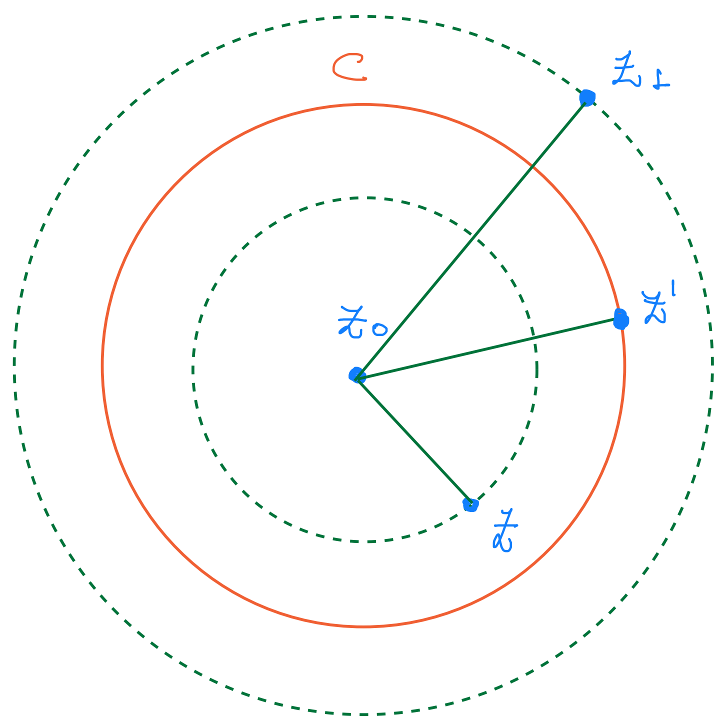
Expansión de Taylor

Deseamos expandir la función $f(z)$ alrededor del punto $z=z_0$. Debemos tener en cuenta el punto $z=z_1$, el cual es el punto más cercano de no analiticidad.



$f(z)$ es analítica en la región encerrada por $R=|z_1-z_0|$

Usaremos el resultado obtenido anteriormente para z dentro del contorno cerrado C:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(z'-z_0)}\frac{f(z')\,dz'}{\left[1-\left(\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right)\right]}$$

Aquí utilizamos los siguientes resultados:

* $|z - z_0| < |z' - z_0| \Rightarrow \left|\frac{z - z_0}{z' - z_0}\right| < 1$

* $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, para $|t| < 1$

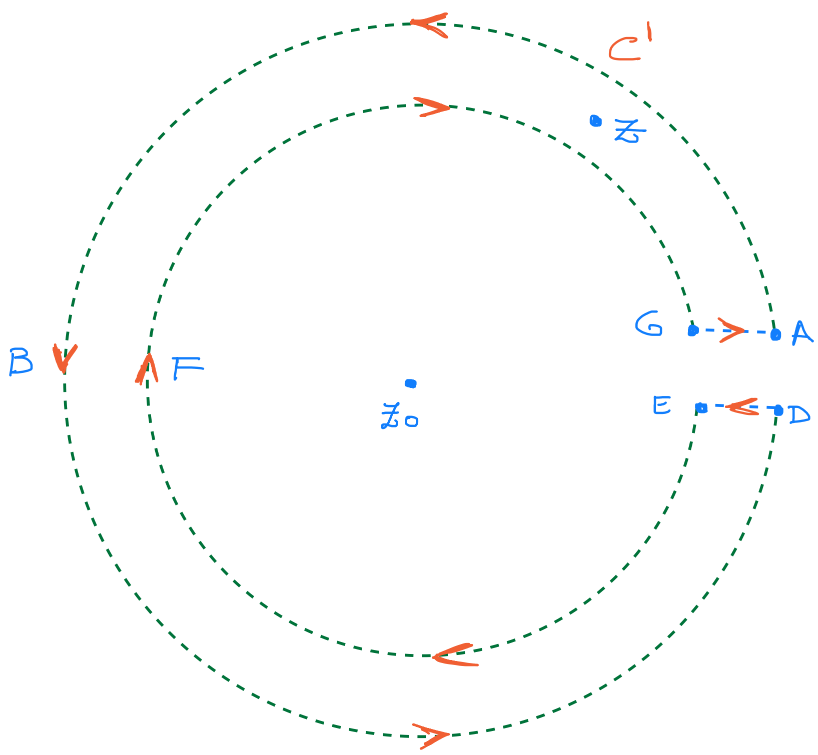
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z' - z_0)} f(z')\, dz' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^n}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')\, dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}\right]}_{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)}$$

Expansión de Taylor

Serie de Laurent

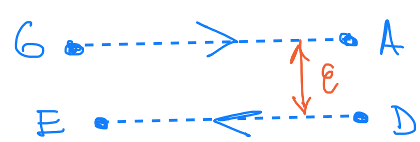


Tenemos la función $f(z)$, la cual es analítica en región anular $C' = ABDEFGA$.

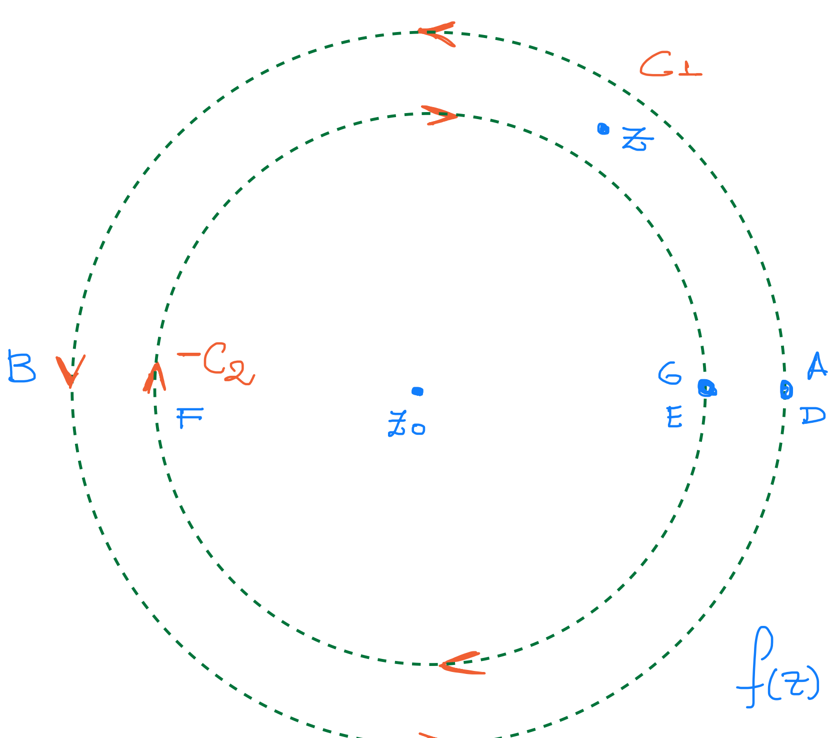
De esta forma, para el punto z en el interior de la región encerrada por C' tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z)}$$

Como sabemos



Podemos tomar $\varepsilon \to 0$, de tal forma que podemos visualizar C' como C_1 y C_2, ambos en sentido antihorario.

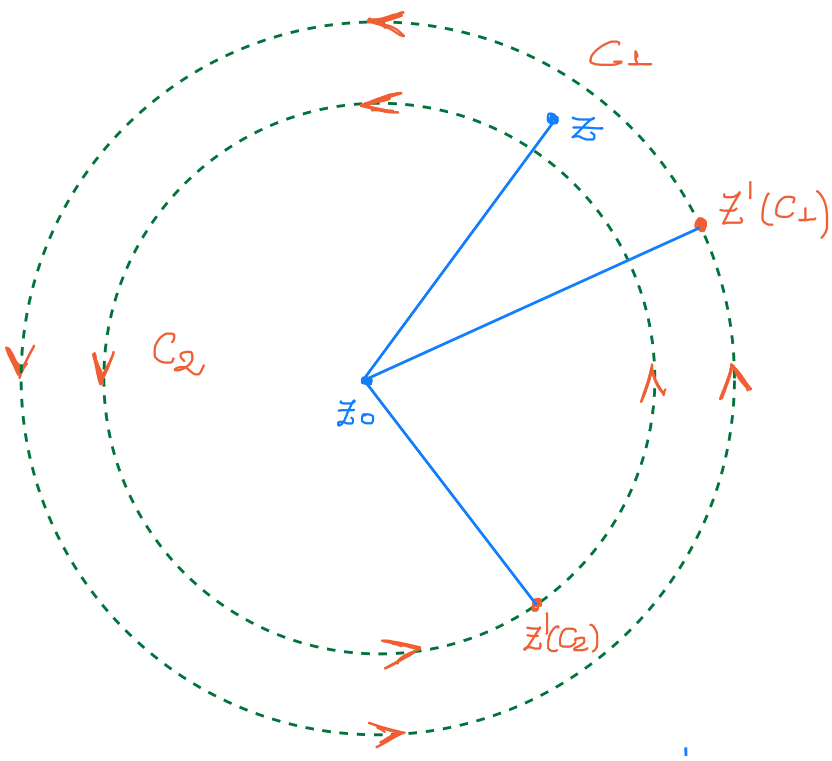


$$C_1 = ABDA$$

$$-C_2 = EFGE$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\underbrace{C_1}_{\hookrightarrow ABDA}} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\underbrace{-C_2}_{= EFGE}} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{z'-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')\,dz'}{z'-z}$$



Procedemos de forma similar a lo visto antes donde introducimos z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)-(z-z_0)}$$

Para C_1 : $\left| \frac{z-z_0}{z'-z_0} \right| < 1$

Para C_2 : $\left| \frac{z'-z_0}{z-z_0} \right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)\left[1 - \frac{(z-z_0)}{(z'-z_0)}\right]} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{-1\; f(z')\,dz'}{(z-z_0)\left[1 - \frac{(z'-z_0)}{(z-z_0)}\right]}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^{-(n+1)} \oint_{C_2} f(z')(z'-z_0)^n\,dz'}_{\text{Cambiamos el inicio a } n=1}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (z-z_0)^{-n} \oint_{C_2} f(z')(z'-z_0)^{n-1}\,dz'$$

Hacemos $n \to -n$:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\oint_{C_2}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

Como sabemos, la integral cerrada es independiente del camino, por ello hacemos $C_1 = C_2 = C$, de esta forma tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\oint_{C}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint_{C}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(z-z_0)^n\oint_{C}\frac{f(z')\,dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

finalmente:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}$$

Notar que la expansión se realizó alrededor del punto singular z_0.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\,dz'}{(z-z_0)^{n+1}}$$