

⇒ ejemplos

1) Integral Trigonométrica

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$$

Tomamos : $z = e^{i\theta} \rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta = i z d\theta$
 $d\theta = -i \frac{dz}{z}$

Circunferencia de
radio 1

$$\cos\theta = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{z^2 + \bar{z}^{-2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \oint \frac{z^2 + \bar{z}^{-2}}{5 - 2(z + z^{-1})} \frac{(-i) dz}{z}$$

$$I = -\frac{i}{2} \oint \frac{z^2 + \bar{z}^{-2}}{5z - 2z^2 - 2} dz = +\frac{i}{4} \oint \frac{z^2 + z^{-2}}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz$$

$$= \frac{i}{4} \oint \frac{z^4 + 1}{z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz$$

→ Tenemos polos en $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$ y $z_3 = 2$.

Sólo z_1 y z_2 están dentro de la circunferencia de radio 1. Asimismo debemos notar que z_1 es un polo de orden 2.

$$\ast \operatorname{Res}_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2 (z^4 + 1)}{z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^4 + 1}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(z^5 - 3.75z^4 + 2z^3 - z + 1.25)}{(z - 2)^2(z - 0.5)^2}$$

$$= \frac{2(1.25)}{4(0.5)^2} = \frac{5}{2}$$

$$* \quad \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(z - \frac{1}{2})}{z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} = -\frac{14}{6}$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{i}{4} \left(2\pi i \sum_i \frac{z_i}{2(-1)} \right)$$

$$I = \frac{i}{4} (2\pi i) \left(\frac{5}{2} - \frac{14}{6} \right)$$

$$I = \frac{\pi}{6}$$

2)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Podemos hacerlo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}}_{x \rightarrow -x} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{-dx}{1+(-x)^2} &= \int_{\infty}^0 \frac{-dx}{1+x^2} \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

Entonces: $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Transferimos esto al plano complejo: $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2}$

Haciendo $z = Re^{i\theta}$ tenemos:

$$z f(z) = Re^{i\theta} \frac{1}{1 + R^2 e^{2i\theta}}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{Re^{i\theta}}{1 + R^2 e^{2i\theta}} \right) = 0 \quad \forall \theta$$

Podemos aplicar el método conocido:

Semiplano Superior

$$\frac{1}{2} \oint = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C + \underbrace{\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R}}_I = \frac{2\pi i}{2} \sum_i \operatorname{Res}_i$$

Debido al límite visto arriba

$$I = \pi i \sum_i \operatorname{Res}_i$$

Notamos que $\frac{1}{2} \oint \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{(z+i)(z-i)}$ tiene dos polos

simples en $z_1 = +i$ y $z_2 = -i$, sin embargo, sólo z_1 está en el semiplano superior.

Tenemos:

$$\operatorname{Res}_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}$$

Por lo tanto : $I = \pi i \left(\frac{1}{2i} \right)$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

3) $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

Como sabemos : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

luego : $I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$

$x \rightarrow -x$:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ix} (-dx)}{(-x)^2+1}$$

$$= - \int_0^{-\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right\}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

Notamos que esta integral tiene la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$$

Con $a < 0$ y $f(x) = \frac{1}{2(x^2+1)}$

Usamos el semiplano inferior.

Notamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Tenemos:

$$\oint \frac{e^{-iz}}{z^2+1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{z^2+1} = -2\pi i \sum_i \operatorname{Res}_i$$

Notamos que $\frac{e^{-iz}}{z^2+1} = \frac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)}$, por lo tanto tenemos

dos polos simples en $z_1 = i$ y $z_2 = -i$, sin embargo, sólo z_2 está en el semiplano inferior.

Tenemos:

$$\operatorname{Res}_{z=-i} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-(-i)}}{-2i} = \frac{1}{-2ei}$$

Finalmente:

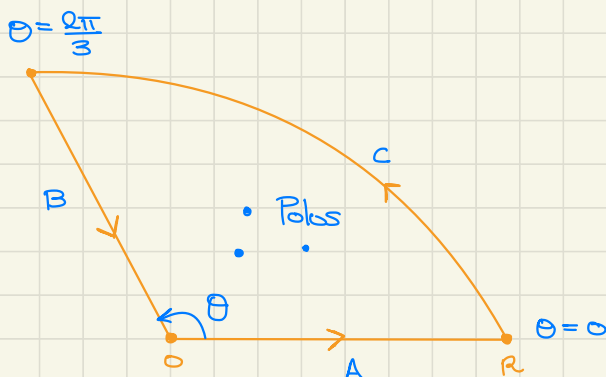
$$2I = -2\pi i \left(\frac{1}{-2ei} \right)$$

$$I = \frac{\pi}{2e}$$

4) Como la integral no puede tomar la forma $\int_{-\infty}^{+\infty}$:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

Como podemos notar, esta integral no podrá ser transformada a una con rango $-\infty$ a $+\infty$ con facilidad. En su lugar tomamos un camino cerrado de la siguiente forma:



Tomamos:

$$\oint = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_A + \int_C + \int_B \right) = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_i$$

Tomamos $\theta = \frac{2\pi}{3}$ debido al exponente de x ; de esta forma en la integral compleja tenemos:

$$\int_A \frac{dz}{z^3+1} \xrightarrow[\theta=0]{z=Re^{i\theta}} \int_0^R \frac{dR}{R^3+1}$$

$$\int_B \frac{dz}{z^3+1} \xrightarrow[\theta=\frac{2\pi}{3}]{z=Re^{i\theta}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_R^0 \frac{dR}{R^3+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^R \frac{dR}{R^3+1}$$

Para el caso (camino C) tenemos que evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) \rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{i\theta} \cdot \frac{1}{R^3 e^{3i\theta} + 1} = 0 \quad \forall \theta$$

Por lo tanto:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C = 0$$

Tenemos:

$$\oint = \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_A}_I + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_B}_{-e^{\frac{i2\pi}{3}} I} + \cancel{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C} = 2\pi i \sum_{i=1}^n a_{i-1}$$

$$(1 - e^{\frac{i2\pi}{3}}) I = 2\pi i \sum_{i=1}^n a_{i-1}$$

Notemos que $f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$ tiene polos simples en las raíces de $z^3 + 1 = 0$:

$$z^3 = -1$$

$$\text{Hacemos } z = e^{i\theta} \rightarrow z^3 = e^{3i\theta} = -1$$

El valor más pequeño para que 3θ haga que $e^{i3\theta}$

sea -1 es $3\theta = \pi \rightarrow \theta = \pi/3$, el

Siguiente valor es $3\theta = 3\pi \rightarrow \theta = \pi$, en este punto retomamos lo siguiente:

$$\frac{\pi}{3} \quad \pi$$

$\xrightarrow{+ \frac{2\pi}{3}}$

Por lo tanto, los siguientes valores serán:

$$\frac{\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{3}$$

$\xrightarrow{+ \frac{2\pi}{3}} \quad \xrightarrow{+ \frac{2\pi}{3}} \quad \xrightarrow{+ \frac{2\pi}{3}}$

$\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

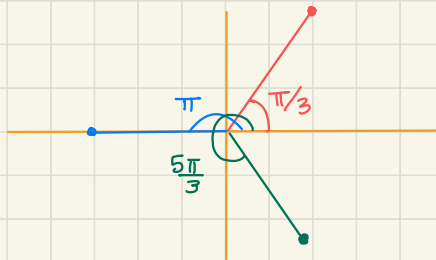
Acá ya se cumplió el ciclo, sólo se repetirán valores, por lo tanto los 3 raíces son:

$$\theta_1 = \pi/3$$

$$\theta_2 = \pi$$

$$\theta_3 = 5\pi/3$$

Los polos son: $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = e^{i\pi}$ y $z_3 = e^{i5\pi/3}$



Notamos que sólo z_1 está dentro del camino cerrado, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^n a_{(-1)}^i = a_{(-1)}^{z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)}{(z^3 + 1)} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ Aplicamos L'Hospital}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)}{(z^3 + 1)} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3z_1^2}$$

$$= \frac{1}{3e^{2\pi i/3}}$$

Tenemos:

$$I(1 - e^{2\pi i/3}) = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i/3}}$$

$$I \frac{(1 - e^{2\pi i/3})}{e^{\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i/3} \cdot e^{\pi i/3}}$$

$$I \left(\frac{e^{-\pi i/3} - e^{\pi i/3}}{2} \right) = \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{i\pi}}$$

$$I(-i \sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi i}{3} \cdot (-1)$$

$$I = \frac{i\pi}{3 \sin(\pi/3)} i \rightarrow I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

5) Cuando tenemos una singularidad en el camino de integración:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Como sabemos $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx - \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{2ix} dx}$$

$x \rightarrow -x$

$$\int_0^{-\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx$$

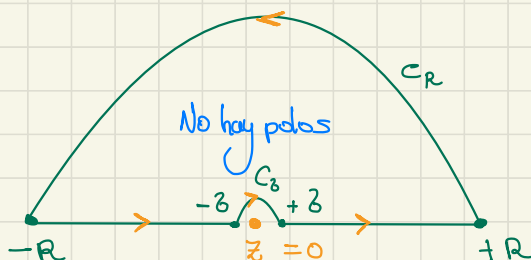
$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx - \int_0^{-\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx = \int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^0$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx \rightarrow \text{tiene la forma } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$$

Polo simple en $x=0$

$a > 0$
 $f(x) = \frac{1}{2ix}$

Ya que $a > 0$ formamos el siguiente camino:



Tenemos:

$$\oint \frac{e^{iz}}{iz} dz = \lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-b} + \int_{+b}^R + \int_{C_b} + \int_{C_R} \right\} = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-b} + \int_{+b}^R \right\} + \lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \int_{C_b} + \lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \int_{C_R} = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(re^{i\theta}) = 0$$

I: Esto de denominar
"Valor principal"

$$I = - \lim_{b \rightarrow 0} \int_{C_b}$$

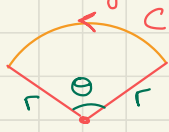
→ El camino C_b es horario,
por tal motivo tenemos
que la integral

$$- \int_{C_b}$$

será antihoraria.

¿Qué ocurre con la integral \int_{C_b} ?

Tomamos la integral
que rodea al punto
singular mediante un
arco de ángulo θ :



$z_0 \rightarrow$ Punto singular

$$I_r = \int_{C_r} e^{iaz} f(z) dz \longrightarrow \int_{C_r} e^{ia(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_r = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_{C_r} e^{ia(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) r e^{i\theta} d\theta$$

$$= i \int_{C_r} \left[\lim_{r \rightarrow 0} e^{ia(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) r e^{i\theta} \right] d\theta$$

De la expresión entre paréntesis notamos lo siguiente:

$$\bullet \lim_{r \rightarrow 0} = \lim_{z \rightarrow z_0}$$

$$\bullet z - z_0 = r e^{i\theta}$$

Tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) e^{iaz} f(z)$$

Si z_0 es un polo simple la expresión anterior será $\frac{z=z_0}{\partial(z)}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) e^{iaz} f(z) = \frac{z=z_0}{\partial(z)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_r = i\theta \frac{z=z_0}{\partial(z)}$$

General:

Si $z = z_0$ es un polo simple de $g(z)$, entonces

$$\int_C g(z) dz = i\theta \frac{z=z_0}{\partial(z)}$$

Donde C es el arco de circunferencia centrado en $z = z_0$ cuyo ángulo borbido θ es $[\theta_1; \theta_2]$

Volviendo al ejercicio tendremos:

$$I = \lim_{z \rightarrow 0} \left(- \int_{C_z} \right) = i\pi \underset{z=0}{\partial(-1)}$$

$$\underset{z=0}{\partial(-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{e^{iz}}{2iz} = \frac{1}{2i}$$

Finalmente:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

6) Usando Branch Cuts

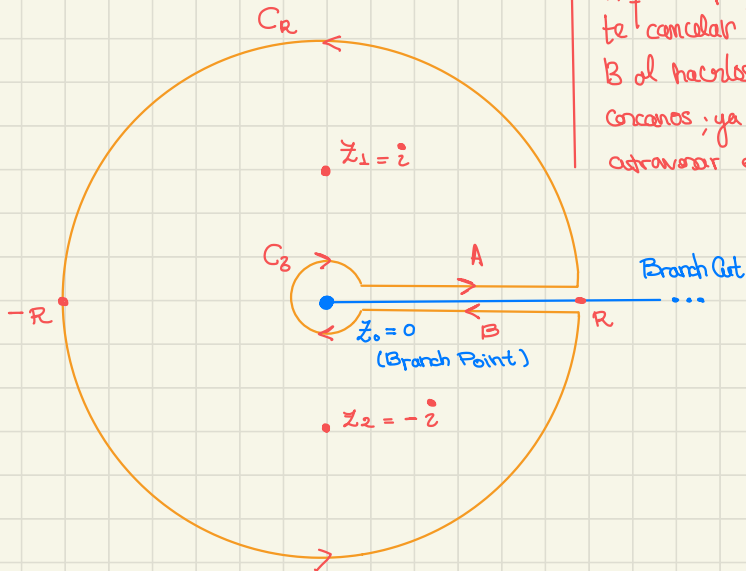
$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^2+1} dx \quad 0 < p < 1$$

- Notemos:
- $\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \quad \forall \quad z = Re^{i\theta}$, con $f(z) = \frac{z^p}{z^2+1}$.
 - Debido a la forma de p tenemos que $z = z_0 = 0$ es un branch point.
 - $z_1 = i$ y $z_2 = -i$ son polos de orden 1 de $f(z)$.

Tomamos la integral usada en el plano complejo:

$$\oint \frac{z^p}{z^2+1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \left\{ \int_A + \int_B + \int_{C_\delta} + \int_{C_R} \right\} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \underset{z=0}{\partial(-1)}$$

Dando el camino se muestra a continuación:



Nota importante:

Aquí no podemos simplemente cancelar los caminos A y B al hacerlos arbitrariamente cercanos; ya que, no podemos atravesar el branch cut.

Para este ejercicio tenemos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = 0$.

Para A tenemos $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_A = I$ (Valor principal):

$$A: z = Re^{i\theta}; \theta = 0 \rightarrow \int_A = \int_0^R \frac{R^P dR}{R^2 + 1} \rightarrow I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_A$$

Para B tenemos:

$$B: z = Re^{i\theta}; \theta = 2\pi \rightarrow \int_B = \int_R^0 \frac{R^P e^{2\pi i}}{R^2 + 1} dR = -e^{2\pi i} \int_0^R \frac{R^P dR}{R^2 + 1}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_B = -e^{2\pi i} I$$

• Para C_3 tenemos:

$$z = ze^{i\theta}$$

$$\int_{C_3} = \int \frac{z^p e^{p\theta i}}{z^2 e^{2\theta i} + 1} i z e^{i\theta} d\theta = i \int \frac{z^{p+1} e^{p\theta i} e^{i\theta}}{z^2 e^{2\theta i} + 1} d\theta$$

De aquí notamos: $\lim_{z \rightarrow 0} \int_{C_3} = 0$

Tenemos:

$$2\pi i \sum_{i=1}^n \frac{i}{a(-1)} = I - e^{2\pi i} I$$

$$2\pi i \left\{ \frac{z_1=i}{a(-1)} + \frac{z_2=-i}{a(-1)} \right\} = I (1 - e^{2\pi i})$$

$$\begin{aligned} z_1=i \\ \bullet \frac{i}{a(-1)} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) z^p}{(z+i)(z-i)} = \frac{i^p}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2=-i \\ \bullet \frac{-i}{a(-1)} &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z+i) z^p}{(z+i)(z-i)} = \frac{(-i)^p}{-2i} \end{aligned}$$

$$2\pi i \left\{ \frac{i^p}{2i} - \frac{(-i)^p}{2i} \right\} = I (1 - e^{2\pi i})$$

$$2\pi i \left\{ \frac{(e^{i\pi/2})^p}{2i} - \frac{(e^{i3\pi/2})^p}{2i} \right\} = I (1 - e^{i2\pi p})$$

$$\pi \left\{ e^{i\frac{p\pi}{2}} - e^{i\frac{3p\pi}{2}} \right\} = I (1 - e^{i2\pi p})$$

Multiplicando a ambos lados por $e^{-ip\pi}$:

$$\pi \left\{ e^{-i\frac{p\pi}{2}} - e^{i\frac{p\pi}{2}} \right\} = I (e^{-ip\pi} - e^{ip\pi})$$

$$-\pi 2 \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = -I 2 \sin(p\pi)$$

$$I = \pi \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\sin(p\pi)}$$