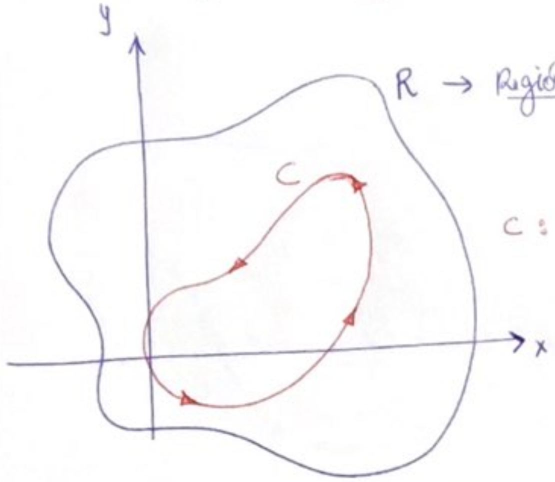
Esto hice en papel y luego lo pasé por el escáner, luego lo haré digital

Teorema Integral de Cauchy



R → Región simplemente conectada : Aquella región donde toda curva cerrada puede reducirse (cerrarse) hasta un punto.

C : Contorno cerrado recorrido en sentido antihorario.

Sea : $\oint_C f(z)dz = \oint_C [u+iv](dx+idy)$ / $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $dz = dx + i\,dy$

$$= \oint (u\,dx - v\,dy) + i\oint (v\,dx + u\,dy)$$

Haremos uso del Teorema de Stokes : $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{x} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s}$

✱ Para $\vec{A} = (u; -v)$ y $d\vec{x} = (dx; dy)$, tenemos :

$$I_1 = \oint_C (u\,dx - v\,dy) = \int_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Recordar $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$

$$= -\int \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} dx\,dy$$

↳ De la condición de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

✱ Para $\vec{A} = (v, u)$ y $d\vec{x} = (dx; dy)$, tenemos :

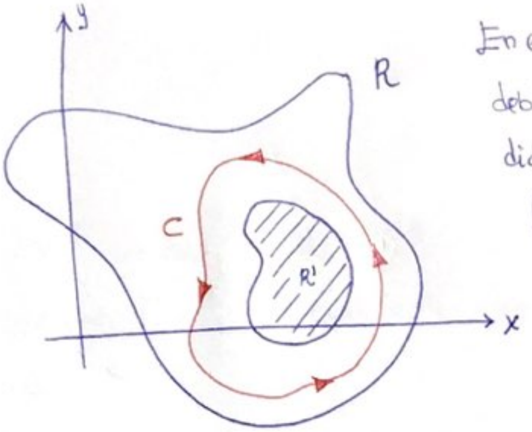
$$I_2 = \oint_C (v\,dx + u\,dy) = \int_S \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)} dx\,dy$$

↳ De la condición de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

Por lo tanto, si $f(z)$ es analítica en la región encerrada por la curva C, entonces las Condiciones de Cauchy-Riemann se cumplirán, con lo cual $I_1 = I_2 = 0$.

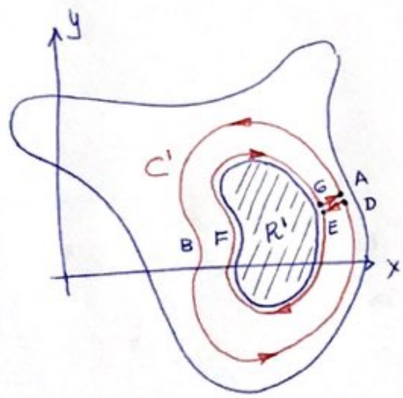
$$\boxed{\oint_C f(z)dz = I_1 + i\,I_2 = 0}$$

Regiones Multiplemente conectadas



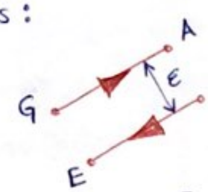
En este caso la region R no es simplemente conectada, debido al agujero representado por R'. Asimismo dicha región será considerada como aquella donde $f(z)$ no es analítica, es por esto último que la vamos como un agujero en R.

Si tomamos la integral de línea a través de la curva C será evidente que el teorema integral de Cauchy no se cumplirá debido a R'. Sin embargo, si deformamos el camino C a uno C' tal que encierre una región donde $f(z)$ sea analítica.



$$C' = ABDEFGA \longrightarrow \oint_{C'} f(z)dz = 0$$

Los segmentos DE y GA pueden ser tomados arbitrariamente cercanos:



$$\varepsilon << 1$$

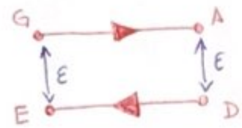
Por lo tanto: $$\int_D^E f(z)dz = -\int_G^A f(z)dz$$

La condición obtenida para los segmentos DE y GA nos permite ver lo siguiente:

$$\oint_{C'} f(z)dz = \int_{ABD} f(z)dz + \cancel{\int_D^E f(z)dz} + \int_{EFG} f(z)dz + \cancel{\int_G^A f(z)dz} = 0$$

$$\oint_{C'} f(z)dz = \int_{ABD} f(z)dz + \int_{EFG} f(z)dz = 0$$

Debido a la arbitraria cercanía de los segmentos DE y GA tenemos



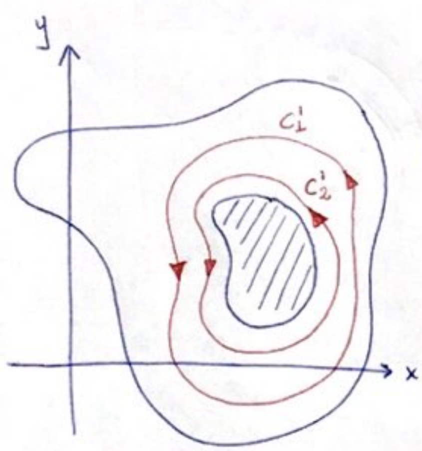
$\epsilon \to 0$

Por ello, los caminos ABD y EFG pueden considerarse los caminos cerrados ABDA y EFGE, respectivamente. Hacemos ABDA = C_1' y EFGE = $-C_2'$, tal que C_1' y C_2' son antihorarios:

$$\oint_{C'} f(z)\,dz = \int_{ABD} f(z)\,dz + \int_{EFG} f(z)\,dz = 0$$

$$= \oint_{C_1'} f(z)\,dz + \oint_{-C_2'} f(z)\,dz = 0$$

$$\oint_{C_1'} f(z)\,dz - \oint_{C_2'} f(z)\,dz = 0 \longrightarrow \boxed{\oint_{C_1'} f(z)\,dz = \oint_{C_2'} f(z)\,dz}$$



Por lo tanto, la integral de línea de $f(z)$ es independiente del camino tomado, siempre que este se encuentre en la región de analiticidad de $f(z)$ (región no sombreada).

Ya que podemos deformar una curva cualquiera C a una circunferencia y obtener el mismo resultado, el siguiente resultado se comprobará sin mucho esfuerzo:

$$\oint_C (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ & (n \in \mathbb{Z}) \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

Este resultado será fácilmente comprobado para ~~$z = Re^{i\theta}$~~. No obstante, como sabemos, se cumplirá para cualquier camino C.

Circunferencia centrada en z_0 $\longleftarrow$ $z - z_0 = Re^{i(\theta + 2\pi)}$