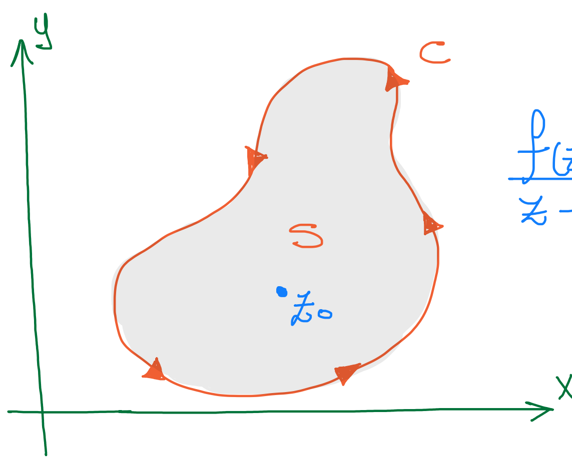
Formula Integral de Cauchy

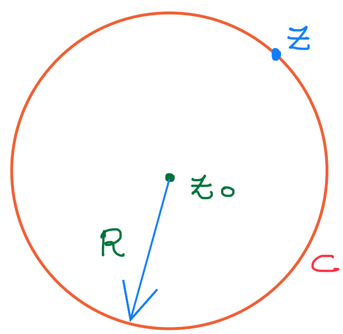
Sea la siguiente integral:
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Si $f(z)$ es analítica en la curva cerrada C, así como en su región interior. Si además z_0 pertenece a dicha región interior, entonces $z-z_0 \neq 0$; ya que, $z \in C$. Por tal motivo, el integrando $\frac{f(z)}{z-z_0}$ es bien definida en la curva cerrada C, donde $z \neq z_0$. Sin embargo, en la región interior, donde z puede ser $z = z_0$, el integrando será analítico sólo cuando $f(z_0) = 0$ (esto se demostrará en breve)



$$\frac{f(z)}{z-z_0}$$

Como sabemos, podemos deformar el camino cerrado a antojo sin alterar el valor de la integral. Tomemos una circunferencia centrada en z_0:



Tenemos
$$z - z_0 = Re^{i\theta}$$
$$dz = iRe^{i\theta}\, d\theta$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \oint \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$
$$= \oint f(z_0 + Re^{i\theta})\, i\, d\theta$$

Para $R \ll 1$: $f(z_0 + Re^{i\theta}) \approx f(z_0) + f'(z_0)\, Re^{i\theta}$

Cuando tomamos el límite $R \to 0$ (ya que podemos deformar la curva):
$f(z) \approx f(z_0)$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0)\, i \oint d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

Notamos que cuando $f(z_0)=0$ la integral es $=0$, por lo tanto el integrando $\frac{f(z)}{z-z_0}$ será analítico en S.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) = 0$$

Lo cual es lógico debido al teorema integral de Cauchy.
Si $f(z_0) \neq 0$, entonces:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \neq 0$$

Por lo tanto, el integrando $\frac{f(z)}{z-z_0}$ no es analítico en S.

Si z_0 se encuentra en la región exterior a la encerrada por C, el integrando siempre será analítico. Por lo tanto, de todo lo visto inferimos:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} f(z_0) \,; & z_0 \text{ en la región } S \\ & \hookrightarrow \text{Puede ser } =0 \text{ cuando } \frac{f(z)}{z-z_0} \text{ sea analítica en } S. \\ 0 \,; & z_0 \text{ fuera de la región } S \end{cases}$$

Derivadas:

De $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$$