Ejemplos de integrales complejas

Ejemplos

1) Integral Trigonométrica

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta$$

Tomamos : $z = e^{i\theta} \rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta = i z d\theta$

Circunferencia de radio 1

$$d\theta = -i \frac{dz}{z}$$

$$\cos 2\theta = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \oint \frac{z^2+z^{-2}}{5-2(z+z^{-1})} (-i) \frac{dz}{z}$$

$$I = -\frac{i}{2} \oint \frac{z^2+z^{-2}}{5z-2z^2-2} dz = +\frac{i}{4} \oint \frac{z^2+z^{-2}}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} dz$$

$$= \frac{i}{4} \oint \frac{z^4+1}{\underbrace{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)}} dz$$

$\rightarrow$ Tenemos polos en $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$ y $z_3 = 0$. Sólo z_1 y z_2 están dentro de la circunferencia de radio 1. Asimismo debemos notar que z_1 es un polo de orden 2.

$$* \quad a_{(-1)}^{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{(z^4+1)}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-2)} \right]$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{2(z^5-3.75z^4+2z^3-z+1.25)}{(z-2)^2(z-0.5)^2}$$

$$= \frac{2(1.25)}{4(0.5)^2} = \frac{5}{2}$$

$$* \quad a_{(-1)}^{z=1/2} = \lim_{z \to 1/2} (z-1/2)\frac{(z^4+1)}{z^2(z-1/2)(z-2)} = -\frac{17}{6}$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{i}{4}\left(2\pi i \sum_i a_{(-1)}^{z_i}\right)$$

$$I = \frac{i}{4}(2\pi i)\left(\frac{5}{2} - \frac{17}{6}\right)$$

$$I = \frac{\pi}{6}$$

2)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Podemos hacer lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}}_{x \to -x} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-(-\infty)}^{-0} \frac{-dx}{1+(-x)^2} = \int_{\infty}^{0} \frac{-dx}{1+x^2}$$

$$= -\int_{\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Entonces: $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Translatamos esto al plano complejo: $\quad I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2}$

Haciendo $z = Re^{i\theta}$ tenemos:

$$z\,f(z) = Re^{i\theta}\,\frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{Re^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}\right) = 0 \qquad \forall\theta$$

Podemos aplicar el método conocido:

Semiplano Superior

$$\frac{1}{2}\oint = \cancelto{0}{\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_C} + \underbrace{\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R}}_{I} = \frac{2\pi i}{2}\sum_i a^{i}_{(-1)}$$

Debido al límite visto arriba

$$I = \pi i \sum_i a^{i}_{(-1)}$$

Notamos que $\frac{1}{2}\oint \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\oint \frac{dz}{(z+i)(z-i)}$ tiene dos polos simples en $z_1 = +i$ y $z_2 = -i$, sin embargo, sólo z_1 entra en el semiplano superior.

Tenemos:

$$a^{z=i}_{(-1)} = \lim_{z\to i}\,(z-i)\,\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}$$

Por lo tanto : $I = \pi i \left(\frac{1}{2i} \right)$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

3) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx$

Como sabemos : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

luego : $I = \underbrace{\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx}_{x \to -x} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$

$x \to -x$: $\displaystyle\int_{-0}^{-\infty} \frac{e^{-ix}}{(-x)^2+1}(-dx)$

$$= -\int_0^{-\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty} \right\}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

Notamos que esta integral tiene la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\, dx$$

Con $a<0$ y $f(x) = \dfrac{1}{2(x^2+1)}$

Usaremos el semiplano inferior.

Notamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Tenemos:

$$\oint \frac{e^{-iz}}{z^2+1}\,dz = \cancelto{0}{\lim_{R\to\infty}\int_C} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iz}}{z^2+1}}_{2I} = -2\pi i \sum_i a_{(-1)}^{i}$$

Notamos que $\dfrac{e^{-iz}}{z^2+1} = \dfrac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)}$, por lo tanto tenemos

dos polos simples en $z_1 = i$ y $z_2 = -i$, sin embargo, sólo z_2 estará en el semiplano inferior.

Tenemos:

$$a_{(-1)}^{z=-i} = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-1}}{-2i} = \frac{1}{-2ei}$$

Finalmente:

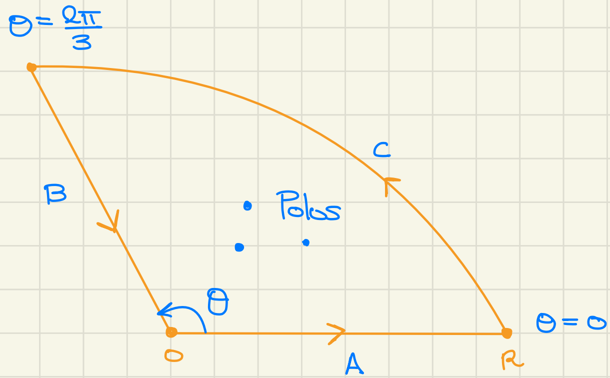
$$2I = -2\pi i\left(\frac{1}{-2ei}\right)$$

$$I = \frac{\pi}{2e}$$

4) Cuando la integral no puede tomar la forma $\int_{-\infty}^{+\infty}$:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

Como podemos notar, esta integral no podrá ser transformada a una con rango $-\infty$ a $+\infty$ con facilidad. En su lugar tomaremos un camino cerrado de la siguiente forma:



Tenemos:

$$\oint = \lim_{R\to\infty}\left(\int_A + \int_C + \int_B\right) = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} a_{(-1)}^{i}$$

Tomamos $\theta = \frac{2\pi}{3}$ debido al exponente de x; de esta forma en la integral compleja tenemos:

$$\int_A \frac{dz}{z^3+1} \xrightarrow[\theta=0]{z=Re^{i\theta}} \int_0^R \frac{dR}{R^3+1}$$

$$\int_B \frac{dz}{z^3+1} \xrightarrow[\theta=\frac{2\pi}{3}]{z=Re^{i\theta}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_R^0 \frac{dR}{R^3+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^R \frac{dR}{R^3+1}$$

Para el arco (camino C) tenemos que evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{|z|\to\infty} z\,f(z) \longrightarrow \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta}\cdot\frac{1}{R^3e^{3i\theta}+1} = 0$$

$$\forall\theta$$

Por lo tanto:

$$\lim_{R\to\infty}\int_C = 0$$

Tenemos:

$$\oint = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_A}_{I} + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_B}_{-e^{i\frac{2\pi}{3}}I} + \overset{0}{\cancel{\lim_{R\to\infty}\int_C}} = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} a^{i}_{(-1)}$$

$$\left(1-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)I = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} a^{i}(-1)$$

Notemos que $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$ tiene polos simples en las raíces de

$z^3+1=0$:

$$z^3 = -1$$

Hacemos $z = e^{i\theta} \rightarrow z^3 = e^{3i\theta} = -1$

El valor más pequeño para que 3θ haga que $e^{i3\theta}$ sea -1 es $3\theta = \pi \rightarrow \theta = \pi/3$, el

Siguiente valor es $3\theta = 3\pi \rightarrow \theta = \pi$, en este punto notamos lo siguiente:

$$\frac{\pi}{3} \xrightarrow{+\frac{2\pi}{3}} \pi$$

Por lo tanto, los siguientes valores serán:

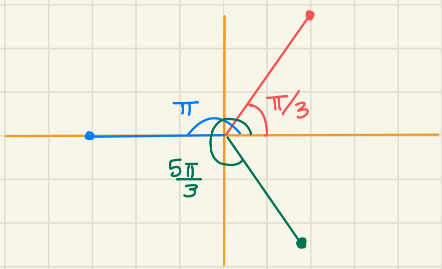
$$\frac{\pi}{3} \xrightarrow{+\frac{2\pi}{3}} \pi \xrightarrow{+\frac{2\pi}{3}} \frac{5\pi}{3} \xrightarrow{+\frac{2\pi}{3}} \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$$

Acá ya se cumplió el ciclo, sólo se repetirán valores, por lo tanto las 3 raíces son:

$$\theta_1 = \pi/3$$
$$\theta_2 = \pi$$
$$\theta_3 = 5\pi/3$$

Los polos son: $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = e^{i\pi}$ y $z_3 = e^{i5\pi/3}$



Notamos que sólo z_1 está dentro del camino cerrado, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i}_{(-1)} = a^{z_1}_{(-1)} = \lim_{z \to z_1} \frac{(z - z_1)}{(z^3 + 1)} \rightarrow \frac{0}{0}$$ Aplicamos L'Hospital

$$\lim_{z \to z_1} \frac{(z - z_1)}{(z^3 + 1)} = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3z_1^2}$$

$$= \frac{1}{3e^{2\pi i/3}}$$

Tenemos:

$$I(1 - e^{2\pi i/3}) = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i/3}}$$

$$\frac{I(1 - e^{2\pi i/3})}{e^{\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i/3} \cdot e^{\pi i/3}}$$

$$I\left(\frac{e^{-\frac{\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{3}}}{2}\right) = \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{i\pi}}$$

$$I\left(-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi i}{3} \cdot (-1)$$

$$I = \frac{i\pi}{3\sin(\pi/3)\, i} \Rightarrow I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

5) Cuando tenemos una singularidad en el camino de integración: $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$

Como sabemos $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx - \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{2ix}\,dx}$$

$x \to -x$

$$\int_0^{-\infty} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx$$

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx - \int_0^{-\infty} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx = \int_0^\infty + \int_{-\infty}^0$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx$$

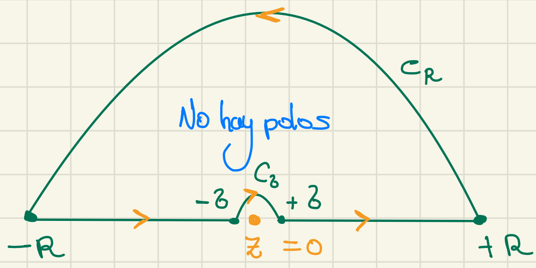
$\longrightarrow$ Tiene la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx$

$\longrightarrow$ Polo simple en $x = 0$

$a > 0$

$f(x) = \frac{1}{2ix}$

Ya que $a > 0$ tomamos el siguiente camino:



Tenemos :

$$\oint \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz = \lim_{R\to\infty,\ \delta\to 0}\left\{\int_{-R}^{-\delta} + \int_{+\delta}^{R} + \int_{C_\delta} + \int_{C_R}\right\} = 0$$

$$\underbrace{\lim_{R\to\infty,\ \delta\to 0}\left\{\int_{-R}^{-\delta} + \int_{+\delta}^{+R}\right\}}_{I} + \lim_{R\to\infty,\ \delta\to 0}\int_{C_\delta} + \cancelto{=0}{\lim_{R\to\infty,\ \delta\to 0}\int_{C_R}} = 0$$

$$\lim_{R\to\infty} f(Re^{i\theta}) = 0$$

I : Esto se denomina "Valor principal"

$$I = -\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} \longrightarrow$$ El camino C_δ es horario, por tal motivo tenemos que la integral

$$-\int_{C_\delta}$$

será antihoraria.

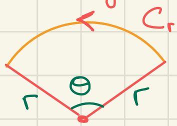
¿Qué ocurre con la integral $\int_{C_\delta}$?

Tomamos la integral que rodea al punto singular mediante un arco de ángulo θ :

$$I_r = \int_{C_r} e^{iaz} f(z)\,dz \xrightarrow[z - z_0 = re^{i\theta}]{} \int_{C_r} e^{ia(z_0+re^{i\theta})} f(z_0+re^{i\theta})\, ire^{i\theta}\, d\theta$$

$$\lim_{r\to 0} I_r = \lim_{r\to 0} i\int_{C_r} e^{ia(z_0+re^{i\theta})} f(z_0+re^{i\theta})\, re^{i\theta}\, d\theta$$

$$= i\int_{C_r}\left[\lim_{r\to 0} e^{ia(z_0+re^{i\theta})} f(z_0+re^{i\theta})\, re^{i\theta}\right] d\theta$$



z_0 → Punto singular

De la expresión entre paréntesis notamos lo siguiente:

- $\lim\limits_{r \to 0} = \lim\limits_{z \to z_0}$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$

Tenemos:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) e^{iaz} f(z)$$

Si z_0 es un polo simple la expresión anterior será $a_{(-1)}^{z=z_0}$

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) e^{iaz} f(z) = a_{(-1)}^{z=z_0}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r \to 0} I_r = i\theta \, a_{(-1)}^{z=z_0}$$

<u>En general</u>:

Si $z = z_0$ es un polo simple de $g(z)$, entonces

$$\int_C g(z)\, dz = i\theta \, a_{(-1)}^{z=z_0}$$

Donde C es el arco de circunferencia centrado en $z = z_0$ cuyo ángulo barrido $\theta \in [\theta_1 ; \theta_2]$

Volviendo al ejercicio tendremos:

$$I = \lim_{\delta \to 0} \left(- \int_{C_\delta} \right) = i\pi \, a_{(-1)}^{z=0}$$

$$a_{(-1)}^{z=0} = \lim_{z \to 0} (z-0) \frac{e^{iz}}{2iz} = \frac{1}{2i}$$

Finalmente:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

6) Usando Branch Cuts

$$I = \int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+1} \, dx \qquad 0 < p < 1$$

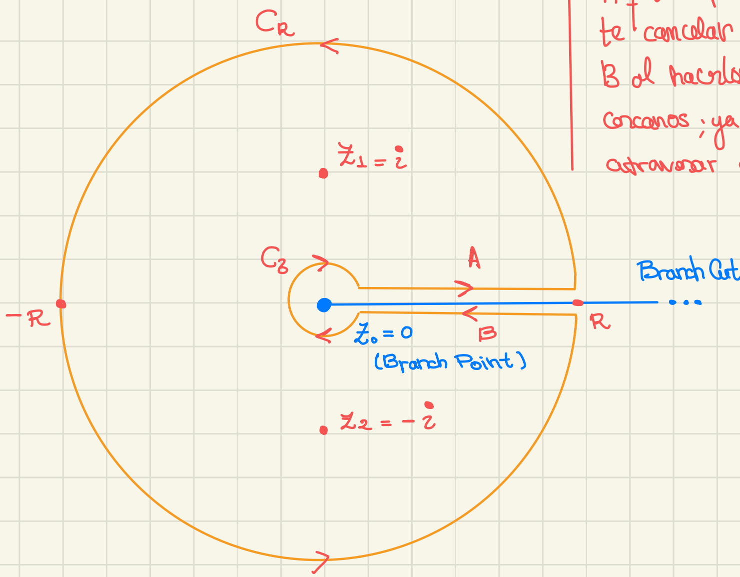
Notamos:

- $\lim_{R \to \infty} z f(z) = 0 \quad \forall \, z = Re^{i\theta}$, con $f(z) = \dfrac{z^p}{z^2+1}$.
- Debido a la forma de p tenemos que $z = z_0 = 0$ es un branch point.
- $z_1 = i$ y $z_2 = -i$ son polos de orden 1 de $f(z)$.

Tomamos la integral cerrada en el plano complejo:

$$\oint \frac{z^p}{z^2+1} \, dz = \lim_{R \to \infty, \, \delta \to 0} \left\{ \int_A + \int_B + \int_{C_\delta} + \int_{C_R} \right\} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} a_{(-1)}^{i}$$

Dando el camino se muestra a continuación:



Nota importante: Aquí no podemos simplemente cancelar los caminos A y B al hacerlos arbitrariamente cercanos; ya que, no podemos atravesar el branch cut.

- Para este ejercicio tenemos que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} = 0$.
- Para A tenemos $\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ R\to\infty}} \int_A = I$ (Valor principal):

$$A: \quad z = Re^{i\theta} \; ; \; \theta = 0 \longrightarrow \int_A = \int_\delta^R \frac{R^p \, dR}{R^2+1} \longrightarrow I = \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ R\to\infty}} \int_A$$

- Para B tenemos:

$$B: \quad z = Re^{i\theta} \; ; \; \theta = 2\pi \longrightarrow \int_B = \int_R^\delta \frac{R^p e^{2\pi p i}}{R^2+1} dR = -e^{2\pi p i} \int_\delta^R \frac{R^p \, dR}{R^2+1}$$

$$z = Re^{2\pi i}$$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ R\to\infty}} \int_B = -e^{2\pi p i} \, I$$

- Para C_δ tenemos:

$z = \delta e^{i\theta}$

$$\int_{C_\delta} = \int \frac{\delta^p e^{p\theta i}}{\delta^2 e^{2\theta i} + 1} i\delta e^{i\theta} d\theta = i \int \frac{\delta^{p+1} e^{p\theta i} e^{i\theta} d\theta}{\delta^2 e^{2\theta i} + 1}$$

De aquí notamos: $\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} = 0$

Tenemos:

$$2\pi i \sum_{i=1}^{n} a^{i}_{(-1)} = I - e^{2\pi p i} I$$

$$2\pi i \left\{ a^{z_1 = i}_{(-1)} + a^{z_2 = -i}_{(-1)} \right\} = I \left(1 - e^{2\pi p i}\right)$$

- $a^{z_1 = i}_{(-1)} = \lim_{z \to i} (z - i) \dfrac{z^p}{(z+i)(z-i)} = \dfrac{i^p}{2i}$

- $a^{z_2 = -i}_{(-1)} = \lim_{z \to -i} (z + i) \dfrac{z^p}{(z+i)(z-i)} = \dfrac{(-i)^p}{-2i}$

$$2\pi i \left\{ \frac{i^p}{2i} - \frac{(-i)^p}{2i} \right\} = I \left(1 - e^{2\pi p i}\right)$$

$$2\pi i \left\{ \frac{\left(e^{i\pi/2}\right)^p}{2i} - \frac{\left(e^{i3\pi/2}\right)^p}{2i} \right\} = I \left(1 - e^{i 2\pi p}\right)$$

$$\pi \left\{ e^{i\frac{p\pi}{2}} - e^{i\frac{3p\pi}{2}} \right\} = I \left(1 - e^{i 2\pi p}\right)$$

Multiplicando a ambos lados por $e^{-ip\pi}$:

$$\pi\left\{e^{-i\frac{p\pi}{2}} - e^{i\frac{p\pi}{2}}\right\} = I\left(e^{-ip\pi} - e^{ip\pi}\right)$$

$$-\pi 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{2}\right) = -I 2 \operatorname{sen}(p\pi)$$

$$I = \pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\pi p)}$$