Préparation au concours général de mathématiques (Enoncés)

Exercice 7:

Soient A, B, C des points du plan d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
— le triangle ABC est équilatéral direct
— $a + jb + j^2c = 0$
— $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Exercice 8:

Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrer que $24 \mid p^2 - 1$.

Se souvenir que $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Exercice 9:

Soit a_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
2. Montrer que si r_1, r_2 sont les racines de $X^2 - X - 1$, toute suite de la forme $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ (où α et β sont deux constantes) est solution de cette relation de récurrence. On admettra que ce sont les seules solutions.
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

Pour choisir une partie de $[\![1, n]\!]$ *sans entiers consécutifs, combien a-t-on de possibilités dans le cas où* n *appartient à cette partie ? et dans le cas contraire ?*

Exercice 10:

Les 100 passagers d'un avion de 100 places embarquent l'un après l'autre, mais la première d'entre eux est une vieille folle qui choisit une place au hasard. Les suivants essaient chacun leur tour d'occuper leur siège réservé, mais si celui-ci est pris ils choisissent également une place au hasard parmi les sièges vides restants. Quelle est la probabilité que le 100e passager obtienne le siège qui lui était attribué ? Quel est le nombre moyen de passagers assis à la bonne place ?

Essayer pour un petit nombre de passagers, puis conjecturer le résultat et démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 11:

Soit f une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est minorée et vérifie $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \geq \frac{1}{2}[f(n+1) + f(n-1)]$. Montrer que f est constante.

Raisonner par l'absurde : si f *n'est pas constante, on peut trouver un couple d'entiers consécutifs* $N, N+1$ *tels que* $f(N) \neq f(N+1)$ *(d'ailleurs, pourquoi est-ce vrai ?). Que peut-on en tirer ?*

Exercice 12:

Déterminer tous les triplets d'entiers strictement positifs x, y, z tels que

$$x^x + y^y = z^z$$

On pourra commencer par montrer que $z^z \leq 2(z-1)^{(z-1)}$

Exercice 13:

On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ telles que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad f(x^y) = f(x)^{f(y)}$$

1. Dans cette partie on suppose qu'il existe $z \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) > 1$.
   (a) Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. En calculant $f(z^{ab})$, montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$.
2. Dans cette partie on suppose que $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \leq 1$.
   (a) Déterminer $f(1)$.
   (b) Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(z) = 0$. Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f(ab) = f(a)f(b)$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(z^n) = f(z)^n$. En déduire que f est la fonction constante égale à 1.

Exercice 14:

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 - t^2}dt$. Soit $F : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(\sin x)$.

1. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée F'.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $F(x) = \int_0^x \cos^2(t)dt$.
3. En utilisant la formule $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, calculer $F(x)$ pour tout x.
4. En déduire la valeur de $f(1)$: interprétation géométrique ?

Pour la première question, on pourra admettre que si u, v *sont deux fonctions réelles dérivables, la fonction* $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$ *est dérivable également, et que sa dérivée s'exprime* $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.