

Ejemplos

1) Integral trigonométrica

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

Tomamos : $z = e^{i\theta} \rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta = iz d\theta$
 $d\theta = -i \frac{dz}{z}$

Circunferencia
radio 1

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \oint \frac{z^2 + z^{-2}}{5 - 2(z + z^{-1})} \frac{(-i)}{z} dz$$

$$I = -\frac{i}{2} \oint \frac{z^2 + z^{-2}}{5z - 2z^2 - 2} dz = +\frac{i}{4} \oint \frac{z^2 + z^{-2}}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz$$

$$= \frac{i}{4} \oint \frac{z^4 + 1}{z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz$$

→ Tomamos polos en $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$ y $z_3 = 0$.

Sólo z_1 y z_2 están dentro de la circunferencia de radio 1. Asimismo debemos notar que z_1 es un polo de orden 2.

$$*\left|_{z=0} \right. \frac{z=0}{d(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{(z^4 + 1)}{z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^4 + 1}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(z^5 - 3z^4 z^3 + 2z^3 - z + 125)}{(z - 2)^2 (z - 0.5)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (1+25)}{4(0.5)^2} = \frac{5}{2}$$

* $\underset{z \rightarrow \frac{1}{2}}{\text{Res}} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) \frac{(z^4 + 1)}{z^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)} = -\frac{14}{6}$

Por los puntos : $I = \frac{i}{4} \left(2\pi i \sum_i \frac{z_i}{a_{z-i}} \right)$

$$I = \frac{i}{4}(2\pi i) \left(\frac{5}{2} - \frac{14}{6} \right)$$

$$I = \frac{\pi i}{6}$$

2) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

Podemos hacerlo siguiente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$\underbrace{x \rightarrow -x}_{\text{---}}$

$$\int_{(-\infty)}^{-0} \frac{-dx}{1+(-x)^2} = \int_0^0 \frac{-dx}{1+x^2}$$

$$= - \int_0^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Entonces : $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Transformamos esto al plano complejo: $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2}$

Haciendo $z = re^{i\theta}$ tenemos:

$$z f(z) = re^{i\theta} \frac{1}{1+r^2 e^{2i\theta}}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{re^{i\theta}}{1+r^2 e^{2i\theta}} \right) = 0 \quad \forall \theta$$

Podemos aplicar el método conocido:

Semiplano Superior

$$\frac{1}{2} \oint = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C + \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R}$$

Debido al límite visto arriba

$$I = \frac{\pi i}{2} \sum_i \partial(z-i)$$

$$I = \pi i \sum_i \partial(z-i)^i$$

$$\text{Notemos que } \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{(z+i)(z-i)} \text{ tiene dos polos}$$

Semiplano $z_1 = +i$ y $z_2 = -i$, sin embargo, sólo z_1 entra en el semiplano superior.

Tenemos:

$$\partial(z-i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}$$

$$\text{Por lo tanto : } I = \pi i \left(\frac{1}{2i} \right)$$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

$$3) \quad I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$$

$$\text{Como sabemos : } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{buscamos : } I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

$\underbrace{0}_{x \rightarrow -x} \quad \underbrace{0}_{-\infty} \quad -\infty$

$$= - \int_0^{-\infty} \frac{e^{-ix}}{(-x)^2+1} (-dx)$$

$$= - \int_0^{-\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right\}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx$$

Notemos que esta integral tiene la siguiente forma :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x) dx$$

Con $a < 0$ y $f(x) = \frac{1}{2(x^2+1)}$

Usaremos el semiplano inferior.

Notemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Tenemos :

$$\oint_C \frac{e^{-iz}}{z^2+1} dz = \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{-iz}}{z^2+1} dz}_{-iz} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{z^2+1} dz}_{2I} = -2\pi i \sum_i \text{Res}(z)$$

Notemos que $\frac{e^{-iz}}{z^2+1} = \frac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)}$, por lo tanto tenemos

dos polos simples en $z_1 = i$ y $z_2 = -i$, sin embargo, sólo z_2 está en el semiplano inferior.

Tenemos :

$$\frac{-iz}{2(z-i)} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{e^{-iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{-2ei}$$

Finalmente :

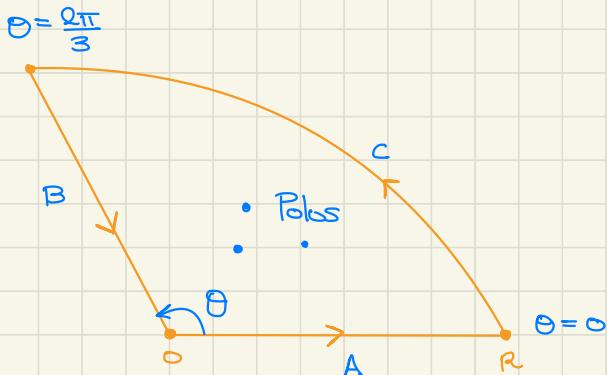
$$2I = -2\pi i \left(\frac{1}{-2ei} \right)$$

$$I = \frac{\pi}{2e}$$

4) Cuando la integral no puedo transformar la forma $\int_{-\infty}^{+\infty}$:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Como podemos notar, esta integral no podria ser transformada a una con rango $-\infty$ a $+\infty$ con facilidad. En su lugar tomaremos un camino cerrado de la siguiente forma:



Tenemos:

$$f = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_A + \int_C + \int_B \right) = 2\pi i \sum_{z=1}^n \text{Res}(z)$$

Tenemos $\theta = \frac{2\pi}{3}$ debido al exponente de x ; de esta forma en la integral compleja tenemos:

$$\int_A \frac{dz}{z^3 + 1} \xrightarrow[\theta=0]{z=Re^{i\theta}} \int_0^R \frac{dR}{R^3 + 1}$$

$$\int_B \frac{dz}{z^3 + 1} \xrightarrow[\theta=\frac{2\pi}{3}]{z=Re^{i\theta}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_R^0 \frac{dR}{R^3 + 1} = -e^{-i\frac{2\pi}{3}} \int_0^R \frac{dR}{R^3 + 1}$$

Para el círculo (camino C) tenemos que evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \bar{z} f(z) \rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{i\theta} \cdot \frac{1}{R^3 e^{3i\theta} + 1} = 0$$

✓ ⊗

Por lo tanto:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C = 0$$

Tenemos:

$$\oint = \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_A}_{I} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_B}_{-e^{i\frac{2\pi}{3}} I} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C}_{= 2\pi i \sum_{i=1}^n a_i (-1)} = 2\pi i \sum_{i=1}^n a_i (-1)$$

$$(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}) I = 2\pi i \sum_{i=1}^n a_i (-1)$$

Notemos que $f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$ tiene polos simples en los vértices de

$z^3 + 1 = 0$:

$$z^3 = -1$$

$$\text{Hacemos } z = e^{i\theta} \rightarrow z^3 = e^{3i\theta} = -1$$

El valor más pequeño para que 3θ haga que $i3\theta$

$$e \text{ sea } -1 \text{ es } 3\theta = \pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \text{ el}$$

Siguiente valor es $3\theta = 3\pi \rightarrow \theta = \pi$, en este punto notemos lo siguiente:

$$\frac{\pi}{3} \quad \pi$$

$$+ \frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto, los siguientes valores serán:

$$\frac{\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$$

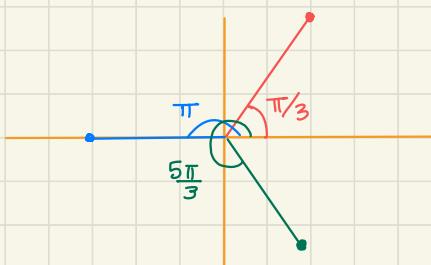
Acá ya se cumplió el ciclo, esto se repiten valores, por lo tanto los 3 raíces son:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta_2 = \pi$$

$$\theta_3 = \frac{5\pi}{3}$$

Los polos son: $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $z_2 = e^{i\pi}$ y $z_3 = e^{\frac{i5\pi}{3}}$



Notemos que sólo z_1 está dentro del camino cerrado, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\partial(z_i)} = \frac{z_1}{\partial(z_1)} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)}{(z^3 + 1)} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hospital

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)}{(z^3 + 1)} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3z_1^2}$$

$$= \frac{1}{3e^{2\pi i/3}}$$

Tenemos:

$$I(1 - e^{2\pi i/3}) = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i/3}}$$

$$I \frac{(1 - e^{2\pi i/3})}{e^{2\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i/3} \cdot e^{2\pi i/3}}$$

$$I \left(\frac{e^{-\pi i/3} - e^{\pi i/3}}{2} \right) = \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{1}{e^{i\pi}}$$

$$I \left(-i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{\pi i}{3} \cdot (-1)$$

$$I = \frac{i\pi}{3 \sin(\pi/3)i} \Rightarrow I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

5) Cuando tenemos una singularidad en el camino de integración:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Como sabemos $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2ix} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{2ix} dx$$

$\underbrace{\phantom{\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{2ix} dx}}$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{2ix} dx$$

$x \rightarrow -x$

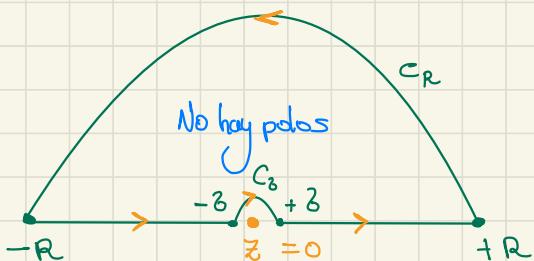
$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2ix} dx - \int_0^{-\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx = \int_0^\infty + \int_{-\infty}^0$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{Tiene la forma} \end{matrix} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$$

Polo simple en

$$x=0 \quad a>0 \quad f(x) = \frac{1}{2ix}$$

Ya que $a>0$ formamos el siguiente camino:



Tenemos:

$$\oint \frac{e^{iz}}{z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-b} + \int_{+b}^R + \int_{C_b} + \int_{C_R} \right\} = 0$$

$$\underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-b} + \int_{+b}^R \right\}}_{I} + \lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \int_{C_b} + \lim_{R \rightarrow \infty, b \rightarrow 0} \int_{C_R} = 0$$

$\lim_{R \rightarrow \infty} f(re^{i\theta}) = 0$

I : Entorno de singularidad
 "Valor principal"

$$I = - \lim_{b \rightarrow 0} \int_{C_b}$$

→ El camino C_b es horario,
 por tal motivo tenemos
 que la integral

$$-\int_{C_b}$$

será antihoraria.

¿Qué ocurre con la integral \int_{C_R} ?

Tomamos la integral $I_r = \int_{C_r}$
 que rodea al punto

singular mediante un

arco de ángulo θ :



$z_0 \rightarrow$ Punto singular

$$I_r = \int_{C_r} e^{iaz} f(z) dz \xrightarrow{z - z_0 = re^{i\theta}} \int_{C_r} e^{ia(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) i re^{i\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} I_r &= \lim_{r \rightarrow 0} i \int_{C_r} e^{ia(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_{C_r} \left[\lim_{r \rightarrow 0} e^{ia(z_0 + re^{i\theta})} f(z_0 + re^{i\theta}) re^{i\theta} \right] d\theta \end{aligned}$$

De la expresión entre paréntesis notamos lo siguiente:

$$\circ \lim_{r \rightarrow 0} = \lim_{z \rightarrow z_0}$$

$$\circ z - z_0 = re^{i\theta}$$

Tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) e^{i\theta} f(z)$$

Si z_0 es un polo simple la expresión anterior será $\frac{z=z_0}{2(-1)}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) e^{i\theta} f(z) = \frac{z=z_0}{2(-1)}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_r = i\theta \frac{z=z_0}{2(-1)}$$

En general:

Si $z=z_0$ es un polo simple de $g(z)$, entonces

$$\int_C g(z) dz = i\theta \frac{z=z_0}{2(-1)}$$

Donde C es el arco de circunferencia centrado en $z=z_0$ cuyo ángulo bordeado $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$

Volviendo al ejercicio tendremos:

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(- \int_{C_\delta} \right) = i\pi \partial(-1)$$

$$\partial(-1) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(z)}{z} (z=0) \frac{e^z}{2iz} = \frac{1}{2i}$$

Finalmente:

$$I = \frac{I}{2}$$

6) Usando Branch Cuts

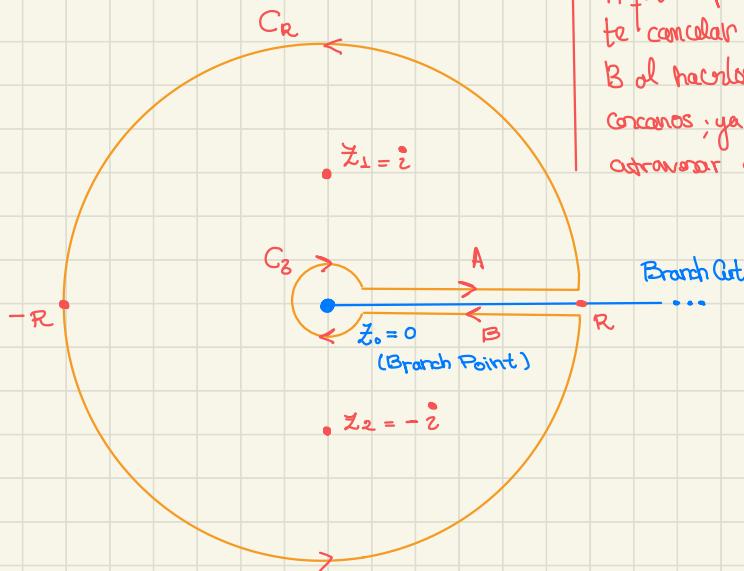
$$I = \int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+1} dx \quad 0 < p < 1$$

- Notamos:
- $\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ + $z = Re^{i\theta}$, con $f(z) = \frac{z^p}{z^2+1}$.
 - Debido a la forma de p tenemos que $z = z_0 = 0$ es un branch point.
 - $z_1 = i$ y $z_2 = -i$ son polos de orden 1 de $f(z)$.

Tomaremos la integral considerada en el plano complejo:

$$\oint \frac{z^p}{z^2+1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \left\{ \int_A + \int_B + \int_{C_R} + \int_{C_\delta} \right\} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \dot{a}_{-1}$$

Donde el camino se muestra a continuación:



Nota importante:

Aquí no podemos simplemente cancelar los caminos A y B al hacerlos arbitrariamente concavos; ya que, no podemos atravesar el branch cut.

- Para este ejercicio tenemos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = 0$.

- Para A tenemos $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_A = I$ (valor principal):

$$A: z = Re^{i\theta}; \theta = 0 \rightarrow \int_A = \int_0^R \frac{R^p}{R^2 + 1} dR \rightarrow I = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_A$$

- Para B tenemos :

$$B: z = Re^{i\theta}; \theta = 2\pi \rightarrow \int_B = \int_R^2 \frac{Re^{2\pi i}}{R^2 + 1} dR = -e^{2\pi i} \int_R^2 \frac{R^p}{R^2 + 1} dR$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_B = -e^{2\pi i} I$$

o Para C_3 tenemos:

$$z = 2e^{i\theta}$$

$$\int_{C_3} = \int \frac{2^p e^{p\theta i}}{2^2 e^{2\theta i} + 1} i 2^{\theta i} d\theta = i \int \frac{2^{p+1} e^{p\theta i} e^{i\theta}}{2^2 e^{2\theta i} + 1} d\theta$$

De aquí notamos: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{C_3} = 0$

Tenemos:

$$2\pi i \sum_{i=1}^n \partial_{(-i)} = I - e^{2\pi i} I$$

$$2\pi i \left\{ \frac{z_1=i}{\partial_{(-1)}} + \frac{z_2=-i}{\partial_{(-1)}} \right\} = I (1 - e^{2\pi i})$$

$$\bullet \frac{z_1=i}{\partial_{(-1)}} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) z^p}{(z+i)(z-i)} = \frac{i^p}{2i}$$

$$\bullet \frac{z_2=-i}{\partial_{(-1)}} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z+i) z^p}{(z+i)(z-i)} = \frac{(-i)^p}{-2i}$$

$$2\pi i \left\{ \frac{i^p}{2i} - \frac{(-i)^p}{2i} \right\} = I (1 - e^{2\pi i})$$

$$2\pi i \left\{ \frac{(e^{i\frac{\pi}{2}})^p}{2i} - \frac{(e^{i\frac{3\pi}{2}})^p}{2i} \right\} = I (1 - e^{i\frac{2\pi p}{2}})$$

$$\pi \left\{ e^{i\frac{p\pi}{2}} - e^{i\frac{3p\pi}{2}} \right\} = I (1 - e^{i\frac{2\pi p}{2}})$$

Multiplicando a ambos lados por $e^{-ip\pi}$:

$$\pi \left\{ e^{\frac{-ip\pi}{2}} - e^{\frac{ip\pi}{2}} \right\} = I \left(e^{-ip\pi} - e^{ip\pi} \right)$$

$$-\pi 2 \sin\left(\frac{ip\pi}{2}\right) = -I 2 \sin(ip\pi)$$

$$I = \pi \frac{\sin\left(\frac{ip\pi}{2}\right)}{\sin(ip\pi)}$$