Préparation au concours général de mathématiques (Corrigés)

Correction exercice 7:

1. Commençons par montrer que les deux premières assertions sont équivalentes :
Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si on a les deux conditions :
(i) $AB = BC$ qui équivaut en complexes à $|a-b| = |c-b|$
(ii) $\hat{B} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 60°$ qui équivaut en complexes à $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \frac{\pi}{3}$
Si on combine les conditions (i) et (ii), cela nous donne :

$$ABC \text{ équilatéral direct} \iff \frac{a-b}{c-b} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

Le nombre complexe $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ est souvent noté j, il vérifie quelques propriétés intéressantes : $j^2 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$ et $j^3 = \mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{3}} = 1$.
De plus, $1 + j + j^2 = 1 + (j + \bar{j}) = 1 + 2\mathfrak{Re}(j) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
Nous sommes maintenant prêts à faire les calculs pour retomber sur l'expression de l'énoncé :

$$\frac{a-b}{c-b} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 \iff a-b = -j^2(c-b) \iff a + (-1-j^2)b + j^2c = 0$$

On retrouve bien :

$$\boxed{ABC \text{ équilatéral direct} \iff a + jb + j^2c = 0}$$

2. Montrons ensuite que les deux dernières sont équivalentes :

$$a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \iff a(a-b)+b(b-c)+c(c-a) = 0 \iff a(a-b)+bj(a-b)+cj^2(a-b) = 0$$

Et puisque $a - b \neq 0$:

$$\boxed{a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \iff a + jb + j^2c = 0}$$

Correction exercice 8:

Comme le suggère l'indication, écrivons $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Puisque p est impair, on a forcément $p-1$ et $p+1$ multiples de 2, d'où p^2-1, et l'un d'entre eux est même multiple de 4. En rassemblant ces informations on trouve que $p^2 - 1$ est multiple de 8.
De plus, p n'est pas multiple de 3, donc un de ses deux voisins l'est. Donc $p^2 - 1$ est multiple de 3.
Or d'après le lemme de Gauss,

$$\begin{cases} 8 \mid p^2-1 \text{ et } 3 \mid p^2-1 \\ \mathrm{pgcd}(8,3) = 1 \end{cases} \implies \boxed{24 = 3 \times 8 \mid p^2 - 1}$$

Correction exercice 9:

Notons pour tout n, $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ sans entiers consécutifs : son cardinal est a_n.

1. Soit $n \geq 3$. Comment faire pour choisir un élément de $\mathcal{A}_n$? Notons
— $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ sans entiers consécutifs qui contiennent l'entier n
— $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ sans entiers consécutifs qui ne le contiennent pas.
On a alors $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n \cup \mathcal{C}_n$ et $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{C}_n = \emptyset$.
La question est donc de dénombrer $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{C}_n$. Or on sait que :

— Il y a autant d'éléments dans $\mathcal{B}_n$ que dans $\mathcal{A}_{n-2}$, puisqu'une fois qu'on sait que n appartient à l'ensemble considéré, tous les autres entiers dedans doivent être $\leq n-2$, tout en n'étant jamais consécutifs

— En revanche, $\mathcal{C}_n$ contient autant d'éléments que $\mathcal{A}_{n-1}$ puisque, n n'y étant pas, on a le droit d'y entasser des entiers jusqu'à $n-1$ inclus, tant qu'ils ne sont pas consécutifs.

Par conséquent $\text{card}(\mathcal{A}_n) = \text{card}(\mathcal{B}_n) + \text{card}(\mathcal{C}_n) = \text{card}(\mathcal{A}_{n-1}) + \text{card}(\mathcal{A}_{n-2})$.

D'où on conclut :

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

2. Soit a_n une suite de la forme $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$. On calcule, pour $n \geq 3$:

$$a_{n-1}+a_{n-2} = (\alpha r_1^{n-1}+\beta r_2^{n-1})+(\alpha r_1^{n-2}+\beta r_2^{n-2}) = \alpha(r_1^{n-1}+r_1^{n-2})+\beta(r_2^{n-1}+r_2^{n-2}) = \alpha r_1^n+\beta r_2^n = a_n$$

Ces suites vérifient bien la relation de récurrence.

3. Tout d'abord précisons qui sont r_1 et r_2 : le polynôme $X^2 - X - 1$ est de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, il admet donc deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Reste à déterminer les coefficients α et β dans le cas qui nous occupe. Pour cela, il faut regarder ce qui se passe avec les 2 premiers termes, puisque connaissant la relation de récurrence ce sont eux qui déterminent entièrement la suite.

Or on sait que

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

Il faut donc résoudre le système

$$\text{S} : \begin{cases} a_1 = 2 = \alpha r_1 + \beta r_2 & (1) \\ a_2 = 3 = \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \alpha r_1 + \beta r_2 & (1) \\ 1 = \alpha(r_1^2 - r_1) + \beta(r_2^2 - r_2) & (2) \text{ - } (1) \end{cases}$$

$$S \iff \begin{cases} 2 = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2 \\ 1 = \alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \alpha(r_1 - r_2) + r_2 \\ \beta = 1 - \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{2-r_2}{r_1-r_2} \\ \beta = 1-\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \\ \beta = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Donc la suite a_n s'exprime sous la forme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(3+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - (3-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$$

Correction exercice 10:

1. Notons p_n la probabilité que dans la situation décrite et avec un avion à n passagers, le n-ième passager s'assoie sur son siège. On a bien sûr $p_2 = 1/2$. En faisant un petit arbre pondéré, on trouve aussi $p_3 = 1/2$. Les calculs pour 4 passagers seraient un peu long, mais on peut conjecturer que pour tout n, $p_n = 1/2$. Ce sera notre hypothèse de récurrence.

   On vient d'effectuer l'amorce de la démonstration, passons donc à l'hérédité. Supposons la propriété vraie pour un certain n, et regardons ce qui arrive au $(n+1)$-ième passager dans un avion à $(n+1)$ places. Pour cela, distinguons 2 cas :

   — Si la vieille folle s'assoit sur le siège du passager 2 (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{n+1}$), celui-ci choisira un siège au hasard, et les passagers $2, 3..., n, (n+1)$ répètent la même situation dans notre grand avion que les passagers $1, ..., n$ dans la situation de l'avion plus petit de taille n (le premier - numéro 2 - s'assoit au hasard, et les $(n-1)$ suivants font de leur mieux).
   Par conséquent, dans ce premier cas, le passager $(n+1)$ trouvera son siège avec une probabilité p_n.

— Si la vieille folle choisit un autre siège que celui du passager 2 (ce qui arrive avec probabilité $1-\frac{1}{n+1}$), celui-ci s'assiéra sur son siège et ne dérangera plus personne. Les passagers $1, 3, ..., n, (n+1)$ répètent alors la même situation que les passagers $1, ..., n$ de notre avion plus petit (le premier - numéro 1 - s'assoit au hasard, les suivants font de leur mieux).
Par conséquent, dans ce second cas, le passager $(n+1)$ trouvera son siège avec une probabilité p_n également.

En dessinant un arbre distinguant les deux cas ci-dessus, on peut conclure que

$$p_{n+1} = \frac{1}{n+1} p_n + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) p_n$$

C'est là qu'on utilise l'hypothèse de récurrence, qui nous assure que $p_n = 1/2$, et on en déduit donc facilement que $p_{n+1} = 1/2$ aussi. On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{le dernier passager a toujours une chance sur deux d'être assis à sa place}}$$

2. Le nombre moyen de passagers assis à leur place est celui qu'on obtiendrait en moyenne si on répétait l'expérience un grand nombre de fois. Sur un grand nombre d'essais, la vieille serait assise à sa place en moyenne une fois sur 100, et les 99 autres passagers une fois sur deux, ce qui signifie que le nombre moyen de passagers bien assis serait :

$$m = 1 \times \frac{1}{100} + 99 \times \frac{1}{2} = \boxed{49.51}$$

Correction exercice 11:

Supposons par l'absurde f non constante : on va rechercher une contradiction.

Tout d'abord, il existe bien deux entiers consécutifs N et $N+1$ où f prend des valeurs différentes. Sinon, si tous les entiers voisins avaient la même image par f, on aurait $f(0) = f(1) = f(-1)$ et puis $f(1) = f(2) = f(3) = ...$, et de même de l'autre côté. Cela implique f constante, et c'est contraire à notre hypothèse de départ.

Sans perte de généralité, on peut considérer uniquement le cas où $f(N+1) < f(N)$, l'autre se traitant de la même façon. Notons $a = f(N) - f(N+1) > 0$.

En appliquant l'hypothèse faite sur f, on aurait alors $f(N+1) \geq \frac{1}{2}(f(N) + f(N+2))$ d'où $f(N+2) - f(N+1) \leq f(N+1) - f(N) = -a$.

De la même façon, on trouve $f(N+3) - f(N+2) \leq f(N+2) - f(N+1) \leq f(N+1) - f(N) = -a$. Et on peut continuer ainsi indéfiniment.

Autrement dit, à partir de N, la fonction décroît petit à petit, par pas de largeur toujours au moins égale à a. En utilisant toutes ces informations, on en déduit que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(N+n)-f(N) = [f(N+n)-f(N+n-1)]+[f(N+n-1)-f(N+n-2)]+...+[f(N+1)-f(N)] \leq (-a)+(-a)+...+(-a) = -na$$

Cela veut dire que $f(N+n) \to -\infty$ quand $n \to +\infty$, ce qui contredit le fait que f soit minorée. Donc notre hypothèse de départ est absurde. On a alors la réponse :

$$\boxed{\text{les seules fonctions vérifiant ces conditions sont les fonctions constantes}}$$

Correction exercice 12:

Soit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^x = \exp(x \ln x)$$

La fonction f est dérivable, et on calcule

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = (1 + \ln x) \exp(x \ln x)$$

Par conséquent f est strictement croissante.

Supposons qu'un tel triplet existe. On aurait alors forcément $x < z$ et $y < z$ d'où $x \leq z-1$ et $y \leq z-1$. Par croissance de la fonction f, cela implique $f(z) \leq 2f(z-1)$, ce qui correspond à l'indication donnée. Or on a

$$f(z) \leq 2f(z-1) \iff \exp(z\ln z) \leq \exp[\ln 2 + (z-1)\ln(z-1)] \iff z\ln z \leq \ln 2 + (z-1)\ln(z-1)$$

On utilise les propriétés du logarithme :

$$\ln(z-1) = \ln(z) + \ln\left(\frac{z-1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{z-1}{z}\right) = -\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

D'où on déduit :

$$(z-1)\ln\left(\frac{z}{z-1}\right) + \ln z \leq \ln 2$$

Et puisque le premier terme est négatif, car $z-1 < z$, on a

$$\ln z < \ln 2 \implies z < 2$$

Ce qui est absurde. On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Il n'existe aucun triplet } (x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \text{ tel que } x^x + y^y = z^z}$$

Correction exercice 13:

1. (a) On a deux façons de le calculer :

$$f(z^{ab}) = f(z)^{f(ab)} = f[(z^a)^b] = f(z^a)^{f(b)} = (f(z)^{f(a)})^{f(b)} = f(z)^{f(a)f(b)}$$

On peut passer au logarithme :

$$f(ab)\ln(f(z)) = f(a)f(b)\ln(f(z))$$

Et puisque $f(z) > 1$, $\ln(f(z)) \neq 0$ donc

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

(b) Pour tout n on a alors

$$f(z^n) = f(z)^n = f(z)^{f(n)}$$

et par la même manipulation on trouve

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n}$$

2. Si on fait cette hypothèse, f étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

(a) Si $f(1) = 0$, alors $f(1^1) = f(1)^f(1) = 0^0 = 1$ ce qui est contradictoire. Donc

$$f(1) = 1$$

(b) Soient $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Par le même raisonnement que précédemment, en calculant $f(z^{ab})$, on obtient

$$0^{f(ab)} = 0^{f(a)f(b)}$$

— Si $f(a) = f(b) = 1$ on voit que $f(ab) = 0$

— Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ on voit que $f(ab) = 0$.

On a donc bien

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Ce qui nous redonne

$$f(z^n) = f(z)^n$$

(c) En particulier avec $n = z$ on obtient une contradiction. L'hypothèse de l'existence de z est alors absurde :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = 1}$$

Correction exercice 14:

1. On applique la formule donnée, puisque F est composée de deux fonctions dérivables elle est elle-même dérivable. La dérivée de f est, par le théorème fondamental de l'analyse, $f' : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, et on a donc :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad F'(x) = \sin'(x) \times f'(\sin x) = \cos(x)\sqrt{1-\sin^2(x)} = \cos^2(x)$$

2. Encore une conséquence du théorème fondamental.
3. On déduit de la formule proposée que

$$\frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2(x)$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad F(x) = \int_0^x \frac{\cos(2t)+1}{2} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^x = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}$$

4. On trouve en particulier

$$f(1) = F\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right)}{4} + \frac{(\pi/2)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Cela signifie que l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 est $\pi/4$: c'est une démonstration de la formule de l'aire du cercle.