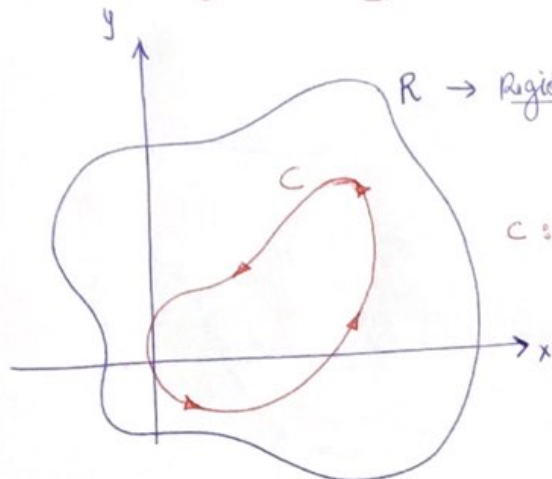


Teorema Integral de Cauchy

Esto hice en papel y luego lo pasé por el escáner, luego lo haré digital



$R \rightarrow$ Región simplemente conectada: Aquella región donde toda curva cerrada puede reducirse (contraerse) hasta un punto.

C : Contorno cerrado recorrido en sentido antihorario.

$$\text{Sea: } \oint_C f(z) dz = \oint_C [u + iv](dx + idy) \quad / \quad \begin{matrix} f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \\ dz = dx + i dy \end{matrix}$$

$$= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy)$$

Haremos uso del Teorema de Stokes: $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$

* Para $\vec{A} = (u, -v)$ y $d\vec{x} = (dx, dy)$, tenemos:

$$I_1 = \oint_C (u dx - v dy) = \int_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad / \quad \begin{matrix} \text{Recordar } u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{matrix}$$

$$= - \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy$$

De la condición de Cauchy-Riemann

* Para $\vec{A} = (v, u)$ y $d\vec{x} = (dx, dy)$, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$I_2 = \oint_C (v dx + u dy) = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

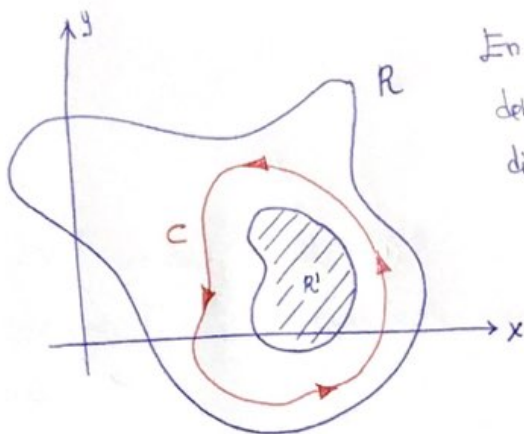
De la condición de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por lo tanto, si $f(z)$ es analítica en la región encerrada por la curva C , entonces las Condiciones de Cauchy-Riemann se cumplirán, con lo cual $I_1 = I_2 = 0$.

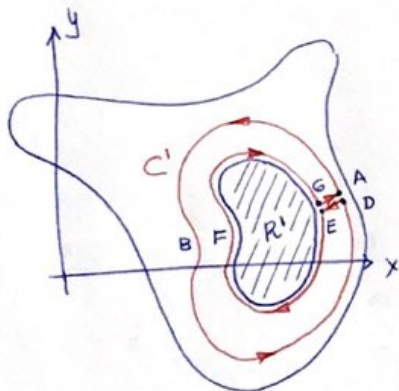
$$\boxed{\oint_C f(z) dz = I_1 + i I_2 = 0}$$

Regiones Múltiplemente conectadas



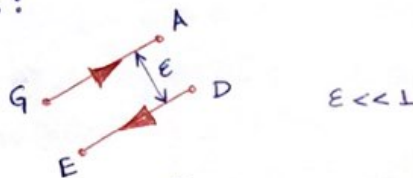
En este caso la región R no es simplemente conectada, debido al agujero representado por R' . Asimismo dicha región será considerada como aquella donde $f(z)$ no es analítica, es por esto último que la vamos como un agujero en R .

Si tomamos la integral de línea a través de la curva C será evidente que el teorema integral de Cauchy no se cumplirá debido a R' . Sin embargo, si deformamos el camino C a uno C' tal que encierre una región donde $f(z)$ sea analítica.



$$C' = ABDEFGA \rightarrow \oint_{C'} f(z) dz = 0$$

Los segmentos DE y GA pueden ser tomados arbitrariamente cercanos:



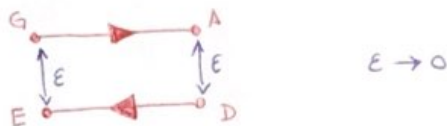
$$\text{Por lo tanto: } \int_D^E f(z) dz = - \int_G^A f(z) dz$$

La condición obtenida para los segmentos DE y GA nos permite ver lo siguiente:

$$\oint_{C'} f(z) dz = \int_{ABD} f(z) dz + \int_D^E f(z) dz + \int_{EFG} f(z) dz + \int_G^A f(z) dz = 0$$

$$\oint_{C'} f(z) dz = \int_{ABD} f(z) dz + \int_{EFG} f(z) dz = 0$$

Debido a la arbitraria elección de los segmentos DE y EA tenemos

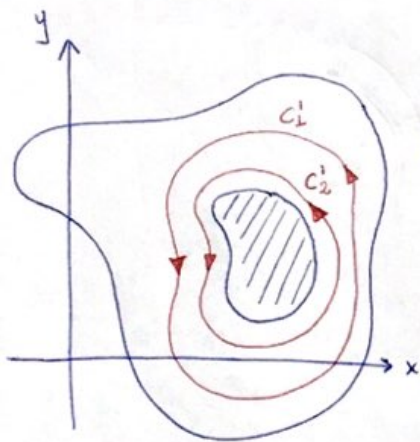


Por ello, los caminos ABD y EFG pueden considerarse los caminos cerrados ABDA y EFG E, respectivamente. Hacemos $ABDA = C_1'$ y $EFG E = -C_2'$, tal que C_1' y C_2' son antihorarios?

$$\oint_{C'} f(z) dz = \int_{ABD} f(z) dz + \int_{EFG} f(z) dz = 0$$

$$= \oint_{C_1'} f(z) dz + \oint_{-C_2'} f(z) dz = 0$$

$$\oint_{C_1'} f(z) dz - \oint_{C_2'} f(z) dz = 0 \rightarrow \oint_{C_1'} f(z) dz = \oint_{C_2'} f(z) dz$$



Por lo tanto, la integral de línea de $f(z)$ es independiente del camino tomado, siempre que éste se encuentre en la región de analiticidad de $f(z)$ (región no sombreada).

Ya que podemos deformar una curva cualquiera C a una circunferencia y obtener el mismo resultado, el siguiente resultado se comprobará sin mucho esfuerzo:

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Circunferencia centrada en z_0

$$z - z_0 = \rho e^{i(\theta + 2\pi)}$$

Este resultado será fácilmente comprobado para $z = \rho e^{i\theta}$. No obstante, como sabemos, se cumplirá para cualquier camino C .