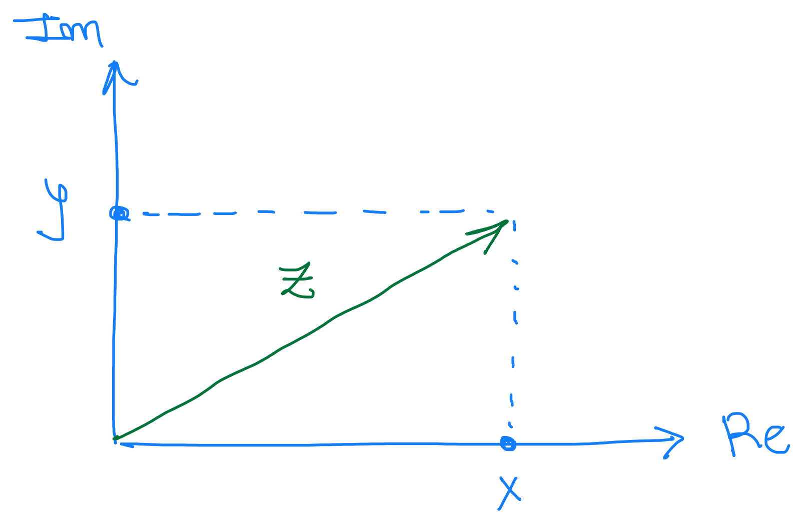
1.8 Números complejos y funciones

Propiedades Básicas

$z = (x; y) = x + iy$

$i^2 = -1$



Suma: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Producto: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$

Conjugación: $z_1^* = Re(z_1) - i\, Im(z_1) = x_1 - iy_1$

$z_1 = Re(z_1) + i\, Im(z_1) = x_1 + iy_1$

Ejemplo

$$z_1 z_1^* = (x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1) = x_1^2 + y_1^2$$

$$|z| = \sqrt{z z^*} \longrightarrow \text{Módulo del número complejo}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{(x_1x_2 - y_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} + i\frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

Funciones:

Sabemos: $e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$

Haciendo $x \to iz$:

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{1}{2!}z^2 - \frac{i}{3!}z^3 + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots\right)}_{\cos z} + i\underbrace{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)}_{\sin z}$$

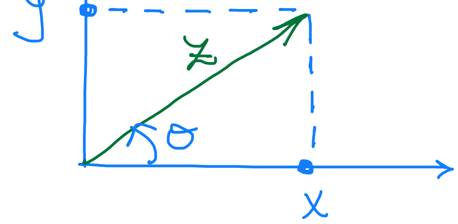
$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$$

Cualquier función de variable compleja $z = x+iy$ se expresará de la siguiente forma:

$$\boxed{f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)}$$

$u(x,y) \to \mathrm{Re}\, f(z)$
$v(x,y) \to \mathrm{Im}\, f(z)$

Representación Polar



$|z| = r$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta \\ z &= r\cos\theta + i\,r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \quad z = re^{i\theta}$$

θ: Argumento de z

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Asimismo; ya que, los números complejos pueden representarse de forma "vectorial", la desigualdad triangular se aplicará:

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\} \quad -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

Entonces: $|x+y| \leq |x| + |y|$

$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

$$\boxed{\|z_1+z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|}$$

Números complejos de magnitud 1

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta + n2\pi)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Funciones Hiperbólicas y Circulares

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad ; \quad \operatorname{senh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

Notemos :

$$\cos(-i\alpha) = \cosh\alpha \longrightarrow$$
$$\operatorname{sen}(-i\alpha) = i\operatorname{senh}\alpha \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(i\alpha) &= \cosh\alpha \\ i\operatorname{sen}(i\alpha) &= \operatorname{senh}\alpha \\ \cosh(i\alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{senh}(i\alpha) &= i\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}}$$

Si $z = re^{i\theta} \longrightarrow z^n = r^n e^{in\theta}$

$$\begin{aligned} z^n &= r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) \\ &= r^n(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n \end{aligned}$$

<u>Ejemplo</u> :

$n=2$
$r=1$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta + i\operatorname{sen}2\theta &= (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i\cos\theta\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Comparando las partes reales e imaginarias :

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{cases}$$

Potencias y raíces

- Potencia: $z = r e^{i(\theta + 2\pi m)}$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

$n \in \mathbb{Z}$: $z^n = r^n e^{in\theta} \underbrace{e^{i2\pi mn}}_{\text{siempre } = 1}$

Por lo tanto, el valor de z^n es único.

- Raíz: $n \in \mathbb{Z}$: $z^{1/n} = r^{1/n} e^{\frac{i\theta}{n}} \underbrace{e^{\frac{i2\pi m}{n}}}_{\text{Tomará } n \text{ valores distintos}}$

Por lo tanto, el valor de $z^{1/n}$ no es único, tiene n valores distintos.

Ejemplo:

$n = 2$ $z^{1/2} = r^{1/2} e^{\frac{i\theta}{2}} \underbrace{e^{\frac{i2\pi m}{2}}}_{e^{i\pi m}}$

Sabemos $m = 0, 1, 2, \ldots$

$m = 0$: 1

$m = 1$: -1

$m = 2$: 1

$m = 3$: -1

$\vdots$

Tenemos 2 valores: 1 y -1

Por lo tanto: $z^{1/2} = \{ + r^{1/2} e^{i\theta/2} \; ; \; - r^{1/2} e^{i\theta/2} \}$

Decimos que $z^{1/2}$ tiene 2 valores.

Logaritmo

$$\ln z = \ln\left(r e^{i(\theta + 2\pi m)}\right) \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi m) \longrightarrow$$ Notamos que el logaritmo tendrá un valor distinto por cada valor de m, tal que $m \in \mathbb{N} + \{0\}$, Por lo tanto:

El $\ln z$ tiene infinitos valores.