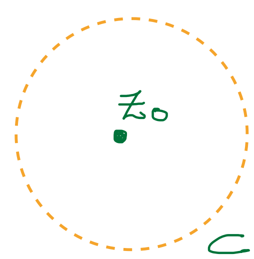
Teorema del residuo

De la expansión de Laurent
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$
Donde z_0 es un punto singular encerrado por región anular donde $f(z)$ es analítica.

Tomemos la integral alrededor de z_0 :

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n dz$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{\oint (z - z_0)^n dz}$$

Sabemos $\rightarrow \begin{cases} 0 \ ; & n \neq -1 \\ 2\pi i \ ; & n = -1 \end{cases}$

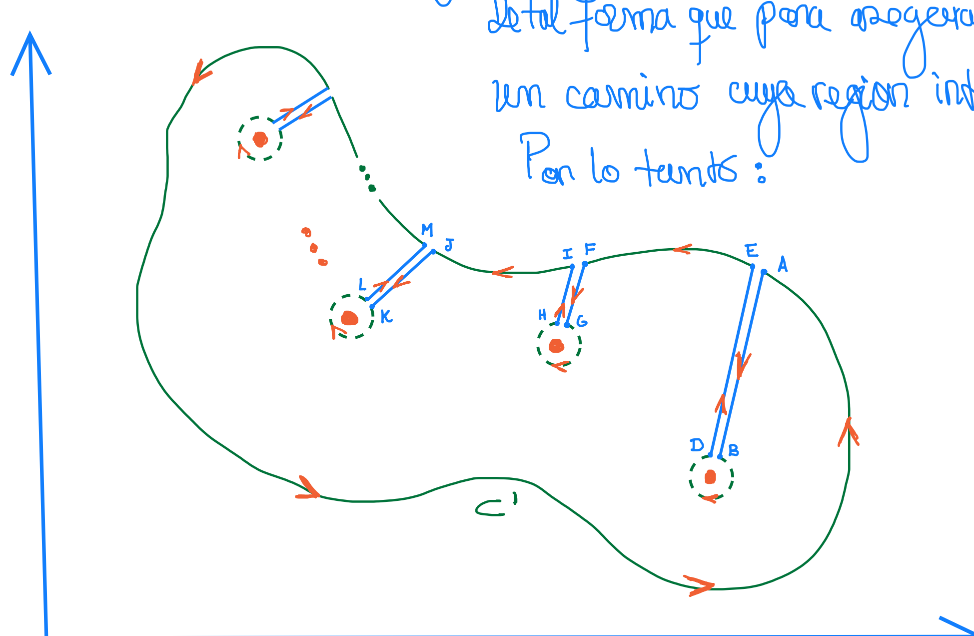


Evidentemente la integral será distinta de cero ya que encierra un punto singular

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \underbrace{a_{(-1)}}$$

$\rightarrow$ Este coeficiente recibe el nombre de Residuo de $f(z)$ en z_0.

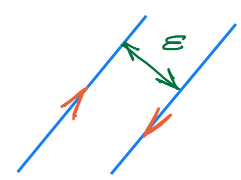
Este resultado puede ser generalizado para un región con múltiples puntos singulares.
De tal forma que para asegurar la analiticidad de $f(z)$ tomamos un camino cuya region interior no incluye dichos puntos.
Por lo tanto :



$$\oint_{C'} f(z)\,dz = 0$$

Donde $C' = \underline{ABDEFGHIJKLM \ldots A}$

Asimismo los caminos rectos formados para rodear los puntos singulares se pueden tomar lo más cerca posible, de tal forma

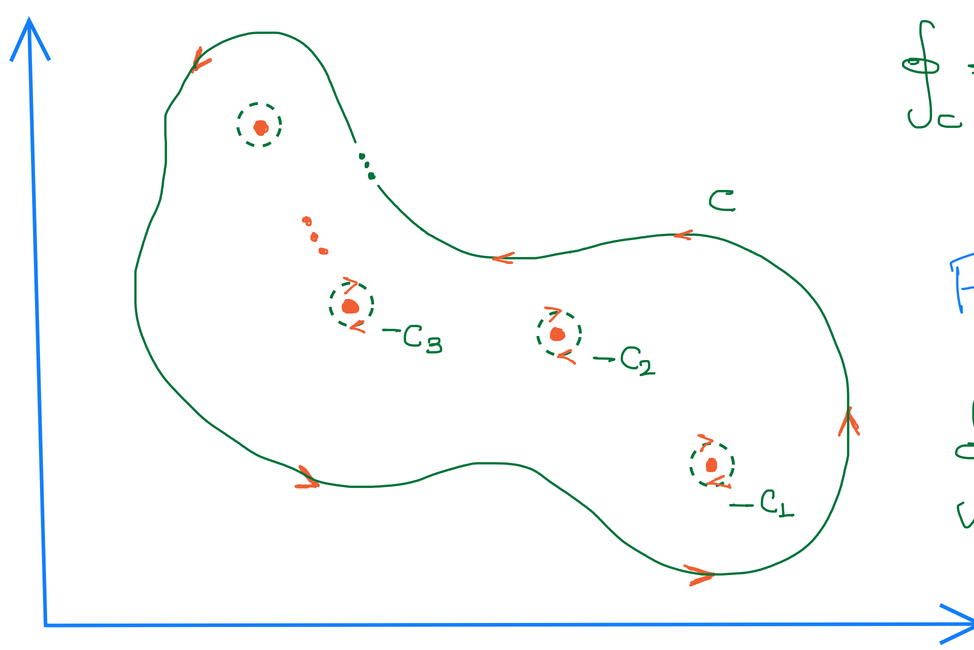


$\varepsilon \to 0$

Que estos se cancelaran. Por lo tanto:

$$\oint_{-C_1} = -\oint_{C_1}$$

$$\oint_{C'} = \oint_{C} + \oint_{-C_1} + \oint_{-C_2} + \oint_{-C_3} + \dots = 0$$



$$\oint_{C} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3} + \dots$$

Finalmente, tenemos:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} a^{i}_{(-1)}$$

Calculo de Residuos

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$(z-z_0) f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}$$

- Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, entonces:

$$(z-z_0) f(z-z_0) = a_{(-1)} + a_0 (z-z_0) + a_1 (z-z_0)^2 + \dots$$

Por lo tanto:

$$a_{(-1)} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z-z_0)$$

- Si $f(z)$ tiene un polo de orden $n>1$ en $z=z_0$, entonces:

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{(-n)} + \dots + a_{(-1)}(z-z_0)^{n-1} + a_0 (z-z_0)^n + a_1 (z-z_0)^{n+1} + \dots$$

Por lo tanto:

$$a_{(-1)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]$$