Capítulo 2:
Conceptos básicos y Métodos descriptivos

2.0. Componentes de una serie temporal:
- Irregular
- Estacional
- Cíclica
- Tendencia

2.1. Tendencia, dependencia serial, estacionalidad y estacionaridad. Funciones de autocovarianza y autocorrelación teóricas

2.2. Funciones de autocovarianza y autocorrelación muestrales. Correlograma.

2.3. Comportamiento cíclico. Periodicidad. Periodograma.

2.4. Relación entre Periodograma y Correlograma.

2.5. Transformación de los datos: suavizado, diferenciación. Filtros.

Capítulo2: Conceptos básicos y Métodos descriptivos

Las técnicas estadísticas para el análisis de series temporales van desde técnicas sencillas de descripción de datos a técnicas de inferencia sofisticadas.

Este tema presenta las técnicas descriptivas. Primer paso en el análisis de series.

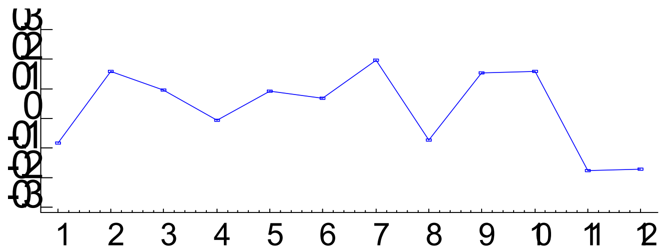
La técnica más sencilla es la representación de las observaciones de la serie respecto al tiempo.

Examinando cuidadosamente este gráfico vamos a descubrir las características más importantes de la serie.

Podemos encontrar básicamente cuatro tipos de comportamiento en una serie:

- Datos horizontales

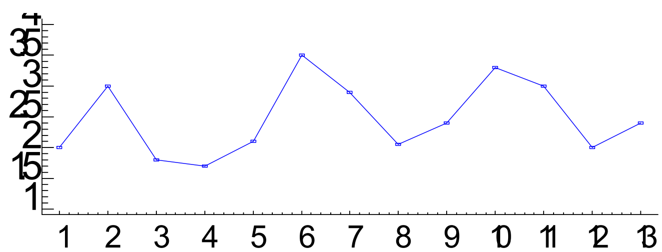
Comportamiento irregular



Oscilan aleatoriamente por encima y debajo de la media

Oscilan en torno a la media que es constante a lo largo del tiempo.

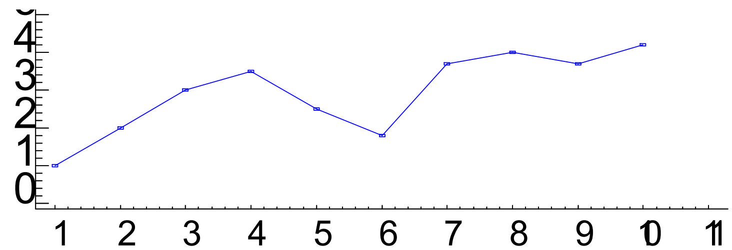
- Comportamiento estacional



Los datos fluctuan de acuerdo con algún factor estacional (trimestres, meses, semanas, etc). Este comportamiento se debe a causas externas a la propia serie.

-Tiempo atmosférico
-Costumbres de un país (periodos vacacionales, fiestas)
.....

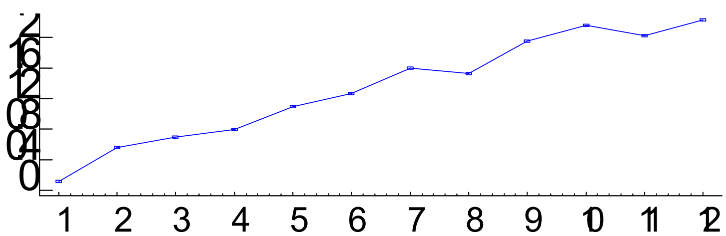
- Comportamiento cíclico



Los datos fluctuan pero la longitud del ciclo puede llegar a ser diferente de unos ciclos a otros.

La fluctuación suele deberse a factores intrínsecos de la serie más que a factores externos.

- Tendencia



Los datos presentan crecimiento o decrecimiento general a lo largo del tiempo.

Se pueden encontrar otros tipos de comportamiento en las series, pero estos son los más importantes. Muchas series son combinación de estos cuatro.

2.1 Tendencia, dependencia serial, estacionalidad y estacionaridad.

En esta sección introducimos algunos conceptos esenciales para entender la estructura probabilística de las series temporales.

Consideramos los datos de una serie temporal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como los valores observados de n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots X_n$ que no necesariamente tienen que ser independientes, al contrario, rara vez lo serán.

La **tendencia** o valor medio de la serie es la función $\boxed{\mu(t) = E(X_t)}$

(a cada instante del tiempo t le asigna la media de la variable aleatoria correspondiente a ese instante)

Esta función describe el comportamiento medio de la serie a lo largo del tiempo.

Función de autocovarianza (dependencia serial) La dependencia serial revela el hecho de que dos variables de la serie X_t y X_s son, en general, dependientes. La matriz de varianzas - covarianzas es útil para estudiar la dependencia entre un número finito de variables aleatorias. Extendemos este concepto para poder utilizarlo con una colección infinita de variables aleatorias.

Sea $\{X_t\}$ un proceso con $var(X_t) < \infty$ para cada t. Se define la función de autocovarianza como la función que a cada par de instantes (t, s) de tiempo le asocia

$$\boxed{\gamma(t, s) = cov(X_t, X_s) = E(X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))}$$

Nota: $\gamma(t,t) = var(X_t)$

La matriz de varianzas - covarianzas de (X_1,X_2,..., X_n) es

$$\begin{pmatrix} \gamma(1,1) & \gamma(1,2) & ... & \gamma(1,n) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,2) & ... & \gamma(2,n) \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \gamma(1,n) & \gamma(2,n) & ... & \gamma(n,n) \end{pmatrix}$$

Sea $\{X_t\}$ un proceso con $var(X_t) < \infty$ para cada t. Se define la función de autocorrelación como la función que a cada par de instantes (t, s) de tiempo le asocia

$$\boxed{\rho(t,s) = corr(X_t, X_s) = \frac{E(X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))}{\sqrt{var(X_t)}\sqrt{var(X_s)}}}$$

Cuando usemos Box-Jenkins para modelizar partiremos de una serie estacionaria

Estacionaridad La estacionaridad es una propiedad que va a revelar el hecho de que la estructura probabilística de las variables $\{X_t\}$ no se ve afectada por el cambio de origen en el tiempo, sino que presenta cierta estabilidad cuando nos desplazamos por el tiempo. A continuación definimos de forma más rigurosa este concepto importante

Estacionaridad estricta.

Una serie temporal $\{X_t\}$ se dice que es estacionaria en sentido estricto si el vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$

está igualmente distribuido que el vector

$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_k+h})$ para todo

k, t_1,t_2, ...,t_k y h (valores enteros).

Estacionaridad en sentido débil.

Una serie temporal $\{X_t\}$ se dice que es estacionaria en sentido débil si

$$
\begin{aligned}
E(X_t^2) &< \infty \quad \text{para todo t} \\
E(X_t) &= \mu \quad \text{para todo t} \\
\gamma(t,s) &= \gamma(t+h, s+h) \quad \text{para todo t, s y h}
\end{aligned}
$$

De aquí se deduce que Var(X_t) también es independiente de t, pues tomando t=s tenemos Var(X_t)=Var(X_{t+h}) para todo h

Si el proceso es estacionario en sentido estricto lo es en sentido débil, pero el recíproco sólo es cierto si todos los vectores finitodimensionales que se pueden extraer de la serie son normales.

Ejemplo de serie estacionaria:

ó distinta de 0 pero constante

Ruido Blanco

Una sucesión de variables aleatorias de media cero, varianza constante e independientes.

A veces también se añade v.a. normales cuando nos referimos a ruido blanco.

Ejemplo de serie no estacionaria:

Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes de media cero y varianza σ^2. Formamos a partir de ellas la sucesión siguiente

$S_1 = Y_1$

$S_2 = Y_1 + Y_2$

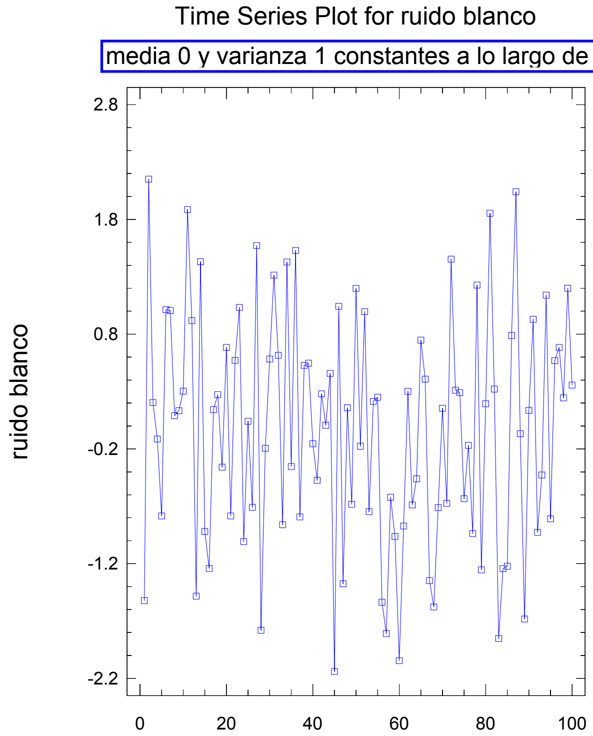
Y_i Ruido blanco
S_i Camino aleatorio

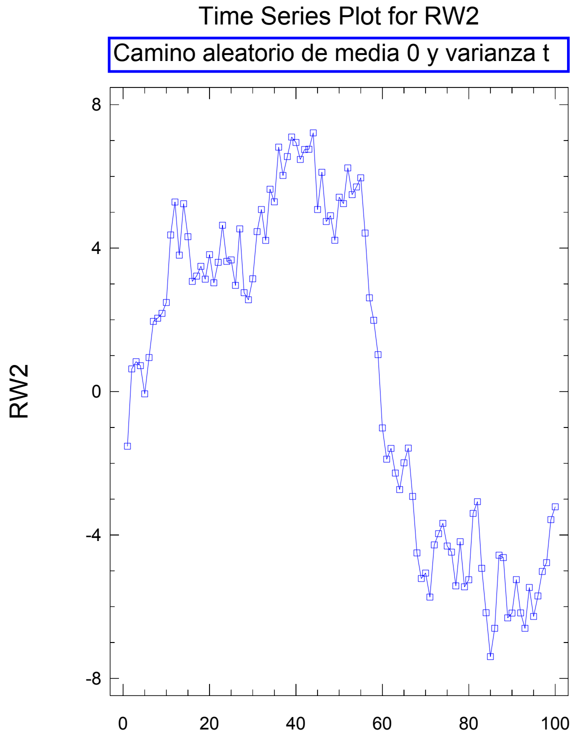
$S_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$

....

$S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ recibe el nombre de camino aleatorio simple. Este nuevo conjunto de variables no es estacionario puesto que $Var(S_t) = \sigma^2 t$ depende del tiempo t.

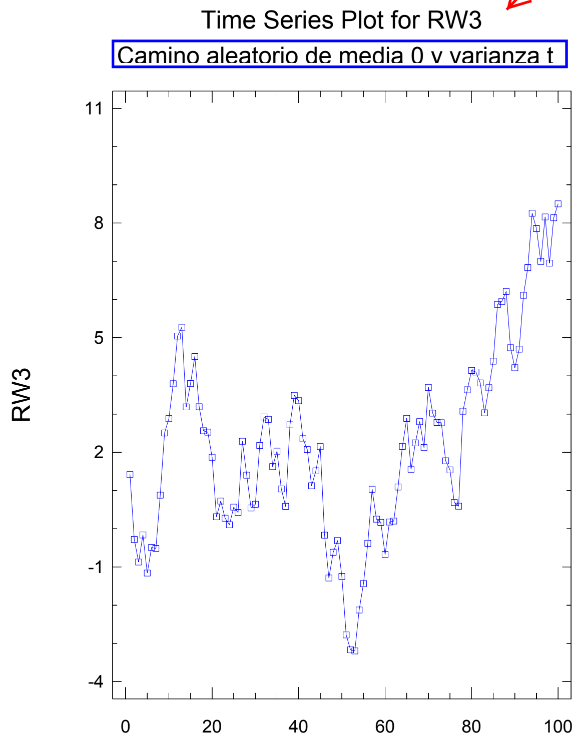


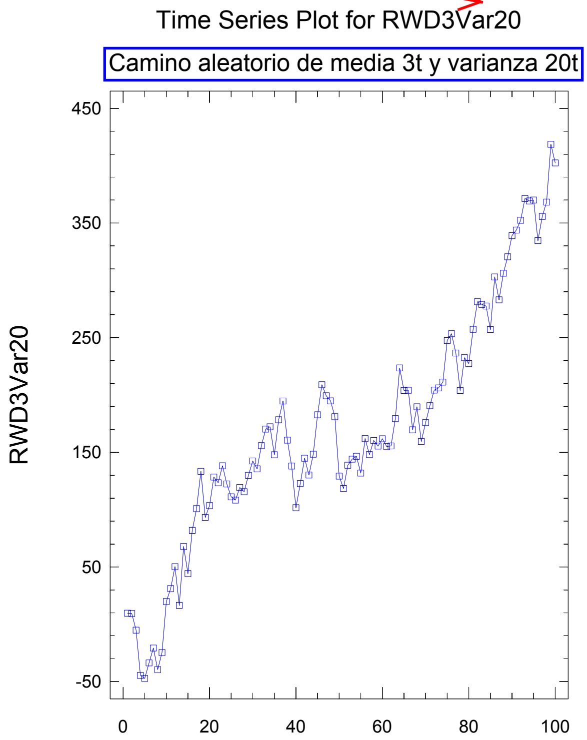


No tiene tendencia

Tendencia estocástica

Tendencia parte estocástica y parte determinista
Ejercicio 9



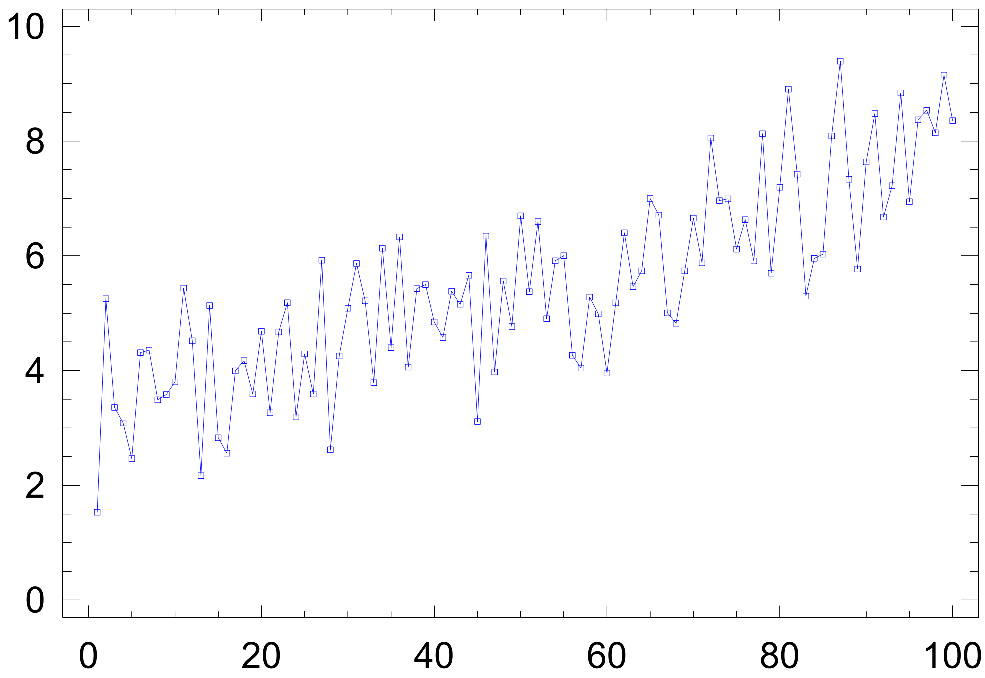


Serie no estacionaria

Tendencia determinista

X_t=3+0.05t+a_t donde a_t es N(0,1)

$E(X_t)$=3+0.05t



tomando h=-s

$\gamma(3,5)=$
$=\gamma(4,6)$
$=\gamma(5,7)$
$=\gamma(9,11)$
$=\gamma(-2,0)$
$=\gamma(0,2)$

tomando $h=1,2,6,-5$ y -3

Si la serie es estacionaria se comprueba fácilmente que $\gamma(t, s) = \gamma(t - s, 0)$ para cada t y s. Esto nos dice que la autocovarianza sólo depende del tiempo que transcurre entre las variables consideradas, no del instante concreto. Esto nos permite redefinir la función de autocovarianza para series estacionarias como

$$\boxed{\gamma(h) = \gamma(h, 0) = cov(X_{t+h}, X_t) \text{ para cada h}}$$

Nota: $\gamma(0) = var(X_t)$

También permite redefinir la función de autocorrelación para series estacionarias como

$$\boxed{\rho(h) = corr(X_{t+h}, X_t) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \text{ para cada h}}$$

$\gamma(h)$ valor de la autocovarianza en el retardo h

$\rho(h)$ coeficiente de autocorrelación en el retardo h

Estacionalidad La estacionalidad pone de manifiesto la pauta de comportamiento de una serie que se repite según las estaciones. Así en una serie de datos mensuales puede esperarse por ejemplo que todos los meses de enero tengan un comportamieno similar, haciendo que la serie presente un comportamiento cíclico con un periodo de 12 meses.

2.2 Funciones de autocovarianza y autocorrelación muestrales.

Los coeficientes de autocorrelación suministran información importante a cerca del comportamiento de las series temporales y de sus componentes (tendencia, estacionalidad y aleatoriedad). También ayudan, como veremos más adelante, a determinar si estamos utilizando el mode-lo adecuado.

El concepto de autocorrelación es similar al de correlación, pero se aplica a los valores observados en distintos momentos del mismo fenómeno. Así como el coeficiente de correlación nos proporciona una medida de la relación lineal entre dos variables, la función de autocorrelación nos dará una medida de la dependencia entre cada par de variables de la serie.

Las funciones de autocovarianza y autocorrelación teóricas (como veremos más adelante en la asignatura) son útiles para describir las propiedades de los modelos teóricos, pero en la práctica debemos conformarnos con las funciones de autocovarianza y autocorrelación muestrales.

Tenemos los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una serie temporal. La función de autocovarianza muestral se define como la función que a cada número natural m le asocia el valor

$$\boxed{\widehat{\gamma}(m) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-m} (x_{t+m} - \overline{x})(x_t - \overline{x})}$$

retardo

siendo $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{t=1}^{n} x_t$ la media muestral de la serie

Hay que hacer notar que este estadístico difiere un poco del que resulta de utilizar la idea de covarianza muestral habitual. Esta da lugar al siguiente estadístico

$$\widehat{\gamma}'(m) = \frac{1}{n-m} \sum_{t=1}^{n-m} (x_{t+m} - \overline{x}_{m+1}^{(m)})(x_t - \overline{x}_1^{(m)})$$

siendo $\overline{x}_{m+1}^{(m)} = \frac{1}{n-m} \sum\limits_{t=m+1}^{n} x_t$

$$\overline{x}_1^{(m)} = \frac{1}{n-m} \sum_{t=1}^{n-m} x_t$$

$\widehat{\gamma}'(m)$ es insesgado si la media es cero mientras que $\widehat{\gamma}(m)$ tiene sesgo que tiende a cero si n $\to \infty$. $\widehat{\gamma}(m)$ posee la propiedad importante de ser una función de covarianza, cosa que no verifica $\widehat{\gamma}'(m)$

Sin embargo el ECM de la primera es mayor que el de la segunda

La función de autocorrelación muestral se define como la función que a cada número natural m le asocia el valor

$$\boxed{\widehat{\rho}(m) = \frac{\widehat{\gamma}(m)}{\widehat{\gamma}(0)}}$$

retardo

ACF
FAC
Correlograma La representación de los valores $\widehat{\rho}(m)$ frente a m se conoce como correlograma. Algunos ejemplos se encuentran en las figuras que siguen.

Aunque no estemos introduciendo procedimientos de inferencia en este tema vamos a destacar una propiedad importante de la función de autocorrelación que nos permite utilizar más provechosamente el correlograma.

Si los valores $\{x_t\}$ son una realización de un proceso de ruido blanco (variables aleatorias independientes normales) entonces se verifica que

$$\boxed{\widehat{\rho}(m) \text{ tiene una distribución asintótica } N(0, \frac{1}{n})}$$

Esto nos permite considerar significativamente distintos de cero a nivel α aquellos coeficientes $\widehat{\rho}(m)$ sea

$\rho(m)$ tales que

mayor que $\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$ en valor absoluto, esto es, aquellos que queden fuera del intervalo

$$\left(\frac{-Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

95%

Es usual en series temporales utilizar el intervalo $\boxed{\left(\frac{-2}{\sqrt{n}}, \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}$ que corresponde aproximadamente al nivel 0.05. También es habitual dibujarlo en el correlograma.

Si tenemos 100 correlaciones representadas en la ACF (100 retardos) aproximadamente 5 podrían salir de las bandas aunque la serie sea ruido blanco

En el tema 4 veremos que la función de autocorrelación

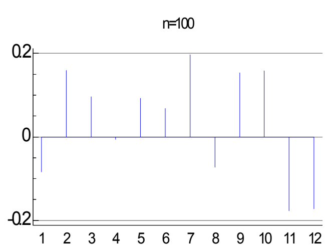
cuando muchas correlaciones se salen de las bandas

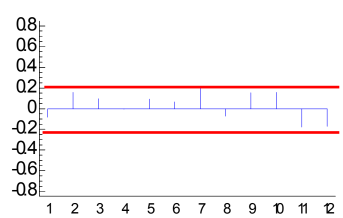
teórica para un modelo estacionario decrece exponencialmente hacia cero. Si el correlograma presenta este comportamiento puede deducirse que la serie dada es estacionaria y pasaríamos a modelizarla como tal.

Lo vamos a empezar a utilizar y vamos a aprender a distinguirlo en algunos esquemas fáciles pero no lo manejaremos completamente hasta el tema 4

Interpretación del correlograma Interpretar un conjunto de autocorrelaciones muestrales no siempre es fácil. Comentaremos algunas ideas muy generales. En temas posteriores continuaremos con la interpretación del correlograma.

- Si la serie tiene los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que provienen de un conjunto de variables independientes podemos esperar que en promedio uno de cada 20 coeficientes de autocorrelación muestral puede estar fuera del intervalo $(\frac{-2}{\sqrt{n}}, \frac{2}{\sqrt{n}})$, aunque la serie sea realmente de valores independientes.

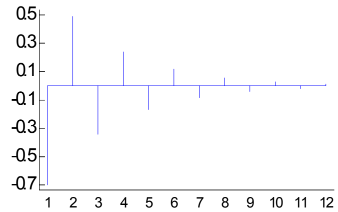




- Series estacionarias tendrán correlogramas que presentan decrecimientos exponenciales (tema 4).

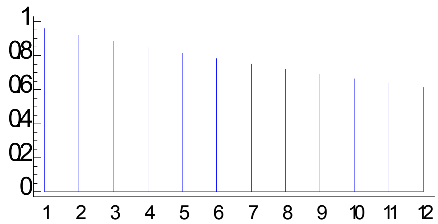
todas las correlaciones positivas

alternando + y -



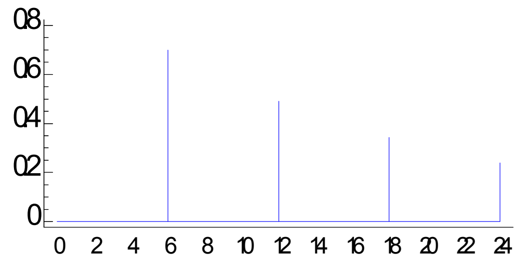
decrecimiento lento: lineal, no exponencial

- Serie no estacionaria

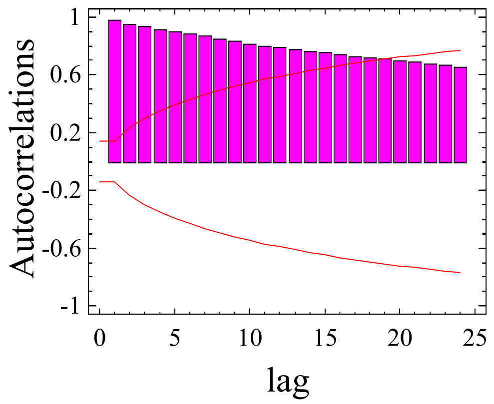


estacionalidad de periodo 6

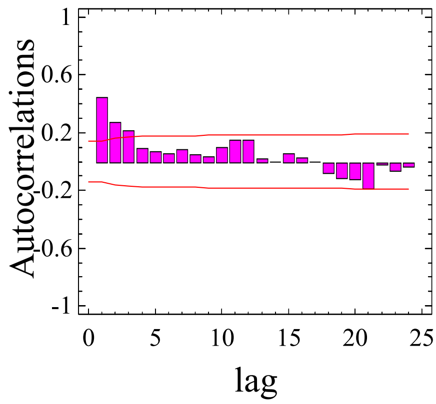
- Serie con componentes estacionales



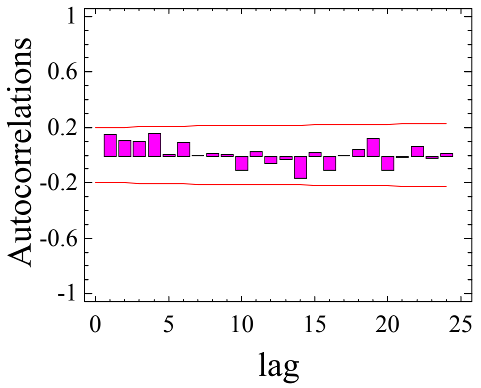
Estimated Autocorrelations fig.



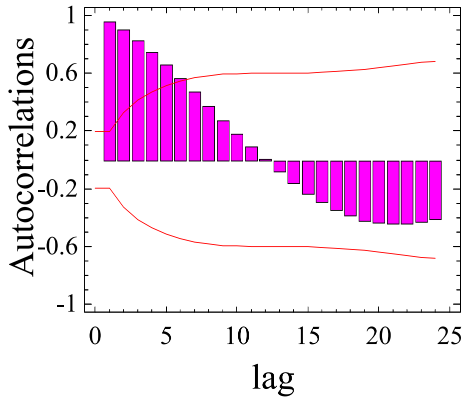
Estimated Autocorrelations fig. 2



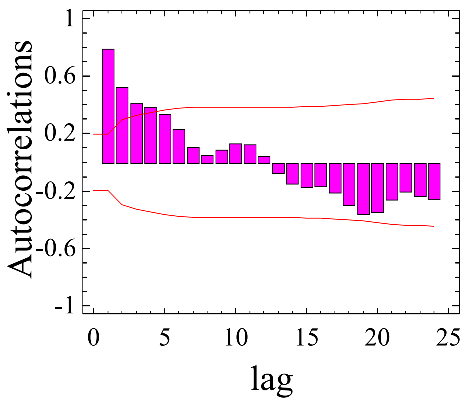
Estimated Autocorrelations fig. 3



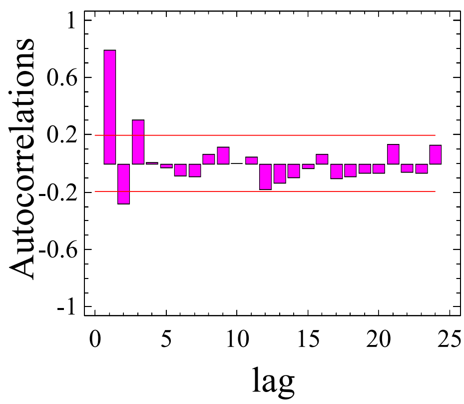
Estimated Autocorrelations fig. 4



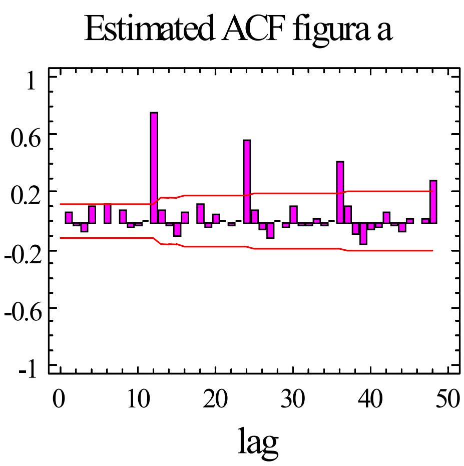
Estimated Autocorrelations fig. 5

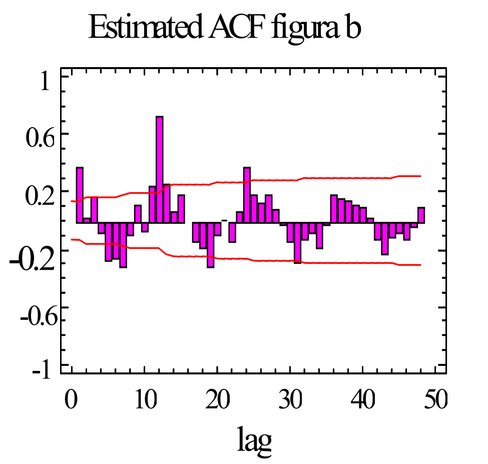


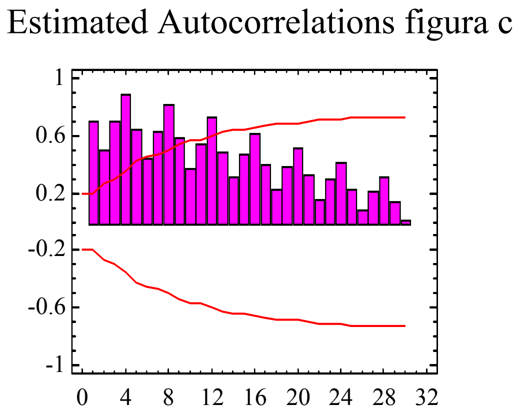
Estimated Autocorrelations fig. 6

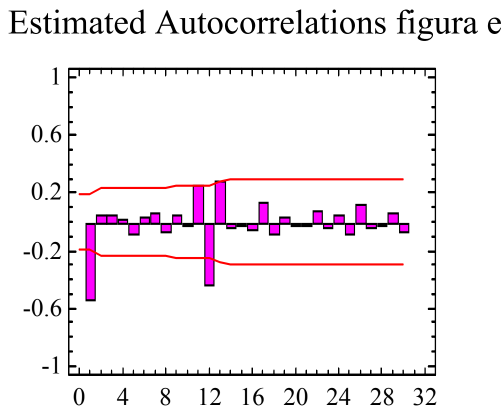


Correlogramas correspondientes a series estacionales









Expresión de una Onda

$$\boxed{f(t) = A\cos(wt + \phi) = \alpha\cos(wt) + \beta sen(wt)}$$

t tiempo

A amplitud

w frecuencia angular

ϕ fase

La relación entre $(\alpha,\ \beta)$ y $(A,\ \phi)$ viene del siguiente resultado trigonométrico:

$$\cos(wt + \phi) = \cos(wt)\cos(\phi) - sen(wt)sen(\phi)$$

Por tanto

$$A\cos(wt+\phi) = A(\cos(wt)\cos(\phi) - sen(wt)sen(\phi)) =$$

$$= \alpha\cos(wt) + \beta sen(wt)$$

$$\boxed{\begin{cases} \alpha = & A\cos(\phi) \\ \beta = & -Asen(\phi) \end{cases}} \qquad \begin{cases} tg\phi = -\frac{\beta}{\alpha} \\ \alpha^2 + \beta^2 = A^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \phi = arctg\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \\ A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}}$$

P = $periodo$ = tiempo que se tarda en completar un ciclo

$frecuencia$ = número de ciclos por unidad de tiempo

$$\boxed{frecuencia = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{P}}$$

Si consideramos el tiempo de modo discreto como hacemos en el análisis de series

t $=$1,...,n cada unidad puede ser un día, una semana, un mes, un trimestre, un año.....

$P=$ número de observaciones (días, semanas, meses,...) necesarias para completar un ciclo.

Un ejemplo simple:

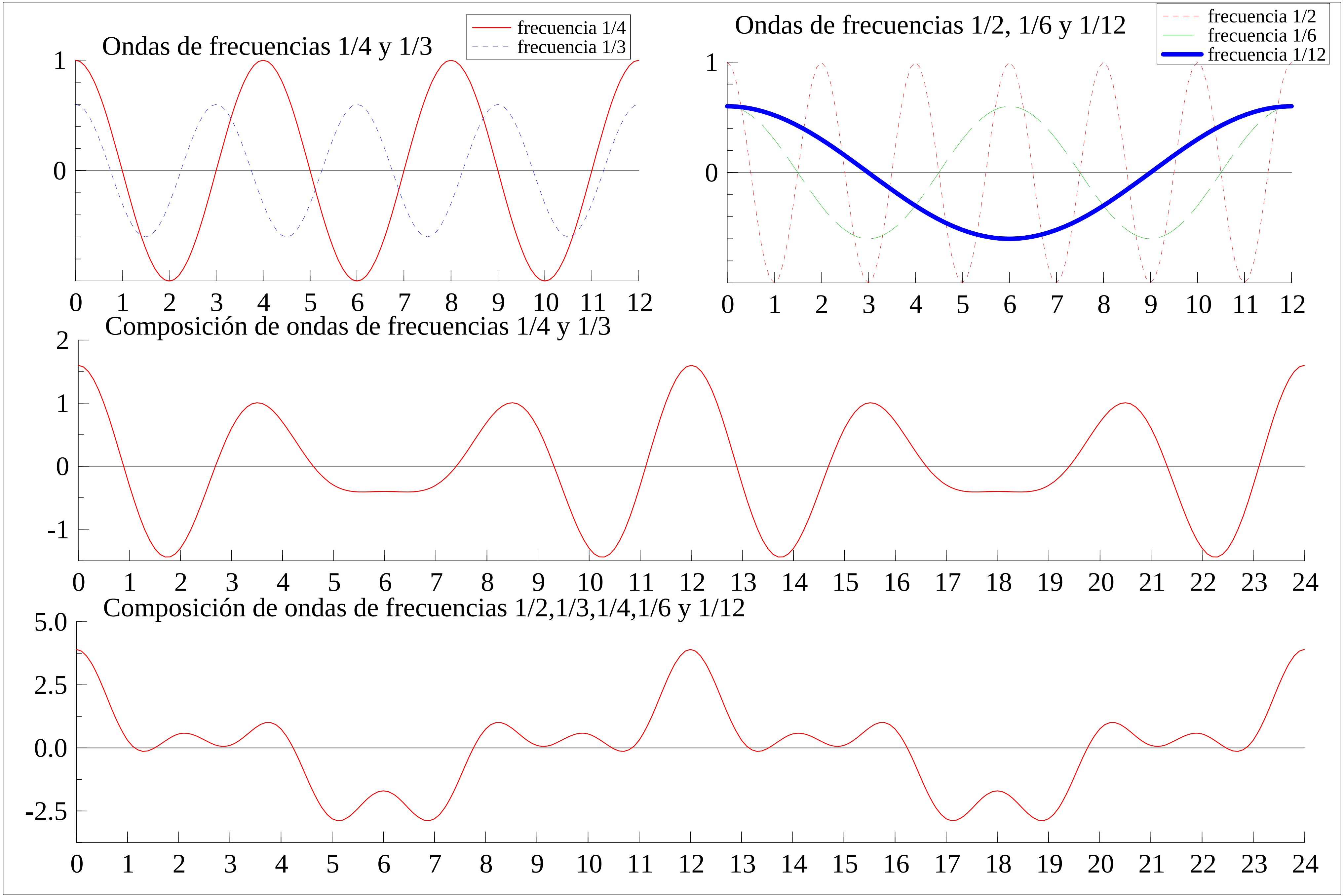
Si tenemos observaciones mensuales y un ciclo en el comportamiento de la serie que se repite cada año una onda con frecuencia $\frac{1}{12}$ puede ayudarnos a explicar la parte estacional de la serie.

Un ejemplo menos simple:

Si tenemos observaciones mensuales y podemos considerar a la serie suma de dos subseries, en la primera distinguimos un ciclo que se repite cada medio año y en la segunda un ciclo que se repite cada cuatrimestre. La serie tendrá una componente estacional de periodo 12. Las frecuencias $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ nos ayudan a explicar el movimiento ondulatorio de la serie. Se dice que la serie tiene periodo 12 y que $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ son armónicos significativos.

Obsérvese que también tendría periodo 12 una serie cuyos armónicos significativos fuesen $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$

A-2-5


Ondas de frecuencias 1/4 y 1/3
frecuencia 1/4
frecuencia 1/3
Ondas de frecuencias 1/2, 1/6 y 1/12
frecuencia 1/2
frecuencia 1/6
frecuencia 1/12
Composición de ondas de frecuencias 1/4 y 1/3
Composición de ondas de frecuencias 1/2,1/3,1/4,1/6 y 1/12

2.3 Comportamiento cíclico. Periodicidad. Periodograma.

Periodograma

El periodograma es la representación de una función que nos permite expresar la serie temporal como una superposición de ondas seno y coseno.

Supongamos que tenemos un modelo teórico para una serie temporal con un periodo p conocido

$$\boxed{Y_t = \alpha \cos(wt) + \beta sen(wt) + Z_t}$$

donde $\{Z_t\}$ es una sucesión de variables y $\boxed{w = \frac{2\pi}{p}}$ es la frecuencia angular.

Supongamos que disponemos de n valores observados de esta serie: Y_1, Y_2, ..., Y_n

Supuesto conocido el periodo p, se trata de estimar los parámetros α y β por mínimos cuadrados.

Sean

Y $= (Y_1, Y_2, ..., Y_n)'$ el vector de observaciones

Z $= (Z_1, Z_2, ..., Z_n)'$ el vector de errores aleatorios

$\theta = (\alpha, \beta)'$ el vector de parámetros

$c = (\cos(w), \cos(2w), ..., \cos(nw))'$

$s = (sen(w), sen(2w), ..., sen(nw))'$

X la matriz n x 2 cuyas columnas son c y s.

Para t=1,2,...,n

A partir del modelo propuesto anteriormente y utilizando esta notación tenemos el modelo de regresión $\boxed{Y = X\theta + Z}$ donde Y es la variable respuesta, c y s son las variables explicativas.

El estimador mínimo cuadrático de θ viene dado por

$$\widehat{\theta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Si restringimos el conjunto de frecuencias a las de Fourier los estimadores resultantes se simplifican.

Las frecuencias de Fourier tienen la forma $\boxed{w = \frac{2\pi j}{n}}$ para algún entero j con $\boxed{0 \leq j \leq [\frac{n}{2}]}$ Así el periodo es $\frac{n}{j}$ y siempre es mayor que 2. En el caso en que p = 2 la frecuencia angular es π y la frecuencia es $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ lo que correspondería a un ciclo cada dos datos y $\frac{n}{2}$ ciclos completos en la serie de las observaciones.

Así, la frecuencia angular $\frac{2\pi j}{n}$ corresponde al periodo $\frac{n}{j}$,frecuencia $\frac{j}{n}$ y los datos presentan j ciclos completos.

Teorema.

Sea $w = \frac{2\pi j}{n}$ con j un entero menor o igual que la parte entera de $\frac{n}{2}$. Entonces se verifica

$$\sum_{t=1}^{n} \cos(wt) = \sum_{t=1}^{n} sen(wt) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} \cos(wt) sen(wt) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} \cos^2(wt) = \sum_{t=1}^{n} sen^2(wt) = \frac{n}{2}$$

No vamos a dar la prueba

Teniendo en cuenta esta fórmulas tenemos

$$X'X = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} \cos^2(wt) & \sum_{t=1}^{n} \cos(wt) sen(wt) \\ \sum_{t=1}^{n} \cos(wt) sen(wt) & \sum_{t=1}^{n} sen^2(wt) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} Y_t \cos(wt) \\ \sum_{t=1}^{n} Y_t sen(wt) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \cos w & senw \\ \cos 2w & sen2w \\ ... & ... \\ \cos nw & sennw \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'X &= \begin{bmatrix} \cos w & \cos 2w & ... & \cos nw \\ senw & sen2w & ... & sennw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos w & senw \\ \cos 2w & sen2w \\ ... & ... \\ \cos nw & sennw \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} \cos^2(wt) & \sum_{t=1}^{n} \cos(wt)sen(wt) \\ \sum_{t=1}^{n} \cos(wt)sen(wt) & \sum_{t=1}^{n} sen^2(wt) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X'Y &= \begin{bmatrix} \cos w & \cos 2w & \dots & \cos nw \\ senw & sen2w & \dots & sennw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t \cos(wt) \\ \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t sen(wt) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\widehat{\theta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{bmatrix} &= (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t \cos(wt) \\ \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t sen(wt) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t \cos(wt) \\ \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t sen(wt) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{n} \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t \cos(wt) \\ \frac{2}{n} \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t sen(wt) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(X'X)^{-1}X'Y$

$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{\alpha} &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos(wt)\\ \widehat{\beta} &= \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t sen(wt)\end{aligned}}$$

La suma de cuadrados de la regresión es

$$Y'X(X'X)^{-1}X'Y = \tfrac{2}{n}\{[\sum Y_t \cos(wt)]^2 + [\sum Y_t sen(wt)]^2\} =$$

$$= \tfrac{n}{2}(\widehat{\alpha}^2 + \widehat{\beta}^2)$$

Recordar $\alpha^2 + \beta^2 = A^2$

por tanto, es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

Si suponemos un modelo donde se superponen *varias ondas* tenemos

Superposición de m ondas

$$\boxed{Y_t = \sum_{k=1}^{m} \{\alpha_k \cos(w_k t) + \beta_k sen(w_k t)\} + Z_t}$$

La amplitud de las ondas será $(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{1/2}$

para k = 1, 2, ..., m

Supongamos, además, que las frecuencias son de la forma $w_k = \frac{2\pi j_k}{n}$ (un subconjunto de las m frecuencias de Fourier)

que no sean 0 ni π

Y = $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)'$ es el vector de observaciones

Z = $(Z_1, Z_2, ..., Z_n)'$ el vector de errores aleatorios

Consideremos las variables

$$c_k = (\cos(w_k), \cos(2w_k), ..., \cos(nw_k))'$$

$$s_k = (sen(w_k), sen(2w_k), ..., sen(nw_k))'$$

para k = 1, 2, ..., m

$$X = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos w_1 & \dots & \cos w_m & sen w_1 & \dots & sen w_m \\ \cos 2w_1 & \dots & \cos 2w_m & sen 2w_1 & \dots & sen 2w_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos nw_1 & \dots & \cos nw_m & sen nw_1 & \dots & sen nw_m \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} c_1 & \quad \dots \quad & c_m & \quad s_1 \quad & \dots & \quad s_m \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix}$$

Sea la matriz X la que tiene por columnas estos vectores $(c_1 c_2 ... c_m s_1 s_2 ... s_m)$ Es una matriz de tamaño n x 2m.

Sea $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)'$

Entonces el modelo propuesto para Y_t se puede reescribir como

$$Y = X\theta + Z$$

En este modelo de regresión el estimador mínimo cuadrático de θ viene dado por $\widehat{\theta} = (X'X)^{-1}X'Y$

Al igual que ocurría cuando ajustamos una sola onda con una frecuencia de Fourier la matriz $(X'X)^{-1}$ va a ser diagonal. Esto lo podemos comprobar aplicando el siguiente resultado para $k \neq l$ **Que no probaremos**

$$\sum_{t=1}^{n} \cos(w_k t) \cos(w_l t) = \sum_{t=1}^{n} sen(w_k t) sen(w_l t) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \cos(w_k t) sen(w_l t) = 0$$

Los estimadores que se obtienen son

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{\alpha}_k &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t \cos(w_k t) \\ \widehat{\beta}_k &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Y_t sen(w_k t) \end{aligned}}$$

La suma de cuadrados de la regresión es

$$Y' X (X' X)^{-1} X' Y =$$

$$= \frac{2}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \{[\sum Y_t \cos(w_k t)]^2 + [\sum Y_t sen(w_k t)]^2\} \right\} =$$

$$= \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{m} (\widehat{\alpha}_k^2 + \widehat{\beta}_k^2)$$

Aquí podemos observar que esta suma de cuadrados es la suma de la suma de cuadrados de la regresión correspondiente a cada frecuencia de Fourier individual.

Podemos hacer un ajuste utilizando todas las frecuencias de Fourier.

Sea m el mayor entero menor o igual que $\frac{n}{2}$,

$$\boxed{w_k = \frac{2\pi k}{n} \text{ k} = 1, 2, \ldots, \text{m}}$$

Tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas luego todos los residuales serán 0

Si n es par tenemos tantas observaciones como parámetros queremos ajustar y por tanto la suma de cuadrados de los residuos es cero y la varianza muestral de la serie coincide con la suma de cuadrados de la regresión. Como consecuencia tenemos descompuesta la variabilidad en la serie como la suma de las amplitudes al cuadrado de las ondas en las frecuencias de Fourier por una constante.

$\sum\limits_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2 = \frac{n}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}(\widehat{\alpha}_k^2 + \widehat{\beta}_k^2)$ por tanto la contribución de cada frecuencia de Fourier es $\frac{n}{2}(\widehat{\alpha}_k^2 + \widehat{\beta}_k^2)$

k = 0, 1, ..., m

La ordenada del periodograma en la frecuencia w se define como el valor

$$\boxed{\begin{aligned} I(w) &= \frac{n}{2}(\widehat{\alpha}^2(w) + \widehat{\beta}^2(w)) = \\ &= \frac{2}{n}\{[\sum Y_t \cos(wt)]^2 + [\sum Y_t sen(wt)]^2\} \end{aligned}}$$

Si w=0 o bien w $= \pi$ las expresiones anteriores no son válidas, para estos casos debemos tener en cuenta:

Si w $= 0$ al hacer el ajuste por mínimos cuadrados obtenemos $\widehat{\alpha}_0 = \sum Y_t/n = \overline{Y}$

$$\boxed{I(0) = n\ \widehat{\alpha}^2(0) = n\overline{Y}^2}$$

Si w $= \pi$ obtenemos $\widehat{\alpha}_{n/2} = \sum(-1)^t Y_t/n$

$$\boxed{I(\pi) = n\ \widehat{\alpha}^2(\tfrac{n}{2}) = n\left(\sum(-1)^t Y_t/n\right)^2}$$

Esto nos permite obtener las siguientes expresiones

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t^2 = I(0) + \sum_{k=1}^{m-1} I(\tfrac{2\pi k}{n}) + I(\pi)$$

$$\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \overline{Y})^2 = \sum_{k=1}^{m-1} I(\tfrac{2\pi k}{n}) + I(\pi)$$

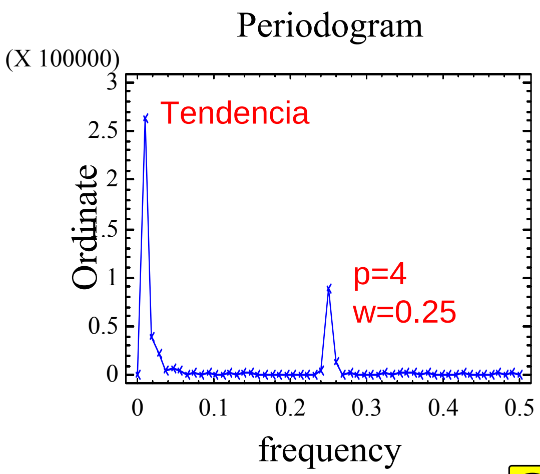
Si n es impar la frecuencia π no interviene pues no es una frecuencia de Fourier.

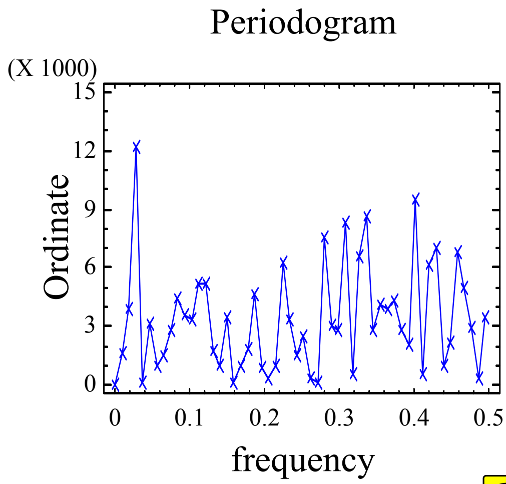
El plot de I(w) frente a w se llama periodograma. Este nos indica la contribución de cada frecuencia de Fourier a la varianza de la serie.

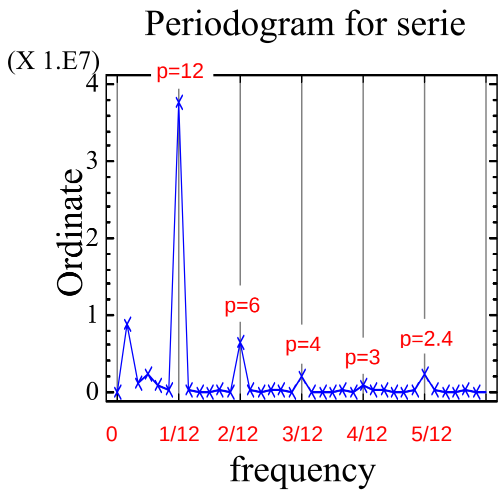
Nota: I(0) = n $\overline{Y}^2$ Esto hace que cuando la media de la series es grande el gráfico del periodograma pueda dar una impresión visual engañosa por lo que es conveniente utilizar la serie centrada $(Y_t - \overline{Y})$ antes de realizar el periodograma para evitar esto.

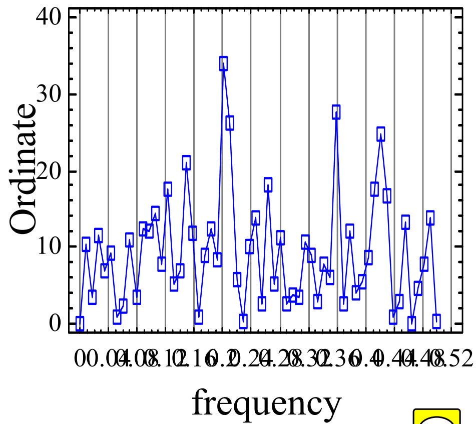
Ejemplo 1: *página 2-1*

Ejercicio 7 de Complementarios

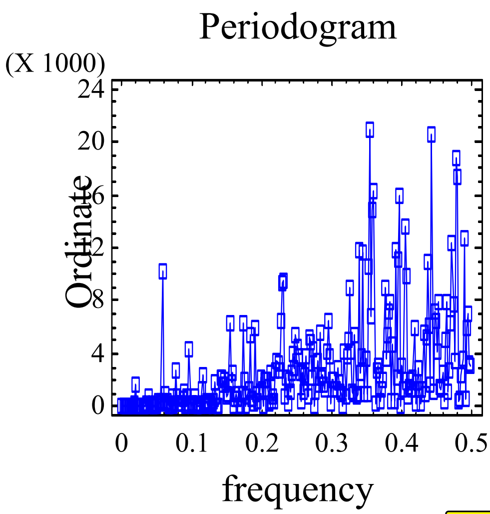


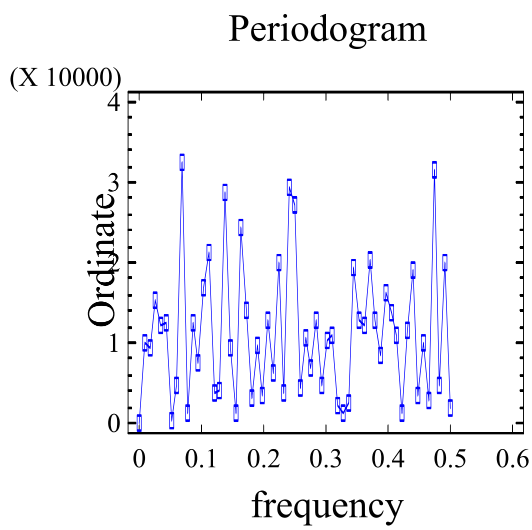




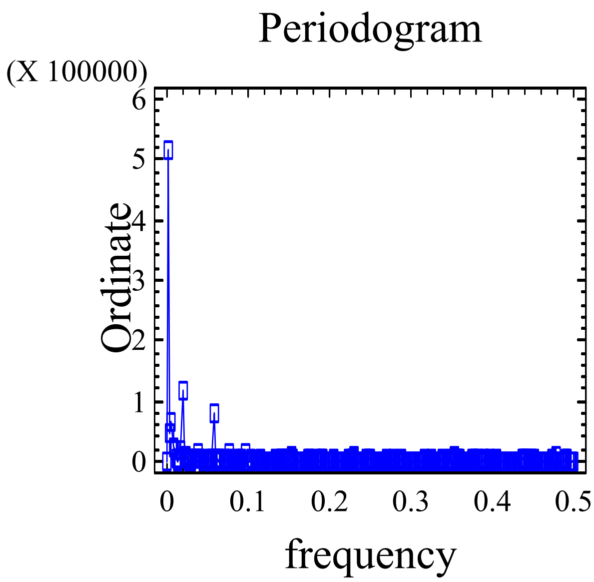


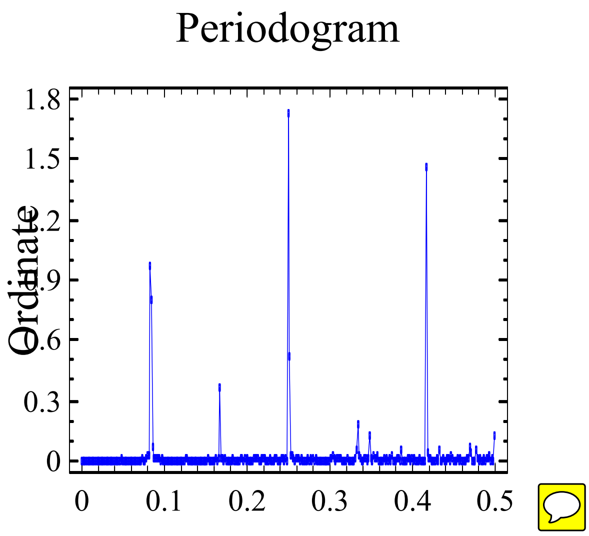
Ejercicio 12 de Complementarios



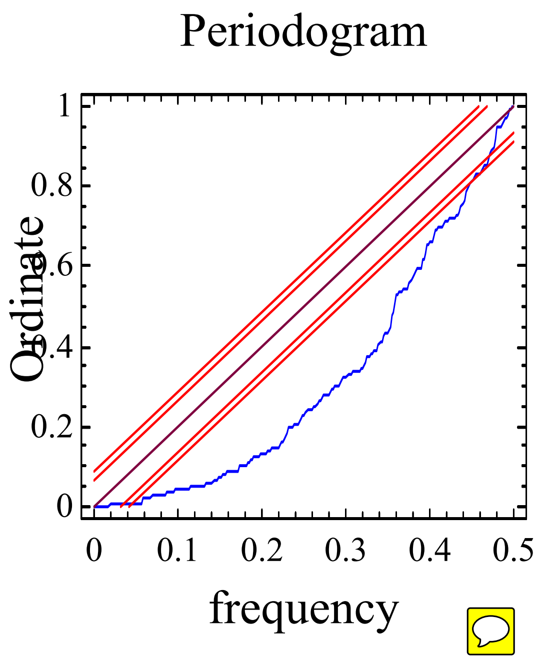


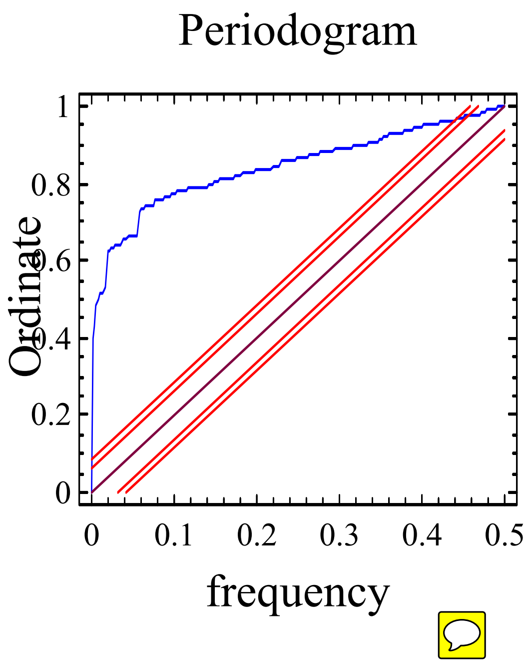
Continuación ejercicio 12 de Complementarios





Periodogramas acumulados





Periodograma acumulado

El periodograma acumulado es la representación gráfica de los valores de las ordenadas del periodograma acumuladas frente a la frecuencia, es decir, de

eje vertical

eje horizontal

$$\boxed{a_j = \frac{\sum_{k=1}^{j} I(\frac{2\pi k}{n})}{\sum_{k=1}^{m} I(\frac{2\pi k}{n})}} \qquad \text{frente a} \qquad \mathrm{w} = \frac{2\pi j}{n}$$

Aunque no estemos haciendo inferencias en este tema debemos señalar que la utilidad del periodograma acumulado está en su utilización para estudiar la posibilidad de que la serie subyacente corresponde a un conjunto de variables aleatorias independientes. Con este fin se construye el estadístico D siguiente que mide la distancia del periodograma acumulado a la bisectriz del primer cuadrante, la cual correspondería en el caso de que las variables fueran independientes.

Si las ordenadas del periodograma se reparten más o menos uniformemente en las frecuencias con ciertos desajustes aleatorios estamos ante variables independientes

$$\mathrm{D} = \max_{j=1,\ldots,m} \{ \max(a_j - (j/n), a_j - ((j-1)/n)) \}$$

la independencia se identifica como a_j próximo a j/n ó a (j-1)/n para todo j,
es decir, D próximo a 0

Relación entre periodograma y correlograma

A pesar de que periodograma y correlograma parecen ser completamente diferentes y que cada uno mide algo distinto, están íntimamente relacionados entre sí.

Sin entrar en detalles, señalaremos que a partir de uno se puede construir el otro. Así, por ejemplo, para reconstruir el periodograma a partir de la función de autocovarianza muestral utilizamos la siguiente expresión

$$I(w) = K(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} K(j) \cos(jw)$$

donde $K(j) = \widehat{\gamma}(j)$ son los valores de la función de autocovarianza muestral.

Aunque periodograma y correlograma son matemáticamente equivalentes, estadísticamente no, ya que los procedimientos estadísticos basados en el periodograma y en el correlograma, aunque utilizan los mismos datos, ponen de manifiesto aspectos diferentes de ellos.

Ambos gráficos se coplementan

2.4 Transformación de los datos: suavizado, diferenciación. Filtros.

Existen varias razones por las que puede ser necesario transformar una serie, como por ejemplo: conseguir una serie estacionaria, estabilizar la varianza, convertir efectos multiplicativos en aditivos.

Primer paso para conseguir que una serie sea estacionaria

Si al relalizar el plot de los datos de la serie frente al tiempo observamos que la varianza crece a medida que el tiempo transcurre, o sea, a medida que nos alejamos del origen los datos presentan mayor variabilidad, entonces es necesario hacer alguna transformación que estabilice la varianza. Para decidir si esta transformación es necesaria o no, además del gráfico de la serie, podemos ayudarnos del plot rango - media.

Plot rango - media

Se divide la serie en trozos pequeños de igual número de observaciones y se calcula para cada uno de ellos la media y el rango. El plot rango media es el resultado de representar en abcisas las distintas medias y en ordenadas los rangos correspondientes a dichas medias.

La idea de esta representación es comprobar si la media y el rango manifiestan alguna relación. Si en el gráfico se observa una relación lineal, como en el ejemplo 2, indicará la necesidad de una transformación logarítmica. Una vez transformada la serie podemos utilizar la nueva serie resultante para hacer otro plot rango - media.

Si la relación observada es no lineal puede indicar otra transformación.

Si la serie es estacional y construimos este plot debemos formar los grupos para los cuales calculamos la media y el rango de tal forma que contengan un periodo completo.

Ejemplo 2: *página 2-3*

Ejemplos con Statgraphics:
- Nacimientos en España anuales 1946 a 2000, n=55, REP(COUNT(1;11;1);5)
- Consumo de gasolina en España de Enero 1945 a Diciembre de 1999 n=12*55=660 REP(COUNT(1;55;1);12)

Para transformar una serie con el objeto de estabilizar la varianza se utiliza frecuentemente la familia de transformaciones de Box - Cox dada como

$$\boxed{f(y_t) = \begin{cases} \frac{y_t^{\lambda}-1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log(y_t) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}}$$

Recordar:
E. Descriptiva y
Modelos Lineales.

Los métodos automáticos de elección de λ suponen independencia y no funcionan bien aquí.

o bien, en la forma

$$f(y_t) = \begin{cases} \frac{(y_t+\lambda_2)^{\lambda_1}-1}{\lambda_1 g^{\lambda_1 -1}} & \text{si } \lambda_1 \neq 0 \\ g \log(y_t+\lambda_2) & \text{si } \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Es la que utiliza Statgraphics

con g la media geométrica de los valores $\{y_t + \lambda_2\}$.

2.4.1 Series con tendencia y sin estacionalidad

Antes de llevar a cabo cualquier análisis de una serie tenemos que tener claro cual es el objetivo del mismo. En el caso de series con tendencia y sin estacionalidad podemos pretender eliminar la tendecia o bien aislarla y resaltarla. Las técnicas más usuales son las siguientes: ajuste de curvas, medias móviles y diferenciación. A continuación veremos cada una de ellas.

Ajuste de curvas Una forma tradicional de tratar a las series con tendencia sin estacionalidad para aislar la tendencia ha sido ajustarlas por mínimos cuadrados funciones del tiempo tales como polinomios (lineal y cuadrático, principalmente) o curvas como las dos siguientes:

Curva de Gompertz

3 parámetros
ecuaciones
no lineales

$log(x_t) = a + br^t$ con $0 < r < 1$, a, b y r parámetros

Curva logística $\quad X_t = \frac{a}{1-be^{-ct}}$ $\quad$ a, b y c parámetros

Estas curvas tienen forma de S y se estabilizan cuando $t \longrightarrow \infty$

El ajuste de estas curvas a un conjunto de datos puede conducir a sistemas de ecuaciones no lineales.

El STATGRAPHICS tiene implementado el ajuste por mínimos cuadrados de una tendecia lineal, una tendencia cuadrática y de las dos funciones siguientes que ajusta tras tomar logaritmos:

2 parámetros

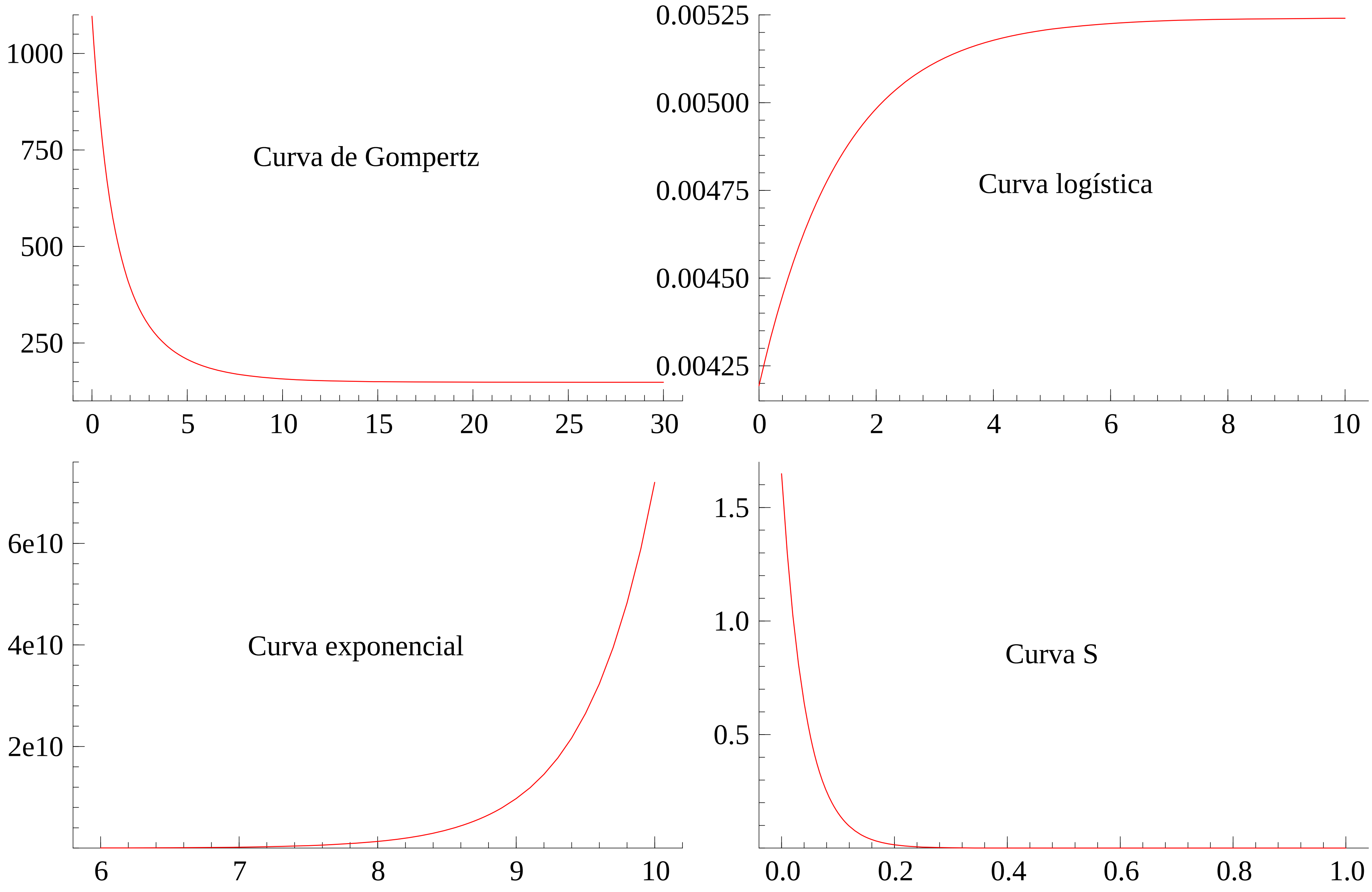
- Una curva exponencial (exponential curve) $X_t = e^{a+bt}$

a y b son parámetros

- Una curva con forma de S (S-curve) $X_t = e^{a+\frac{b}{t}}$

a y b son parámetros

curvas4.gwg * 12:57:22 31-Jan-2008



Ajuste de curvas con Statgraphics a "Población española mayor de 16 años" en *Describe* y *Regression*

24 y 25

Medias móviles Otro procedimiento para tratar las series con tendencia es utilizar filtros lineales que convierten una serie $\{x_t\}$ en otra $\{y_t\}$

Las medias móviles forman parte de los filtros lineales. Una expresión genérica para las medias móviles es la siguiente

pesos

$$\boxed{y_t = \sum_{i=-q}^{+s} a_i x_{t+i} \qquad \text{donde } \sum_{i=-q}^{+s} a_i = 1}$$

Casos particulares de esta formulación son los siguientes:

- Medias móviles simétricas

  Son medias móviles en las cuales $q = s$ y $a_i = a_{-i}$

- Medias móviles simples (de orden q)

  $$y_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^{+q} x_{t+i}$$

  (los coeficientes son todos iguales $a_i = \frac{1}{2q+1}$

  para i = -q, ..., 0, ...,+q)

- Otras medias móviles llevan el nombre de personas que las utilizaron en algún contexto concreto. Algunas de las más famosas son las siguiente:

  – Media móvil de Spencer de 15 puntos. Coeficientes:

  $\frac{1}{320}[-3, -6, -5, 3, 21, 46, 67, 74, \ldots]$

  67,46,...,-3

  – Medias móviles de Henderson. Por ejemplo, la de 9 puntos tiene coeficientes

  $[-0.041, -0.010, 0.119, 0.267, 0.33, \ldots]$

- Otras medias móviles asimétricas sólo utilizan los valores pasados y el presente en cada instante, o sea, $s = 0$.

- Se pueden conseguir nuevas medias móviles al suavizar con una media móvil dada la serie previamente suavizada por esa misma media móvil o por otra. $X_t \xrightarrow{\text{I}} Y_t \xrightarrow{\text{II}} Z_t$, $X_t \xrightarrow[\text{III}]{} Z_t$

composición de medias móviles

Ejemplo: $\overset{\text{III}}{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})} = \overset{\text{I}}{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} * \overset{\text{II}}{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

$Y_t = X_t/2 + X_{t-1}/2$ asimétrico $\quad Z_t = Y_t/2 + Y_{t-1}/2 = X_t/4 + X_{t-1}/4 + X_{t-1}/4 + X_{t-2}/4 = X_t/4 + X_{t-1}/2 + X_{t-2}/4$ asimétrico

Cuando se utilizan medias móviles simétricas se tienen valores suavizados para valores de la serie en tiempos comprendidos entre $t = q + 1$ y $t = n - q$

Se pierden q valores al principio y q valores al final

(con n número total de datos en la serie original).

En algunas situaciones puede ser importante conseguir valores suavizados hasta $t = n$.

Una opción es utilizar medias móviles asimétricas y otra utilizar alguna forma diferente de suavizar los últimos q valores de la serie, y los q primeros, si se desea. Una forma de conseguir esto es utilizar las expresiones siguientes

$$y_t = \sum_{i=0}^{n-t} \alpha(1-\alpha)^i x_{t+i} \qquad \text{para } t = 1, 2, ..., q$$

Das menos peso a medida que te alejas de la observación que interesa

$$y_t = \sum_{i=0}^{t-1} \alpha(1-\alpha)^i x_{t-i} \qquad \text{para } t = n\text{-}q+1, ..., n$$

Ver ejemplo q=3 n=50

Estos valores suavizados para los extremos dependen de la constante α que está comprendida entre 0 y 1. Debemos señalar que los pesos $a_i = \alpha(1-\alpha)^i$ decrecen geométricamente con i.

Las medias móviles son una de las formas de estimar la tendencia, dependiendo de los coeficientes que las definen pueden dejarla inalterada. Si tenemos una media móvil $m_t = \sum_{i=-q}^{+s} a_i x_{t+i}$ que aisla la tendencia, mediante la sencilla operación $\boxed{x_t - m_t}$ obtenemos una nueva serie que llamaremos de valores residuales, que será un nuevo filtro lineal de la serie original, aunque no una media móvil

$$\text{Res}(x_t) = x_t - m_t = \sum_{i=-q}^{+s} b_i x_{t+i} \qquad \text{con} \sum_{i=-q}^{+s} b_i = 0,$$

$ya\ que\ b_0 = 1 - a_0$ y $b_i = -a_i\ para\ i \neq 0$ y la suma de los a_i es 1

Media móvil

Con el filtro m_t hemos intentado obtener la tendencia de la serie, es decir, variaciones a largo plazo o de frecuencia corta. Este tipo de filtros se llaman filtros low-pass.

El filtro $\boxed{\sum_{i=-q}^{+s} b_i x_{t+i}}$ elimina las variaciones de baja frecuencia y deja pasar las variaciones de alta frecuencia o variaciones a corto plazo (componente aleatoria). Este filtro recibe el nombre de high-pass.

Con lo dicho anteriormente se aprecia la importancia de seleccionar o diseñar bien el filtro que utilizamos.

El filtro dado por una media móvil simétrica simple deja pasar una tendencia lineal $m_t = a + bt$ sin distorsionarla, pero si la tendencia no es lineal no se aisla mejor por utilizar un valor de q mayor. En este último caso el proceso de filtrado aunque suaviza la serie no estima bien la tendencia. Eligiendo bien los coeficientes $\{a_i\}$ se pueden conseguir filtros que no sólo atenúen el ruido sino que también pasen sin distorsionar una amplia clase de funciones de tendencia.

Como paso inicial en la Descomposición Clásica

Las medias móviles simétricas son más útiles para eliminar una componente estacional que para aislar la tendencia. Para esto es mejor una media móvil asimétrica.

Como el suavizado exponencial simple que veremos en el tema 3

Las medias móviles introducen términos de corrupción en los residuos y correlaciones ficticias.

Corrupción en los residuos introducida por una Media Móvil

Tratemos de hacernos una idea del problema mediante ejemplos sencillos:

Sea $X_t = \mu_t + Z_t$

$\{Z_t\}$ proceso estacionario de media 0 y varianza constante σ^2

$\mu_t = E(X_t)$ función de t constante (no aleatoria)

Estimamos la tendencia utilizando una media móvil simple:

$$\widehat{\mu_t} = m_t = \frac{1}{2p+1} \sum_{j=-p}^{p} X_{t+j}$$

Definimos los residuos como $R_t = X_t - m_t$, con este proceso tratamos de averiguar las características de Z_t puesto que no tenemos una realización de Z_t y sí la tenemos de R_t: $\boxed{r_t = x_t - m_t}$

$$\begin{aligned}
R_t &= X_t - m_t = X_t - \frac{1}{2p+1}\sum_{j=-p}^{p}(\mu_{t+j} + Z_{t+j}) = \\
&= \left(\mu_t - \frac{1}{2p+1}\sum_{j=-p}^{p}\mu_{t+j}\right) + \left(Z_t - \frac{1}{2p+1}\sum_{j=-p}^{p}Z_{t+j}\right. \\
&= d_t + \left(Z_t - \frac{1}{2p+1}\sum_{j=-p}^{p}Z_{t+j}\right)
\end{aligned}$$

donde $d_t = \mu_t - \frac{1}{2p+1}\sum_{j=-p}^{p}\mu_{t+j}$ es la parte determinista.

Concretando más el ejemplo:

Supongamos que $\mu_t = a + bt$ entonces

$$\begin{aligned}\mu_{t+k} + \mu_{t-k} &= a + b(t+k) + a + b(t-k) = \\ &= 2a + 2bt = 2\mu_t\end{aligned}$$

y por tanto $d_t = \mu_t - \frac{1}{2p+1}(\mu_t + 2p\mu_t) = \mu_t - \mu_t = 0$

$$\text{y} \quad R_t = Z_t - \frac{1}{2p+1}\sum_{j=-p}^{p} Z_{t+j} = Z_t - E_t$$

donde $E_t = \frac{1}{2p+1}\sum_{j=-p}^{p} Z_{t+j}$ es el término de corrupción introducido por la media móvil en los residuos.

$E(E_t) = 0$ puesto que $E(Z_t) = 0$

y si los Z_t son independientes:

$$Var(E_t) = \frac{1}{(2p+1)^2}(2p+1)\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2p+1} \longrightarrow 0 \quad \begin{array}{c}cuando \\ p \to \infty\end{array}$$

Cuanto mayor es p menos varianza tendrá el término de corrupción, pero si p crece podemos calcular m_t y r_t para menos instantes en el tiempo ya que se pierden p observaciones al principio y p al final.

Si no suponemos $\mu_t = a + bt$ ni ninguna otra tendencia determinista o incluso aunque Z_t no sean independientes:

residual calculado

$$\boxed{R_t = d_t + Z_t - E_t}$$

donde $d_t = \mu_t - \frac{1}{2p+1} \sum_{j=-p}^{p} \mu_{t+j}$ y

residual real pero desconocido

$$E_t = \frac{1}{2p+1} \sum_{j=-p}^{p} Z_{t+j}$$

la elección de p (orden de la media móvil) deberá tener en cuenta que

realización de E_t

$$\text{Si } \ p \uparrow \Rightarrow e_t \downarrow \ \text{ y } d_t \uparrow$$

Correlaciones ficticias en los residuos de una media móvil

Supongamos $d_t = 0$, $p = 1$ y $\{Z_t\}$ ruido blanco

$$R_t = Z_t - \frac{Z_{t-1}+Z_t+Z_{t+1}}{3} = \frac{2Z_t-Z_{t-1}-Z_{t+1}}{3}$$

$r_t = x_t - m_t$ es una realización de R_t que podemos calcular.

No disponemos de realizaciones de Z_t.

$$\gamma_z(0) = Var(Z_t) = \sigma^2$$

$$\gamma_z(k) = 0 \qquad para\ todo\ k \neq 0$$

La función de autocovarianza para R_t es la siguiente:

$(2Z_t - Z_{t-1} - Z_{t+1})/3$

$$
\begin{aligned}
\gamma_R(0) &= Var(R_t) = \frac{1}{9}(4VarZ_t + VarZ_t + VarZ_t) = \\
&= \frac{6}{9}\sigma^2 = \frac{2}{3}\sigma^2 \\
\gamma_R(1) &= Cov(R_t, R_{t+1}) = \\
&= Cov(\frac{2Z_t - Z_{t-1} - Z_{t+1}}{3}, \frac{2Z_{t+1} - Z_t - Z_{t+2}}{3}) = \\
&= \frac{1}{9}(-2\sigma^2 - 2\sigma^2) = -\frac{4}{9}\sigma^2 \\
\gamma_R(2) &= Cov(R_t, R_{t+2}) = \\
&= Cov(\frac{2Z_t - Z_{t-1} - Z_{t+1}}{3}, \frac{2Z_{t+2} - Z_{t+1} - Z_{t+3}}{3}) \\
&= \frac{1}{9}(\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{9} \\
\gamma_R(k) &= 0 \qquad para\ todo\ k \geq 3
\end{aligned}
$$

La función de autocorrelación para R_t será:

$$\begin{aligned}
\rho_R(0) &= 1 \\
\rho_R(1) &= \frac{-\frac{4\sigma^2}{9}}{\frac{2}{3}\sigma^2} = -\frac{2}{3} \\
\rho_R(2) &= \frac{\frac{\sigma^2}{9}}{\frac{2}{3}\sigma^2} = \frac{1}{6} \\
\rho_R(k) &= 0 \qquad para\ todo\ k \geq 3
\end{aligned}$$

En los residuos hay 2 correlaciones inducidas por la operación de filtrado.

En general, una media móvil simple de 2p+1 términos introduce 2p correlaciones en los residuos que decrecen cuando p crece.

A veces la operación de filtrado introduce variaciones sinusoidales o falsos componentes estacionales. Esto se conoce como efecto Slutsky y debe tenerse en cuenta al ajustar ciertas series económicas obtenidas a partir de datos agregados.

Diferenciación Esta técnica en lugar de aislar la tendencia *pretende* hacer lo contrario, es decir, eliminar la tendencia y resaltar la componente aleatoria.

Para una serie $\{x_t\}$ se define $\boxed{\nabla x_t = x_t - x_{t-1}}$

∇x_t es la serie diferenciada y si x_t tiene tendencia lineal ∇x_t es una serie sin tendencia.

$X_t - X_{t-1} = a+bt-a-b(t-1)=b$

La diferenciación se puede hacer repetidamente. Así tenemos por ejemplo que

$$\nabla\nabla x_t = \nabla^2 x_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$$

El operador ∇^2 elimina una tendencia cuadrática.

$a+bt+ct^2 -2a-2b(t-1)-2c(t-1)^2 +a+b(t-2)+c(t-2)^2 = ct^2 +2b-2c(t^2+1-2t)-2b+c(t^2+4-4t)=2c$

En el ejercicio 8 se pide probar que diferenciando p veces un polinomio de orden p en t obtenemos una constante p=1,2,3,...

El operador ∇ se puede definir en términos de otro operador que recibe el nombre de operador de retardos y denotamos por B. Cuando aplicamos este operador a un valor de la serie x_t obtenemos el valor de la serie en un instante anterior, o sea, x_{t-1}. Si le aplicamos a una constante obtenemos la misma constante.

$$\boxed{\mathrm{B}\mathrm{X}_t = X_{t-1}} \qquad \nabla x_t = x_t - x_{t-1} = (1-B)x_t$$

$B^k X_t = X_{t-k}$

$$\nabla^2 = (1-B)^2 \quad =1+B^2-2B$$

Como podemos observar en lo dicho anteriormente la diferenciación de una serie también es una operación de filtrado.

Ejemplo 3: *página 2-4*

Ejemplo 4: *páginas 2-4 a 2-6*

Otros ejemplos:

-"Población española mayor de 16 años" 1) Ajuste curva cuadrática. Residuales
2) Diferenciar 2 veces.
3) Media Móvil simple 5 términos. Residuales

-RW.sf3 RWD3Var20 $X_t - X_{t-1} = 3 + a_t$ donde a_t es N(0,20). Intentar eliminar tendencia por:
$E(X_t) = 3t$
1) Ajuste de curvas
2) Media móvil
3) Diferenciación

ACF y periodogramas de residuales

2.4.2 Series con estacionalidad

Para series con tendecia y componente estacional tradicionalmente se suelen considerar los siguientes modelos

$\mathsf{X}_t = m_t + \mathsf{S}_t + \varepsilon_t$ (modelo aditivo)

$\mathsf{X}_t = m_t \mathsf{S}_t \varepsilon_t$ (modelo multiplicativo)

$\mathsf{X}_t = m_t \mathsf{S}_t + \varepsilon_t$ (modelo mixto)

m_t representa la tendencia de la serie

S_t representa el índice estacional en el momento t. Si consideramos que la longitud de la componente estacional es 12, tendremos 12 índices estacionales diferentes y, por tanto, se verifica $\mathsf{S}_t = S_{t-12} = S_{t-24} = \ldots$ Los doce índices distintos S_1,S_2,..., S_{12} generalmente se normalizan para que su suma sea cero, en el caso de modelos aditivos, o para que su suma sea 1 en el caso de modelos multiplicativos. (Si la longitud de la estacionalidad fuera otra la generalización de lo anterior es inmediata).

El modelo multiplicativo tomando la transformación logarítmica queda reducido a un modelo aditivo, que es más fácil de manejar. Para determinar si un modelo es o no multiplicativo podemos fijarnos en la representación de la serie original y también en el plot rango - media.

El análisis de series temporales que exhiben comportamiento estacional depende de cuál sea nuestro interés:

- Conocer el efecto estacional y la tendencia

- Eliminar la estacionalidad (desestacionalizar)

A la tendencia se la llama componente suave por no presentar variaciones demasiado bruscas, y a las técnicas encaminadas a aislarla se las llama técnicas de suavizado.

Medias móviles Con series mensuales la forma más usual de desestacionalizar es aplicar la siguiente media móvil

$$\boxed{Sm(x_t) = \frac{\frac{1}{2}x_{t-6}+x_{t-5}+x_{t-4}+\ldots+x_{t+5}+\frac{1}{2}x_{t+6}}{12}}$$

Si los datos presentasen una estacionalidad de otra longitud se modifica la media móvil anterior sin más que tener en cuenta dicha longitud.

Ejemplo serie estacional p=12: Accidentes en jornada de trabajo en España. Enero 79 a Diciembre 98. n=240. Observar medias móviles.

El efecto estacional viene dado por $\boxed{x_t - Sm(x_t)}$ si el modelo es aditivo y por $\boxed{x_t/Sm(x_t)}$ si es multiplicativo.

Ejemplo páginas 2-7 a 2-15 nº de muertos en accidentes en USA, mensual.
Anexo A-2-10 y A-2-11

Diferenciación estacional Con la diferenciación estacional se pretende que la serie diferenciada sea estacionaria y cuando sea posible eliminar la estacionalidad.

Para conseguir que la serie diferenciada sea estacionaria a menudo necesitamos combinar la diferenciación regular y la estacional como se indica en el ejemplo de abajo.

Si la longitud de la componente estacional es 12 definimos el operador de diferencia estacional como

$$\boxed{\nabla_{12} X_t = X_t - X_{t-12} = (1 - B^{12}) X_t}$$

Este operador se puede combinar con el operador de diferenciación regular y así por ejemplo tenemos

$$\nabla\nabla_{12} X_t = \nabla(X_t - X_{t-12}) = (1 - B)(1 - B^{12}) X_t =$$

$$= X_t - X_{t-1} - X_{t-12} + X_{t-13}$$

Si la estacionalidad fuera otra la generalización de lo anterior es inmediata.

Volvemos a comprobar que estas transformaciones son filtros lineales.

Ejemplo: Accidentes en jornada de trabajo en España. Enero 79 a Diciembre 98. n=240
p=12 Observar que: $(1-B)X_t$ es estacional no estacionaria
$(1-B^{12})(1-B)$ es estacional y ¿estacionaria?
$(1-B^{12})^2(1-B)$?????

Obtención de índices estacionales por Descomposición Clásica

Supongamos que tenemos datos mensuales y disponemos de k años ($n = 12k$)

Esquema aditivo:

$$\begin{aligned} X_t &= m_t + S_t + \varepsilon_t \qquad t = 1, ..., n \\ X_{ij} &= m_{ij} + S_j + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{cases} i = 1, ..., k \\ j = 1, ..., 12 \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizamos medias móviles para una primera estimación de la tendencia m_{ij}

$$\widehat{m_{ij}} = Sm_{12}(X_t)$$

Calculamos los índices estacionales a partir de la serie

$$S^*_{ij} = X_{ij} - \widehat{m_{ij}}$$

utilizando para cada mes j el promedio de las k-1 S^*_{ij} disponibles ($i = 2, ..., k$ o bien $i = 1, ..., k-1$)

$$w_j = \frac{\sum_i S^*_{ij}}{k-1}$$

Así obtenemos 12 índices que no suman 0. Por ello hacemos el reajuste:

$$\widehat{S_j} = w_j - \overline{w} \qquad donde \quad \overline{w} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{12} w_j}{12}$$

Esquema multiplicativo:

$$\begin{array}{rcl} X_t & = & m_t S_t \varepsilon_t \qquad t = 1, ..., n \\ X_{ij} & = & m_{ij} S_j \varepsilon_{ij} \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, ..., k \\ j = 1, ..., 12 \end{array} \right. \end{array}$$

Utilizamos medias móviles para una primera estimación de la tendencia m_{ij}

$$\widehat{m_{ij}} = Sm_{12}(X_t)$$

Calculamos los índices estacionales a partir de la serie

$$S^*_{ij} = \frac{X_{ij}}{\widehat{m_{ij}}}$$

utilizando para cada mes j el promedio de las k-1 S^*_{ij}

disponibles ($i = 2, ..., k$ o bien $i = 1, ..., k-1$)

$$w_j = \frac{\sum\limits_i S^*_{ij}}{k-1}$$

Así obtenemos 12 índices que no suman 12. Por ello hacemos el reajuste:

$$\widehat{S_j} = \frac{w_j}{\overline{w}} \qquad donde \quad \overline{w} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{12} w_j}{12}$$

Otra opción para el esquema multiplicativo es que los índices sumen 1, en ese caso el cálculo sería:

$$\widehat{S_j} = \frac{w_j}{\sum\limits_{l=1}^{12} w_l}$$