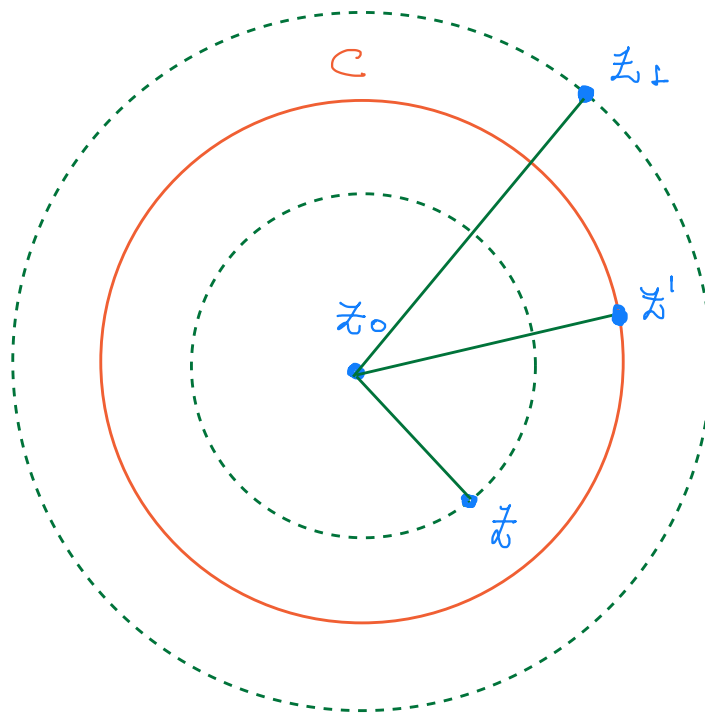


Expansión de Taylor

Queremos expandir la función $f(z)$ alrededor del punto $z = z_0$. Debemos tener en cuenta el punto $z = z_1$, el cual es el punto más cercano de no analiticidad.



$f(z)$ es analítica en la región encerrada por $A = |z_1 - z_0|$

Usaremos el resultado obtenido anteriormente para z dentro del contorno cerrado C :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z' - z_0)} \left[\frac{f(z') dz'}{1 - \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)} \right]$$

Aquí utilizamos los siguientes resultados:

$$* \quad |z - z_0| < |z' - z_0| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1$$

$$* \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad \text{para } |t| < 1$$

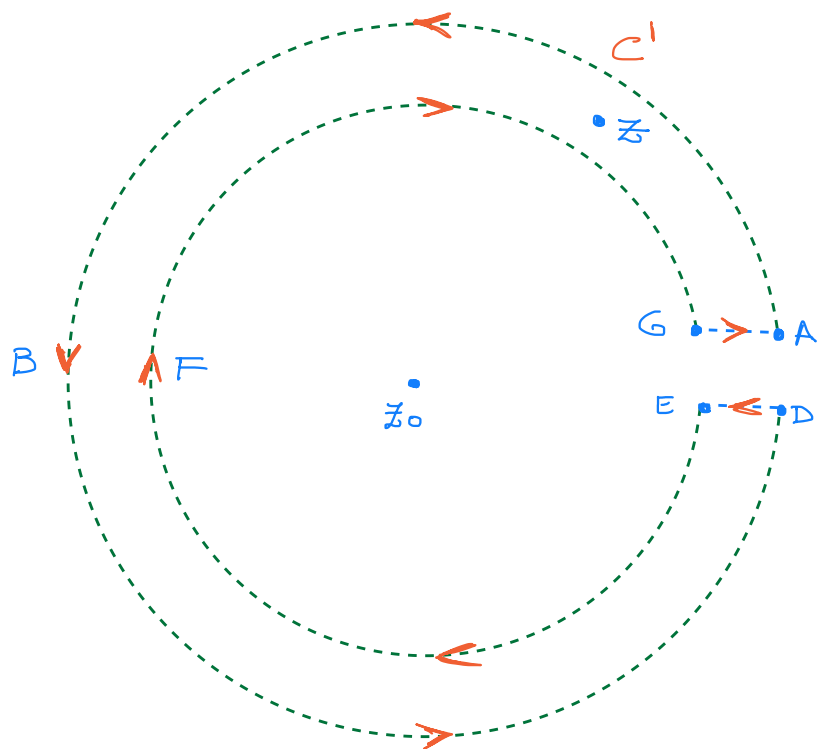
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z' - z_0)} f(z') dz' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^n}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \right]}_{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Expansión de Taylor

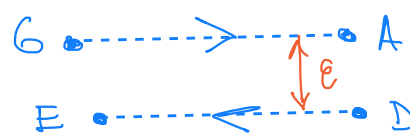
Serie de Laurent

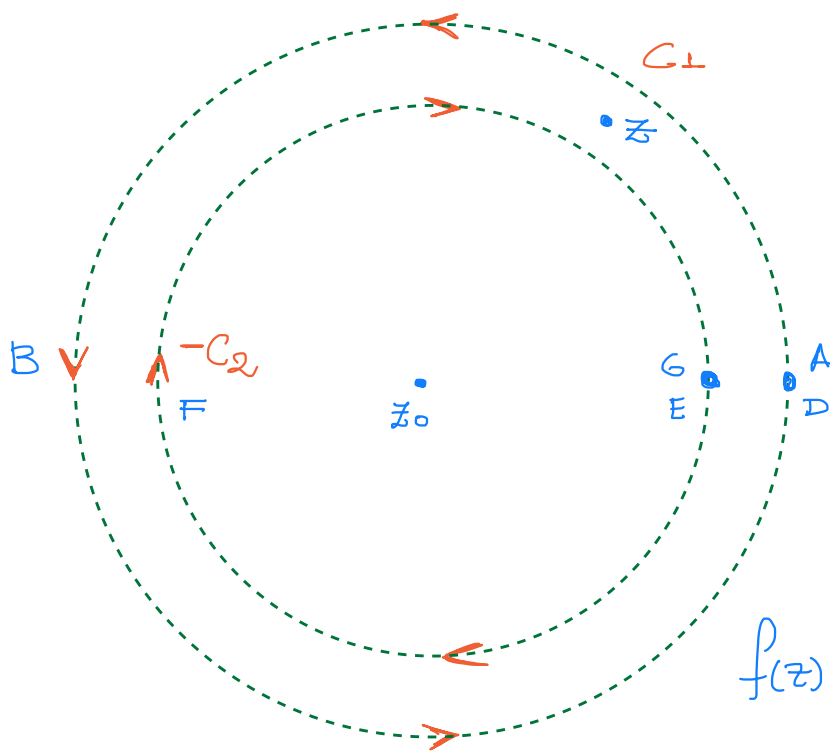


Tenemos la función $f(z)$, la cual es analítica en región anular $C' = ABDEFA$.

De esta forma, para el punto z en el interior de la región encerrada por C' tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)}$$

Como sabemos  Podemos tomar $\epsilon \rightarrow 0$, de tal forma que podemos visualizar C' como C_1 y C_2 , ambos en sentido antihorario.



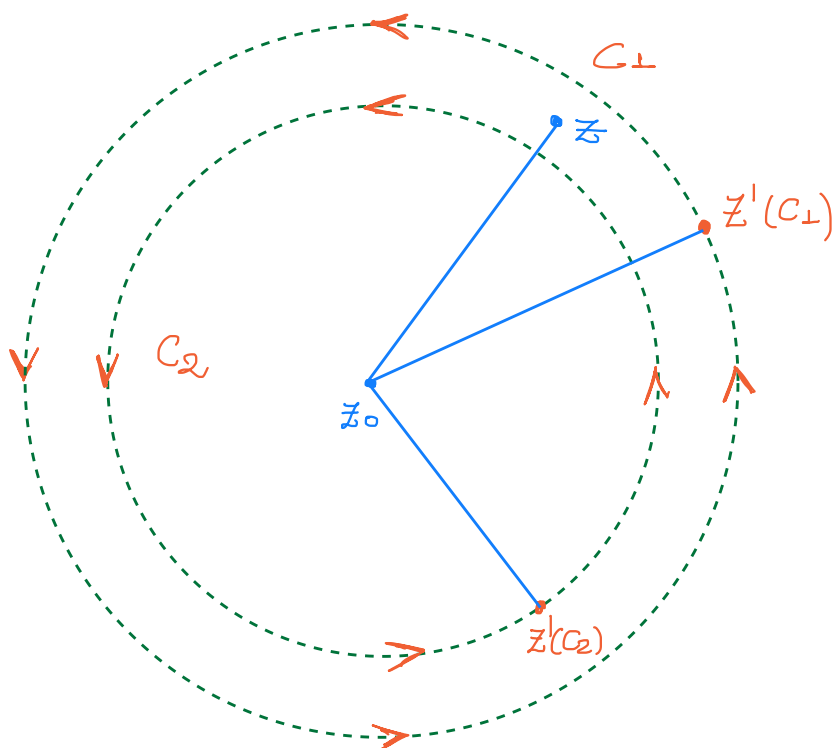
$$C_1 = ABDA$$

$$-C_2 = EFGE$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-C_2} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)}$$

$\hookrightarrow ABDA$ $-C_2 = EFGE$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{z' - z}$$



Procedamos de forma similar a lo visto antes donde introducimos z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)}$$

Para C_1 : $\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1$

Para C_2 : $\left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) \left[1 - \frac{(z - z_0)}{(z' - z_0)} \right]}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{-1}{(z - z_0) \left[1 - \frac{(z' - z_0)}{(z - z_0)} \right]} f(z') dz'$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{-(n+1)} \oint_{C_2} f(z') (z' - z_0)^n dz'$$

Cambiamos el índice a $n=1$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} f(z') (z' - z_0)^{n-1} dz'$$

Hacemos $n \rightarrow -n$:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-z_0)^n \oint_{C_2} \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz'$$

Como sabemos, la integral curvada es independiente del camino, por ello hacemos $C_1 = C_2 = C$, de esta forma tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz' + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz'$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz'$$

finalmente:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Notar que la expansión se realiza alrededor del punto singular z_0 .

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz'$$