

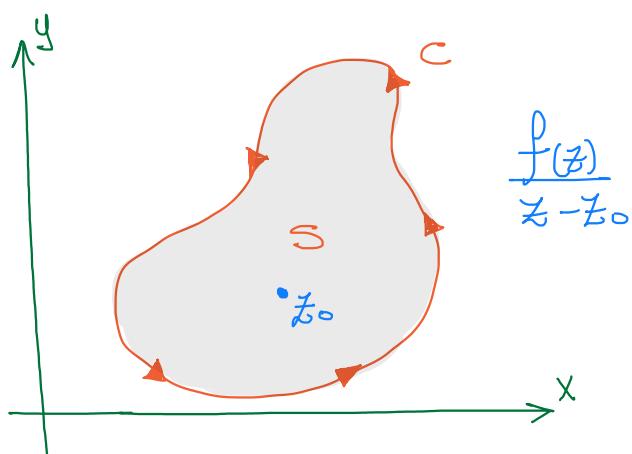
Formula Integral de Cauchy

Sea la siguiente integral:

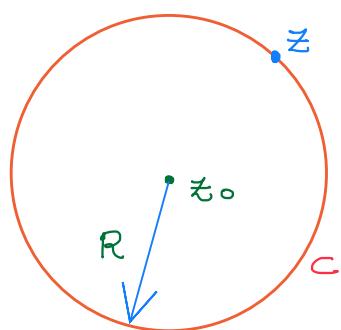
$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Si $f(z)$ es analítica en la curva cerrada C , así como en su región interior.

Si además z_0 pertenece a dicha región interior, entonces $z - z_0 \neq 0$; ya que, $z \in C$. Por tal motivo, el integrando $\frac{f(z)}{z - z_0}$ es bien definida en la curva cerrada C , donde $z \neq z_0$. Sin embargo, en la región interior, donde z puede ser $z = z_0$, el integrando será analítico sólo cuando $f(z_0) = 0$ (esto se demostrará en breve)



Como sabemos, podemos deformar el camino cerrado a antojo sin alterar el valor de la integral. Tomemos una circunferencia centrada en z_0 :



Tenemos

$$z - z_0 = Re^{i\theta}$$

$$dz = iRe^{i\theta} d\theta$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$$

$$= \oint f(z_0 + Re^{i\theta}) i d\theta$$

Aproximando finalmente: $f(z_0 + Re^{i\theta}) \approx f(z_0) + f'(z_0) Re^{i\theta}$
($R \ll L$)

$$\oint f(z_0 + Re^{i\theta}) i d\theta \approx \oint f(z_0) i d\theta + \oint f'(z_0) Re^{i\theta} i d\theta$$

$$= f(z_0) 2\pi i + 0$$

Notamos que cuando $f(z_0) = 0$ la integral es $= 0$, por lo tanto el integrando $\frac{f(z)}{z-z_0}$ será analítico en S :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) = 0$$

Lo cual es lógico debido al teorema integral de Cauchy.
Si $f(z_0) \neq 0$, entonces:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \neq 0$$

Por lo tanto, el integrando $\frac{f(z)}{z-z_0}$ no es analítico en S .

Si z_0 se encuentra en la región exterior a la encerrada por C , el integrando siempre será analítico. Por lo tanto, de todo lo visto inferimos:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} f(z_0) & ; z_0 \text{ en la región } S \\ 0 & ; z_0 \text{ fuera de la región } S \end{cases}$$

Puede ser $= 0$ cuando $\frac{f(z)}{z-z_0}$ sea analítica en S .

Demostración: De $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$