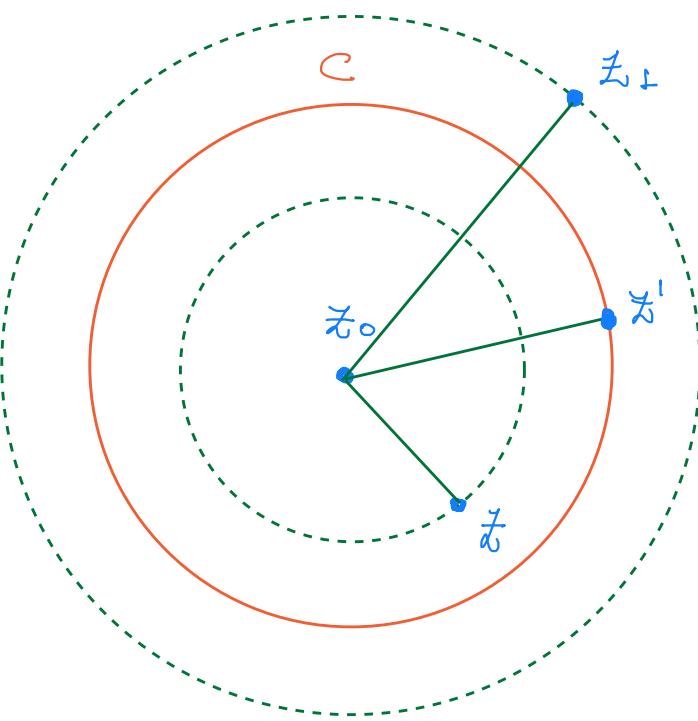


Expansión de Taylor

Iremos expandir la función $f(z)$ alrededor del punto $z = z_0$.

Deberemos tener en cuenta el punto $z = z_1$, el cual es el punto más cercano de no analiticidad.



$f(z)$ es analítica en
la región encerrada
por $R = |z_1 - z_0|$

Usaremos el resultado obtenido anteriormente para z dentro del contorno cerrado C :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z' - z_0)} \frac{f(z') dz'}{\left[1 - \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right) \right]}$$

Aquí utilizaremos los siguientes resultados:

$$* \quad |z - z_0| < |z' - z_0| \Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1$$

$$* \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \text{ para } |t| < 1$$

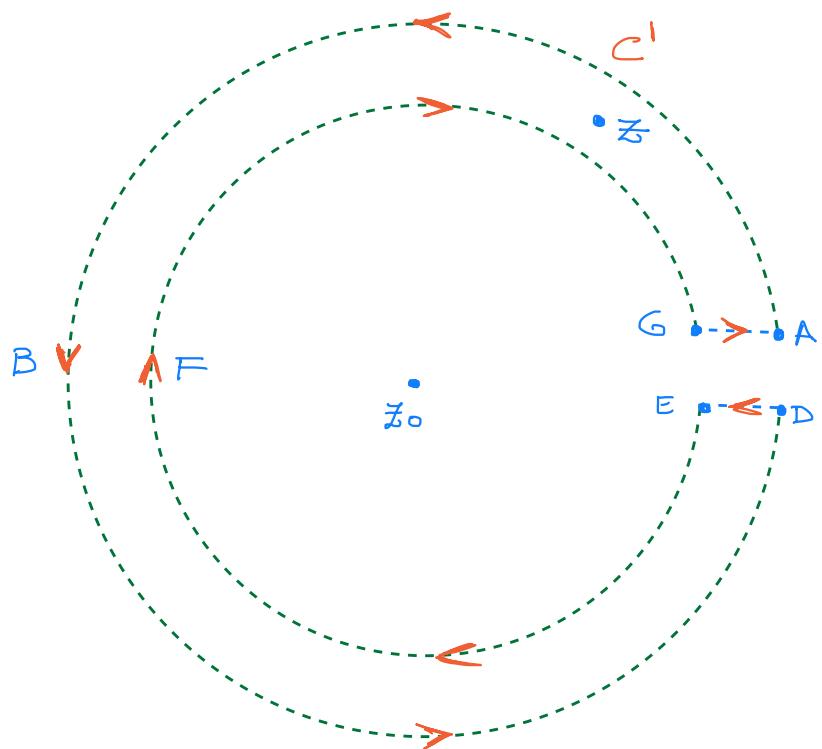
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)} dz' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^n}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \right]}_{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Expansión de Taylor

Serie de Laurent

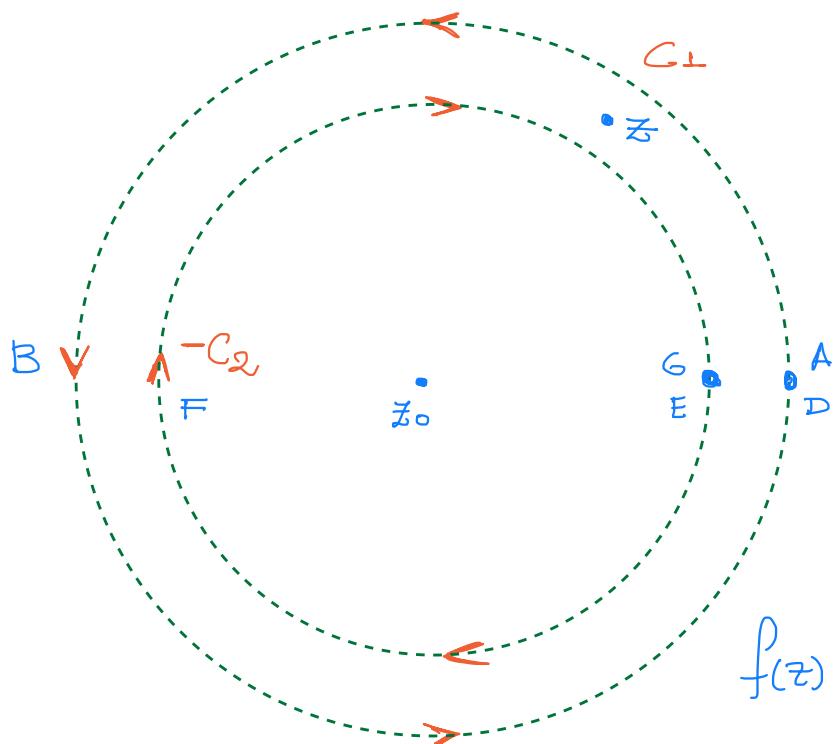


Tenemos la función $f(z)$, la cual es analítica en región anular $C' = ABDEFGA$.

De esta forma, para el punto z en el interior de la región encerrada por C' tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)}$$

Como sabemos podemos tomar $\epsilon \rightarrow 0$, de tal forma que podemos reescribir C' como C_1 y C_2 , ambos en sentido antihorario.



$$C_1 = ABDA$$

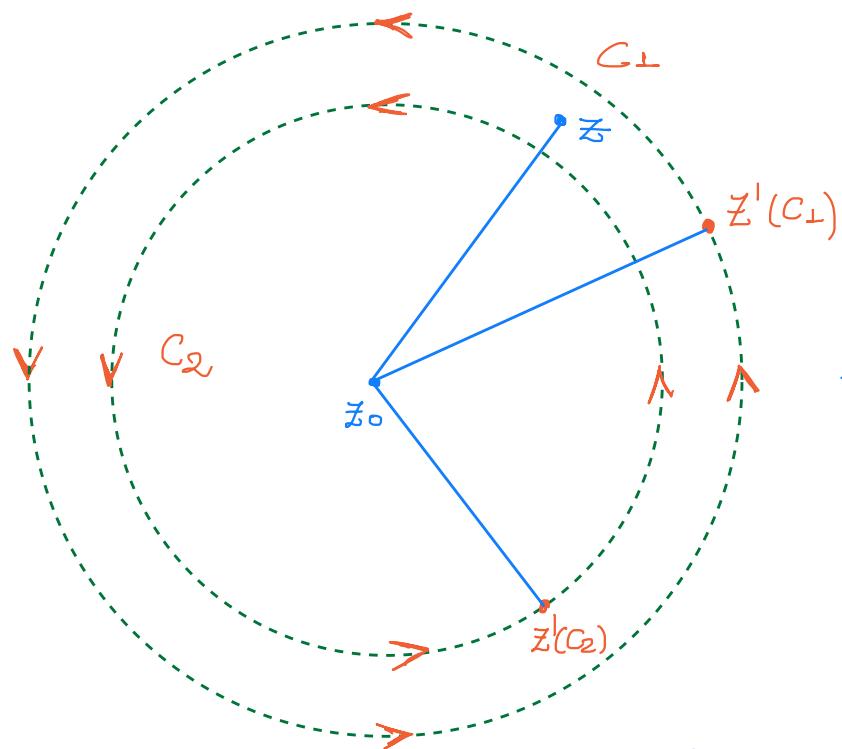
$$-C_2 = EFGE$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-C_2} \frac{f(z') dz'}{(z' - z)}$$

$\hookrightarrow ABDA$

$$-C_2 = EFGE$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{z' - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{z - z'}$$



Procedemos de forma similar a lo visto anterior donde introducimos z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)}$$

Para C_1 : $\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) \left[1 - \frac{(z - z_0)}{(z' - z_0)} \right]}$$

Para C_2 : $\left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| < 1$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{-1}{(z - z_0) \left[1 - \frac{(z' - z_0)}{(z - z_0)} \right]} f(z') dz'$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{C_1} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{(n+1)} \oint_{C_2} f(z') (z' - z_0)^n dz'$$

Combinamos el m\'as a $n=1$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \oint_{C_2} f(z') (z' - z_0)^{n-1} dz'$$

Hacemos $n \rightarrow -n$:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-z_0)^n \oint_{C_2} \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

Como sabemos, la integral circular es independiente del camino, por ello hacemos $C_1 = C_2 = C$, de esta forma tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-z_0)^n \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$

Finalmente:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Notar que la expansión se realizó alrededor del punto singular z_0 .

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z'-z_0)^{n+1}}$$