

Condición de Cauchy - Riemann

La derivación se define de la misma forma ya conocida para funciones de variable real

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \left[\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} \right] = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\delta f}{\delta z} \right)$$

Asumimos, para la existencia de la derivada en z_0 , $f'(z_0)$, tenemos:

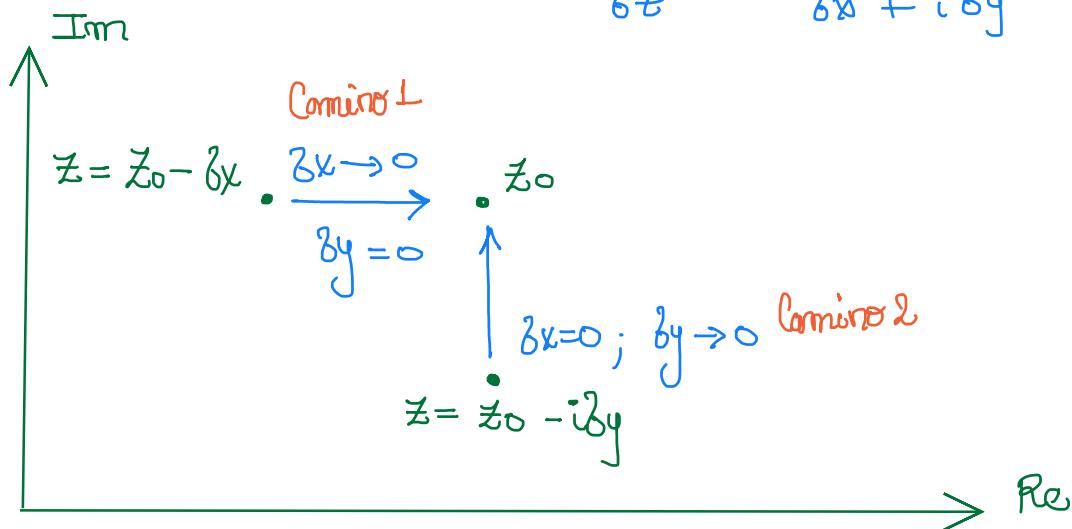
$$\lim_{z \rightarrow z_0^+} = \lim_{z \rightarrow z_0^-}$$

Recordemos que $z = x + iy$ y $f = u + iv$, entonces:

$$\begin{aligned}\delta z &= \delta x + i \delta y \\ \delta f &= \delta u + i \delta v\end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i \delta v}{\delta x + i \delta y}$$



$$\lim_{z \rightarrow z_0} = \lim_{\delta z \rightarrow 0}$$

Vamos a realizar el límite siguiendo los caminos 1 y 2:

$$\text{Camino 1: } \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u + i \delta v}{\delta x} \right)$$

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right)$$

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Camino 2: $\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u}{i \delta y} + \frac{i \delta v}{i \delta y} \right)$

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \left(-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Para que la derivada $\frac{df}{dz}$ exista ambos límites deben ser iguales:

$$-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Tenemos:

Condición de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Condición necesaria para la existencia de $\frac{df}{dz}$.

Funciones Analíticas

- Si $f(z)$ es analítica se es diferenciable (se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann) y es 1-valuada, no obstante, si en una determinada región una función $f(z)$ multi-valuada es f-valuada, entonces se le considera analítica.
- Si una función $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, se le denominará función entera.
- Si la derivada $f'(z)$ no existe para un punto $z=z_0$, dicho punto se denomina singular.

Ejemplo: ¿ $f(z)=z^2$ es analítica?

$$z^2 = (x+iy)(x+iy) = \underbrace{(x^2-y^2)}_u + i \underbrace{(2xy)}_v$$

- De Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Notemos que es
diferenciable

- $z^2 = (re^{i(\theta+2\pi m)})^2 \rightarrow z^2 = r^2 e^{i2\theta}$
 $m \in \mathbb{N}$

Notemos que es 1-valuada

Por lo tanto, z^2 es analítica y entera.

De la condición de Cauchy - Riemann se deduce lo siguiente:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
 \downarrow \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0
 \end{array}$$

De igual forma podemos obtener:

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\nabla^2 v = 0$$

Por otro lado $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se denominan funciones armónicas.

Regla para derivada de $f(z) = z^n$

Tal como vimos antes:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{zf}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{Luego: } \frac{d}{dz} [f(z)g(z)] = \frac{\partial}{\partial x} [f(z)g(z)]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}$$

Tenemos:

$$\frac{dz}{dz} = \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

Luego:

$$\frac{d z^2}{dz} = \frac{\partial z^2}{\partial x} = 2 \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}_{1} z = 2z$$

$$\frac{d z^n}{dz} = \frac{\partial z^n}{\partial x} = n \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}_{1} z^{n-1} = n z^{n-1}$$

Por lo tanto, seguimos las reglas básicas de derivación:

$$\frac{dz^n}{dz} = n z^{n-1}$$

Derivada de $\ln z$

$$\ln z = \ln(r e^{i(\theta + 2\pi m)}) \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln r + i(\theta + 2\pi m) \\ &\downarrow \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{\text{ } \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R} \\ r &\in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln z &= u + iv \quad \longrightarrow \quad u = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ v &= \theta + 2\pi m \end{aligned}$$

De Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$$

Tenemos: $\frac{d \ln z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{r^2} - \frac{i y}{r^2}$

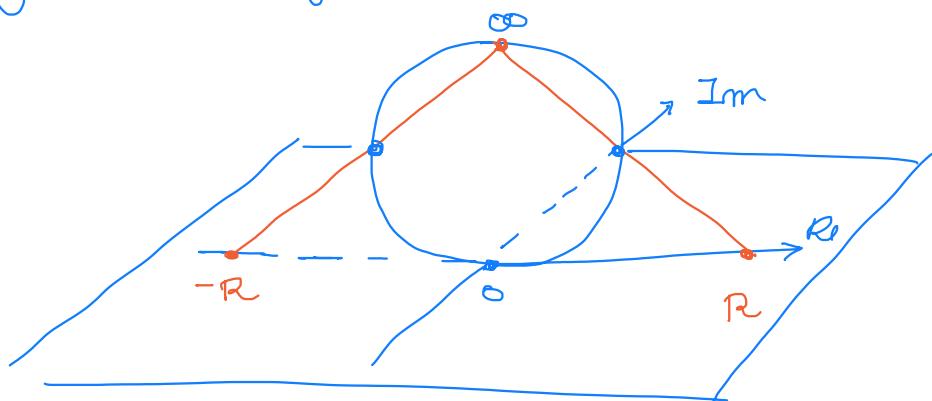
$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{x - iy}{r^2} = \frac{x - iy}{(x+iy)(x-iy)}$$

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$$

Finalmente: $\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}$

Puntos al infinito

De la proyección stereográfica:



Notamos que $z = \pm R$ para $R \gg 1$ se corresponderán con el punto en el polo norte de la esfera, el cual se denotará por ∞ . De esta forma, los puntos al infinito en el plano complejo se corresponden con un único punto en la Esfera de Riemann, la cual es obtenida mediante la adición del plano complejo y los puntos al infinito. Por lo tanto, la Esfera de Riemann nos proporciona el plano complejo extendido.