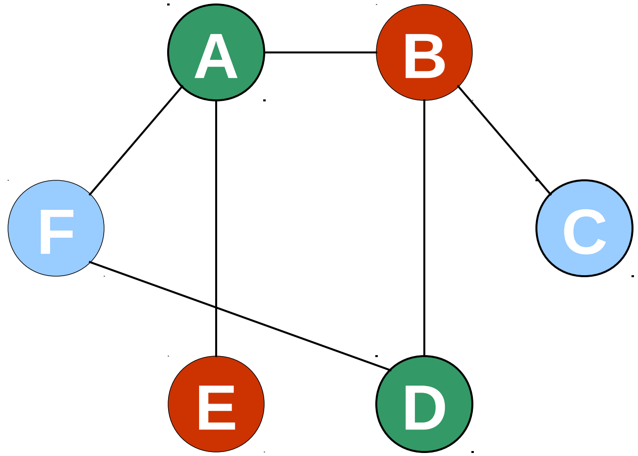
Aula 12
COLORAÇÃO DE GRAFOS

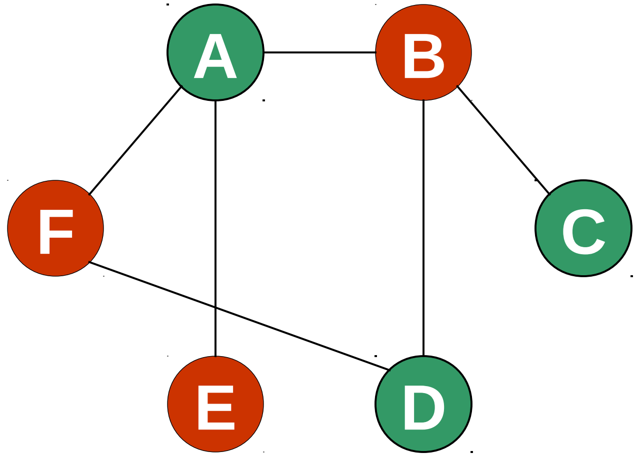
Grafos e Teoria da Complexidade

Professor: **Fabio Tirelo**

Coloração de Vértices

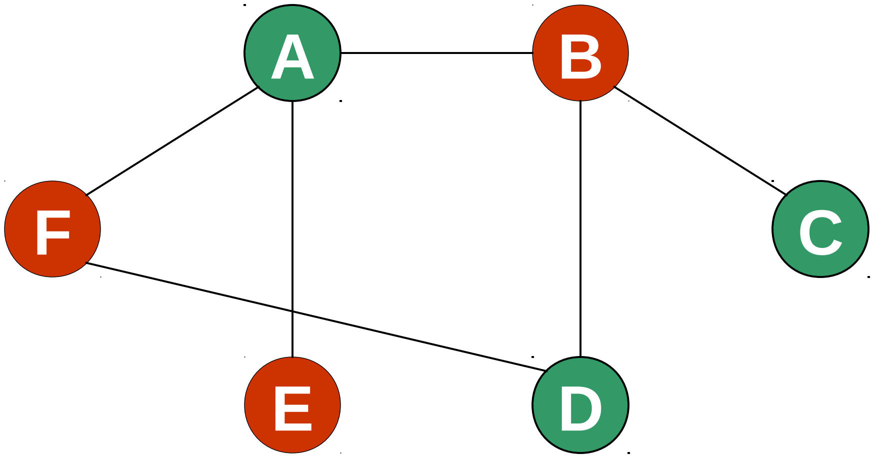
- Seja $G = (V,E)$ um grafo conexo simples
- Uma **coloração de vértices** de G é uma atribuição de cores aos seus vértices de modo que vértices adjacentes não recebam a mesma cor
- Exemplo:





Grafos K-Coloríveis, $\chi(G)$

- Dizemos que um grafo G é ***K*-colorível** se K cores forem suficientes para colorir seus vértices
- O **número cromático** $\chi(G)$ é igual ao menor número K tal que G é K-colorível
- No grafo abaixo $\chi(G) = 2$



$\chi(K_{m,n}) =$

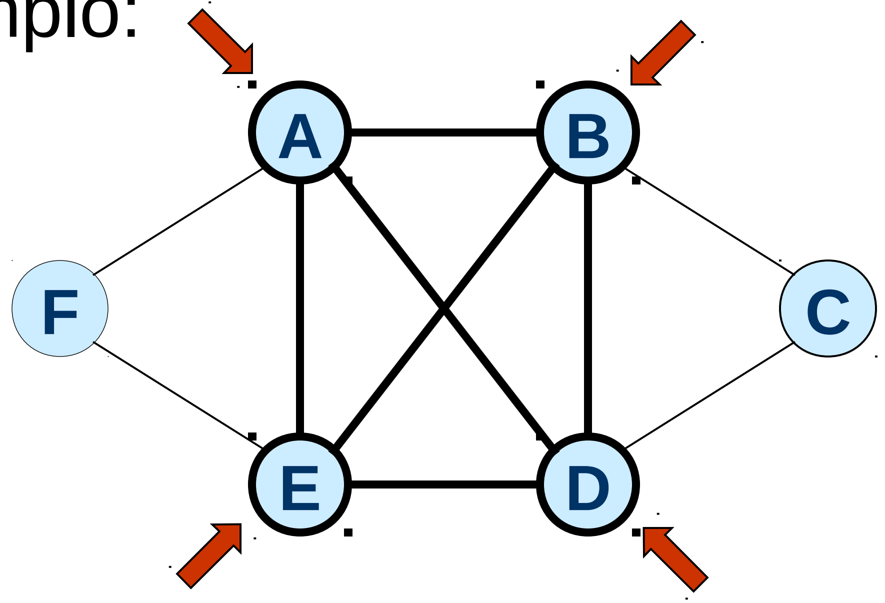
$\chi(K_n) =$

$\chi(C_n) =$

$\chi(W_n) =$

Cliques

- Seja $G = (V,E)$ um grafo
- Um subconjunto $S \subseteq V$ é uma **clique** se $\forall v,w \in S$, tem-se $(v,w) \in E$
- O **número de clique** $\omega(G)$ é igual à cardinalidade da maior clique de S
- Exemplo:



Propriedades

- Seja $G = (V,E)$ um grafo conexo simples

$$\boldsymbol{\chi(G) \leq \Delta(G) + 1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\chi(G) \leq \omega(G) + 1}$$

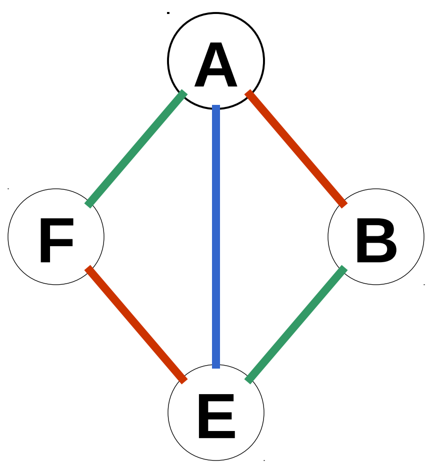
- Se G não possuir circuitos ímpares e não for um grafo completo, então

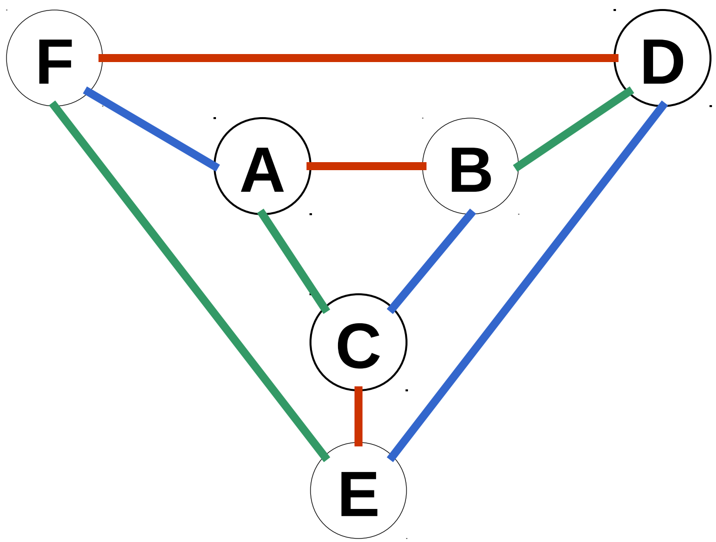
$$\boldsymbol{\chi(G) \leq \Delta(G)} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\chi(G) \leq \omega(G)}$$

- **Teorema das 4 cores**: Se G for um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$
- Se $\chi(G) > 2$, então determinar o valor de $\chi(G)$ é um problema NP-Completo

Coloração de Arestas

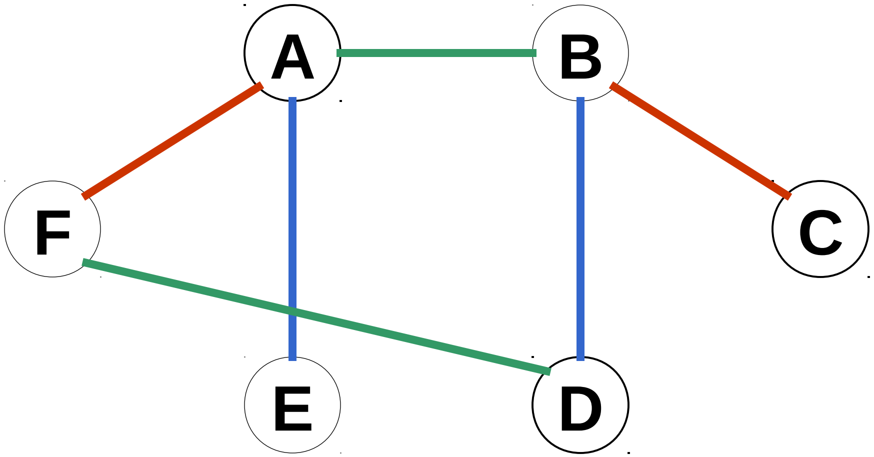
- Seja $G = (V,E)$ um grafo conexo
- Uma **coloração de arestas** de G é uma atribuição de cores às suas arestas de modo que arestas adjacentes não recebam a mesma cor
- Exemplos:





Grafos K-Aresta-Coloríveis, $\chi'(G)$

- Dizemos que um grafo G é ***K*-aresta-colorível** se K cores forem suficientes para colorir suas arestas
- O **índice cromático** $\chi'(G)$ é igual ao menor número K tal que G é K-aresta-colorível
- No grafo abaixo $\chi'(G) = 3$



$\chi'(K_{m,n}) =$

$\chi'(K_n) =$

$\chi'(C_n) =$

$\chi'(W_n) =$

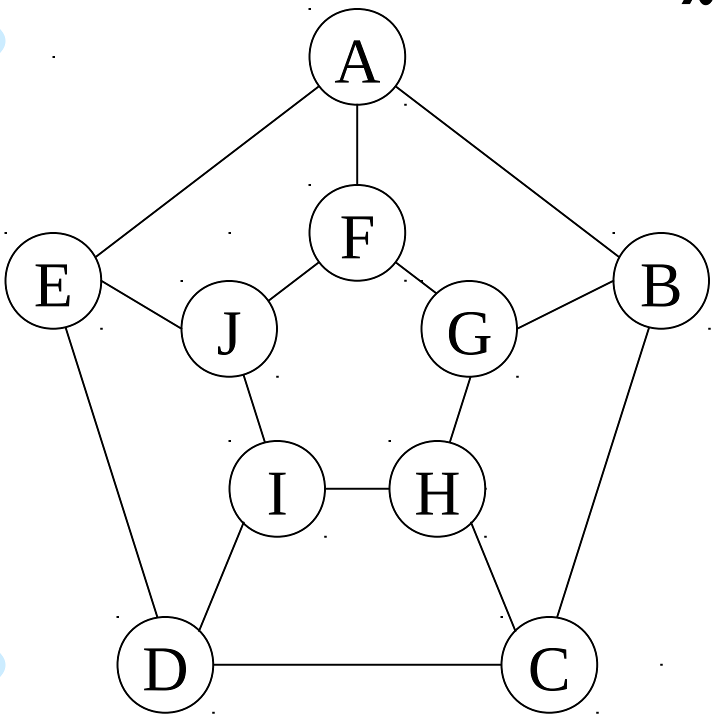
Propriedades e Exemplos

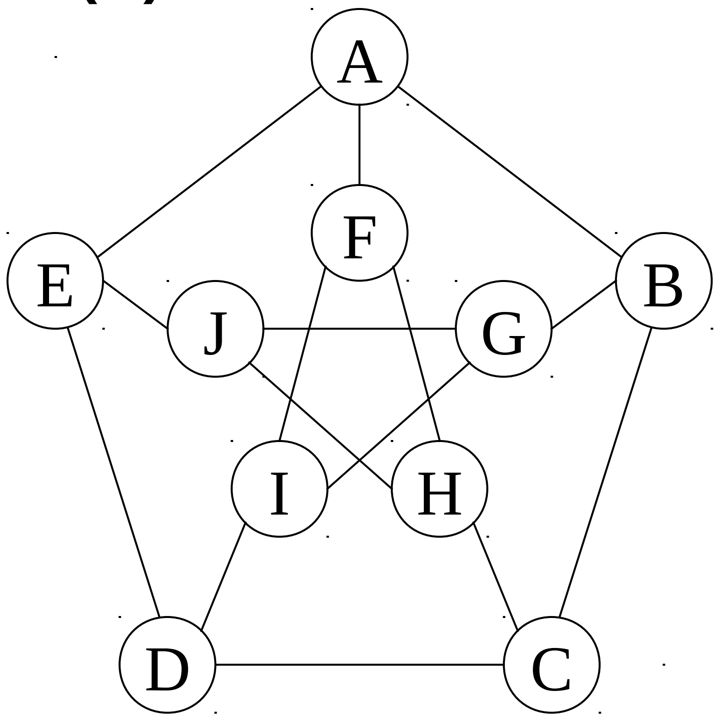
- Seja $G = (V,E)$ um grafo conexo simples

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

- Se G for um grafo bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$





Coloração de Faces

- Seja $G = (V,E)$ um grafo planar
- Uma **coloração de faces** de G é uma atribuição de cores às suas faces de modo que faces adjacentes não recebam a mesma cor
- Um grafo é ***K*-face-colorível** se K cores forem suficientes para colorir suas faces
- Aplicação: colorir mapas

- Propriedade:
  - Todo grafo planar é 4-face colorível
  - Prova pela coloração de vértices do dual

Alocação de Recursos

- Sejam $\mathbf{R_1}$ ... $\mathbf{R_k}$ recursos a serem distribuídos para os elementos $\mathbf{E_1}$ ... $\mathbf{E_n}$
- Suponha que haja restrições da forma $\mathbf{E_i}$ não pode receber o mesmo recurso que $\mathbf{E_j}$
- Duas variantes:
  - É possível alocar os **k** recursos para os **n** elementos respeitando todas as restrições
  - Quantos recursos devem existir para que possamos alocar recursos distintos para elementos conflitantes
- Solução: coloração do grafo de conflitos
  - Vértices = elementos
  - Arestas = unem elementos conflitantes

Exemplo 1

- Uma universidade está preparando o vestibular para os seus **n** cursos
- Para cada curso, os candidatos deverão realizar algumas provas específicas
  - Computação: matemática, física
  - Nutrição: química, biologia
  - Arquitetura: física, matemática, história
  - Medicina: química, biologia
- Como definir os horários das provas de modo que os candidatos de cada curso façam no máximo uma prova por dia?

Exemplo 2

- Uma empresa possui **N** tarefas a serem executadas e **M** funcionários
- Cada funcionário já foi designado para um conjunto de tarefas
- Cada tarefa demandará a dedicação do funcionário durante um dia completo
- Quantos dias serão necessários para que todas as tarefas sejam concluídas?

Exemplo 3

- Suponha que **N** candidatos a uma vaga devam ser entrevistados individualmente por profissionais de uma empresa
- Os entrevistadores são escolhidos de acordo com a área de atuação que um está pleiteando
- Como determinar o número mínimo de períodos de entrevista?

Exemplo 4

- Uma escola está montando o horário do semestre
- Já foram definidos quais professores estarão ministrando aula em cada turma
- Como determinar os horários das aulas?

- Restrições possíveis:
  - Mais de uma aula por semana da matéria
  - Professor restringe os dias da semana que podem ser utilizados na alocação
  - Recursos conflitantes (ex: salas, equipamentos)

Grafo de Linha, $L(G)$

- Seja G um grafo não-dirigido
- O **grafo de linha** (ou **grafo adjunto**) de G, $L(G)$, é definido como:
  - Os vértices de $L(G)$ são as arestas de G
  - Dois vértices são adjacentes em $L(G)$ se as arestas correspondentes forem adjacentes em G
- Propriedade: $\chi'(G) = \chi(L(G))$

Coloração por Classe

- Welsh e Powell, 1967
- Entrada: Grafo $G = (V,E)$, com n vértices

$C_i = \emptyset$, *para* $i = 1,\ldots,n$

$Y = V$; $k = 1$

Enquanto $Y \neq \emptyset$ ***faça***

    Para todo $v_i \in Y$ ***faça***

        Se $C_k \cap \Gamma(v_i) = \emptyset$ ***então***

            $C_k = C_k \cup \{ v_i \}$; $Y = Y - \{ v_i \}$

        $k = k + 1$

Implementação

- Entrada: um grafo G com vértices $v_1,\ldots,v_n$
- Saída: uma coloração válida de G

c *= 0; // Inicia cor em 'cor 0'*

Enquanto *houver algum vértice não colorido* ***faça***

    $c = c + 1$;

    Para *i = 1 até n* ***faça***

        Se *(*v_i *não foi colorido)*

            e *(não há vizinho de* v_i *com cor* c*)*

        Então *atribua cor* c *a* v_i