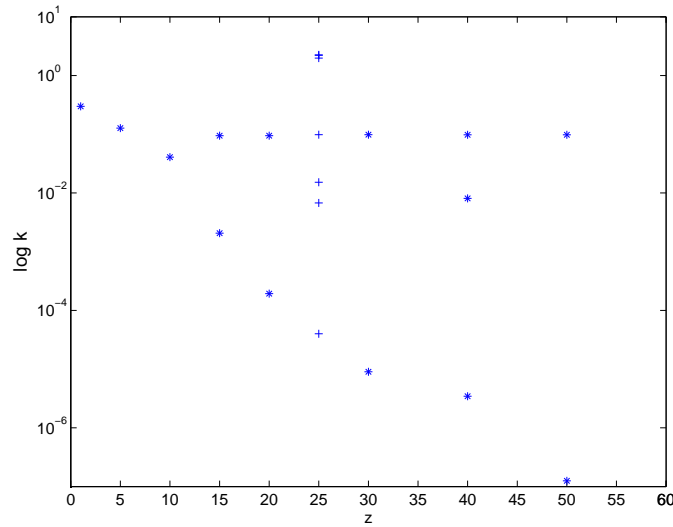


Figura 6.1: Diagrama de bifurcação $k \times z_{\max}$, mostrando o aumento do número de soluções das Equações de von Kármán Generalizadas, com o aumento do valor do parâmetro. Os pontos identificados com asterisco referem-se resultados que obtivemos no desenvolvimento dessa dissertação. Os pontos identificados com símbolo + referem-se a soluções obtidas por Holodniok *et al.*[15]. As configurações analisadas nesse trabalho não são em número suficiente para que se complete o diagrama de bifurcação acima.

6.1.2 Novas soluções das Equações de von Kármán Generalizadas

Apresentamos a seguir as novas soluções obtidas no desenvolvimento dessa dissertação. A Tab. 6.2 relaciona as novas soluções que obtivemos e os parâmetros de cada uma. Indica também o código empregado na obtenção de cada resultado. Há casos em que não obtivemos resultado com o emprego do código escrito em linguagem *C*. Nos casos em que obtivemos solução com esse último e com o código escrito para o *software* comercial *Matlab*[®] as duas soluções coincidem.

Tabela 6.1: Relação de novas soluções das Equações de von Kármán (Eqs. 3.86 a 3.88) obtidas nesse trabalho os parâmetros correspondentes. A tabela indica também o código empregado na obtenção de cada resultado. Nos casos em que há solução com os dois códigos as duas soluções coincidem.

Configuração #	z_{max}	k	Código usado	
			<i>Matlab</i> [®]	<i>C</i>
1	1	0.299240	x	x
2	5	0.127339	x	x
3	10	0.040739	x	x
4	15	0.002065	x	-
5	15	0.094643	x	x
6	20	0.000193	x	-
7	20	0.094643	x	x
8	30	0.000009	x	-
9	30	0.098101	x	-
10	40	0.00000345	x	-
11	40	0.0977595	x	x
12	40	0.00808434	x	nan
13	50	0.000000125	x	-
14	50	0.097925	x	x

Os resultados obtidos encontram-se nas Figs. 6.2 a 6.5. Podem ser classificados como pertencendo a três ramos de soluções das Equações de von Kármán Generalizadas.

1. O primeiro ramo de soluções compreende as das Configurações # 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10 e 13. Os resultados encontram-se nas Figs. 6.2 e 6.3. Tratam-se de soluções qualitativamente similares às de von Kármán para o campo próximo

a um único disco rotatório. As componentes radial e azimutal da velocidade é bastante semelhante a essas últimas nas proximidades. A componente radial da velocidade assume valores ligeiramente negativos longe do disco em rotação, de modo a compensar o escoamento para longe do eixo, nas proximidades desse disco.

A componente axial é também semelhante à de von Kármán, nas proximidades do disco que gira. Para distâncias maiores do disco em movimento essa componente afasta-se progressivamente da solução de von Kármán, de modo a satisfazer a condição de contorno de $V_z = 0$ na superfície do segundo disco.

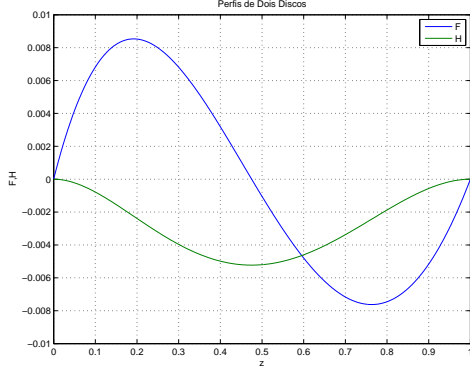
Observamos que os valores de k associados a esse ramo de soluções diminuem à medida em que a distância entre os discos aumenta. Esse parâmetro tem então sua importância reduzida nas Equações de von Kármán Generalizadas, sugerindo que essas equações tendem às que governam o campo próximo a um único disco quando $z_{max} \rightarrow \infty$. Denominamos esse ramo de soluções por Ramo de von Kármán.

2. O segundo ramo de soluções compreende às obtidas nas Configurações de parâmetros # 7, 9, 11 e 14. Os resultados encontram-se na Fig. 6.4. Tratam-se de soluções qualitativamente similares entre si e distintas das soluções de von Kármán para o campo próximo a um disco. Esse ramo caracteriza-se pela existência de região estreita próxima ao disco parado, em que os valores negativos da componente radial da velocidade são de magnitude próxima à da mesma componente, junto ao disco que gira. Observa-se também um aumento da componente azimutal da velocidade próximo ao disco parado. Apesar da intensificação do efeito centrífugo junto ao disco parado há um fluxo que se dirige para o eixo de rotação junto a esse disco.
3. O terceiro ramo caracteriza-se, aparentemente, por classe de soluções mais complexas do que as do Ramo de von Kármán e do segundo ramo. Obtivemos apenas uma solução desse ramo, com $z_{max=40}$ e $k = 0.00808434$ (Configuração # 12), mostrada na Fig. 6.5.

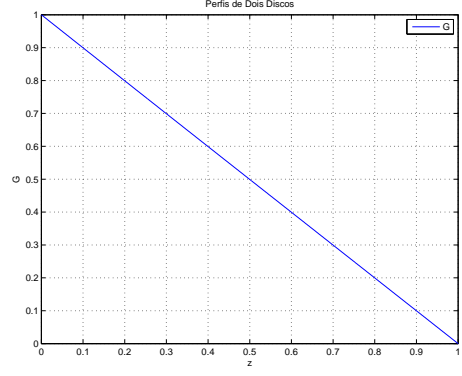
Observamos que há mais ramos de soluções, além dos três acima mencionados, o que se evidencia pelas 7 soluções obtidas por Holodniok *et al.* [15].

E observamos também que não se analisou a questão da estabilidade das soluções encontradas. Questões como a escolha da solução para distâncias entre discos em que há mais de uma solução são assuntos que sugerimos para trabalhos futuros.

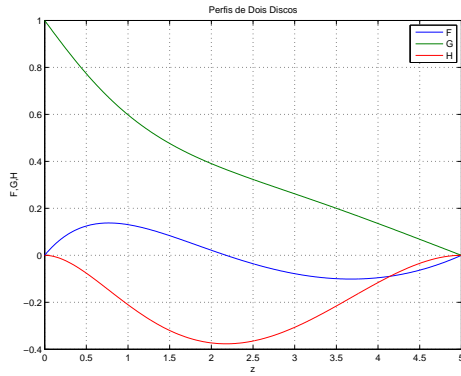
Reiteramos o fato de que as soluções apresentadas nas Figs. 6.2 a 6.5 foram obtidas no curso do desenvolvimento desse trabalho e não constam da literatura publicada sobre o assunto.



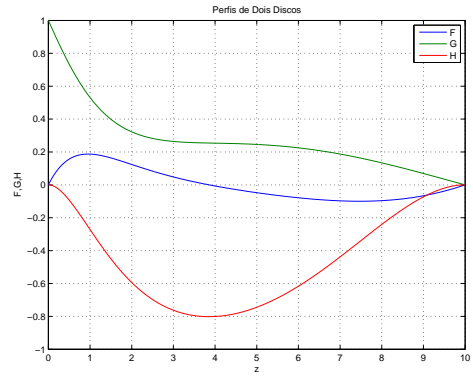
Configuração # 1 - perfis F e H
 $z_{max} = 1$ e $k = 0.299240$



Configuração # 1 - perfil G
 $z_{max} = 1$ e $k = 0.299240$

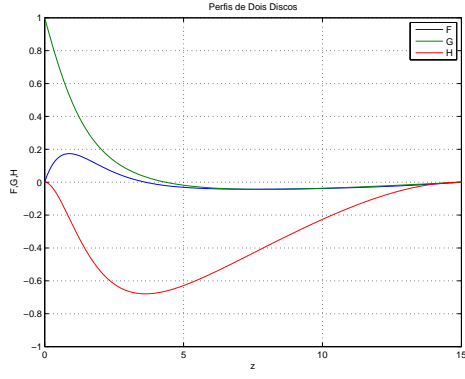


Configuração # 2
 $z_{max} = 5$ e $k = 0.127339$

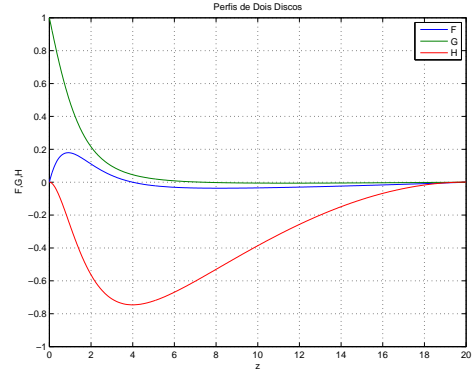


Configuração # 3
 $z_{max} = 10$ e $k = 0.0040739$

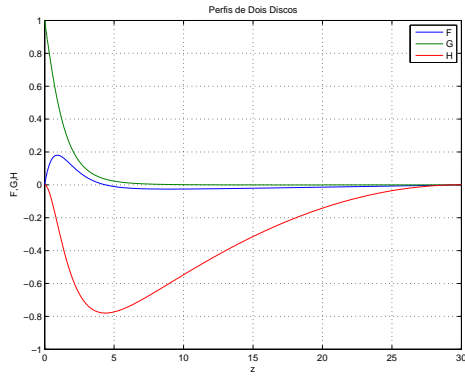
Figura 6.2: Soluções do Ramo de von Kármán para discos próximos ($z_{max} = 1, 5$ e 10). Os resultados obtidos indicam que as Eqs. 3.86 a 3.89) admitem soluções de apenas uma classe, que podem ser classificadas como pertencendo ao Ramo de von Kármán. Na primeira linha: Configuração # 1. A pequena distância entre os discos obriga a componente azimutal da velocidade a variar linearmente de um disco a outro. Segunda linha: Configurações # 2 à esquerda e # 3 à direita: Os perfis são qualitativamente semelhantes nas duas configurações. Nos dois casos não encontramos outras soluções para as distâncias z_{max} indicadas. Um dos discos encontra-se em parado.



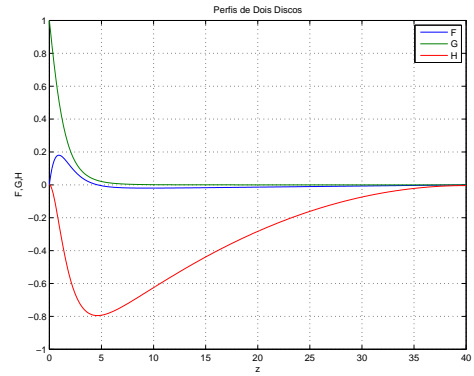
Configuração # 4
 $z_{max} = 15, k = 0.002065$



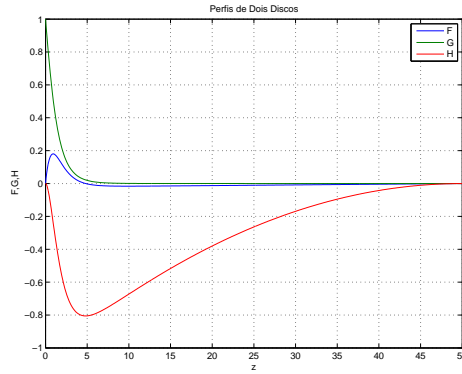
Configuração # 6
 $z_{max} = 20, k = 0.000193$



Configuração # 8
 $z_{max} = 30, k = 0.000009$

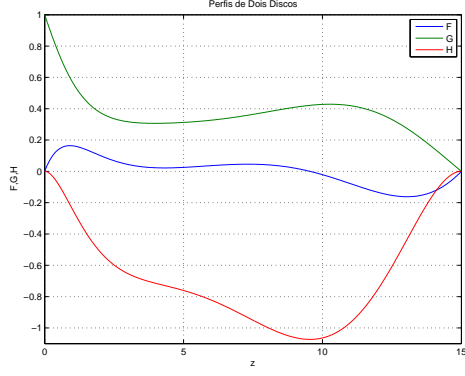


Configuração # 10
 $z_{max} = 40, k = 0.00000345$



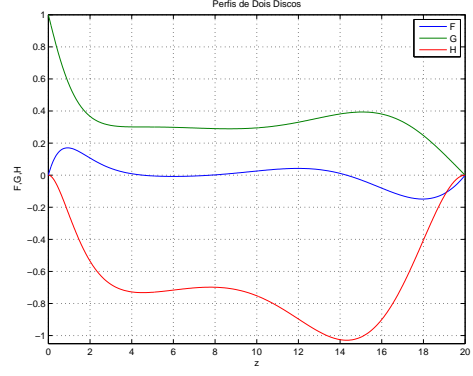
Configuração # 13
 $z_{max} = 50, k = 0.000000125$

Figura 6.3: Soluções do Ramo de von Kármán para as demais configurações de distâncias examinadas nesse trabalho. ($z_{max} = 15, 20, 30, 40$ e 50). Em todos os casos um dos discos encontra-se em parado.



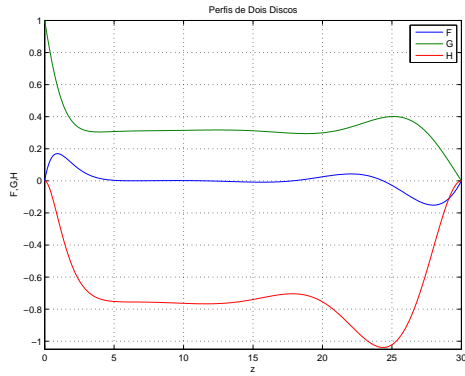
Configuração # 5

$$z_{max} = 15, k = 0.112195$$



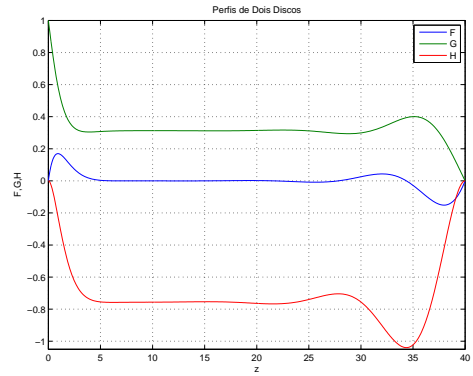
Configuração # 7

$$z_{max} = 20, k = 0.094643$$



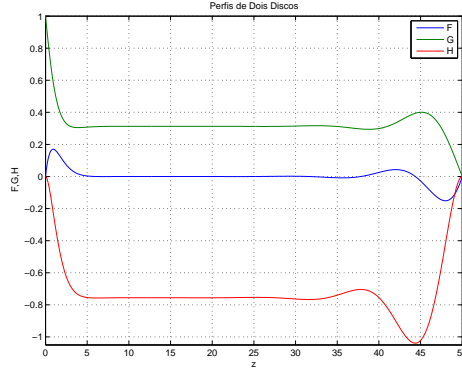
Configuração # 9

$$z_{max} = 30, k = 0.098101$$



Configuração # 11

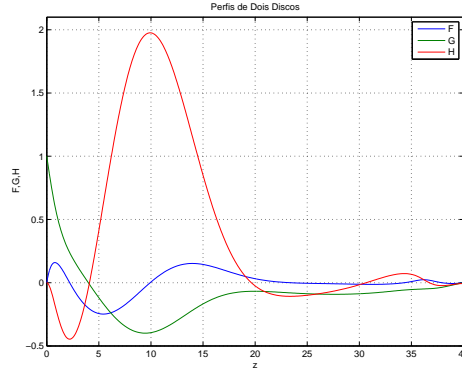
$$z_{max} = 40, k = 0.0977595$$



Configuração # 14

$$z_{max} = 50, k = 0.097925$$

Figura 6.4: Soluções do segundo ramo, obtidas nesse trabalho. ($z_{max} = 15, 20, 30, 40$ e 50). O ramo caracteriza-se pela existência de região estreita próxima ao disco parado, em que os valores negativos da componente radial da velocidade são de magnitude próxima à da mesma componente, junto ao disco que gira. Observa-se também um aumento da componente azimutal da velocidade próximo ao disco parado. Em todos os casos um dos discos encontra-se em parado.



Configuração # 12

$z_{max} = 50$ e $k = 0.00808434$

Figura 6.5: Uma Configuração (# 12) do terceiro ramo de soluções. Esse ramo caracteriza-se, aparentemente, por classe de soluções mais complexas do que as dos dois outros ramos. Por termos obtido apenas esse solução do terceiro ramo, não dispomos de dados suficientes para caracterizá-lo corretamente. Um dos discos encontra-se parado.

6.1.3 Teste de refinamento de malha

Essa seção relata os resultados da verificação das soluções das Equações de von Kármán Generalizadas, obtidas com dois códigos que utilizam o método de diferenças finitas. Um é escrito em linguagem *Matlab*[®] e outro em *C*, em alguns casos ambos conseguiram produzir as mesmas soluções, assim podemos reforçar a validade das mesmas.

Ao observarmos a Tab. 6.2, a letra x mostra que a solução convergiu, de acordo com o critério, para os valores das parâmetros mostradas, já o traço mostra que a solução não convergiu para essa parâmetro, mas se aproximou muito da solução, enquanto *nan* significa *not a number*, no IEEE significa que não foi possível representar o número de ponto flutuante

Na análise de refinamento de malha, buscamos verificar o comportamento observado por [15], segundo o qual, que dependendo do refinamento da malha chega-se ou não a solução do problema de dois discos. Para a distância $z_{max} = 30$ foi possível encontrar os perfis mas foi necessário modificar o valor do parâmetro k . O teste também foi feito para $z_{max} = 50$ nesse caso com o aumento da quantidade de pontos da malha foi muito difícil encontrar as soluções, ou não as obtivemos.

Foram feitos testes para duas distâncias somente, pois somente com essas foi possível confirmar que não há a necessidade de refinar a malha para obter os perfis de velocidade pelo método de diferenças finitas.

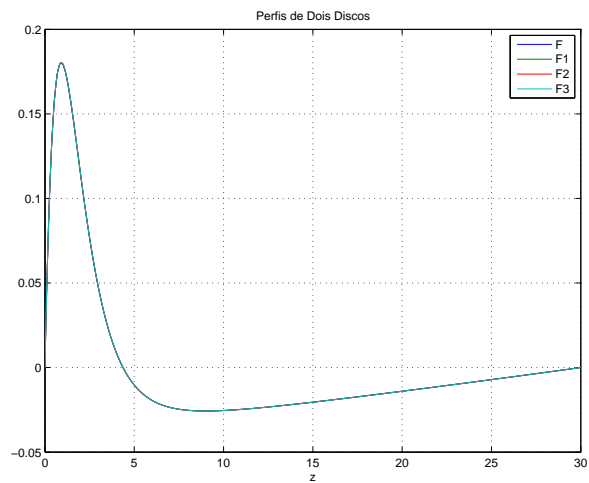


Figura 6.6: Refinamento para malha com $z_{max} = 30$.

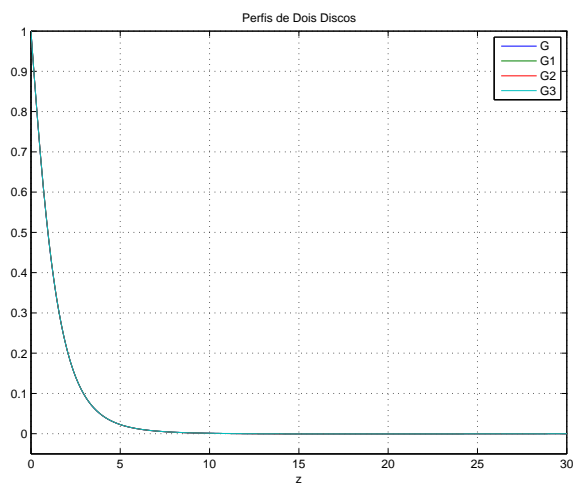


Figura 6.7: Refinamento para malha $z_{max} = 30$.

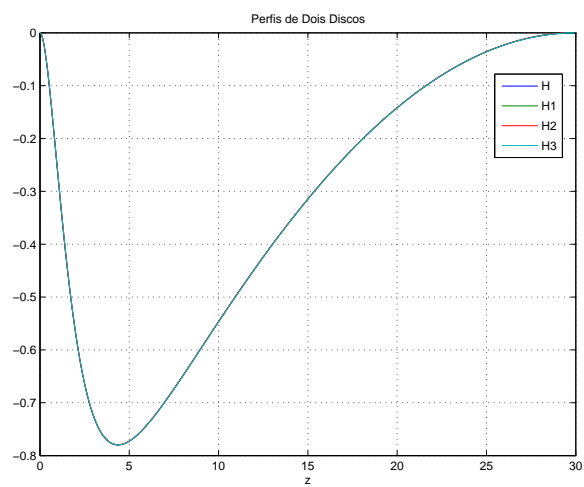


Figura 6.8: Refinamento para malha $z_{max} = 30$.

Os perfis de velocidade que são apresentados nas Figs. (6.6, 6.7 e 6.8) foram os encontrados para a distância $z_{max} = 30$ utilizando malhas de 200, 400, 800, e 1200 pontos na direção axial.

Na legenda das figuras na parte superior adotamos o seguinte critério para identificar os perfis de acordo com a quantidade de pontos da malha. Para identificá-los é necessário adotarmos F , G e H para a solução inicial e F_j , G_j e H_j com $j = 1...3$ para as outras. Agora podemos identificar a solução com a sua respectiva malha para isso é necessário associar, sequencialmente, as malhas com as soluções, ou seja, F , G e H para a de 200 pontos e as outras seguem essa ordem.

Portanto de acordo com os resultados obtidos não houve uma mudança nos resultados decorrentes do refinamento das malhas para $z_{max} = 30$. E para $z_{max} = 50$ não foram encontradas à medida que aumentamos o refinamento da malha, então não foi possível concluir que houve um melhora na solução.

Por adotarmos a mesma condição inicial para todas as soluções, então ao refinarmos a malha deslocamos seus pontos iniciais que, provavelmente, afastou tanto da solução que não é possível encontrá-la. Nos métodos que utilizamos para resolver as equações ordinárias dependiam dessa condição inicial que se estivesse longe não conseguiria chegar ao resultado pretendido. Com base nos resultados obtidos evidenciamos ainda mais o que foi descrito no artigo de Holodniok *et al.* [15]

6.2 O código de elementos finitos

O código de elementos finitos utilizado para encontrar as soluções foi elaborado por Anjos [4]. O programa se encontra em aperfeiçoamento para melhorar o seu desempenho e também buscando novas aplicações. O processo de aperfeiçoamento vem sendo elaborado no laboratório GESAR-UERJ com constantes contribuições de seus colaboradores. Para executar o código é necessário que as etapas seguintes sejam feitas.

- O programa constrói a malha utilizando método de criação de tetraedralização *Delaunay*, localiza os vértices de condições de contorno e os ajusta e adimensionaliza os parâmetros.
- A próxima etapa consiste em montar as matrizes são elas: matriz de massa, do termo viscoso, do gradiente de pressão. Aplicar as condições de contorno e condição inicial e a disposição do sistema linear.
- Agora entra na etapa de solução do sistema linear, onde vários métodos são empregados.

Nas etapas de condições de contorno e de resolução do sistema linear uma análise mais criteriosa será dada abaixo:

6.2.1 Condições de contorno

A velocidade da componente azimutal é dada por $v_\theta = r\Omega G(z^*)$, onde r representa o raio adimensional do disco, Ω é a velocidade prescrita no disco, que convém adotarmos o disco como um corpo rígido, dessa forma ela é constante em todo o disco e $G(z^*)$ tem os valores variando de -1 até 1 . Para as simulações consideramos que o disco recobre toda a parte superior do recipiente, assim em movimento gira todo o fluido nas suas proximidades para que o sistema funcione é necessário adotarmos a pressão sendo nula na parede lateral. Nos casos estudados usamos somente $G(z^*) = -1$, $G(z^*) = 0$, $G(z^*) = 1$ e $\Omega = 1$. As condições de contorno utilizada nas simulações são descritas a seguir.

- Nas simulações onde um dos discos está em repouso foram utilizadas como condições de contorno para a velocidade junto ao disco dessa forma:

$$v_r = 0 \qquad \qquad \qquad \Omega = 1.0 \qquad \qquad \qquad v_z = 0$$

com $G(z^*) = 1$ de um lado do disco e do outro usamos $G(z^*) = 0$, assim

$$v_r = 0 \qquad \qquad \qquad \Omega = 0 \qquad \qquad \qquad v_z = 0$$

onde v_r , v_θ e v_z representam, respectivamente, as velocidades na direção radial, azimutal e axial. O valor de $v_\theta = 1$ é o seu valor máximo que é atingido no r máximo.

- Nos casos contrarrotatório temos as seguintes condições de contorno:

$$v_r = 0 \qquad \qquad \qquad \Omega = 1.0 \qquad \qquad \qquad v_z = 0$$

com $G(z^*) = 1$ de um lado do disco e do outro $G(z^*) = -1$

$$v_r = 0 \qquad \qquad \qquad \Omega = -1.0 \qquad \qquad \qquad v_z = 0$$

O valor de $\Omega = -1$ é o seu valor mínimo que é atingido no r máximo só que do outro lado da orientação positiva.

- Nos casos corrotatório temos as seguintes condições de contorno:

$$v_r = 0 \qquad \qquad \qquad \Omega = 1.0 \qquad \qquad \qquad v_z = 0$$

com $G(z^*) = 1$ de um lado do disco e do outro $G(z^*) = 1$

$$v_r = 0 \qquad \qquad \qquad \Omega = 1.0 \qquad \qquad \qquad v_z = 0$$

Além dessas condições de contorno são necessários adotarem dois valores do número de *Reynolds* são eles Re_z e Re_d , onde o primeiro é utilizado para especificar a distância entre os discos e o segundo na adimensionalização do tamanho do disco. O valor de Re_d , com r representando o raio adimensional do disco, é:

$$Re_d = r_{max} \left(\frac{\Omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.2}$$

Nas simulações verificamos a relação $\Gamma = Re_d/Re_z$ onde Re_z é a distância adimensional que separam os discos. Essa razão Γ aparece nos artigos de [21], [22] e [23]. Cabe ressaltar que não foi inserido nenhum valor nas equações. O valor de Γ é apenas a relação entre o tamanho dos disco e a distância entre eles.

6.2.2 Resolução do sistema linear

Por adotar o método de projeção discreto então houve a possibilidade de desacoplar a variável pressão da velocidade dessa forma reduzindo o tempo de execução. Uma forma de resolver de maneira mais simples é utilizar métodos iterativos, pois não exigem grande espaço de armazenagem, e por empregar uma estimativa inicial. Existem vários métodos iterativos, tais como, o método de *Gauss-Seidel*, o de *Jacobi*, o *gmres*, o de gradiente conjugado e variantes desses.

6.3 Resultados dos perfis de velocidade obtidos com o código tridimensional de elementos finitos

Nessa seção serão apresentados os resultados obtidos do campo de velocidade e de pressão tridimensionais do estudo da hidrodinâmica nas proximidades de discos rotatórios pelo método de elementos finitos e também um resumo de como o código funciona.

Foram feitas 20 simulações utilizando o código de Elementos Finitos, nas configurações indicadas na Tab. 6.2.

Tabela 6.2: Relação de novas soluções das Equações de von Kármán (Eqs. 3.86 a 3.88) obtidas nesse trabalho.

Configuração #	z_{max}	Re	Re_d	Segundo disco Generalizadas	Comparação com Eqs. de von Kármán
1	5	1	10	Parado	Sim
2	5	10	10	Parado	Não
3	5	1	10	Contrarrotatório	Não
4	5	10	10	Contrarrotatório	Não
5	5	1	10	Corrotatório	Não
6	5	10	10	Corrotatório	Não
7	10	1	10	Parado	Sim
8	10	1	100	Parado	Não
9	10	1	10	Contrarrotatório	Não
10	10	10	10	Corrotatório	Não
11	10	100	10	Corrotatório	Não
12	30	1	10	Parado	Sim
13	30	10	10	Parado	Não
14	30	0.1	300	Contrarrotatório	Não
15	30	1	300	Contrarrotatório	Não
16	30	1	10	Contrarrotatório	Não
17	30	1	30	Contrarrotatório	Não
18	30	0.3	10	Contrarrotatório	Não
19	30	1	10	Corrotatório	Não
20	30	10		Corrotatório	Não

Um comparativo entre as soluções dos perfis de velocidade será apresentado aqui, para mostrar os perfis F , G e H (Eqs. 3.81, 3.82 e 3.83) obtidos em uma dimensão por diferenças finitas e os mesmos perfis pela simulação obtidos em três dimensões por elementos finitos.

Outros resultados serão mostrados, que não foram possíveis de encontrar por diferenças finitas em uma dimensão, mas foram encontrados por elementos finitos em três dimensões.

Os campos de velocidade e de pressão serão apresentados abaixo, assim como também as malhas utilizadas, alguns campos hidrodinâmicos representando os casos estudados, ou seja, contrarrotatório, corrotatório e um dos discos sem movimento e

também os campos utilizando as linhas de corrente.

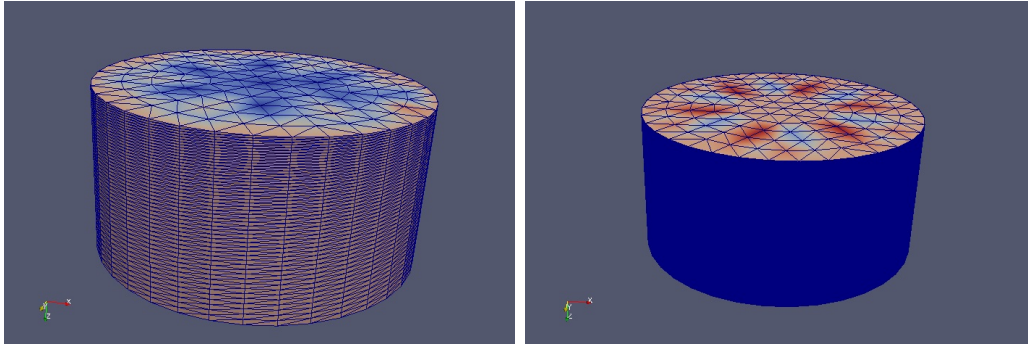


Figura 6.9: Na visualização acima temos duas malhas que representam o campo hidrodinâmico. A figura da esquerda refere-se a uma malha com seguinte configuração (6, 6, 50) e a da direita tem (6,6,400). O terno (x, y, z) representa a quantidade de pontos nas direções desses eixos.

Adiante mostraremos os campos tridimensionais de pressão e velocidade.

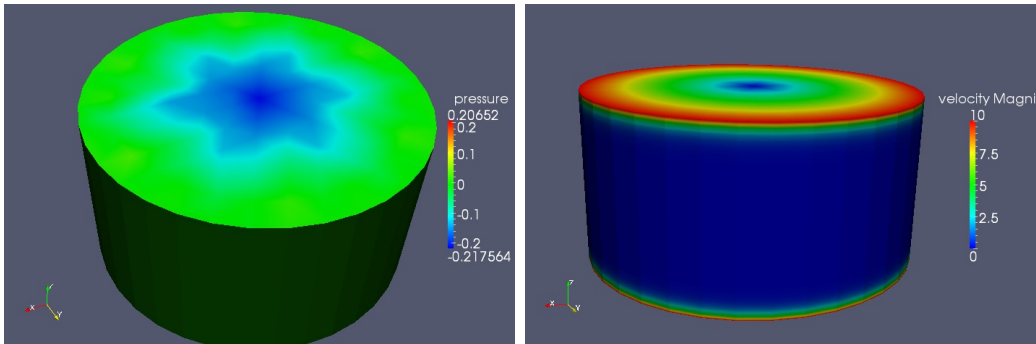


Figura 6.10: Na visualização acima temos dois campos hidrodinâmico. A figura da esquerda representa o campo de pressão e a da direita o campo de velocidade.

Esses campos foram retirados na iteração número zero, ou seja, na condição inicial de simulação que utiliza somente as condições de contorno. Para essas simulações não foram reconstruídos os perfis de velocidade encontrados pelo método de diferenças finitas que anteriormente outros autores a fizeram. Eles representam o caso contrarrotatório. Aqui foram usados a malha (6, 6, 50) e $Re_z = 10$.

Uma poderosa ferramenta de uso na dissertação de mestrado foi o programa de visualização de imagens chamado *Paraview*, que facilitou o entendimento das soluções, possibilitando analisar o campo tridimensional entre os discos.

Nas Figs.(6.11 e 6.12) serão apresentados alguns campos hidrodinâmicos.

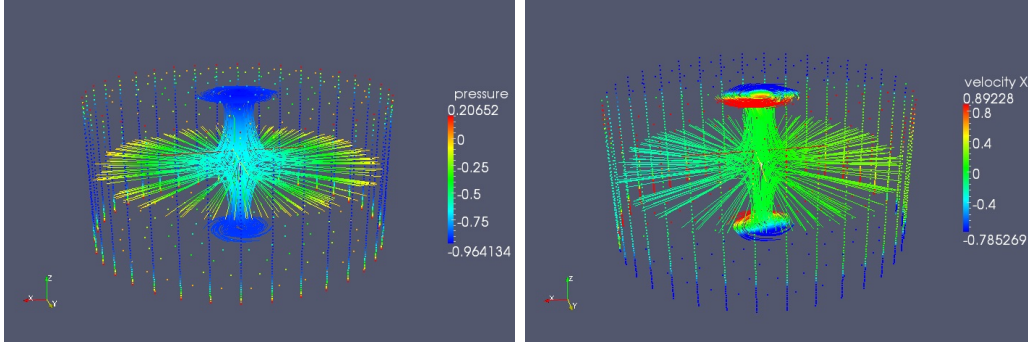


Figura 6.11: Na visualização acima temos dois campos hidrodinâmicos. A figura da esquerda representa o campo de pressão e a da direita a componente de velocidade na direção radial.

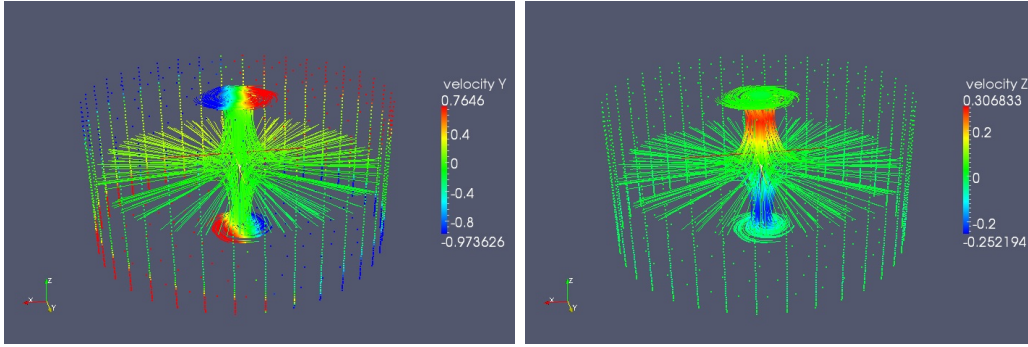


Figura 6.12: Na visualização acima temos o campo de velocidade. A figura da esquerda representa a componente de velocidade na direção azimutal e à da direita a axial.

A partir daqui para determinar o comprimento dos raios onde foram plotados os perfis é necessário dividirmos o número Re_d por 6. Portanto os valores dos raios são dados por uma porcentagem da divisão $Re_d/6$, assim $r_s = s * Re_d/6$ com s variando de 1 a 6. Adotamos também a relação de equivalência $Fs = v_r/r_s\Omega$, $Gs = v_\theta/r_s\Omega$ e $Hs = v_z/(\nu\Omega)^{1/2}$.

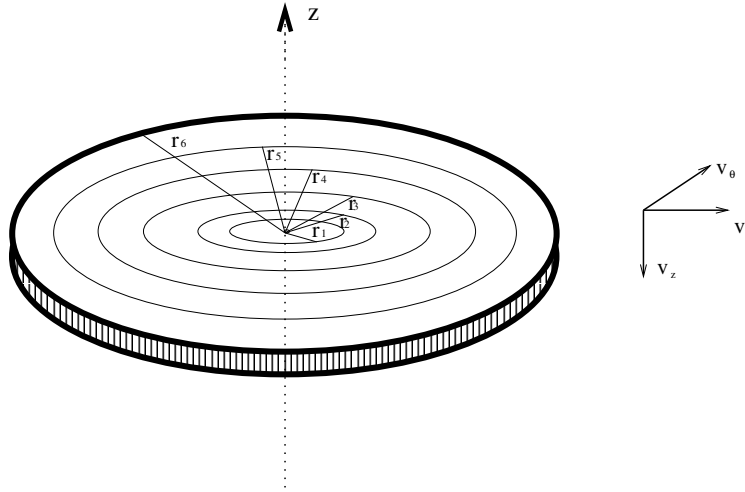


Figura 6.13: Divisão do disco em 6 partes. Com o valor do campo de velocidade podemos representar os perfis v_r , v_θ e v_z , nos respectivos raios, na direção do eixo z .

As figuras abaixo representam o campo de velocidade v_z , retirados em diferentes posições ao longo do eixo axial.

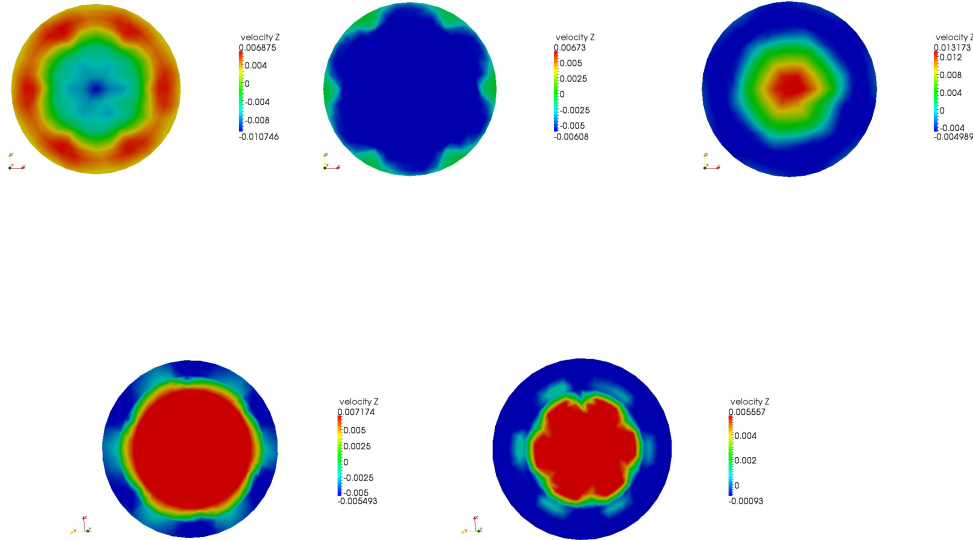


Figura 6.14: Campo de velocidade, v_z , na direção axial. As figuras foram retiradas na iteração número 5 para valores de z , respectivamente, $z = 1, z = 2, z = 2.5, z = 3$ e $z = 4$. Nesse caso a distância entre os discos variavam de $z = 0$ à $z = 5$ para o caso contrarrotatório. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

As seções a seguir serão divididas de acordo com o valor da distância entre os discos e da velocidade prescrita nos mesmos.

6.3.1 Resultados para $z_{max} = 5$ com um dos discos parado

Os perfis mostrados nas Figs.(6.15 6.16) foram obtidos para a distância entre os discos igual a $z_{max} = 5$. O objetivo dessa simulação foi mostrar qual seria a influência do campo hidrodinâmico na camada limite que é criada nas proximidades dos discos.

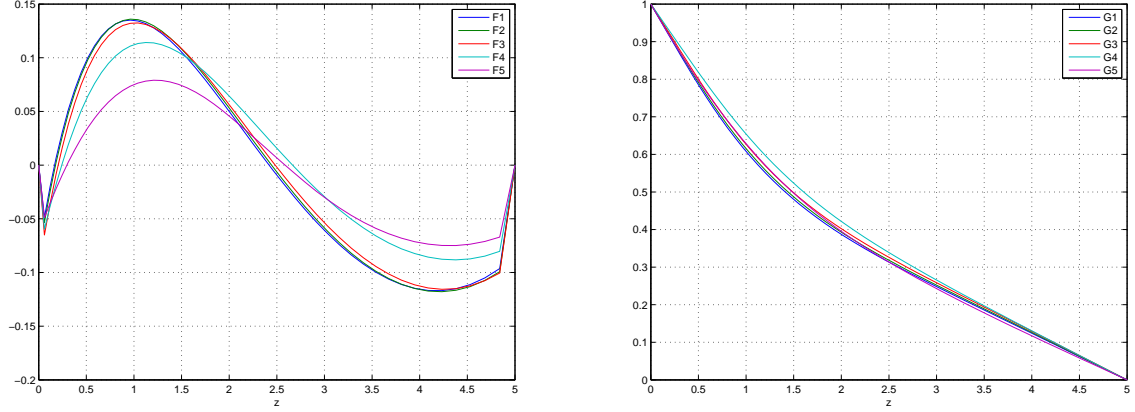


Figura 6.15: Perfis de velocidade em raios diferentes, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

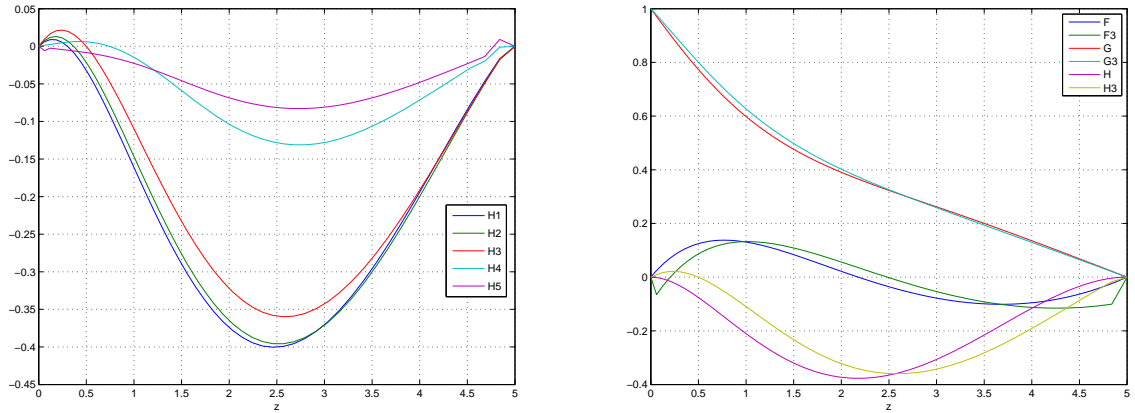


Figura 6.16: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso em que um dos discos está em repouso, retirados na iteração 500. A figura da esquerda mostra a velocidade axial e da direita o comparativo entre os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos. Os valores dos parâmetros utilizados para a simulação em elementos finitos foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

Nas Figs.(6.15 6.16) utilizamos um número de *Reynolds* pequeno, onde esse número é empregado para medir a espessura da camada limite hidrodinâmica, e observamos que nas proximidades dessa camada o fluido gira mais rapidamente. O mais surpreendente é que para a componente da velocidade na direção axial, representado pelo perfil H Fig.(6.16) o fluido à medida que se afasta do centro do disco

passa a mover-se mais devagar e percebemos que o escoamento naquela componente está dependente de r .

Observando as Figs. (6.16), mais precisamente à da direita, verificamos um comparativo dos resultados obtidos com os métodos de diferenças finitas representados pelos gráficos F, G e H e o de elementos finitos $F3, G3$ e $H3$. Ao confrontarmos os perfis de velocidade, mostramos que eles estão muito próximos garantido assim a validade dos métodos para obter as soluções. A única diferença visível que ainda não foi possível determinar foi no comportamento do perfil de velocidade F nas proximidades dos discos, talvez seja por está utilizando uma malha não muito refinada para o disco principalmente o que está parado.

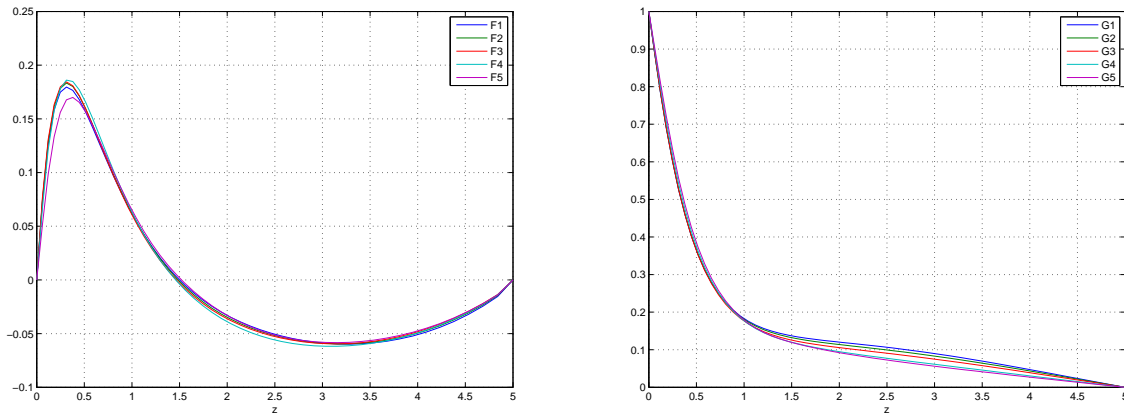


Figura 6.17: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso com um dos discos parado, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimutal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

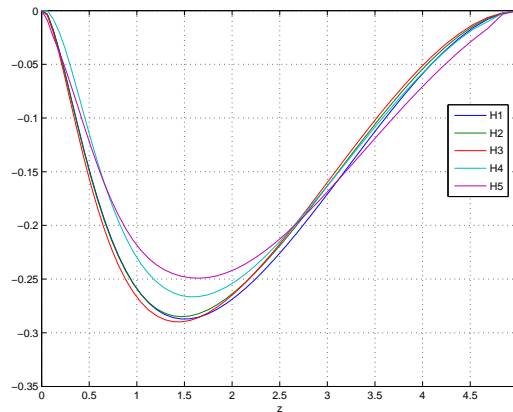


Figura 6.18: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso em que um dos discos está em repouso, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

Nas Figs.(6.17 e 6.18) não houve uma mudança tão significativa das velocidades

em relação aos perfis F , G e H nos vários raios plotados. Como apenas o número Re foi modificado em relação aos das Figs.(6.15 6.16), observamos, então, que com a variação desse número o comportamento do campo de velocidade tende a ser mais uniforme em relação aos raios adotados na plotagem dos gráficos, mesmo não se tratando das mesmas soluções. Outro fato que não deixa de ser validados são as condições de contorno que são satisfeitas em todas as configurações adotadas.

6.3.2 Resultados para $z_{max} = 5$, contrarrotatório

As plotagens seguintes referem-se aos casos contrarrotatório com $z_{max} = 5$.

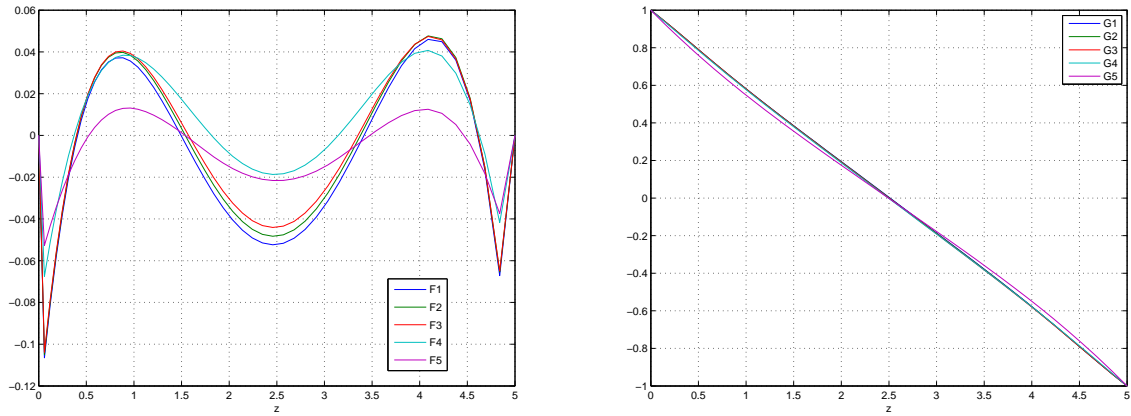


Figura 6.19: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimutal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

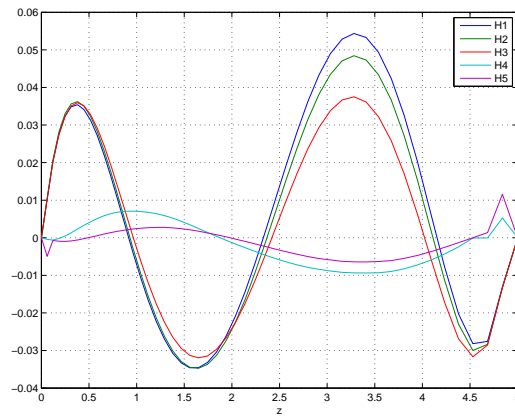


Figura 6.20: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

Os perfis apresentados nas Figs.(6.19, 6.20, 6.21 e 6.22) tiveram um comportamento muito diferente dos perfis de similaridade encontrados em outras soluções.

Os gráficos da figura(6.19) representam os perfis de F em vários raios. Presumíamos um comportamento similar aos dos perfis obtidos por investigação das Equações de von Kármán (Eqs. 3.86 a 3.88), mas isso não aconteceu. Da mesma forma o comportamento dos perfis de H obtidos por elementos finitos não coincidiram com os obtidos por diferenças finitas, veja a Fig.(6.20). Observamos que a medida em que o fluido movimenta-se afastando do centro disco quase não se move.

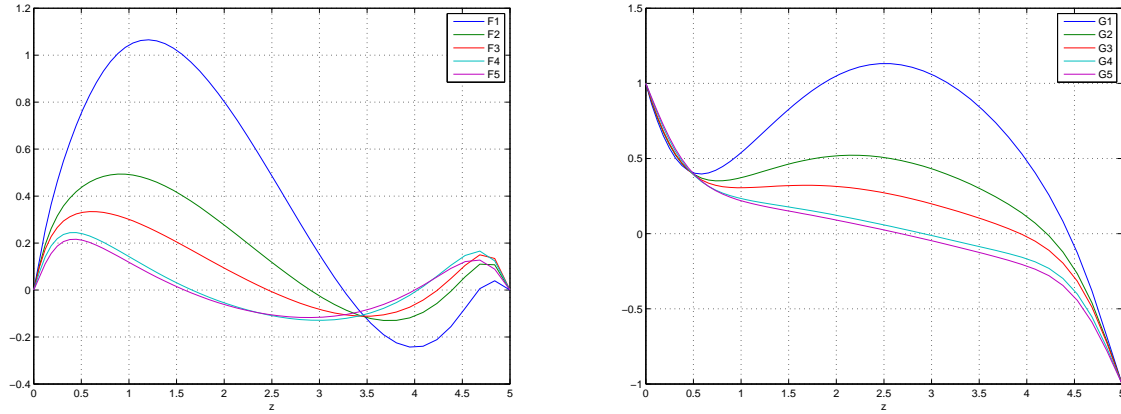


Figura 6.21: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

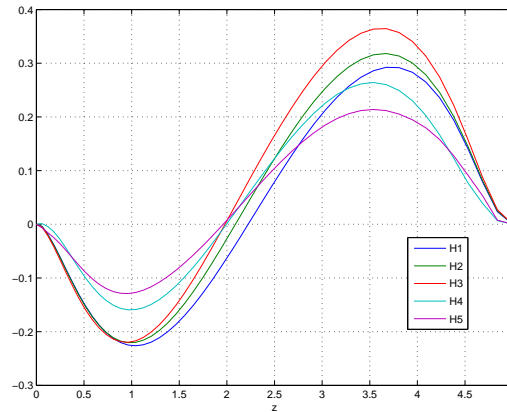


Figura 6.22: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

Como foram mantidos todos os outros parâmetros, ou seja, comprimento dos discos, distância entre eles, velocidades prescritas dos mesmos, e somente o número Re foi modificado em relação as soluções das Figs. (6.19 e 6.20) para às Figs. (6.21 e 6.22) então essas soluções nos permite fazer um comparativo. Podemos chegar a uma provável conclusão que o fluido passa a ter um comportamento mais previsível

à medida que aumentamos o número de *Reynolds* da formulação, mas não sabemos até onde isso é possível. Nos perfis do caso corrotatório com $z_{max} = 5$, observamos soluções muito diferentes, chegando até caso de instabilidade (Figs. 6.25 e 6.26). A solução que está na Fig. 6.26 é bem curiosa, pois o fluido movia-se em uma mesma direção em quase todos os raios, mas no raio $r = 5$ o fluido toma um movimento contrário aos dos outros raios.

6.3.3 Resultados para $z_{max} = 5$, corrotatório

Os gráficos a seguir representam o caso corrotatório, com a distância entre os discos sendo $z_{max} = 5$.

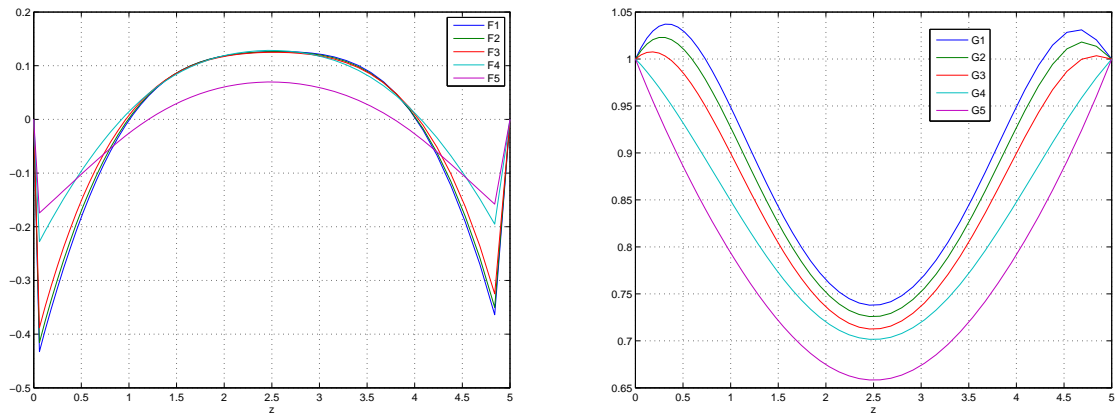


Figura 6.23: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

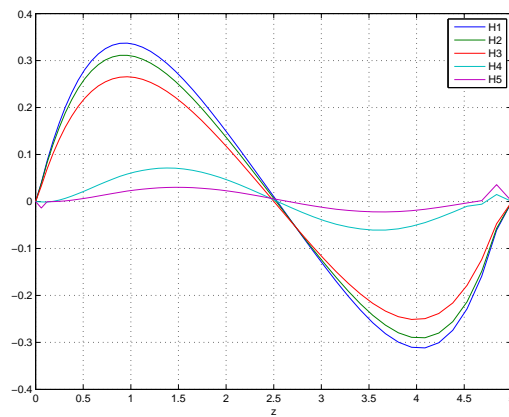


Figura 6.24: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

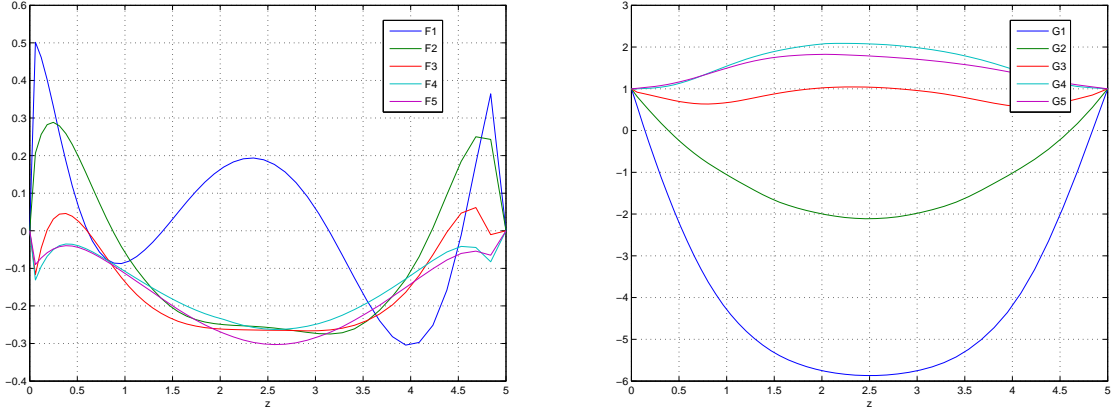


Figura 6.25: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

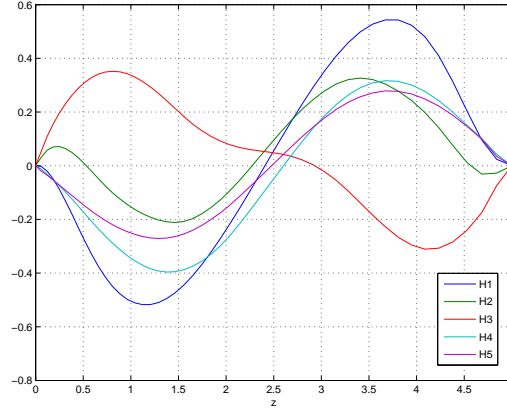


Figura 6.26: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 2$.

Os primeiros perfis que foram encontrados para a distância $z_{max} = 10$ são apresentados nas Figs.(6.27 e 6.28). Os perfis apresentados são similares aos encontrados em outros intervalos que separam os discos, são os casos do Ramo de von Kármán.

Na figura(6.28) o gráfico à esquerda representa a velocidade axial e à direita representa uma comparação dos perfis de velocidade em dois raios diferentes são eles: $r = 50$ e $r = 100$. Essas soluções mostram que há uma grande similaridade dos perfis obtidos pelo método de diferenças finitas e os obtidos por elementos finitos, mas não foi possível fazer a comparação devido a não obtenção desse mesmo resultado pelo método de diferenças finitas

6.3.4 Resultados para $z_{max} = 10$ com um dos discos parado

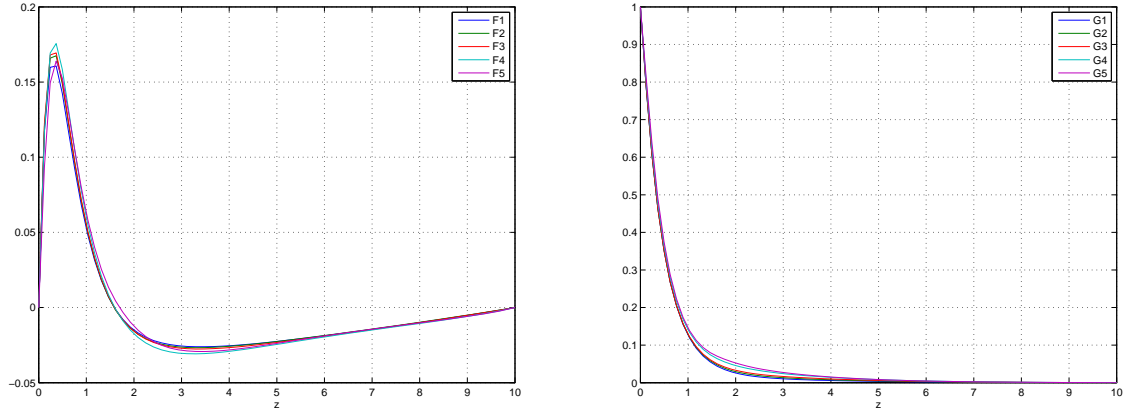


Figura 6.27: Perfis de velocidade em raios diferentes, retirados na iteração 500. A figura à esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 100$ e $\Gamma = 10$.

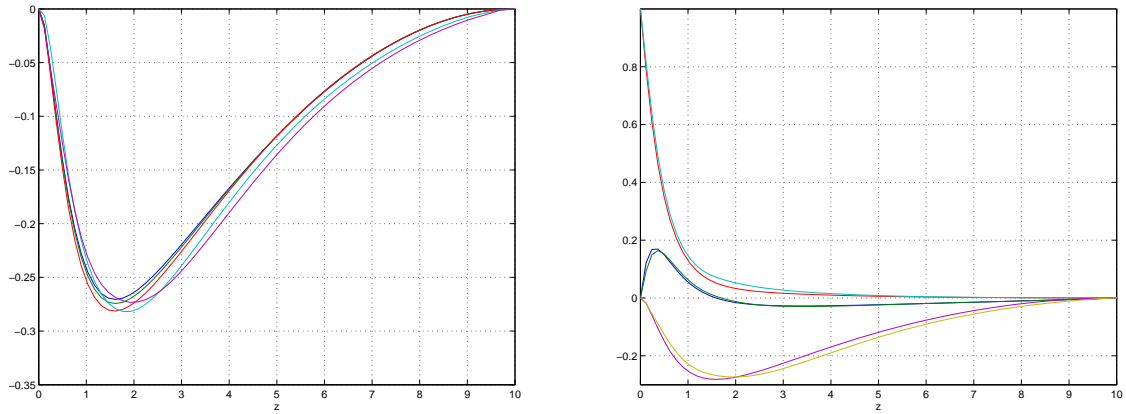


Figura 6.28: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso em que um dos discos está em repouso, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 100$ e $\Gamma = 10$.

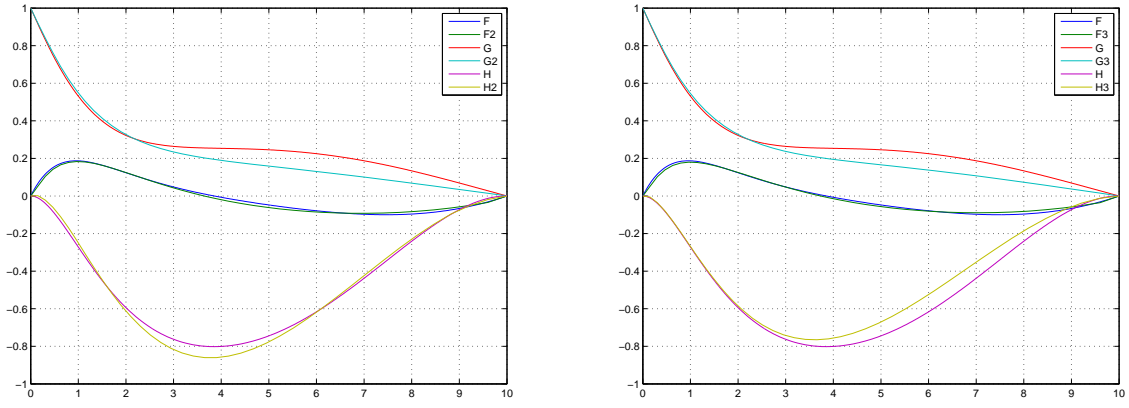


Figura 6.29: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso em que um dos discos está em repouso, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

Os perfis de velocidade F, G e H que aparecem na Figs.(6.29) são encontrados pelo método de diferenças finitas e os demais, por elementos finitos.

Nos casos mostrados tanto nas Figs.(6.29) ou nas Figs.(6.30) são relativos ao estudo da hidrodinâmica entre dois discos rotatórios, onde, nesse caso, um dos discos está em repouso e o outro move-se com velocidade constante. Nesses resultados podemos compará-los devido a obtenção pelos dois métodos de resolução utilizados. Ao olharmos a Fig.(6.29) os perfis estão muito próximos e assim podemos validar tais soluções

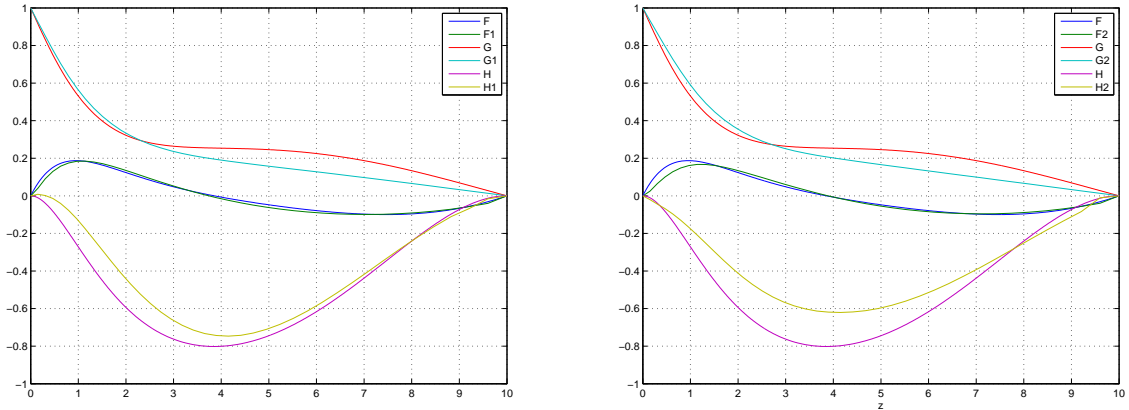


Figura 6.30: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso de um dos discos está repouso, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

6.3.5 Resultados para $z_{max} = 10$, contrarrotatório

Os gráficos apresentados nas Figs.(6.32) são relativos ao estudo da hidrodinâmica entre dois discos rotatórios, onde, nesse caso, ambos os discos movimentam-se em

direções opostas de mesma amplitude

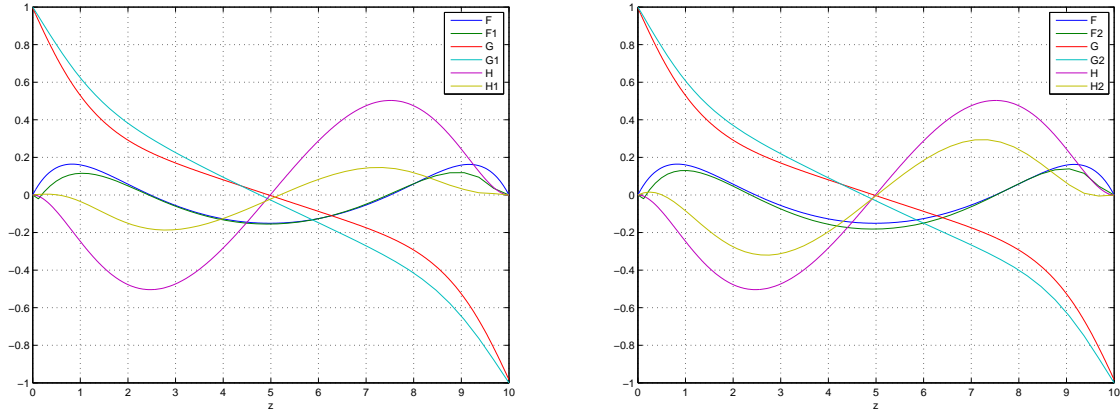


Figura 6.31: Comparativo dos perfis de velocidade nas direções radial, azimutal e axial para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

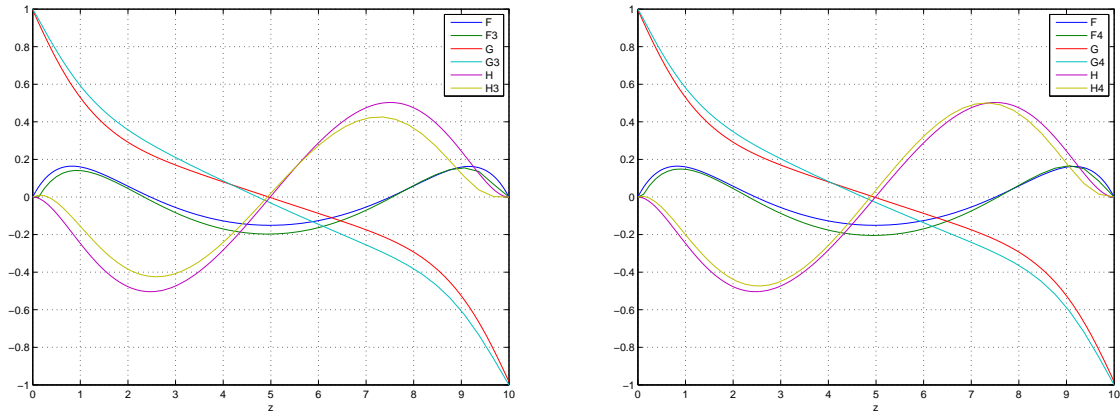


Figura 6.32: Comparativo dos perfis de velocidade nas direções radial, azimutal e axial para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

Os perfis de velocidade mostrados nas Figs.(6.33) são comparativos em relação a várias distâncias no raio adimensional. Na Fig.(6.34) foi feito um confronto dos perfis na metade do raio da célula e na borda da mesma, tendo os gráficos F, G e H representando a velocidade no meio do raio e F4, G4 e H4 descrevendo-as na borda.

6.3.6 Resultados para $z_{max} = 10$, corrotatório

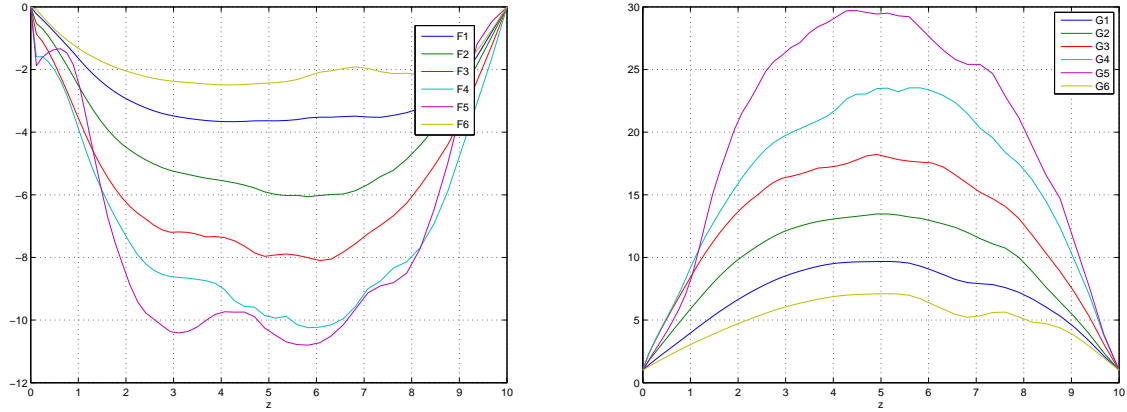


Figura 6.33: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

Com o aumento do número de Reynolds, nesse caso para $Re_z = 100$, os perfis de velocidade para a distância $z_{max} = 10$, tomaram as características parecidas com os perfis encontrados em uma dimensão apesar de não ser possível fazer um comparativo entre os métodos de solução utilizados pois por diferenças finitas não foi possível obtê-los, mas por serem similares aos outros encontrados em distâncias diferentes então acreditamos que estão corretos.

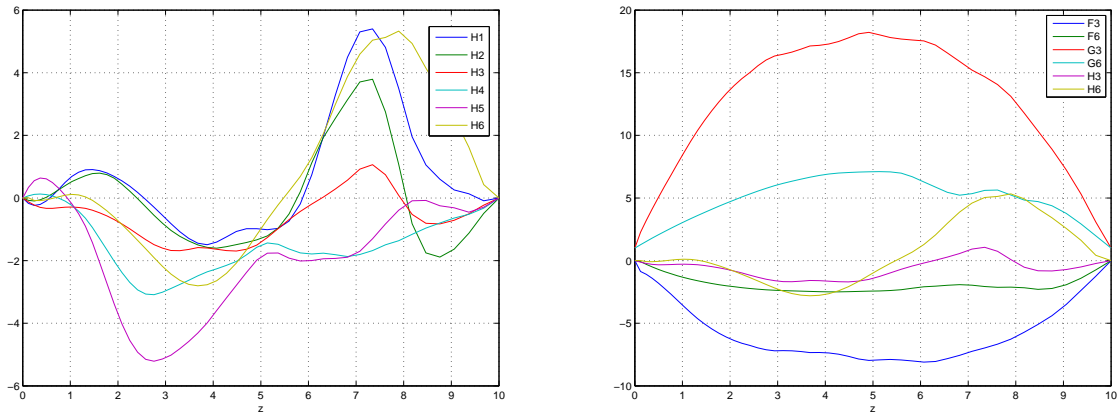


Figura 6.34: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. A figura da direita mostra a diferença entre as velocidades na metade do raio e na borda. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

Nas soluções em regime corrotatório Figs.(6.33 e 6.34) apresentaram instabilidade no campo de velocidade e à medida que aumentamos o número de *Reynolds* (Re) essa instabilidade diminuiu. Percebemos nas Figs.(6.35 e 6.36) que e o fluido move-

se mais rapidamente nas proximidades dos discos, principalmente no segundo disco, e ao longo do eixo axial quase não movimentou-se .

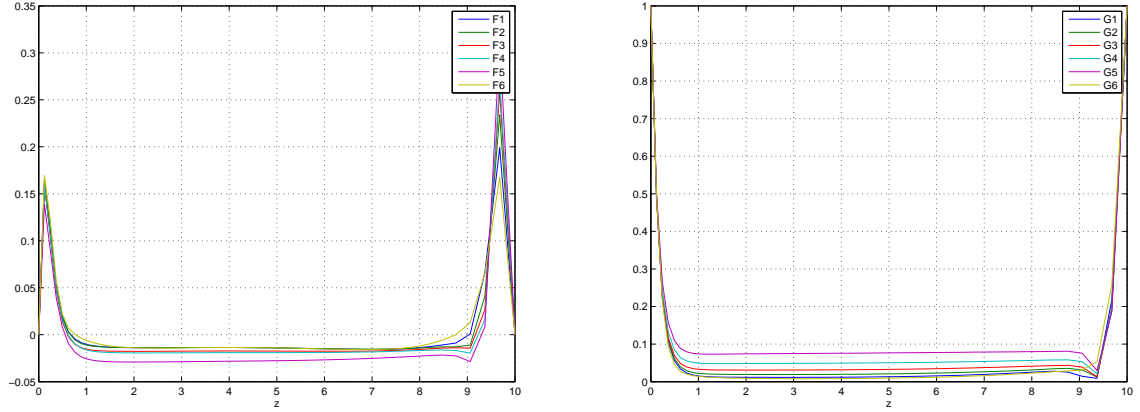


Figura 6.35: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 100$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

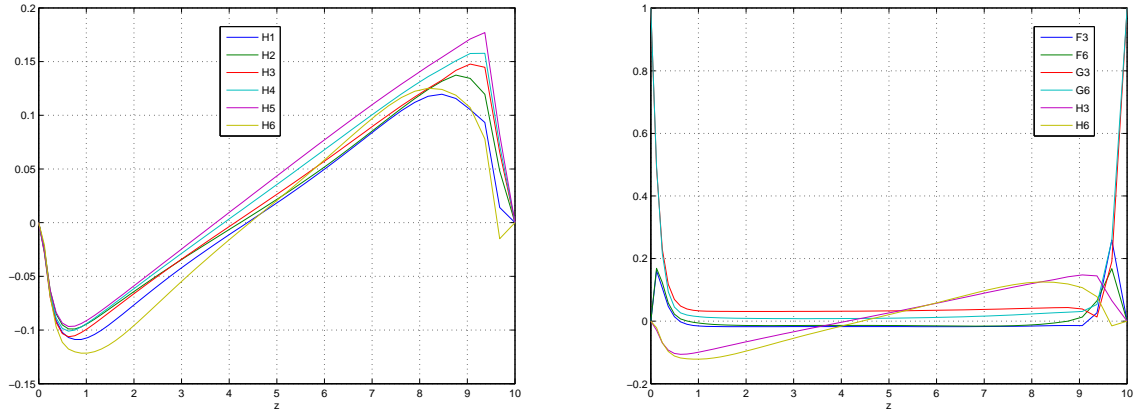


Figura 6.36: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. A figura da direita mostra a comparação dos perfis de velocidades na metade do disco e na borda do disco. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 100$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1$.

6.3.7 Resultados para $z_{max} = 30$, com um dos discos parado

Nos casos com distância entre os discos $z_{max} = 30$ buscamos fazer uma investigação mais apurada do campo hidrodinâmico. Para isso modificamos os valores dos números de *Reynolds* Re e Re_d e verificamos diversos comportamentos do campo.

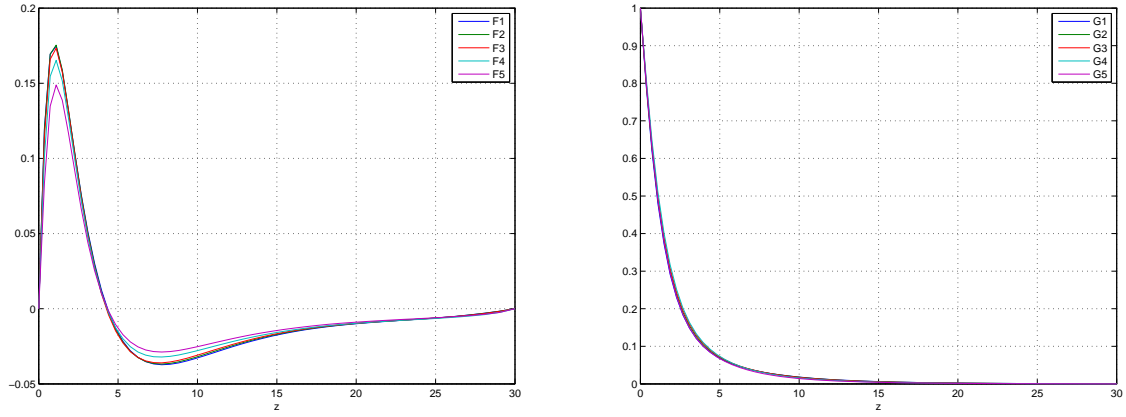


Figura 6.37: Perfis de velocidade em raios diferentes, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

Os casos com um dos discos parado Figs.(6.39(b) e 6.38) é mais uma solução do Ramo de von Kármán , de acordo com os perfis obtidos com o método de diferenças finitas, isso também é fato nas Figs.(6.39 e 6.40).

Na figura(6.38) mostramos à direita uma comparação entre os resultados obtidos pelos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos. Verificamos que os perfis encontrados nos dois casos estão muito próximos garantido assim a validade das soluções. Nessa figura os perfis F, G e H foram achados por diferenças finitas e $F3, G3$ e $H3$ por elementos finitos. Esse é o caso onde as soluções ficaram mais próximas.

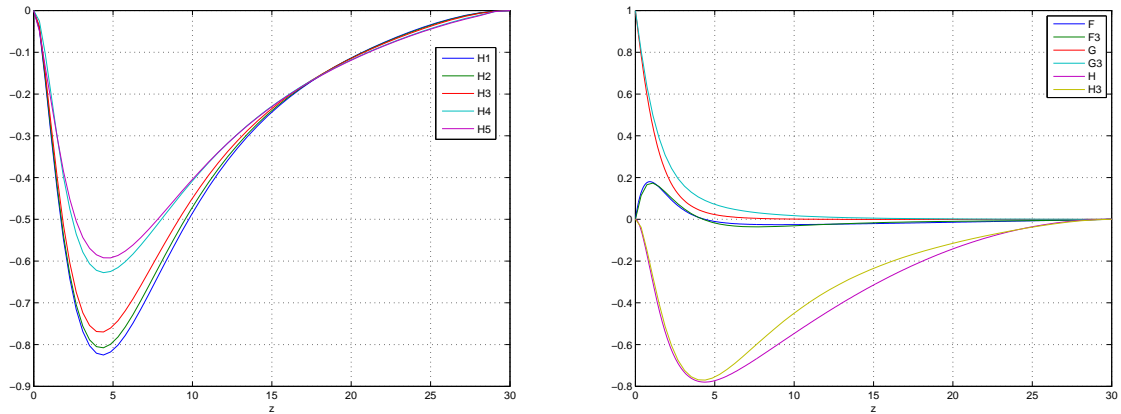


Figura 6.38: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso em que um dos discos está em repouso, retirados na iteração 500. A figura da direita mostra a velocidade axial e a da esquerda o confronto dos resultados obtidos pelos métodos de diferenças finitas e de elementos finitos. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

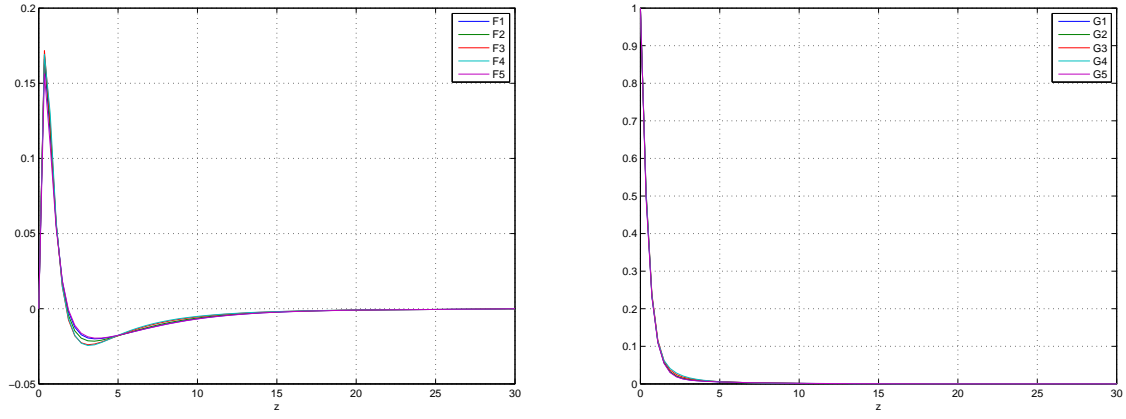


Figura 6.39: Perfis de velocidade em raios diferentes, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

As diferenças entre as soluções das figuras citadas acima foi somente a modificação do número Re . Nesse caso teve um comportamento parecido com outras soluções onde modificávamos esse valor e o fluido quase não movia-se ao longo do eixo axial.

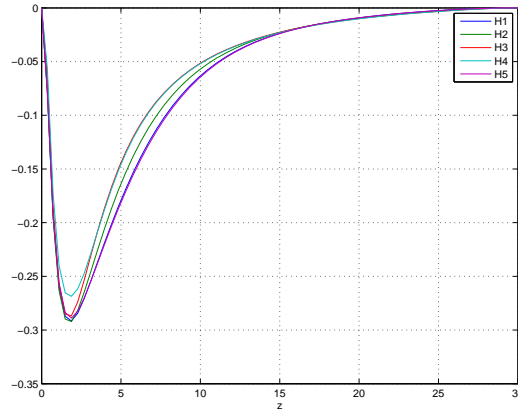


Figura 6.40: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso em que um dos discos está em repouso, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

Serão apresentados agora o campo de velocidade na direção axial para $z_{max} = 30$ plotados em várias posições da distância que separa os discos.

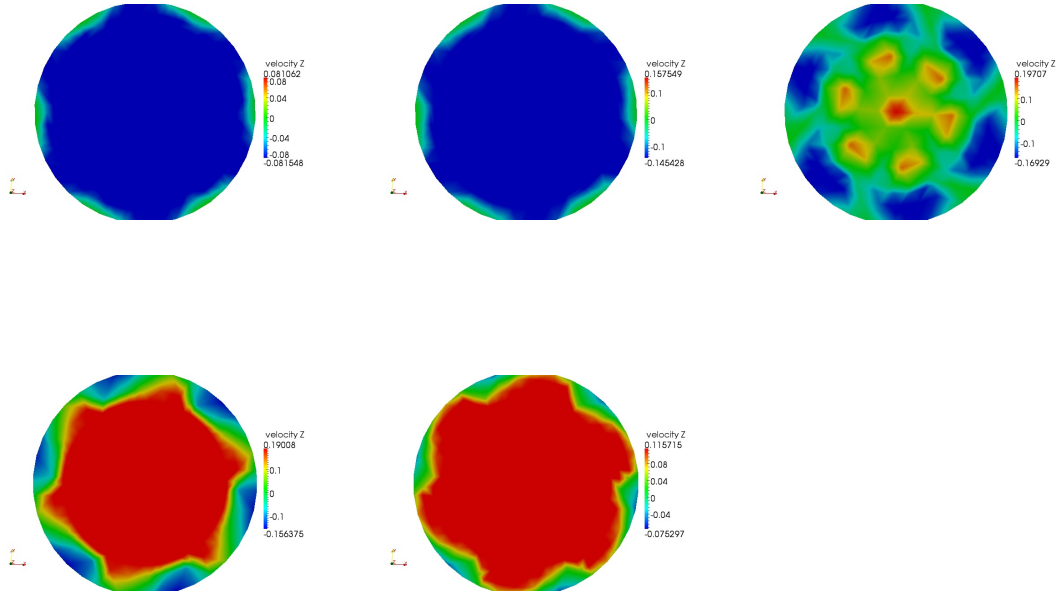


Figura 6.41: Campo de velocidade na direção axial. Os gráficos foram tirados na iteração número 3 nas alturas, respectivamente, $z = 5, z = 10, z = 15, z = 20$ e $z = 25$ nesse caso a distância entre os discos era $z_{max} = 30$. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 0.1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$.

6.3.8 Resultados para $z_{max} = 30$, contrarrotatório

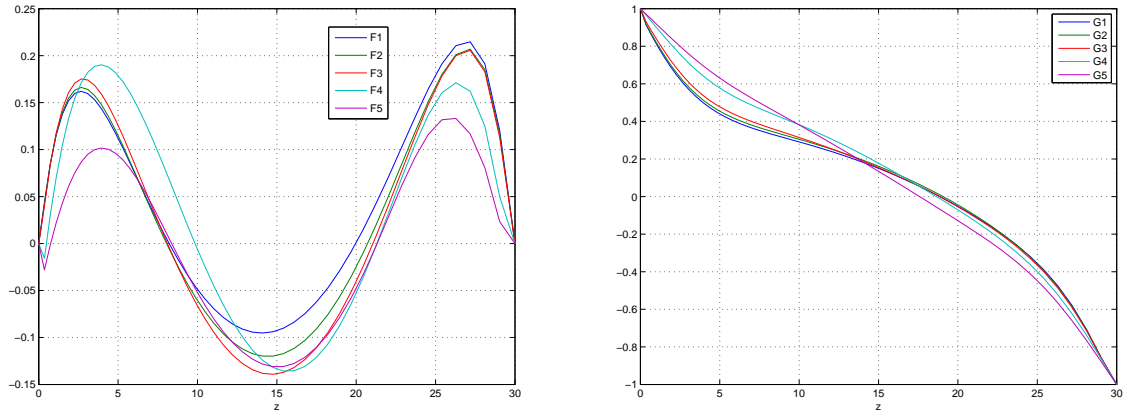


Figura 6.42: Perfis de velocidade em raios diferentes, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimutal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 0.1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$.

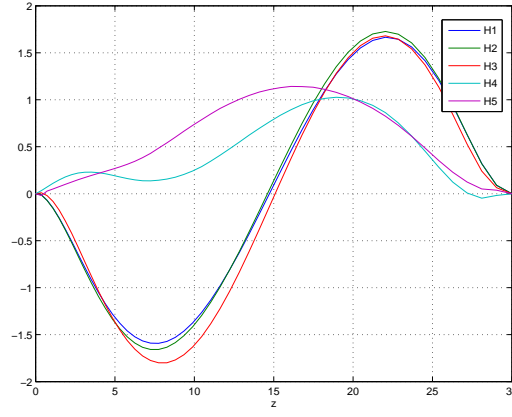


Figura 6.43: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 0.1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$.

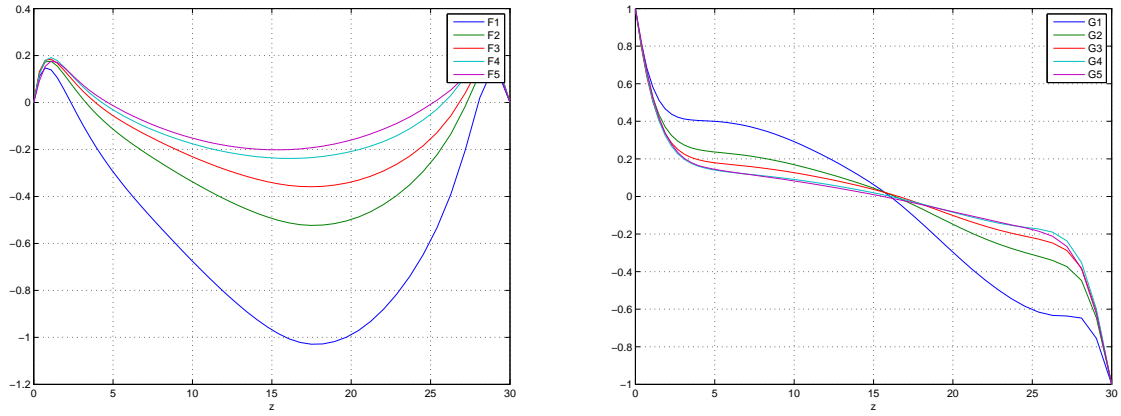


Figura 6.44: Perfis de velocidade em raios diferentes, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$.

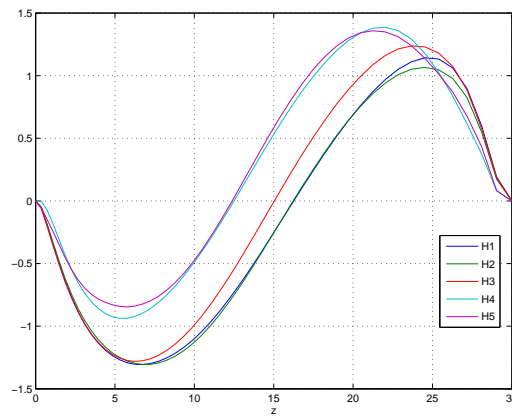


Figura 6.45: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 300$ e $\Gamma = 10$.

Nos perfis das Figs.(6.42, 6.43, 6.44 e 6.45) foram mantidos o tamanho do disco e modificamos apenas o Re . Percebemos que para o número Re baixo os perfis tomam características encontradas em outras soluções e a medida que aumentamos esse valor tornam-se diferentes. Outro fato que observamos é que para $v_z(Hs)$ Fig. (6.43) teve um comportamento diferentes dos à medida que o fluido se afastava do eixo central que separam os discos. O que esperávamos é que esses perfis plotados ao longo do eixo z_{max} ficassem muito próximos. Isso deveria ocorrer devido ao fato da velocidade não ser dependente do raio.

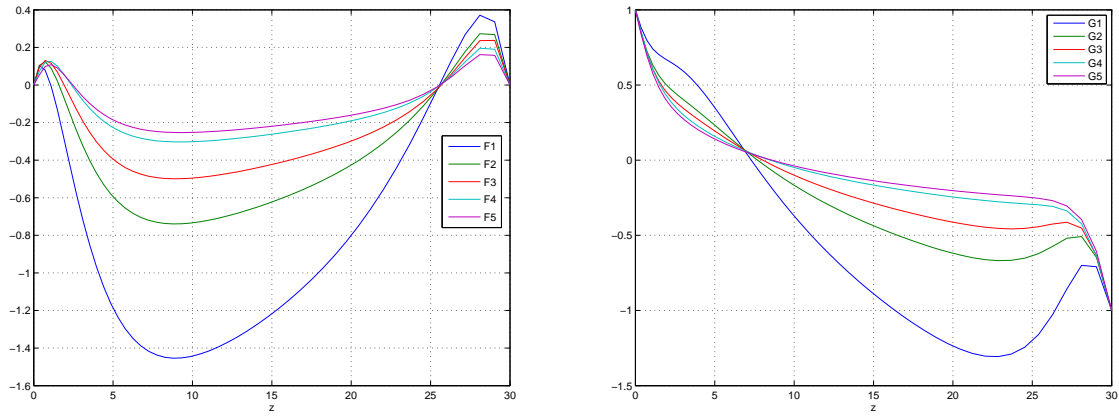


Figura 6.46: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

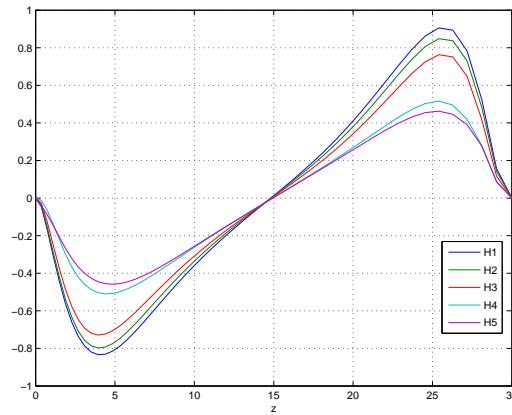


Figura 6.47: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

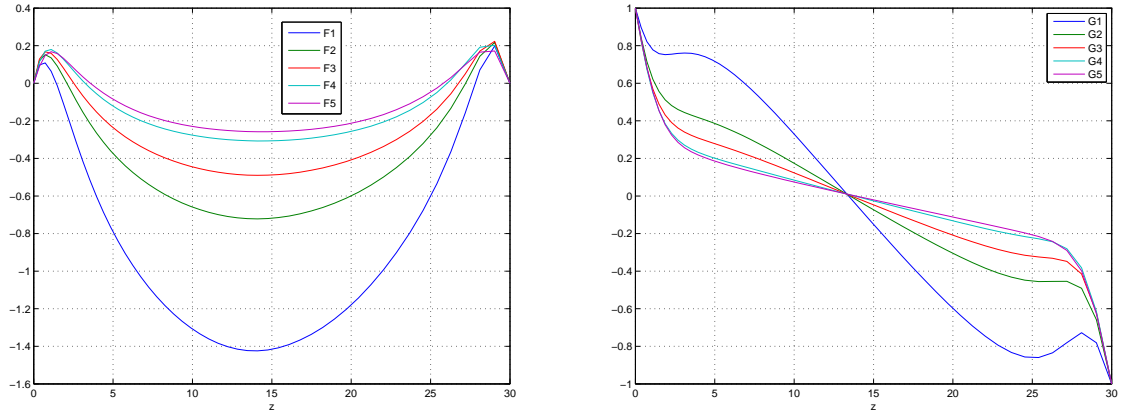


Figura 6.48: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimutal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 30$ e $\Gamma = 1$.

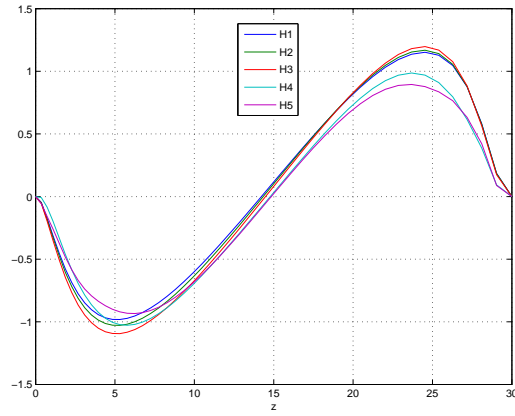


Figura 6.49: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 30$ e $\Gamma = 1$.

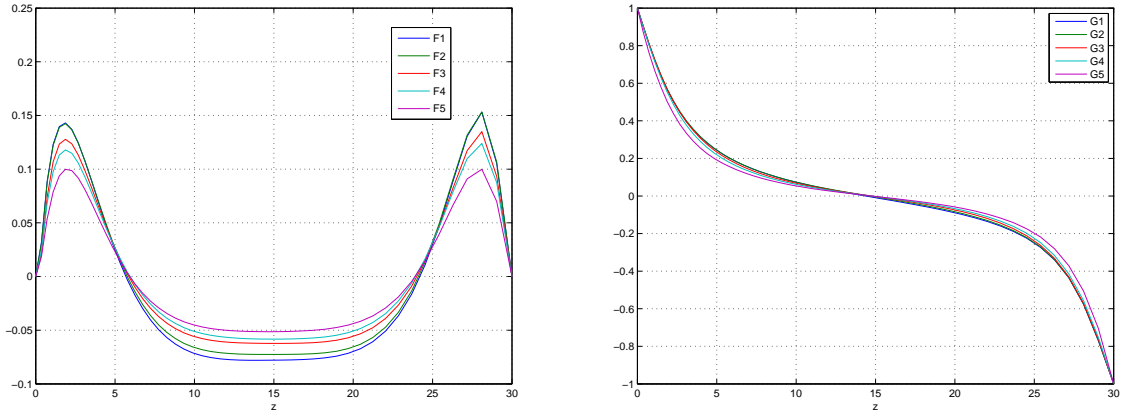


Figura 6.50: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 0.3$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

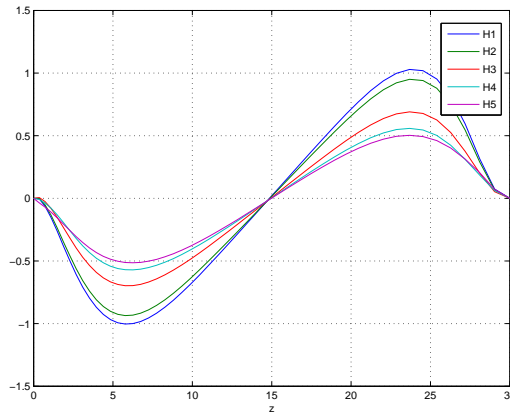


Figura 6.51: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 0.3$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

Fazendo uma análise que as modificações dos números de *Reynolds* provocaram nas soluções. Encontramos, então, nas Figs.(6.46, 6.47, 6.48 e 6.49) comportamento muito próximos dos perfis de velocidade e nas Figs.(6.50 e 6.51) são diferentes das anteriores. Os perfis de velocidades v_r e v_θ das Figs.(6.46 e 6.48) são próximas e diferentes na Fig.(6.50). A velocidade v_z mostrados nas figuras citadas são bem próximas, mostrando assim, a existência de um padrão para o escoamento na direção dessa velocidade, para essa faixa de valores dos números de *Reynolds*.

Essas soluções mostraram que com o aumento do tamanho do disco (valor de Re_d) não produziu um efeito que mudasse completamente as características do campo e que modificando o valor de Re e mantendo de Re_d os perfis de velocidade tornaram-se totalmente distintos.

6.3.9 Resultados para $z_{max} = 30$, corrotatório

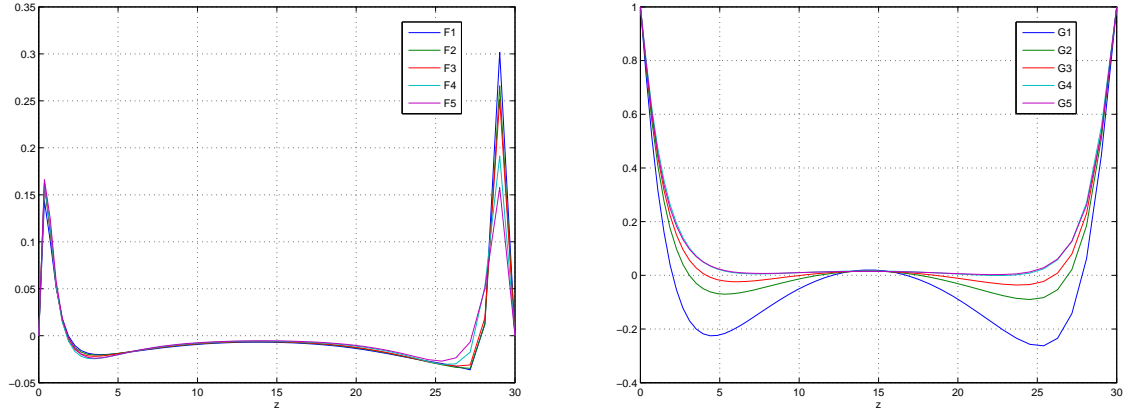


Figura 6.52: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso corrotatório, retirados na iteração 500 . A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimutal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

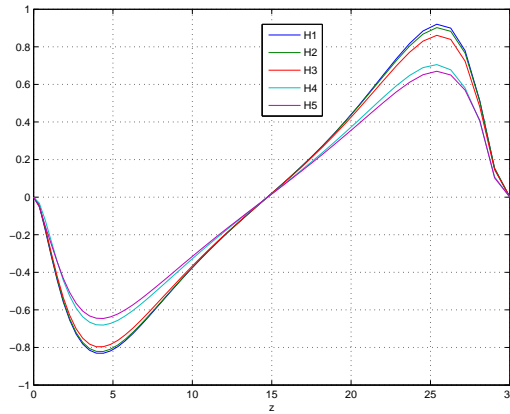


Figura 6.53: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 1$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

Nos casos corrotatório plotados nas Figs.(6.52, 6.53, 6.54 e 6.55) com $z_{max} = 30$, mantemos o tamanho do disco e modificamos apenas o valor de Re . Observamos que com esse aumento os perfis de velocidade quase não se movimentaram ao longo do eixo z e, apenas, nas proximidades dos discos rotatórios tiveram movimentos.

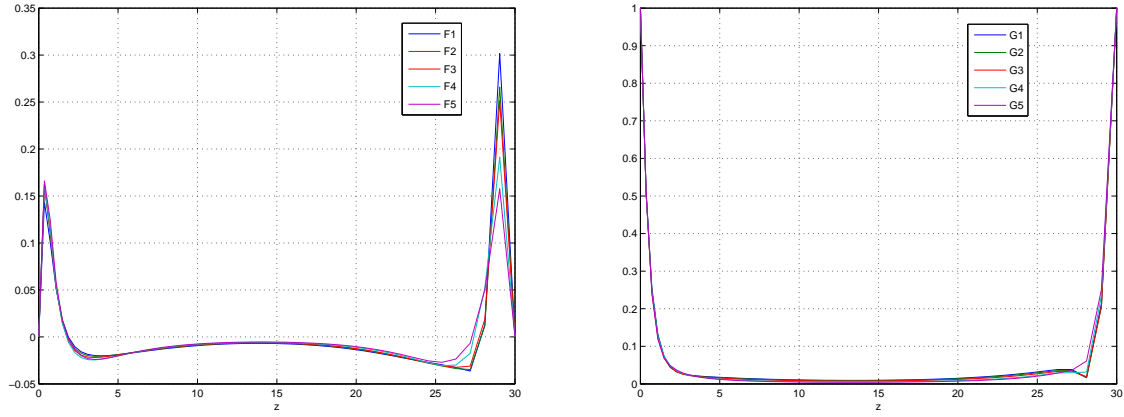


Figura 6.54: Perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso corrotatório, retirados na iteração 500. A figura da esquerda representa a velocidade radial e a da direita a azimuthal. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

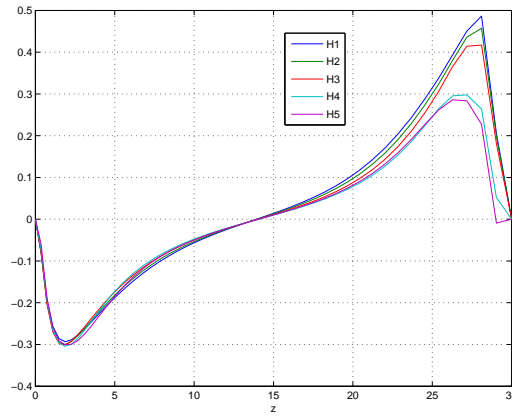


Figura 6.55: Comparativo dos perfis de velocidade em raios diferentes, para o caso contrarrotatório, retirados na iteração 500. A figura mostra a velocidade axial. Os valores dos parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $Re_d = 10$ e $\Gamma = 1/3$.

Devido a escolha de malhas pouco refinadas do disco, ora explicado pelo custo computacional elevado que tem-se tanto no uso de memória quanto pelo uso de processador e também pelo tempo de processamento, então em algumas soluções verificamos que nas regiões próximas aos discos os perfis apresentaram alguns “picos”, às vezes de um lado ou nos dois lados. Devido ao ocorrido é necessário que nesses locais onde existam mudança de escoamento rápido seja essencial o uso de malhas muito refinadas.

Nos caso contrarrotatório e corrotatório onde foram encontradas as soluções, foi possível em alguns casos verificar que houve instabilidade do campo hidrodinâmico, ora, isso é provavelmente explicado pelo aumento do número de *Reynolds*. A complicação desse efeito e aparição de vórtices no seio do fluido.

Capítulo 7

Conclusão

O presente estudo teve como objetivo ampliar o conhecimento teórico existente a respeito do campo hidrodinâmico estacionário de fluido com viscosidade constante, que se forma entre dois discos rotatórios coaxiais.

As configurações possíveis para o problema envolvem a relação entre a velocidade angular de cada disco e a distância (adimensional) entre os discos. A relação entre as velocidades angulares inclui valores associados a um dos discos parados, discos em movimento de corotação e em movimento de contrarotação. Em consequência, o problema tem um espaço de parâmetros muito grande, do qual apenas pequena parte foi varrida no âmbito dessa dissertação.

O campo hidrodinâmico estacionário é regido por um sistema de equações similaridade ordinárias, não lineares, semelhantes às equações de von Kármán, que regem o campo que se desenvolve próximo a um disco rotatório. Nessa dissertação, denominamos as equações de similaridade do problema de dois discos por Equações de von Kármán Generalizadas. As equações generalizadas que apresentamos (Eqs. 3.81 a 3.85) distinguem-se das encontradas na literatura por admitirmos situação em que a viscosidade do fluido depende da concentração de uma espécie química transportada. Essas últimas foram simplificadas para o caso de fluido com viscosidade constante, que é o abordado na presente dissertação (ver Eqs. 3.86 a 3.89).

As equações de similaridade do campo entre dois discos diferenciam-se das clássicas de von Kármán para o campo próximo a um disco pela dependência da pressão, no primeiro caso, com relação à coordenada radial. Essa dependência expressa-se pela existência um parâmetro k na Eq. 3.87, que aumenta ainda mais a dimensão do espaço de parâmetros do problema. Os resultados existentes na literatura e os apresentados nessa dissertação mostram que apenas para certos valores de k obtém-se solução para o campo hidrodinâmico.

Os estudos das equações de von Kármán generalizadas (Eqs. 3.81 a 3.89) datam da década de 1950. Encontramos na literatura resultados completos referentes apenas a uma distância entre os discos ($z_{max} = 25$). Para essa distância encontramos 7

soluções estacionárias distintas. Não encontramos perfis de similaridade referentes a discos separados por outras distâncias. A primeira parte dessa dissertação abordou então o desenvolvimento e uso de código de diferenças finitas para a busca de soluções referentes a outras distâncias entre os discos. Com o código desenvolvido reproduzimos os resultados existentes na literatura (ver Cap. 4) e obtivemos novas soluções, apresentadas nas Sec. 6.1. Consideramos os casos em que o segundo disco encontra-se parado, o dos dois discos girando com a mesma velocidade angular e o dos discos girando em sentido contrário, com velocidade angular de mesma magnitude.

O caso de um dos discos parados recebeu atenção particular nessa dissertação. Restringimo-nos a distâncias adimensionais $1 \leq z_{max} \leq 50$, procurando soluções para $z_{max} = 1, 5, 10, 15, 20, 30, 40$ e 50 . Por certo não obtivemos todas as soluções associadas a essas distâncias. No entanto, essa dissertação mostra que, quanto maior a distância entre os discos mais soluções existem para cada valor de z_{max} . Os valores de k para os quais as Equações de von Kármán Generalizadas admitem solução podem ser então plotados em um diagrama de bifurcação, $k \times z_{max}$, ao qual não encontramos referências na literatura. A Fig. 6.1 mostra alguns pontos desse diagrama, referentes a um disco parado, com os valores de k encontrados na literatura e os obtidos no desenvolvimento do presente trabalho. Os pontos mostrados evidenciam a existência de bifurcações, com novas soluções surgindo com o aumento de k . Parece claro que diagramas semelhantes devem existir para velocidades angulares do segundo disco diferentes de zero. Vemos então campo para trabalhos futuros que visem completar o diagrama da Fig. 6.1 e para a construção de outros, associados a diferentes velocidades angulares do segundo disco.

Estudando o campo que se desenvolve entre um disco rotatório e um disco parado encontramos pontos do diagrama de bifurcação pertencentes a três ramos de soluções:

1. O primeiro ramo inclui soluções cujos perfis adimensionais F e G , correspondentes às componentes radial e azimutal da velocidade, são qualitativamente iguais aos da solução clássica de von Kármán. O perfil H , correspondente à componente axial da velocidade é semelhante ao da solução clássica próximo ao disco que gira, mas decai para o valor ao longo do domínio, de modo a satisfazer a condição de contorno $v_z = 0$ junto ao segundo disco. Os valores do parâmetro k desse ramo de soluções diminuem e tendem a zero com o aumento da distância entre os discos. Os resultados obtidos no desenvolvimento dessa dissertação sugerem então que as Equações de von Kármán Generalizadas tendem às clássicas, à medida em que a distância entre os discos aumenta.

O ramo de von Kármán apresenta uma bifurcação próximo a $z_{max} = 10$,

quando dois ramos de soluções passam a coexistir, a partir dessa distância entre os discos. Não nos parece que o ramo de von Kármán apresente outras bifurcações, pois com o aumento da distância entre os discos tende-se ao problema de um único disco, que só tem uma solução conhecida.

2. A partir de $z_{max} = 10$ encontramos um segundo ramo de soluções cujos valores de k não varia muito com a distância entre os discos, ao menos no intervalo estudado. AS soluções desse ramo são qualitativamente semelhantes.
3. Encontramos também uma única solução pertencente a um terceiro ramo de soluções mais complexas do que as dos dois ramos anteriores.

Em vista dos resultados apresentados e das 7 soluções descritas por Holodniok *et al.* [15] torna-se claro que o diagrama de bifurcação apresentado na Fig. 6.1 não fornece quadro completo das soluções da configuração de um disco em movimento e outro parado. E que diagramas semelhantes devem existir para outras configurações em que ambos os discos se movem. São questões que poderão se respondidas em trabalhos futuros.

Utilizamos dois códigos para a resolução das Equações de von Kármán Generalizadas. O primeiro, empregando o *software* comercial *Matlab*[®] e o segundo, empregando código em linguagem *C*. Em vários casos só obtivemos solução com o primeiro código. Nos casos em que obtivemos solução com os dois códigos, os resultados coincidem satisfatoriamente. Os resultados obtidos pela integração das equações tridimensionais e dependentes do tempo forneceram resultados qualitativamente semelhantes aos obtidos pela resolução das Equações de von Kármán Generalizadas. Acreditamos que as diferenças quantitativas encontradas entre as duas soluções devam-se à diferença entre o refinamento das duas malhas de pontos. Podemos verificar esses resultados nas Figs.(6.16(b), 6.30(b) e 6.38(b)).

Na maioria dos campos de velocidade dos casos corrotatório encontrados mostraram-se instáveis ou com comportamento fora das soluções encontradas nas literaturas pesquisada, mostrando assim que os perfis onde não tiveram instabilidades são de novas soluções. Isso evidencia que é um dos casos onde devemos a partir de outros trabalhos fazer minuciosas investigações desses comportamentos.

Outro fato relevante que obtemos é que na maioria das soluções não encontramos escoamentos uniformes e bem poucos axissimétricos. Mas foram encontradas soluções do tipo Batchelor e do tipo Stewartson.

Dando prosseguimento aos estudos sugerimos alguns trabalhos futuros:

- Estudar outras configurações da célula, analisando qual é influência do aumento do tamanho do raio e da altura h , além dos valores utilizados nessa dissertação.

- Utilização de malhas mais refinadas, principalmente nas proximidades dos discos.
- Procurar soluções com viscosidade variável e velocidades prescritas nos discos diferentes das utilizadas nesse trabalho.

Apêndice A

Teorema e Condições Importantes

A.1 Teorema Π de Buckingham

O Teorema demonstra que, em um problema físico que depende de n variáveis $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, k dimensões físicas, essas variáveis podem ser agrupadas em $n - k$ parâmetros adimensionais independentes $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k})$ a lei que governa o fenômeno se expressa por uma equação da forma.

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

que, na sua forma explícita, se escreve:

$$\Pi_1 = G(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (\text{A.2})$$

A.2 A condição de Babuska-Brezzi

A condição de Babuska-Brezzi é habitualmente utilizada em elementos finitos para verificar a estabilidade do problema.

Seja U e V dois espaços de Hilbert, com o produto interno $(\cdot, \cdot)_U$ $(\cdot, \cdot)_V$. Sendo $\mathcal{B}(\cdot, \cdot) : U \times V \mapsto \mathbb{R}$, uma forma bilinear contínua. Assim:

$$\mathcal{B}(u, v) \leq \|\mathcal{B}\| \|u\|_U \|v\|_V \quad (\text{A.3})$$

Devemos encontrar $u \in U$ tal que

$$\mathcal{B}(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (\text{A.4})$$

onde $f \in V^*$ é um espaço de funcionais lineares contínuo em V e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um par usual de V^* em V .

Assim (A.4) é válida se, e somente se, forem aceitas as seguintes relações:

$$\inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} > 0, \quad \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} > 0 \quad (\text{A.5})$$

se forem válidas, então:

$$\inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} > 0 = \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \equiv \alpha > 0 \quad (\text{A.6})$$

e a única solução de (A.4) satisfaz

$$\|u\|_U \leq \frac{\|f\|_V^*}{\alpha} \quad (\text{A.7})$$

As condições (A.5) e (A.6) são frequentemente conhecidas como as condições de Babuska-Brezzi. Essa explicação teve como referência o trabalho dos autores Xu e Zikatanov [39].

Referências Bibliográficas

- [1] GAUTHIER, G., GONDRET, P., MOISY, F., et al. “Instabilities in the flow between co-and counter-rotating disks”, *J. Fluid Mech*, v. 473, pp. 1–21, 2002.
- [2] BARCIA, O. E., MATTOS, O. R., TRIBOLLET., B. “Anodic dissolution of iron in acid sulfate under mass transport control”, *J. Electrochem. Soc.*, v. 139, n. 2, pp. 446–453, February 1992.
- [3] GAUTHIER, G. *Etude expérimentale des instabilités de l’écoulement entre deux disques*. Phd thesis, Université Paris XI, 1998.
- [4] ANJOS, G. R. *Solução do campo hidrodinâmico em células eletroquímicas pelo método de elementos finitos*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [5] PONTES, J., MANGIAVACCHI, N., MATTOS, O. R., et al. “Rotating Disk Flow Stability in Electrochemical Cells: Effect of Viscosity Stratification”, *Phys. Fluids*, v. 16, n. 3, pp. 707–716, 2004.
- [6] MANGIAVACCHI, N., PONTES, J., BARCIA, O. E., et al. “Rotating Disk Flow Stability in Electrochemical Cells: Effect of the Transport of a Chemical Species”, *Phys. Fluids*, v. 19, 2007.
- [7] BARCIA, O. E., MANGIAVACCHI, N., MATTOS, O. R., et al. “Rotating Disk Flow in Electrochemical Cells: A Coupled Solution for Hydrodynamic and Mass Equations”, *Journal of The Electrochemical Society*, v. 155, n. 5, pp. D424–D427, 2008.
- [8] OLIVEIRA, G. C. P. *Estabilidade hidrodinâmica em células eletroquímicas pelo método de elementos finitos*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2011.
- [9] KÁRMÁN, T. V. “Über laminare und turbulente Reibung”, *ZAMM*, v. 1, pp. 233–252, 1921.

- [10] BATCHELOR, G. K. “Note a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow”, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, v. 4, pp. 29–41, 1951.
- [11] STEWARTSON, K. “On the flow between two rotating coaxial disks”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, v. 49, pp. 333–341, 1953.
- [12] ZANDBERGEN, P., DIJKSTRA, D. “Von Kármán Swirling Flows”, *Annu. Rev Fluid Mech.*, , n. 19, pp. 465–491, 1987.
- [13] PEARSON, C. E. “Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks”, *J. Fluid Mech.*, v. 21, n. 4, pp. 623–633, 1965.
- [14] ROBERTS, S. M., SHIPMAN, J. S. “Computation of the flow between a rotating and a stationary disk”, *J. Fluid Mech.*, v. 73, n. 1, pp. 53–63, 1976.
- [15] HOLODNIOK, M., KUBÍČEK, M., HLAVÁČEK, V. “Computation of the flow between two rotating coaxial disks”, *J. Fluid Mech.*, v. 81, n. 4, pp. 689–699, 1977.
- [16] LANCE, G. N., ROGERS, M. H. “The axial symmetric flow of a viscous fluid between two infinite rotating disks”, *Proc. Roy. Soc.*, v. 266, n. 1324, pp. 109–121, 1962.
- [17] HOLODNIOK, M., KUBÍČEK, M., HLAVÁČEK, V. “Computation of the flow between two rotating coaxial disks: multiplicity of steady-state solutions”, *J. Fluid Mech.*, v. 108, n. 1, pp. 227–240, 1981.
- [18] GAN, X., KILIC, M., OWEN, J. M. “Superposed flow between two discs contrarotating at differential speeds”, *I. J. Heat and Fluid Flow.*, v. 15, n. 6, pp. 438–446, 1994.
- [19] GAN, X. P., MACGREGOR, S. A. “Experimental study of the flow in the cavity between rotating disks”, *E. T. Fluid Science*, v. 10, pp. 379–387, 1995.
- [20] SOONG, C. Y., WU, C. C., LIU, T. P. “Flow structure between two coaxial disks rotating independently”, *E. T. Fluid Science*, v. 27, pp. 295–311, 2003.
- [21] MOISY, F., DOARÉ, O., PASUTTO, T., et al. “Experimental and numerical study of the shear layer instability between two counter-rotating disks”, *J. Fluid Mech.*, v. 507, pp. 175–202, 2004.

- [22] PÉCHEUX, J., FOUCALT, E. “Axisymmetric instabilities between coaxial rotating disks”, *J. Fluid Mech.*, v. 563, pp. 293–318, 2006.
- [23] CHAWLA, S. S., SRIVASTAVA, P. K., GUPTA, A. S. “Rotationally symmetric flow over rotating disk”, *I. J. Non-Linear Mech.*, v. 44, pp. 717–726, 2009.
- [24] KOSTRYKIN, S. V., KHAPAEV, A. A., YAKUSHKIN, I. G. “Vortex patterns in quasi-two-dimensional flows of a viscous rotating fluid”, *J. Exp. Theoretical Physics*, v. 112, n. 2, pp. 344–354, 2011.
- [25] FOX, R. W., MCDONALD, A. T., PRITCHARD, P. J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 6 ed. , LTC, 2000.
- [26] BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 2000.
- [27] PONTES, J., MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência Com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia*. Rio de Janeiro, Não publicada, 2012.
- [28] NGUYEN, N. D., RIBAUT, J. P., FLORENT, P. “Multiple solutions for flow between coaxial disks”, *J. Fluid Mech.*, v. 68, n. 2, pp. 369–388, 1975.
- [29] DIJKSTRA, D., VAN HEIJST, G. J. F. “The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder”, *J. Fluid Mech.*, v. 128, pp. 123–154, 1983.
- [30] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. edUSP, 2000.
- [31] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1987.
- [32] TEZDUYAR, T. E., OSAWA, Y. “Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors”, *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, , n. 190, pp. 411–430, 2000.
- [33] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method Vol. 1: The Basis*. 5 ed. , Butterworth Heinemann, 2000.
- [34] YOUNG, N. *An Introduction to Hilbert Space*. 1 ed. , Cambridge Mathematical Textbooks, 1988.
- [35] GURTIN, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. 1 ed. New York, Academic Press, 1981.
- [36] RUDIN, W. *Functional Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1973.

- [37] ODEN, J. T., REDDY, J. N. *An Introduction To The Mathematical Theory of Finite Elements*. New York, John Wiley & Sons, 1976.
- [38] DESAI, C. S., ABEL, J. F. *Introduction To The Finite Element Method*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1972.
- [39] XU, J., ZIKATANOV, L. “Some observations on Babuska and Brezzi theories”, *Numer. Mach.*, v. 94, pp. 195–202, 2003.