Teoria dos Grafos
Aula 25

Aula passada

- Caminho mais curto em grafos
- Algoritmo de Bellman-Ford
- Algoritmo distribuído

Aula de hoje

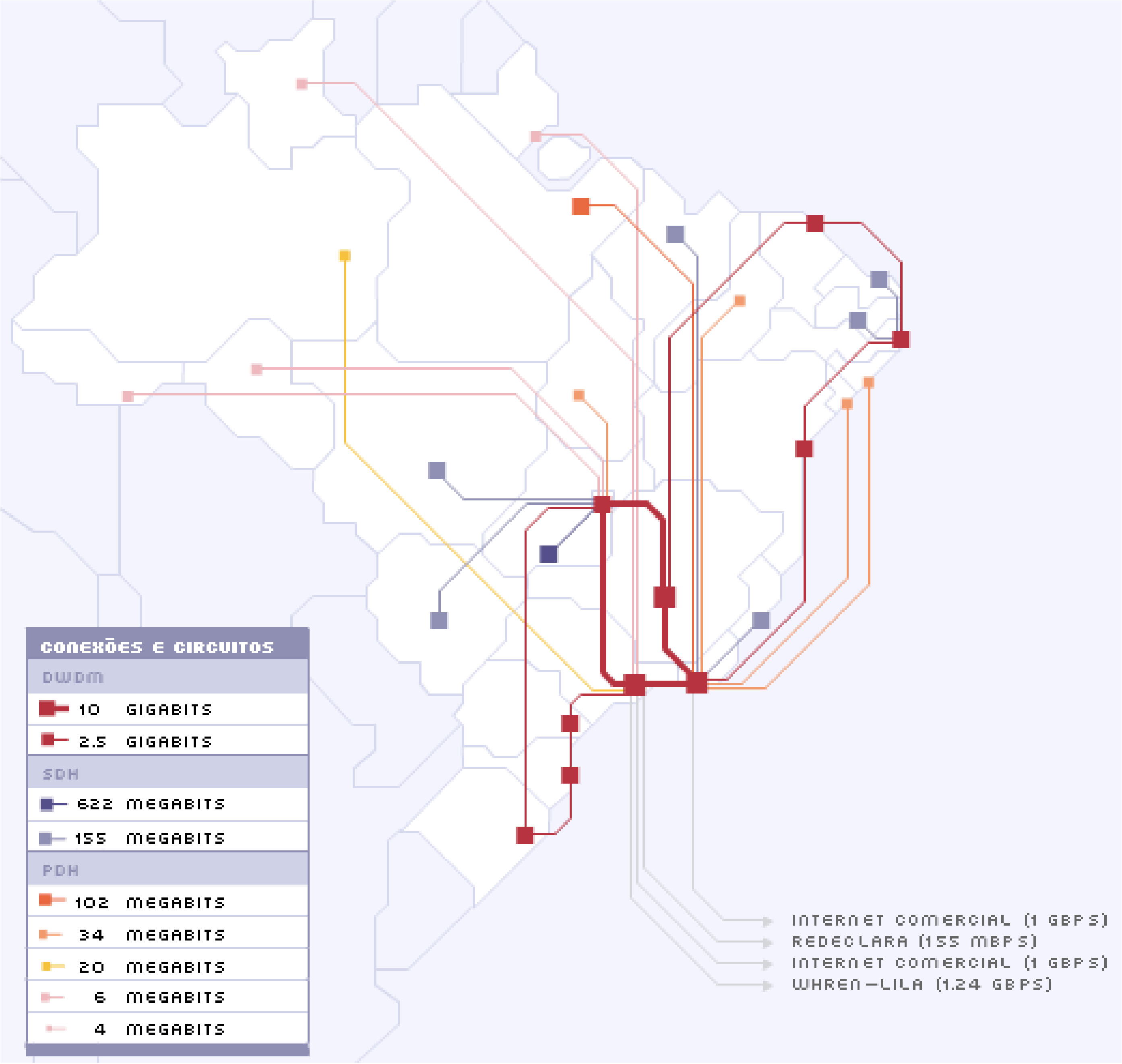
- Redes de fluxo
- Problema do fluxo máximo
- Problema do corte mínimo
- Dualidade

Malha Rodoviária

- Mapa das estradas brasileiras
  - capacidade das estradas (“carros por hora”)
- Problema: escoamento da produção nacional

Figueiredo – 2010

Backbone da RNP



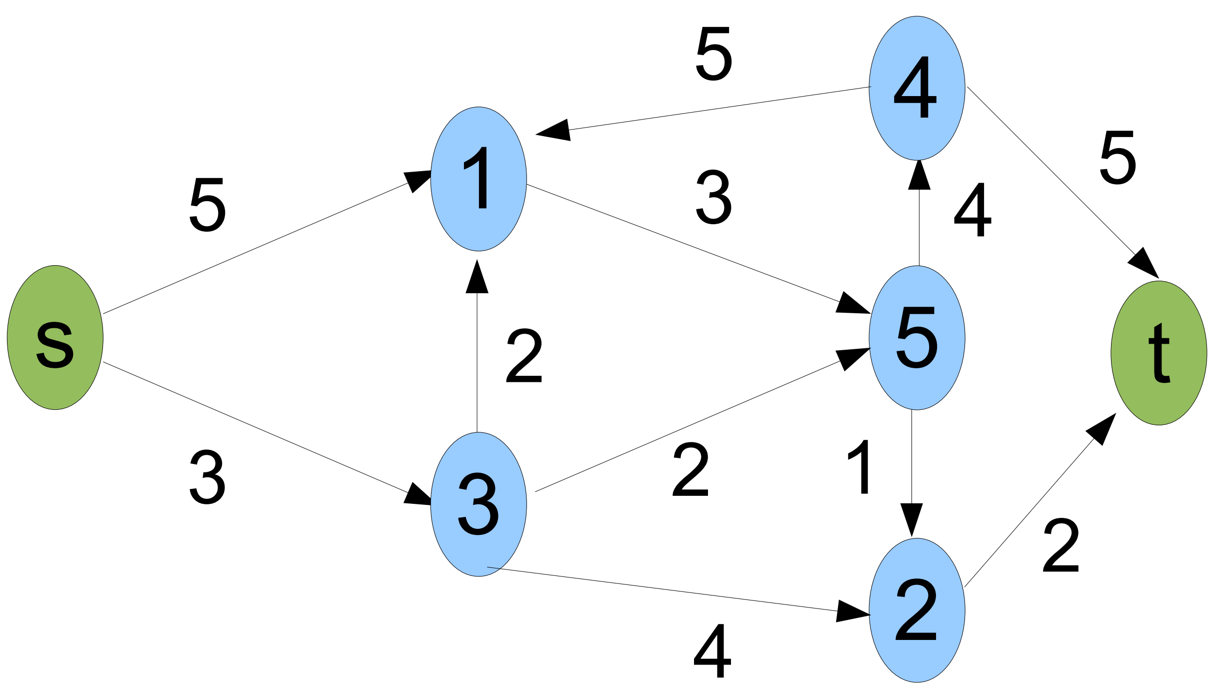
- RNP: Rede Nacional de Pesquisa em Ensino
  - ligação entre instutições nacionais
  - Capacidade dos enlaces ("bits por segundo")

Redes de Fluxos

- Grafo direcionado
- Arestas possuem “capacidade”
  - quantidade de fluxo máximo que pode passar pela aresta
- 3 tipos de vértices
  - Origem, onde fluxo entra
  - Destino, onde fluxo sai
  - Interno, onde fluxo passa
- *Fluxo*: abstração de algo que possa escoar pelo grafo entre origem e destino
  - carros, bits, etc

Origem/Destino Únicos

- Rede de fluxos simples
  - 1 vértice origem, 1 vértice destino
  - todos os outros vértices são internos
- Origem não possui arestas de entrada
- Destino não possui arestas de saída

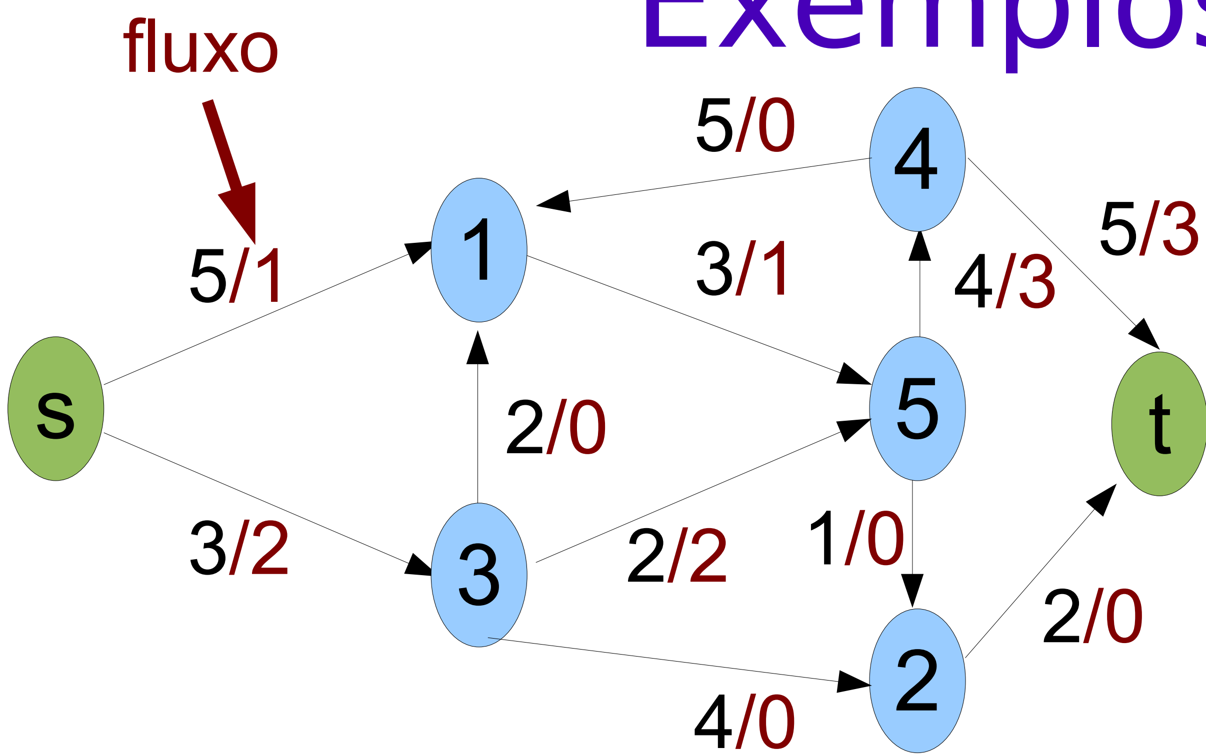


Figueiredo – 2010

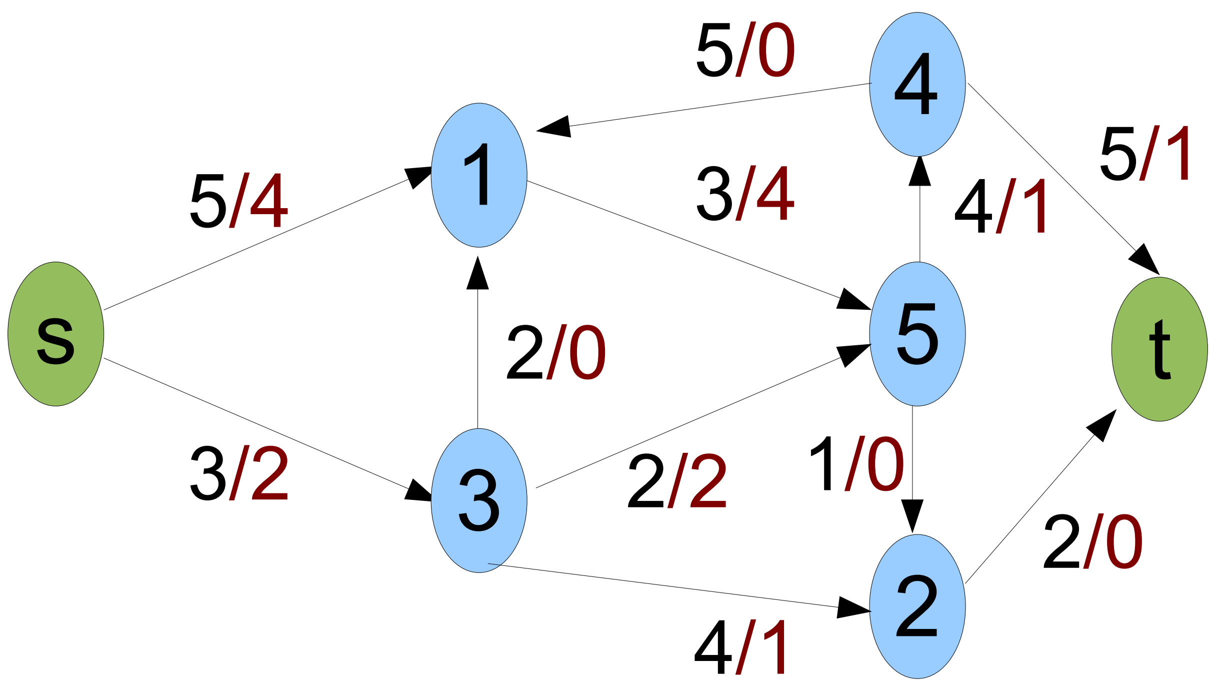
Fluxo na Rede

- Como definir um *fluxo* na rede?
- Determinar o fluxo de cada arestas
- Função f : E → R , com restrições
- 1) Capacidade
  - Fluxo em uma aresta menor que capacidade
- 2) Conservação
  - Fluxo que entra igual ao fluxo que sai
  - Fluxo que sai da origem igual fluxo que entra no destino
- Valor do fluxo *f*
  - quantidade de fluxo saindo da origem

Exemplos



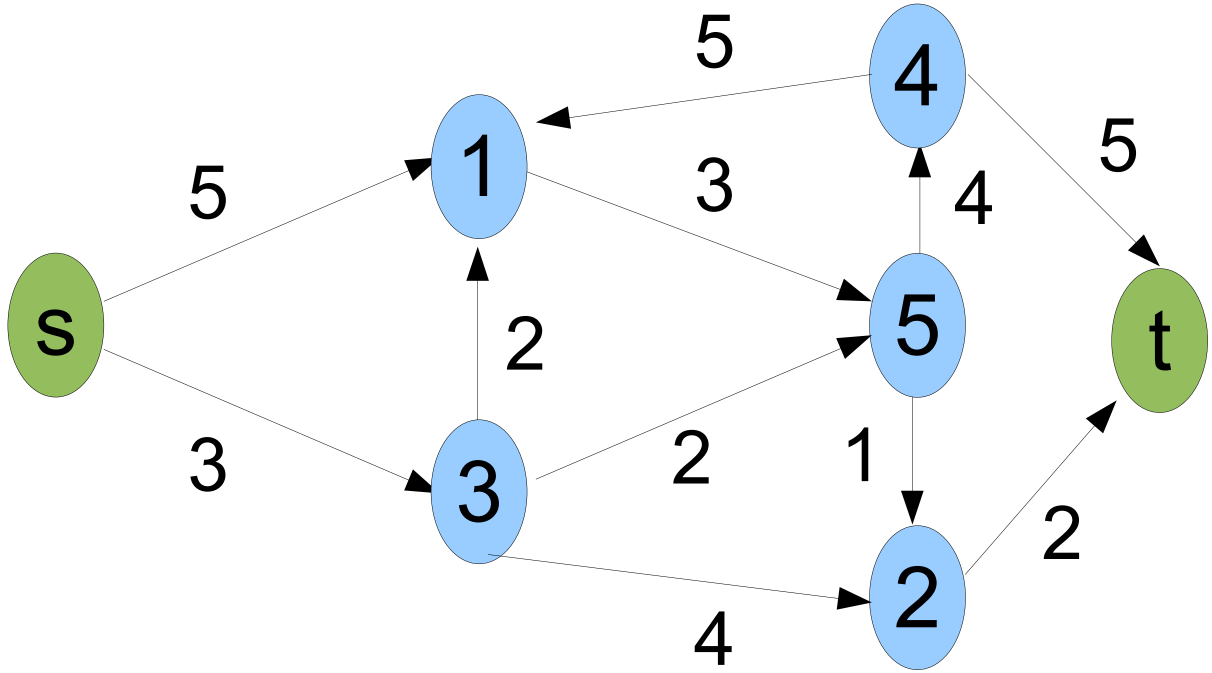
- Fluxo válido?
- Valor?



- Fluxo válido?

Problema do Fluxo Máximo

- Dado G=(V,E) com capacidade nas arestas
  - E dois vértices *s* e *t*
- **Problema**: Determinar fluxo máximo entre *s* e *t*



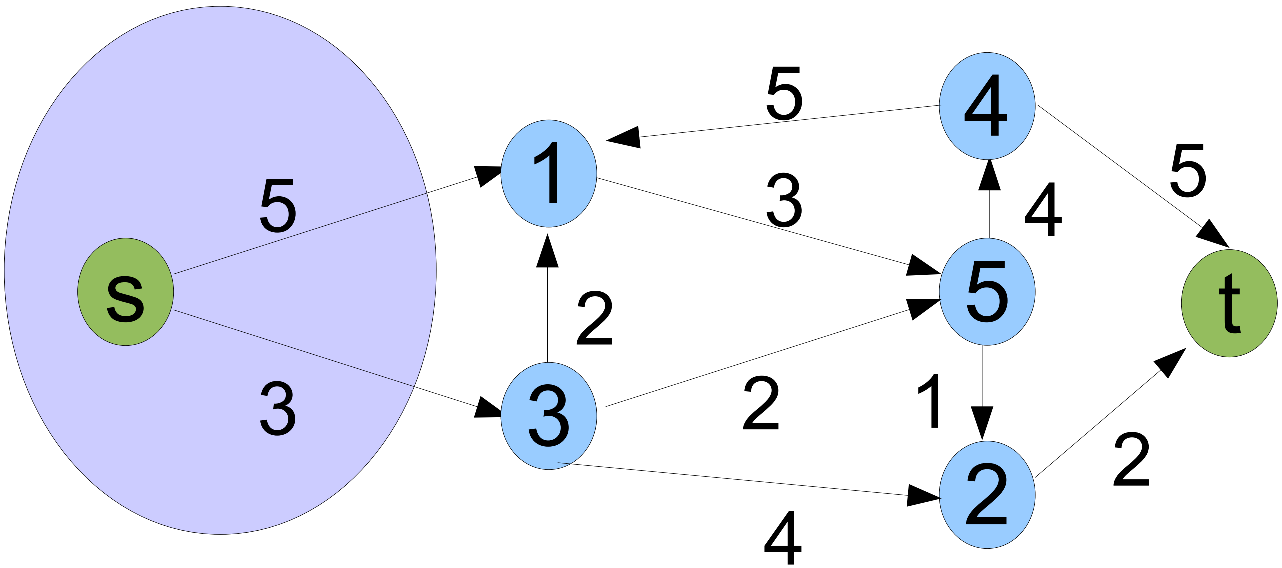
- Fluxo máximo?
- Limitante para fluxo máximo?

Corte em Redes de Fluxo

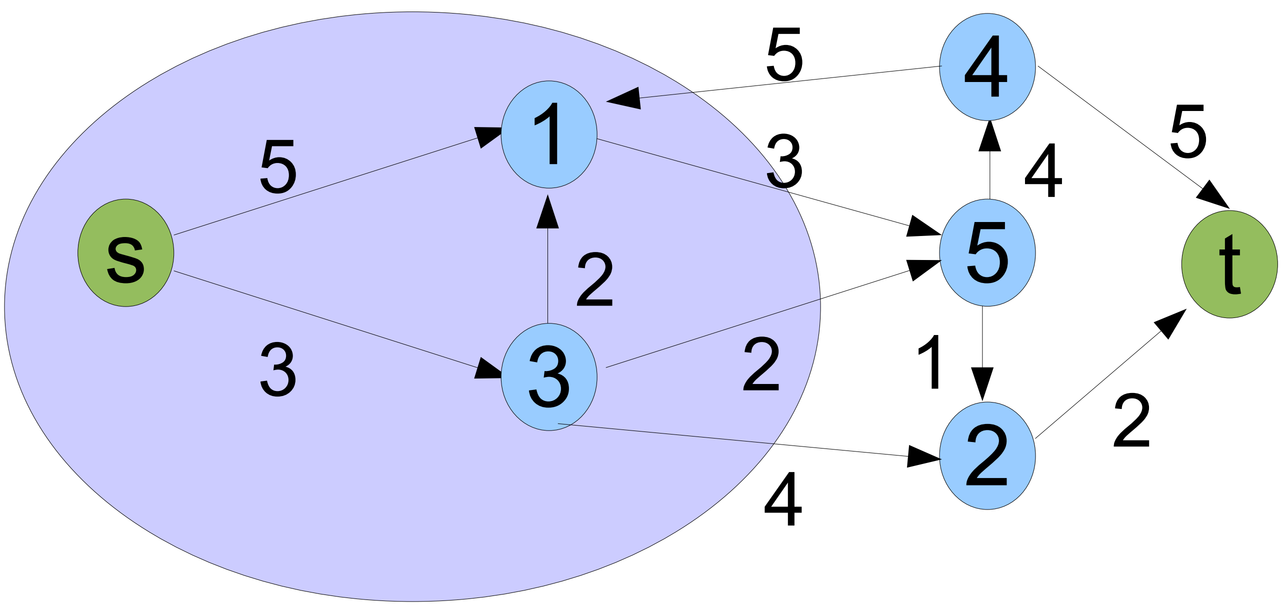
- Generalização da definição de corte
- Corte s-t (A, B) é uma partição dos vértices nos conjuntos A e B tal que *s* está em A e *t* está em B
- Custo do corte (ou capacidade do corte)
  - soma das capacidades da arestas do corte

$$c(A,B) = \sum_{e=(a,b),\, a \in A,\, b \in B} c(e)$$

Exemplos



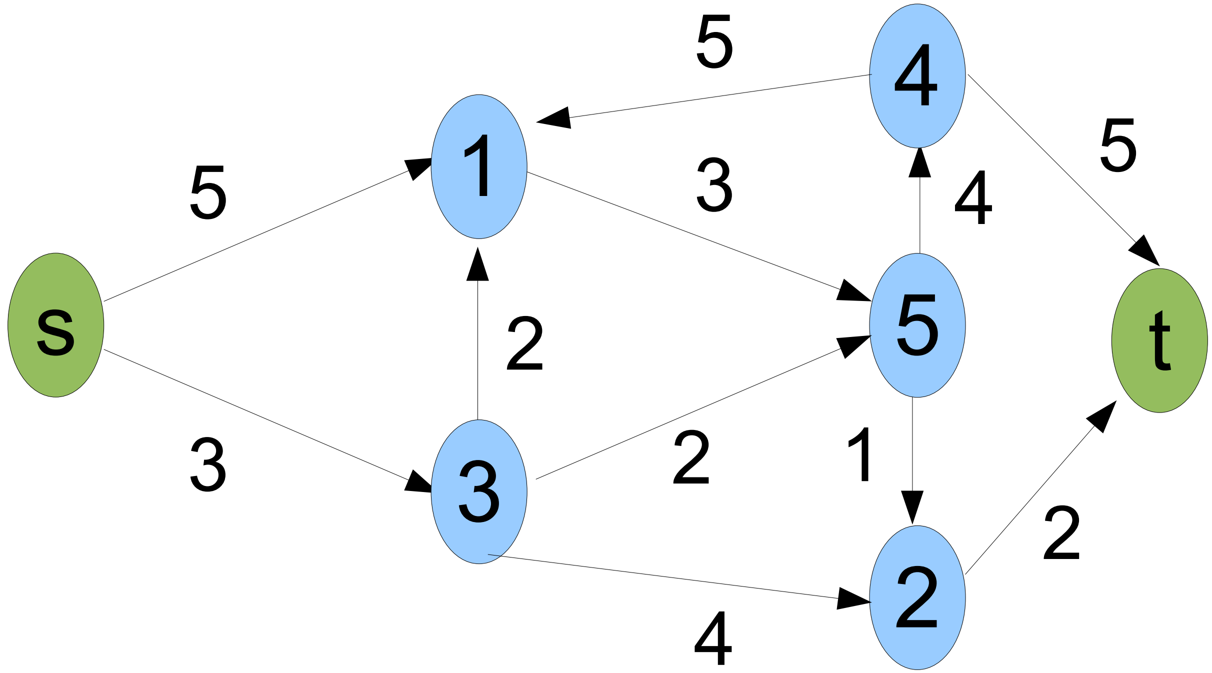
- c(A,B) = ?



- c(A,B) = ?

Problema do Corte Mínimo

- Dado G=(V,E) com capacidade nas arestas
  - E dois vértices *s* e *t*
- **Problema**: Determinar corte s-t de capacidade mínimo?



- Corte mínimo?

Fluxo Máximo e Corte Mínimo

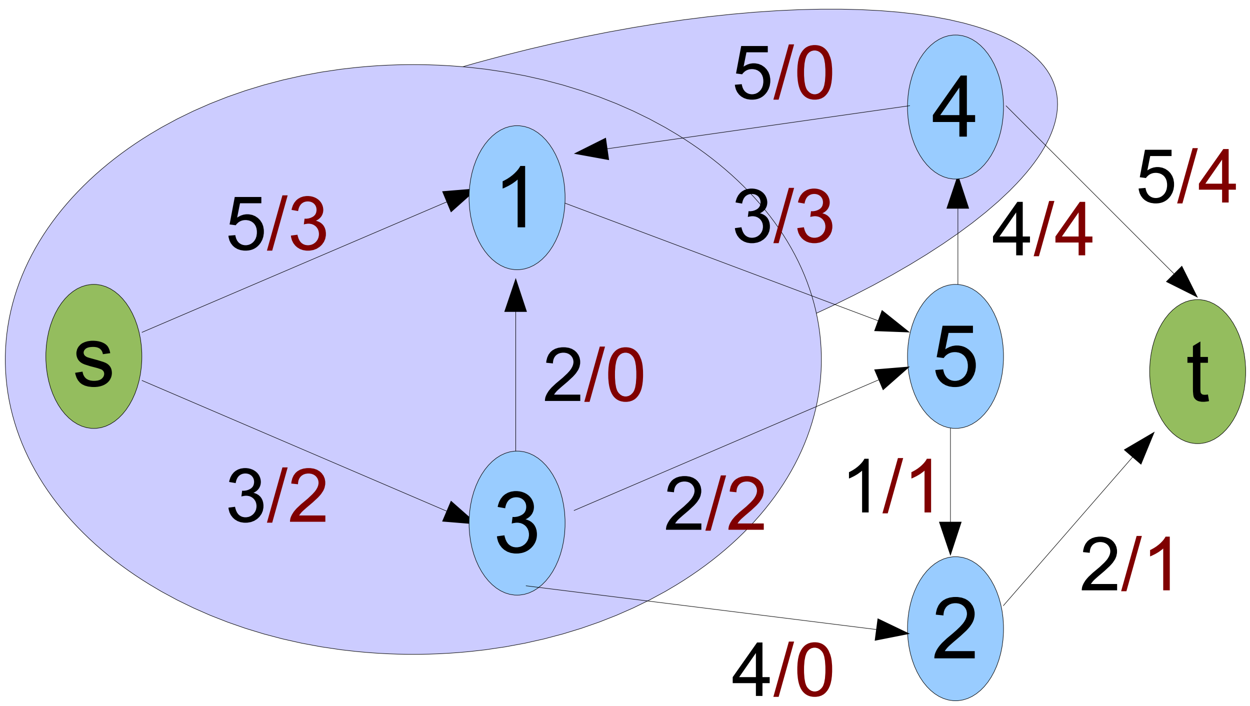
- Problemas duais
  - Muitas aplicações, mesma solução
- Lema da valor do fluxo
  - Seja f um fluxo, e (A, B) um corte s-t
  - Então o fluxo total entre A e B é igual ao fluxo saindo de s

$$\sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e) = v(f)$$

Valor do fluxo f

Exemplo

- Lema da valor do fluxo



- Correto?

Prova do Lema

- Seja f um fluxo, e (A, B) um corte s-t
- Então o fluxo total entre A e B é igual ao fluxo saindo de s

$$\sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e) = v(f)$$

Conservação de fluxo: todos os termos são zero menos s e t

- Prova

$$v(f) = \sum_{e \text{ saindo de } s} f(e)$$

$$v(f) = \sum_{v \in A} \left(\sum_{e \text{ saindo de } v} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } v} f(e) \right)$$

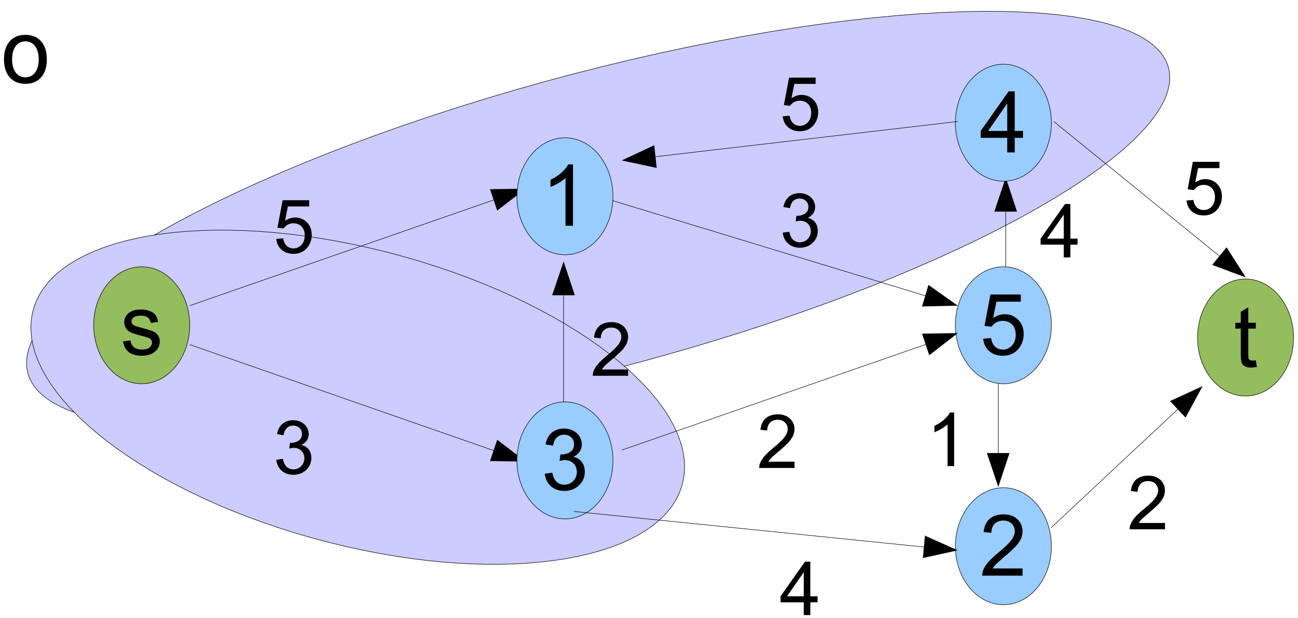
$$v(f) = \sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e)$$

Fluxo e Corte

- Dualidade fraca
- Seja f um fluxo qualquer e (A, B) um corte s-t qualquer
- Então o valor do fluxo v(f), é no máximo a *capacidade* do corte

$$v(f) \leqslant c(A, B)$$

- Exemplo



Dualidade Fraca

- Seja f um fluxo qualquer e (A, B) um corte s-t qualquer, então $v(f) \leqslant c(A, B)$
- Prova

$$v(f) = \sum_{e \text{ saindo de } A} f(e) - \sum_{e \text{ entrando em } A} f(e)$$

$$. \leqslant \sum_{e \text{ saindo de } A} f(e)$$

$$. \leqslant \sum_{e \text{ saindo de } A} c(e)$$

$$. = c(A, B)$$

Buscando um Algoritmo

- Algoritmo guloso
- Começar com $f(e) = 0$, para todo e
- Procurar caminho P entre s-t com $f(e) < c(e)$, para todo e em P
- Aumentar fluxo em P
- Repetir até não conseguir mais

- **Problemas???**