常见图论数据的构造方法

葛昌威

(重庆交通大学信息科学与工程学院，重庆 404100)

摘要 本文针对算法竞赛与数据结构课程中常见的图论模型，提出了兼顾随机性与时间效率的构造算法。

关键词 图论；算法；调和级数；几何分布

**A Study of Common Graph Theory Data Construction Methods**

Ge Changwei

(Shool of Information Science and Engineering，Chongqin jiaotong University，Chongqin，China，404100)

**1 概述**

在算法竞赛与涉及图论的课程中常见的图大体上可以分为树，有向无环图，有向带环图，负环图，二分图，仙人掌等，本文将按边权的构造，一般图的构造，特殊图的构造依次进行介绍。

**2 边权的构造**

构造图的边权等价于构造一个数列，该数列需要满足以下四个数据限制:

M:数列长度。

L:数值下界。

R:数值上界。

unique:数列中数值是否可重复。

对于数值可重复的序列的构造方法较为简单，使用随机数构造即可。

而对于数值不可重复的序列的构造，需要根据M，L，R的取值进行分类讨论:

法1:对于R-L较大的情况，我们可以采用取随机数，再用std:: unordered\_map进行去重。

法2:对于R-L较小的情况，可以直接将[L,R]区间中所有数值存入数组，随机打乱数组后取前M项。

如果我们已经随机取到了X个不同的数字，设N=R-L+1那么下一次想要取得一个未出现的数字的成功率为:



在一个几何分布中，每次实验的成功率为P，则其期望次数为P的倒数。

在[L,R]区间中进行若干次随机取值，取到M个不同的数字的期望次数为[2]:



法2中，将整个数值区间打乱后取前M项的时间复杂度为。

根据法1的期望次数作为选择构造法的因数条件。若以下表达式为真，则采用法1。反之则采用法2。





这个表达式计算的时间复杂度是的，可以利用近似值来进行优化。

当M=N时，可以发现(1.4)左式为调和级数，而调和级数有不等式[3]:





根据(1.5)，我们可以用求出(1.6)左式的一个近似解:



将(1,7)带入到(1,4)得到新的判别公式:

 使用C++中的std::log(),可以地进行判断。

**3 简单有向图的构造**

由于非连通图可以由多个连通图组合而成，故这里只讨论连通图的构造方法。

假设要构造一个包含N个节点，M条边的图，先根据N个节点构造出一颗树。构造树的伪代码：

for i in range(2,N):

u=rand(1,i-1)

v=i

add\_edge(u,v)

将这颗树的节点进行拓扑排序，从拓扑序列中选取两个节点。只需保证出发点拓扑编号均小于结束点，即可保证图无环。而想要保证图有环，将出发点与结束点调转即可。

简单图要求不能存在重边与自环，所以在构造边时仍需根据边密度进行构造。

若边密度较低，可以用随机数在拓扑序中选点，使用map<pair<int,int>,bool>进行判重。

而如果密度较高，可用类似于序列构造的方法，先构造树，再枚举出剩下所有的边，打乱后选取前M-N+1条边。

使用何种构造方法可以参照(1.8)式进行判断。值得注意的是，有向无环图的最大边数为，而带环图的最大边数为。

**4 特殊图的构造**

**4.1 负环图的构造**

如果图中至少存在一个环，并且这个环上的边权总和为负数，这个图就被称为负环图。构造方法需要根据边权的取值范围和边的数量决定。

1:随机构造一个有向带环图，再对图中是否存在负环进行判断。

2:生成一个树，非随机地构造一些负环连接到树上。

该假定生成的负环图需要满足以下四个数据限制:

N:节点数量。

M:边数量。

L:数值下界(L<0)。

R:数值上界(R>0)。

很容易证明，一个有向带环图中的任意一个环，其为负环的概率为



如果我们采用第三节的方法来构造带环图，图中一共会包含M-N个环，则构造出的图中不包含负环的概率为:



在|L|=R的情况下，如果M-N>=7，我们就有99%以上的几率至少构造出一个负环。

构造完成后，可以使用最短路算法spfa进行检测。spfa算法的特点是每个点在被更新后会重新入队，也就是如果出现了一个负环，负环中的点之间不断更新答案，就会导致负环上的点不断入队再出队。

这里可以引入一结论[4]:入队次数超过节点总数的节点必定在负环上，在一个不包含负环的图中，对一个节点最多只能更新N次，也就是入队次数不会超过N。当入队次数超过N就必然存在一个环导致其无限入队出队。

此外，我们可以将spfa中用于储存入队节点的队列换为栈，将新入队的节点放入栈顶，遇到环就会在栈顶连续出栈入栈。可以加速对负环的判断。

**4.2 二分图的构造**

节点由两个集合组成，且两个集合内部没有边的图被称为二分图。

最简单的构造方法是:将所有点随机分为两个集合，在两个集合之间随机选点连边。由此构造出的二分图无法保证连通性。

首先构造一棵节点数为N的树，取任意节点作为根，根的深度为0。其他节点的深度为父亲节点深度+1。

很容易证明: 如果一个图中不存在奇环，那么该图就是二分图，否则该图不是二分图。

将所有节点按深度的奇偶性进行分组。从两组节点中各随机选一个节点进行连边，由于两点在原树上的距离为奇数，故生成的环必然为偶环。

**4.3 仙人掌图的构造**

如果一张无向连通图的每条边最多在一个环内，则称它是一棵仙人掌。

构造一棵节点数为N的树，我们可以通过每个节点向父节点连一条边来构造一个边数尽可能多的仙人掌。但显然，这种构造方法缺少了随机性。

我们可以使用类似于树链剖分的方式来构造一个高随机性的仙人掌:

令为节点x所在树链中，最接近根节点的节点编号。设为节点x的子节点编号集合。对于，随机选定其中一个子节点，令，其他节点。

随后遍历所有点，如果未被新增的边连接过(未处于任何一个环中)，并且。那么就添加一条连接x与的边。可以发现，树链中的任意一条边都只会被包含在至多一个环中。

通常来说，仙人掌不包含自环，只有长度大于等于2的树链才能构建环。我们将长度大于等于2的树链称为**有效树链**。 想要让剖出的有效树链尽可能地多，我们在剖分时应选择最小子树的根节点y，使得。接下来我们来证明，这样做总是不劣的:

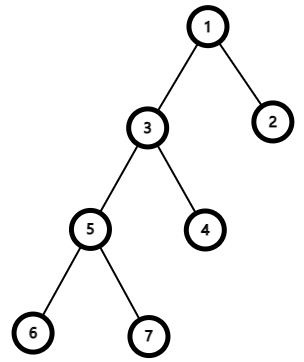
对于**节点数只有1的子树**，如果该子树的根节点没有被父节点的树链连接，那么这棵子树将不会包含有效树链。

对于一棵**节点数大于等于2的子树**。子树的根节点无论是否被其父节点的树链连接，这个子树内能剖出的有效树链不变。因为根据我们的剖分原则，子树根节点只要还存在子节点，就可以且必须继续向下连接，也就是无论是否被父节点的树链连接，包含子树根节点的树链长度必然大于等于2。

1:如果在一次剖分中，仅有节点数为1的子树或者仅有节点数大于等于2的子树，那么无论选择哪棵子树剖分，结果都是不劣的。

2:如果在一次剖分中，同时包含两类子树，选择节点数只有1的子树进行剖分总是更优的。证毕。

此外不难发现，当树的形状如下图时，用上述算法构造出的有效树链最多:



以上方法对于构造仙人掌提供了一定的参考。但限于本人知识水平有限，针对如何计算一颗随机树能产生的有效树链的期望数量仍需完善。

参考文献

[1] OI-Wiki.图论相关概念[EB/OL]. https://oi-wiki.org/graph/concept/,2023

[2] M\_Lter. LightOJ - 1248 Dice (III)(概率期望+几何分布)[EB/OL]. https://blog.csdn.net/lidengdengter/article/details/82527426, 2018

[3] Accelerator.1/1+1/2+1/3+1/4+……+1/n=?[EB/OL].https://www.zhihu.com/question/46263998/answer/2211767878,2021

[4]Thomas,H.Cormen,Charles,E.Leiserson,Ronald,L.Rivest,Clifford,Stein,殷建平,徐云,王刚,刘晓光,苏明,邹恒明,王宏志. 算法导论(原书第3版)[J]. 计算机教育, 2013(10):1.380-381