Universidade Federal da Bahia
MATA53 - Teoria dos Grafos
Professor Rafael Augusto de Melo
Segunda avaliação - 2016.1

Instruções: Escreva suas respostas de maneira clara, objetiva e organizada.

Questão 1: Verdadeiro ou Falso (discorra sobre a veracidade ou mostre um contra-exemplo).

- **Caminhos mínimos** Considere um digrafo G com arcos ponderados e pesos positivos distintos, um vértice fonte s e um vértice destino t. Suponha que G não possua arcos paralelos ou laços, e que todo vértice é alcançável a partir de s.
  a. O caminho mínimo $s \to t$ deve excluir o arco mais pesado.
  b. O caminho mínimo $s \to t$ é único.
  c. Se a capacidade de cada arco é par, então existe um fluxo máximo no qual o fluxo em cada arco é par.
- **Fluxo máximo**
  d. Se uma iteração do algoritmo de Ford-Fulkerson em uma rede determina fluxo 1 através de um arco (u, v), então em todas as próximas iterações o fluxo através de (u, v) será pelo menos 1.
  e. Em uma determinada rede com capacidades inteiras, conhece-se um fluxo com k unidades e um corte com k' unidades. Então, pode-se afirmar que $k \leq k'$ e existe um fluxo com k' unidades.
- **Emparelhamento**
  f. Se um emparelhamento M com $|M|$ arestas é maximal, mas não máximo, então no máximo $|M| - 1$ arestas de M pertencem a um emparelhamento máximo.
  g. Todo emparelhamento máximo é um emparelhamento perfeito.

Questão 2:

Dona Grafinha possui uma casa de férias em Salvador a qual deseja alugar durante o período de 1 de Dezembro a 31 de Fevereiro. Ela resolveu leiloar o aluguel da casa e solicitou um número de ofertas, cada uma contendo: o dia de início do aluguel (o qual inicia às 14:00), o dia final do aluguel (hora de saída é 12:00), e o valor total da oferta (em reais). Dona Grafinha deseja identificar uma seleção de ofertas que maximize o seu rendimento total. Dona Grafinha pede sua ajuda. Modele a situação como um problema em grafos. Escreva o pseudocódigo de um algoritmo eficiente que resolva o problema. Discorra sobre a complexidade e a corretude do algoritmo proposto.

Questão 3: Suponha que você receba um grafo direcionado $G = (V, E)$ com capacidade inteira e positiva c_e em cada aresta e, um nó $s \in V$ identificado como fonte e um nó $t \in V$ identificado como destino. Você também recebe um fluxo máximo inteiro $s-t$ em G, definido por um fluxo f_e em cada aresta e. Agora, suponha que uma dada aresta $e \in E$ tenha sua capacidade aumentada por uma unidade. Mostre como encontrar o fluxo máximo no grafo resultante desta alteração de capacidade em $O(|V| + |E|)$.

Questão 4 (2,5): Um dos problemas de elaborar uma tabela para um campeonato esportivo pode ser apresentado da seguinte forma: dado um conjunto com n (par) equipes $\{1, \ldots, n\}$, determine um torneio *round-robin* simples para o campeonato. Em um torneio *round-robin* simples cada equipe deve jogar $n - 1$ vezes, sendo um jogo contra cada um de seus oponentes, cada equipe joga contra todas as outras, e cada equipe joga exatamente uma vez por rodada. Formule o problema como:

- problema de coloração de arestas;
- problema de coloração de vértices.