Condición de Cauchy - Riemann

La derivación se define de la misma forma ya conocida para funciones de variable real

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\delta z \to 0} \left[\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} \right] = \lim_{\delta z \to 0} \left(\frac{\delta f}{\delta z} \right)$$

Asimismo, para la existencia de la derivada en z_0, $f'(z_0)$, tenemos:

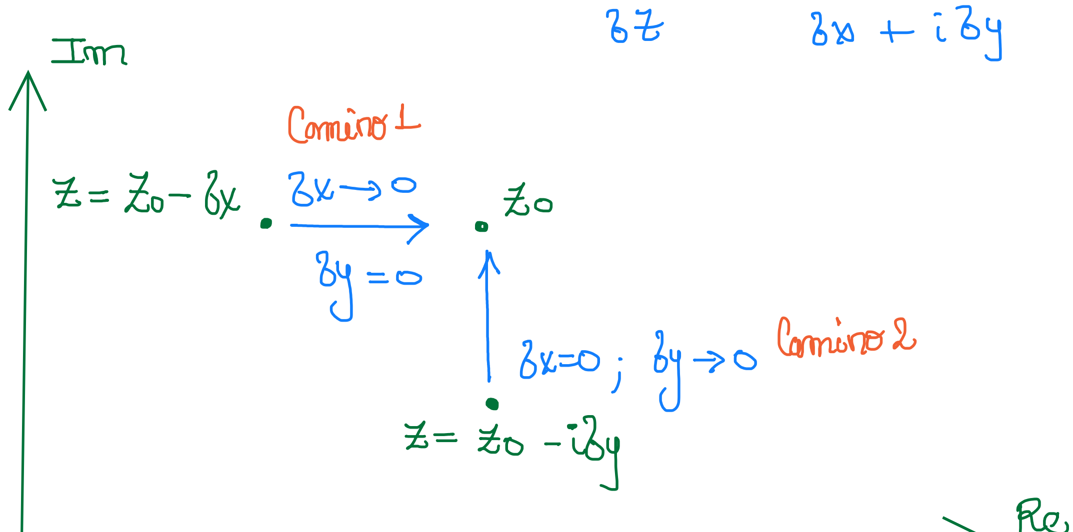
$$\lim_{z \to z_0^+} = \lim_{z \to z_0^-}$$

Recordemos que $z = x + iy$ y $f = u + iv$, entonces:

$$\delta z = \delta x + i\delta y$$
$$\delta f = \delta u + i\delta v$$

Luego:

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}$$



$$\lim z \to z_0 = \lim \delta z \to 0$$

Vamos a realizar el límite siguiendo los caminos 1 y 2:

Camino 1: $\displaystyle \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u + i\delta v}{\delta x} \right)$

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right)$$

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Camino 2: $$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta y \to 0} \left(\frac{\delta u}{i\delta y} + \frac{i\delta v}{i\delta y} \right)$$

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \left(-i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Para que la derivada $\frac{df}{dz}$ exista ambos límites deben ser iguales:

$$-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Tenemos: Condición de Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Condiciones necesaria para la existencia de $\frac{df}{dz}$.

Funciones Analíticas

- $f(z)$ será analítica si es diferenciable (satisface las condiciones de Cauchy - Riemann) y es 1-valuada, no obstante, si en una determinada región una función $f(z)$ multi-valuada es 1-valuada, entonces se le considerará analítica.

- Si una función $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, se le denominará función entera.

- Si la derivada $f'(z)$ no existe para un punto $z = z_0$, dicho punto se denomina singular

Ejemplo: ¿ $f(z) = z^2$ es analítica?

$$z^2 = (x+iy)(x+iy) = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\,\underbrace{(2xy)}_{v}$$

- De Cauchy-Riemann:
$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Notemos que sí es diferenciable $\longrightarrow$ $2x \quad 2x \qquad 2y = -(-2y)$

- $z^2 = \left(re^{i(\theta + 2\pi m)}\right)^2 \rightarrow z^2 = r^2 e^{i2\theta}$

$m \in \mathbb{N}$ Notemos que es 1-valuada

Por lo tanto, z^2 es analítica y entera.

De la condición de Cauchy-Riemann se desprende lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

De igual forma podemos obtener:

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla^2 u = 0 \\ \nabla^2 v = 0 \end{array}}$$

Por esto motivo $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se denominan funciones armónicas.

Regla para derivada de $f(z) = z^n$

Tal como vimos antes:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Luego:

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = \frac{\partial}{\partial x}[f(z)g(z)]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}$$

Tenemos: $\frac{dz}{dz} = \frac{\partial z}{\partial x} = 1$

Luego: $\frac{dz^2}{dz} = \frac{\partial z^2}{\partial x} = 2\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{1} z = 2z$

$$\frac{dz^n}{dz} = \frac{\partial z^n}{\partial x} = n\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}_{1} z^{n-1} = nz^{n-1}$$

Por lo tanto, seguimos las reglas básicas de derivación: $\boxed{\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}}$

Derivada de ln z

$$\ln z = \ln\left(r e^{i(\theta + 2\pi m)}\right) \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\ln z = \underbrace{\ln r}_{r \in \mathbb{R}^+ + \{0\}} + i(\underbrace{\theta}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{2\pi m}_{\in \mathbb{R}})$$

$$\ln z = u + iv \longrightarrow \begin{aligned} u &= \ln r = \ln\sqrt{x^2+y^2} \\ v &= \theta + 2\pi m \end{aligned}$$

De Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} 2x = \frac{\partial \theta}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$$

Tenemos:

$$\frac{d\ln z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{r^2} - \frac{iy}{r^2}$$

$$\frac{d\ln z}{dz} = \frac{x - iy}{r^2} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$$

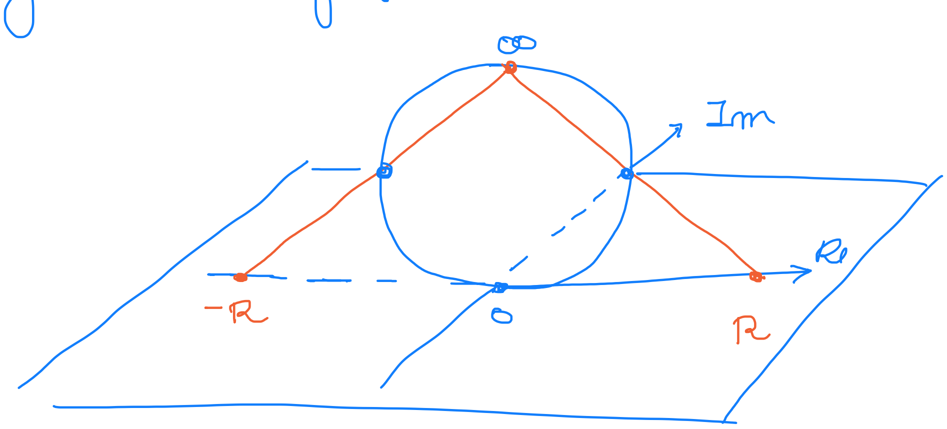
$$\frac{d\ln z}{dz} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$$

Finalmente:

$$\frac{d\ln z}{dz} = \frac{1}{z}$$

Puntos al infinito

De la proyección estereográfica:



Notamos que $z = \pm R$ para $R \gg 1$ se corresponderán con el punto en el polo norte de la esfera, el cual se denotará por ∞. De esta forma, los puntos al infinito en el plano complejo se corresponden con un único punto en la Esfera de Riemann, la cual es obtenida mediante la adición del plano complejo y los puntos al infinito. Por lo tanto, la Esfera de Riemann nos proporciona el plano complejo extendido.