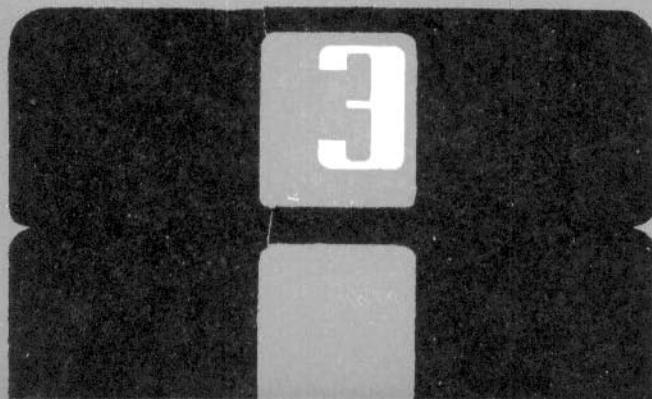


SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

National Council of
Teachers
of Mathematics

Temas
colección de
matemáticas



Sistemas de numeración para los números enteros

3

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

Editorial F. Trillas, S. A.
México 1967



Título de esta obra en inglés:

*Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 3. Numeration Systems for the Whole Numbers
© 1964, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Washington, D.C., U.S.A.*

Tercera reimpresión en inglés: 1965

*La presentación y
disposición en conjunto de
Temas de matemáticas
Cuaderno 3, Sistemas de numeración para los números enteros
son propiedad del editor*

*Derechos reservados en lengua española
© 1967, Editorial F. Trillas, S. A.,
5 de Mayo 43-105, México 1, D. F.*

Primera edición en español: 1967

*Miembro de la Cámara Nacional de
la Industria Editorial, Reg. núm. 158*

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para sus alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, trasmítidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son:

Cuaderno 1. *Conjuntos*

Cuaderno 2. *Números enteros*

Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*

Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*

Cuaderno 5. *Números y sus factores*

Cuaderno 6. *Números racionales*

Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*

Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo (Proposiciones numéricas), que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican al final de este prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

EDWIN F. BECKENBACH
HELEN CURRAN
WALTER FLEMING
GERALDINE GREEN
LOLA MAY

MARLENE SCHROEDER
MARGARET F. WILLERDING
WILLIAM WOOTON
LENORE JOHN, *Coordinadora*

Indice

Orígenes de nuestro sistema de numeración 9

Número y numeral 12

Sistema de numeración indoarábigo 14

 Grupo de ejercicios 1 16

Exponentes 17

 Grupo de ejercicios 2 18

Notación desarrollada 19

 Grupo de ejercicios 3 20

Sistema de numeración de base cuatro 21

 Grupo de ejercicios 4 27

El sistema duodecimal 28

 Grupo de ejercicios 5 30

El sistema binario 30

 Grupo de ejercicios 6 32

El sistema de base ocho (octal) 33

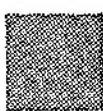
Sistemas de notación posicional 36

 Grupo de ejercicios 7 38

Sumario 39

Respuestas a los grupos de ejercicios 40

Sistemas de numeración para los números enteros



Cuaderno 9

ORIGENES DE NUESTRO SISTEMA DE NUMERACIÓN

"Operadora, por favor comuníqueme con el | | | | | | | | H | | | | | | | |".

"La cápsula espacial está dando vueltas a la Tierra cada | | | n n n
minutos." | | | n n n
n

"El kilometraje de mi carro es MMMCDLXXIV."

¿Reconoce estos signos como numerales de sistemas de numeración? Aunque pueden movernos a risa, estos ejemplos nos ayudarán a darnos cuenta de que el sistema de numeración empleado en la actualidad tiene características útiles. Sin duda, gran parte del progreso del hombre durante las últimas centurias en la ciencia y la tecnología debe atribuirse al desarrollo de la forma eficaz de expresar a los números. Nuestro llamado sistema decimal de notación posicional es la culminación de muchos siglos de desarrollo y participan en su estructura contribuciones de varios sistemas de numeración usados en la antigüedad.

Un sistema de numeración es un modo de representar o expresar números. Implica dos cosas: un conjunto de símbolos y algunas reglas para combinar los símbolos a fin de expresar varios números. Los primeros sistemas de numeración probablemente emplearon un solo símbolo: una marca en alguna superficie, una muesca en un palo o algo semejante. Cada marca o muesca significa el número uno, aunque el concepto de un número como entidad abstracta no haya aflorado en el pensamiento de la persona que ejecutaba las marcas o muescas. En realidad, no se tiene un fundamento preciso para afirmar que el nombre era atribuido al símbolo. Las marcas en las paredes de las cuevas o las muescas en los palos sirvieron simplemente para llevar la cuenta, y si acaso surgieron preguntas sobre la idea de "cuántos", fácilmente pudieron contestarse señalando las marcas o muescas sin recurrir a la terminología técnica, tal como uno, dos, etc.

10 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

Es propio de un sistema de numeración usar un símbolo tal como ||| para denotar lo que ahora llamamos número cuatro; de cualquier modo, es fundamental e intuitiva la suposición de que el *número expresado es la suma de los números simbolizados por cada una de las marcas*.

Fue un gran paso del hombre cuando empezó a agrupar sus marcas para comprenderlas con mayor facilidad. El número empleado como por base para agrupar, tuvo alguna relación con un objeto físico común; así, por los cinco dedos de una mano, surgió el cinco como grupo básico; en igual forma surge el grupo diez por los dedos de ambas manos, y el grupo veinte por los dedos de todas las extremidades. Las palabras que usamos como "veintena" y "docena" indican que no sólo cinco y diez se emplearon como base en la antigüedad.

Casi al mismo tiempo que el hombre empezó a agrupar sus marcas, se dio cuenta de la posibilidad de establecer un conjunto de reglas, o sea, un sistema para la agrupación de aquéllas. Y también empezó a prestar atención a los símbolos que usaba. Una simple marca como /, comúnmente se usó en grupo como ~~HT HTT HTH HTT~~. Sin embargo, cuando se trataba de interpretar rápidamente el total representado, surgían algunos problemas. Entonces, convino en tener distintos símbolos para representar

CUADRO I

Antiguo sistema egipcio de numerales		
Antiguo numeral egipcio	Nombre actual	Numeral decimal
	uno	1
□	diez	10
○	cien	100
△	mil	1 000
↖	diez mil	10 000
○○○□□□	trescientos treinta y tres	333

grupos de diferente cantidad, pero empleando todavía un número particular como base para la agrupación.

El sistema egipcio de numeración, usado antiguamente, indicaba estos puntos con bastante claridad (véase cuadro 1). Observando los ejemplos del cuadro 1 podemos ver que el número diez se empleaba como base para agrupar, y se ven también los símbolos con que representaban los grupos de diferente cantidad. Comparando el numeral egipcio y el numeral decimal posicional, nos damos cuenta de que los egipcios no tenían un sistema posicional. El significado de un numeral del sistema egipcio no se alteraba aunque se cambiara el orden de los símbolos. Por ejemplo, en el sistema egipcio, treinta y dos podía escribirse de varias formas:

$$\square \square \square || \quad 6 \quad \square | \square | \square \quad 6 \quad \square || \square \square ;$$

no obstante, la primera forma era más común. En cada caso, el numeral representaba la suma de los números indicados por los cinco símbolos. Para nosotros cambiaría el significado de nuestro numeral 105 si lo escribiéramos 501. Por otra parte, en el sistema egipcio no había símbolo que representara el cero ni se necesitaba de él.

Aunque bastante desarrollado, el sistema egipcio de numeración (y otros semejantes) tenía diferentes desventajas. Un cálculo puede ser muy engoroso. También, cuando se escogía algún símbolo para expresar un grupo mayor que cualquier otro de los que ya contaban con signo para su representación, se tropezaba con la inseguridad de que otra persona tuviera signo diferente para el mismo grupo.

La numeración babilónica ofrecía características que no tenían los sistemas semejantes al egipcio. Este método tenía rudimentos de un sistema de notación posicional, ya que el mismo símbolo se empleaba para representar diferentes grupos de distinta cantidad, según su posición en el numeral (véase el cuadro II). Sólo dos símbolos, V y <, empleaban para escribir todos los numerales. Se presentaron problemas en la interpretación porque no había manera de indicar la ausencia de un grupo de determi-

CUADRO II

<i>Valor posicional del sistema babilónico</i>			
Trescientos sesenta	sesenta	diez	uno
<	V	<	V

12 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

nada cantidad (para tal objeto, tenemos el símbolo 0). Por ejemplo, el símbolo \lesssim V V podía interpretarse como $(2 \times 10) + (2 \times 1)$ o sea 22. Por otra parte, también podría interpretarse como $(2 \times 360) + (2 \times 60)$ o sea 840; o tal vez como $(2 \times 360) + (2 \times 1)$ o 722. Más tarde, un espacio vacío se destinó para el mismo propósito que el cero; y después, el símbolo : reemplazó al espacio vacío.

Un sistema de notación posicional, como el nuestro, no comenzó a desarrollarse sino cuando tuvo lugar lo que sigue:

1. Se aceptaron unos cuantos símbolos que podrían escribirse con relativa facilidad, y que representaban a los números que nosotros simbolizamos con los signos: 1, 2, 3, ..., 9.
 2. Estos símbolos se combinaron para formar numerales representativos de números mayores; y la posición del símbolo significaba el número a que se refería.
 3. Se reconoció la necesidad de un símbolo representativo del cero y el símbolo se adoptó.

Aún después de este progreso, tardó tiempo para que el sistema decimal de notación posicional se difundiera. Una anécdota refiere que todavía en 1790, el Banco de Londres registraba sus cuentas mediante muescas hechas en palos; éstas se tajaban transversalmente y el palo se cortaba a lo largo de su eje; una de las dos partes se daba al depositante, mientras que la otra se guardaba en el banco. Como deseara perfeccionar su sistema de cuentas, el banco adoptó formas modernas y resolvió quemar los palos muescados. Infortunadamente, no se pudo dominar el fuego y se quemó el banco.

NUMERO Y NUMERAL

Dos términos matemáticos que suelen confundirse son *números* y *numeral*. Estos términos no son sinónimos y los principios de numeración no pueden aplicarse eficientemente mientras no se distinga la significación precisa de estas dos palabras.

¿Qué es número? Básicamente, es una idea asociada a un conjunto * de objetos, tal como el conjunto A definido como sigue:

$$A = \left\{ \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \right\}$$

* Véase el cuaderno 1: *Conjuntos*.

La misma idea de número puede asociarse con otros conjuntos equivalentes a A . (Recuerde que conjuntos equivalentes son aquellos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca.) Algunos de esos conjuntos se muestran en la figura 1.

Ahora considérese todos los conjuntos equivalentes a cualquiera de los conjuntos de la figura 1. Entre ellos se encontrará el conjunto estándar:*

$$\{“1”, “2”, “3”, “4”, “5”\}.$$

Todos estos conjuntos tienen una propiedad común, que consiste en ser equivalente al mismo conjunto. Esta propiedad, ajena a la naturaleza de los elementos de los conjuntos, se llama número cinco. Obsérvese que esto se obtiene mediante el último numeral del conjunto estándar,

$$\{“1”, “2”, “3”, “4”, “5”\}.$$

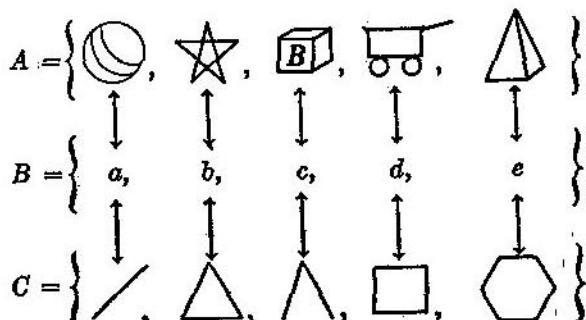


FIGURA 1

De igual modo {“1”}, puede emplearse para identificar la propiedad común de todos los conjuntos equivalentes, y esa propiedad se llama número uno; {“1”, “2”}, puede emplearse para identificar la propiedad común de todos los conjuntos a los que éste equivale, la propiedad se llama número dos, etcétera.

¿Qué es un numeral? Numeral es un símbolo empleado para representar un número. Los numerales, entonces, son como vehículo para comunicar ideas de números.

Examinemos algunos numerales:

$$5, \text{ HHT}, \text{ V}, \text{ } 2+3, \text{ } (2\times 2) + 1, \text{ } 7-2.$$

* Las comillas indican que los símbolos en sí son los que se están considerando y no los números que aquellos representan.

14 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

Todos estos numerales representan el número cinco. El hecho es que el símbolo 5 es el más simple (al menos lo es para nosotros; ¡quizá los romanos pensaban que V era el símbolo más sencillo para representar el número cinco!), pero de ninguna manera significa esto que las otras formas sean menos correctas para representar la idea del número cinco.

También debe hacerse una distinción entre los conceptos de *sistema de numeración* y *sistema numérico*. El concepto de sistema numérico es mucho más general que el concepto de sistema de numeración. Un sistema numérico tal como el sistema de números enteros es, como su nombre lo indica, un sistema de números independiente de los símbolos usados para representar a aquellos. Un sistema de numeración, en cambio, es la manera de representar los números mediante símbolos de acuerdo con reglas específicas que no conciernen directamente a las propiedades de los números.

SISTEMA DE NUMERACION INDOARABIGO

Todos los sistemas de numeración tienen ciertas características en común. Una de ellas es que sólo se emplea un número limitado de símbolos. Puesto que el conjunto de símbolos utilizados es finito y el conjunto de números enteros es infinito (no hay un número entero máximo), es necesario usar algunos símbolos más de una vez para representar tales números.

El sistema indoarábigo es un sistema posicional con símbolos adoptados para el cero, uno, dos, tres, etc., hasta el nueve. El siguiente número, diez, desempeña un oficio especial en este sistema y se llama base del sistema. El sistema se llama decimal, por ser diez su base. Decimal viene del vocablo latino *decem* que significa diez.

A los símbolos del conjunto

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

frecuentemente se les llama dígitos; son numerales que representan los números del cero al nueve. Para escribir un símbolo que represente el diez, y para los números mayores de nueve, usamos dos o más dígitos, escritos de acuerdo con un modelo determinado por nuestro sistema posicional.

Veamos el numeral de un número que requiera varios dígitos y consideremos lo que significa el sistema posicional. El número quinientos sesenta y nueve se escribe 569.

$$569 = (cinco \times cien) + (seis \times diez) + (nueve \times uno)$$

Los numerales en los círculos indican las tres posiciones que implica este caso. El dígito 9 ocupa la posición 0, el dígito 6 ocupa la posición 1, y el dígito 5 ocupa la posición 2. A cada posición se asigna un número que es el valor posicional de dicha posición; el valor posicional de la posición 0 es uno; diez es el valor posicional de la posición 1, y cien es el valor posicional de la posición 2, como se muestra en el cuadro III. En el sistema de base diez el valor posicional asignado a cada posición varía de diez en diez, de tal modo que el valor de una posición es diez veces mayor que el valor de la posición inmediata, situada a la derecha. El valor posicional es un número asignado a una posición independiente del dígito que la ocupa. Es decir, un dígito cualquiera puede ocupar cualquier posición.

CUADRO III

<i>Valor posicional de base diez</i>			
<i>Posición 3</i>	<i>Posición 2</i>	<i>Posición 1</i>	<i>Posición 0</i>
mil	cien	diez	uno
$1\ 000 = 10 \times 100$	$100 = 10 \times 10$	$10 = 10 \times 1$	1

El número representado por el dígito 5 en el numeral 569 es un producto. Es el producto del número cinco por el valor posicional asignado a la posición 2, que es cien. El número representado por el dígito 6 es el producto de seis por el valor posicional asignado a la posición 1, que es diez. El 9 representa el producto de nueve por el valor posicional asignado a la posición 0, o sea uno. Todo el numeral representa la suma de los tres productos:

$$\begin{aligned}
 569 &= (5 \times 100) + (6 \times 10) + (9 \times 1) \\
 &= 500 + 60 + 9 \\
 &= 569.
 \end{aligned}$$

Resumiendo: los dos principios básicos del sistema indoárabigo son el *principio de notación posicional* y el *principio aditivo*. El principio de notación posicional incluye dos ideas:

16 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

1. Hay un número asignado a cada posición en el numeral. Este se llama valor posicional de la posición.
2. Cada dígito representa el producto del número que simboliza por el valor posicional asignado a su posición.

El principio aditivo significa que el número simbolizado es la suma de los productos de que hablamos.

El sistema posicional puede, por supuesto, tener otra base diferente de diez; de hecho, todo número natural mayor que uno puede emplearse como base de un sistema posicional.

Nuestro sistema posicional también se emplea para escribir numerales que no representan números enteros.* Para eso se emplea el punto decimal y los valores posicionales menores que uno se asigna a las posiciones situadas a la derecha de la posición 0.

Grupo de ejercicios 1

1. Dé cinco expresiones diferentes para cada uno de los siguientes números:
a) siete, b) uno, c) cero.
2. Exprese los siguientes números como suma de productos:
a) 57 b) 419 c) 620 d) 2 087
3. ¿Cuál es el valor posicional de la posición ocupada por cada uno de los siguientes dígitos?
a) "3" en el numeral 637 c) "2" en el numeral 2 146
b) "0" en el numeral 490 d) "5" en el numeral 50 000
4. Complete las siguientes proposiciones:
 - a) En el numeral 2 307, el valor posicional que corresponde a la posición del "3" es _____ veces más grande que el valor posicional que corresponde a la posición del "0".
 - b) En el numeral 2 307, el valor posicional que corresponde a la posición del "2" es _____ veces más grande que el valor posicional que corresponde a la posición del "0".

* Véase el cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales*.

- c) En el numeral 619 411, el valor posicional correspondiente a la posición del "6" es _____ veces más grande que el valor posicional que corresponde a la posición del "4".

Exponentes

En nuestro sistema de numeración decimal (de base diez) sabemos que 1, 10, 10×10 , $10 \times 10 \times 10$, etc., desempeñan un importante oficio. Con excepción del primero, todos los demás constan de un solo número, empleado como factor una o varias veces y pueden escribirse de una manera condensada; entonces,

$$\begin{aligned}1 &= 10^0, \\10 &= 10^1, \\10 \times 10 &= 10^2, \\10 \times 10 \times 10 &= 10^3, \\10 \times 10 \times 10 \times 10 &= 10^4.\end{aligned}$$

El numeral 10^4 se llama *forma exponencial* del número 10 000.

El número que se repite como factor, en este caso 10, se llama *base* de esta expresión. El índice en el extremo superior a la derecha de la base se usa para señalar cuántas veces se toma ésta como factor. Este índice se llama *exponente*. Entonces, en

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

la base es 10 y el exponente 5. Leemos " 10^5 " como diez a la quinta potencia. La expresión " 10^4 " como diez a la cuarta potencia. La expresión " 10^3 " como diez a la tercera potencia o diez al cubo. La expresión " 10^2 " como diez a la segunda potencia o diez al cuadrado. Llamamos *potencias* de diez a los siguientes números: 1, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1\,000$, etc.

La base de una potencia puede ser cualquier número natural y también cero si el exponente no es cero. Entonces, la tercera potencia de cinco es:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125.$$

El numeral 5^3 es la forma exponencial de 125.

Si el exponente es uno, se dice que la potencia es igual a la base:

$$\begin{aligned}3^1 &= 3 \\2^1 &= 2 \\10^1 &= 10.\end{aligned}$$

18 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

Cuando el exponente es cero y no es cero la base, la potencia se define como uno:

$$5^0 = 1$$

$$10^0 = 1$$

$$4^0 = 1$$

Consideré los números:

$$10^0 = 1,$$

$$10^1 = 10,$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100,$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000,$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000,$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000,$$

$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000.$$

Observe que 10^6 es otra expresión para 1 000 000; este numeral consta de un "1" seguido por seis "0". De igual modo:

$$10^7 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000\,000.$$

10^7 puede representarse por un numeral compuesto de un "1" seguido por siete "0".

Esto es cierto en general, si n es cualquier número natural, entonces el número 10^n puede representarse por un numeral que conste de un "1" seguido por n "0".

$$10^8 = 100\,000\,000,$$

$$10^{10} = 10\,000\,000\,000.$$

Grupo de ejercicios 2

1. Exprese los siguientes numerales usando exponentes.

a) $5 \times 5 \times 5$

d) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

b) 11×11

e) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$

c) $2 \times 2 \times 2 \times 2$

f) $100 \times 100 \times 100$

2. Exprese cada una de las siguientes potencias como el producto de factores iguales. Ejemplo: $7^8 = 7 \times 7 \times 7$.

a) 4^8

d) 13^6

b) 3^4

e) 67^2

c) 10^6

f) 2^{12}

3. Escriba cada uno de los siguientes numerales en forma exponencial.

- | | |
|--------|---------------|
| a) 27 | d) 10 000 000 |
| b) 25 | e) 10 |
| c) 216 | f) 1 |

Notación desarrollada

Para escribir numerales en el sistema decimal el número diez se emplea como base. Cualquier posición después de la posición 0 tiene un valor posicional diez veces mayor que la posición inmediata a la derecha (fig. 2).

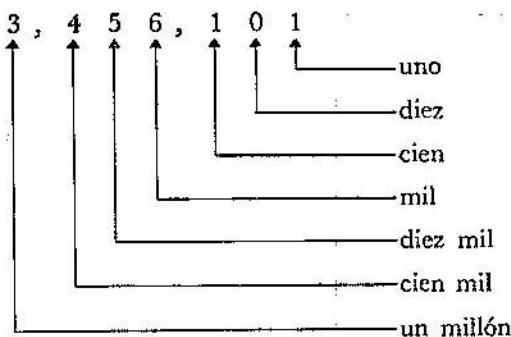


FIGURA 2

El valor posicional de las posiciones 0, 1, 2, 3, 4 y 5, se expone en el cuadro IV.

Veamos cómo puede representarse un número entero mediante una expresión que tenga exponentes. Considérese, por ejemplo, el número cuyo numeral de base diez es 352.

$$\begin{aligned} 352 &= 300 + 50 + 2 \\ &= (3 \times 100) + (5 \times 10) + (2 \times 1) \\ &= (3 \times 10 \times 10) + (5 \times 10) + (2 \times 1) \\ &= (3 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (2 \times 10^0); \end{aligned}$$

también:

$$\begin{aligned} 1\,684 &= 1\,000 + 600 + 80 + 4 \\ &= (1 \times 1\,000) + (6 \times 100) + (8 \times 10) + (4 \times 1) \\ &= (1 \times 10 \times 10 \times 10) + (6 \times 10 \times 10) + (8 \times 10) + (4 \times 1) \\ &= (1 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (4 \times 10^0); \end{aligned}$$

CUADRO IV

<i>Valor posicional de base diez</i>		
<i>Posición</i>	<i>Valor posicional</i>	<i>Valor posicional (como potencial de diez)</i>
0	uno	$1 = 1 = 10^0$
1	diez	$10 = 10 = 10^1$
2	cien	$10 \times 10 = 100 = 10^2$
3	mil	$10 \times 10 \times 10 = 1\,000 = 10^3$
4	diez mil	$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000 = 10^4$
5	cien mil	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000 = 10^5$

y

$$\begin{aligned}
 34\,026 &= 30\,000 + 4\,000 + 0 + 20 + 6 \\
 &= (3 \times 10\,000) + (4 \times 1\,000) + (0 \times 100) + (2 \times 10) + (6 \times 1) \\
 &= (3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) + (4 \times 10 \times 10 \times 10) + (0 \times 10 \times 10) \\
 &\quad + (2 \times 10) + (6 \times 1) \\
 &= (3 \times 10^4) + (4 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (6 \times 10^0).
 \end{aligned}$$

Esta forma de expresar un número se llama *notación desarrollada*.

Nótese que cuando un numeral, que representa a un número entero, tiene tres dígitos, la potencia de diez más alta en la notación desarrollada es dos ($3 - 1$) ; cuando el numeral tiene cuatro dígitos, la potencia de diez más alta es tres ($4 - 1$) ; cuando el numeral tiene cinco dígitos, la potencia de diez más alta es cuatro ($5 - 1$) .

En términos generales, si el numeral que representa un número entero tiene n dígitos, la potencia de diez más alta es $(n - 1)$.

Grupo de ejercicios 3

1. Escriba cada uno de los siguientes numerales con la notación desarrollada.

- | | | |
|-----------------|------------------|---------------------|
| <i>a)</i> 607 | <i>c)</i> 1 009 | <i>e)</i> 4 819 000 |
| <i>b)</i> 4 800 | <i>d)</i> 14 290 | <i>f)</i> 100 |

2. Pase los siguientes numerales de base diez de la forma desarrollada a la forma ordinaria.

- a) $(2 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
- b) $(4 \times 10^4) + (3 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$
- c) $(3 \times 10^8) + (0 \times 10^5) + (2 \times 10^4) + (0 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (6 \times 10^1)$
 $+ (0 \times 10^0)$
- d) $(1 \times 10^5) + (0 \times 10^4) + (0 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$

Sistema de numeración de base cuatro

Estamos tan familiarizados con nuestro sistema de numeración decimal (de base diez) que algunas veces rehusamos comprender que sólo es uno entre muchos sistemas de numeración que tienen como característica el valor posicional, pero con distintas bases.

Un estudio de sistemas de numeración de bases diferentes de diez, refuerza la comprensión de nuestro propio sistema de base diez. Considere el siguiente ejemplo:

En cierta escuela se planeaba un día deportivo. A cada maestro se le preguntó cuántos equipos de muchachos podría proporcionar para los siguientes eventos:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| 1) beisbol | 9 muchachos en cada equipo |
| 2) futbol | 11 muchachos en cada equipo |
| 3) boliche | 4 muchachos en cada equipo |
| 4) basquet | 5 muchachos en cada equipo |
| 5) carrera de relevos | 10 muchachos en cada equipo |

CUADRO V

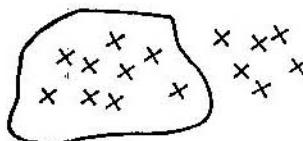
Equipos para el día deportivo

Evento	Núm. de jugadores por equipo	Número de equipos	Número de reservas
beisbol	nueve	1	6
futbol	once	1	4
boliche	cuatro	3	3
basquet	cinco	3	0
relevos	diez	1	5

22 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

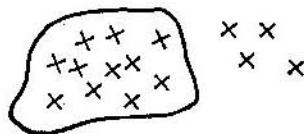
La señorita Pérez, que tiene 15 muchachos en su clase, remitió al director la información dada en el cuadro V. Examinemos el sistema de agrupación que usó la señorita Pérez para llenar el cuadro.

Para beisbol, agrupó en conjuntos de nueve:



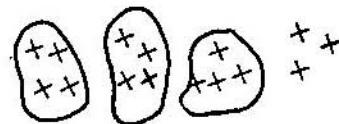
$$(1 \times \text{nueve}) + 6$$

Para futbol, agrupó conjuntos de once:



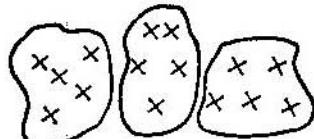
$$(1 \times \text{once}) + 4$$

Para boliche, agrupó en conjuntos de cuatro:



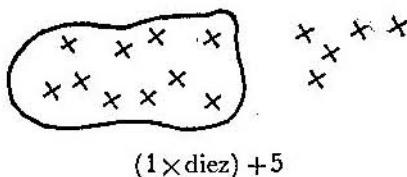
$$(3 \times \text{cuatro}) + 3$$

Para basquet, agrupó en conjuntos de cinco:



$$(3 \times \text{cinco}) + 0$$

Para relevos, agrupó en conjuntos de diez:



Nótese que en el caso de los relevos (diez en cada equipo) el número quince se expresó como

$$(1 \times \text{diez}) + 5.$$

En nuestro sistema de numeración,

$$(1 \times \text{diez}) + 5$$

puede abreviarse 15.

En el caso del béisbol (nueve en cada equipo) quince se expresó de esta manera:

$$(1 \times \text{nueve}) + 6.$$

¿Puede abreviarse esta forma? Sí, puede escribirse como 16 si se entiende que el símbolo "1" representa un grupo de nueve en lugar de un grupo de diez. Una manera adecuada de escribir lo anterior es

$$16_{\text{nueve}},$$

donde la palabra "nueve" escrita como subíndice, indica que el "1" representa un grupo de nueve (base). El símbolo 16_{nueve} se lee "uno, seis, base nueve".

Examinando el resto del cuadro observamos que quince también puede escribirse como

$$14_{\text{once}}, \quad 33_{\text{cuatro}}, \quad 30_{\text{cincio}}.$$

Es evidente que el número de objetos de un conjunto determinado siempre es el mismo (en este caso quince), no importa cómo se agrupen los objetos ni con qué numerales se represente el agrupamiento.

En cualquier sistema de numeración de notación posicional, los símbolos son escogidos para los números cero, uno, dos, y así sucesivamente; pero sin incluir la base. Por ejemplo, en el sistema decimal hay símbolos para los números cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. En el sistema de base cuatro, hay símbolos para los números cero, uno, dos, tres. Cada uno de los cuales representa un número asociado con un conjunto modelo, como se muestra:

24 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

{ }	0
{×}	1
{××}	2
{×××}	3.

Ahora que hemos visto los símbolos del sistema de base cuatro. ¿Qué numeral se empleará para representar el número del conjunto

④ $\{ \times \times \times \times \} ?$

Aplicando el principio de notación posicional lo escribiremos con dos dígitos: 10_{cuatro} y leemos este numeral “uno, cero, base cuatro” esto significa un conjunto de cuatro elementos y no más. Aplicando el mismo procedimiento nos damos cuenta de que los numerales para los números siguientes son:

$\{(\times \times \times \times) \times\}$	11_{cuatro} un cuatro y uno
$\{(\times \times \times \times) \times \times\}$	12_{cuatro} un cuatro y dos
$\{(\times \times \times \times) \times \times \times\}$	13_{cuatro} un cuatro y tres
$\{(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)\}$	20_{cuatro} dos cuatros
$\{(\times \times \times \times)(\times \times \times \times) \times\}$	21_{cuatro} dos cuatros y uno
•	•
•	•
•	•
$\{(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)(\times \times \times \times) \times \times\}$	32_{cuatro} tres cuatros y dos
$\{(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)(\times \times \times \times) \times \times \times\}$	33_{cuatro} tres cuatros y tres

Ahora que estamos familiarizados con los posibles numerales de dos dígitos de base cuatro, ¿cómo podemos escribir el numeral del conjunto que tiene un miembro más que el último que hemos visto, es decir

$\{(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)(\times \times \times \times) \times \times \times \leftarrow \times\} ?$

Cuando se añade un miembro más tenemos cuatro conjuntos de cuatro:

$$\boxed{\{(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)\}}.$$

Se ha formado un nuevo grupo (dentro del rectángulo) y el número asociado con él es cuatro cuatros. Si tenemos un grupo cualquiera de cuatro, y formamos un nuevo grupo; trabajamos entonces con base cuatro. El numeral para este nuevo grupo es 100_{cuatro} . Esto significa un conjunto de cuatro cuatros, ningún conjunto de cuatros y ninguna unidad. El nu-

meral 100_{cuatro} se lee "uno, cero, cero, base cuatro". Ahora consideremos el agrupamiento en este conjunto:

$$\boxed{(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)(\times \times \times \times)} \quad (\times \times \times \times) \times \times \}.$$

El numeral para el número de este conjunto de objetos es 112_{cuatro} . Esto es un grupo de cuatro cuatros, un grupo de cuatros y dos unidades.

Los valores posicionales de la base cuatro (vea el cuadro VI) tiene posiciones 0, 1, 2, etc., como en la base diez, pero el valor posicional asignado a cada posición es diferente que el del sistema de base diez. La posición cero, a la derecha, tiene valor posicional uno, o $cuatro^0$. Después de ésta, cada valor posicional es cuatro veces el valor posicional de la posición inmediata a la derecha. La posición 1 tiene el valor posicional de la base, en este caso cuatro. La posición 2 tiene un valor posicional de ($cuatro \times cuatro$) o sea dieciséis. El valor posicional de la posición 3 es sesenta.

CUADRO VI

Notación posicional de base cuatro			
Posición 3	Posición 2	Posición 1	Posición 0
sesenta y cuatro	dieciséis	cuatro	uno
cuatro \times cuatro \times cuatro	cuatro \times cuatro	cuatro	uno
cuatro ³	cuatro ²	cuatro ¹	cuatro ⁰

Expresemos el número representado por el numeral 312_{cuatro} en notación desarrollada:

$$\begin{array}{cccc} (2) & (1) & (0) & \\ 3 & 1 & 2_{cuatro} & \end{array} = \text{(tres} \times \text{dieciséis)} + \text{(uno} \times \text{cuatro)} + \text{(dos} \times \text{uno)}.$$

Los numerales dentro de los círculos indican que hay tres posiciones en este numeral. El dígito 2 ocupa la posición 0; el dígito 1 ocupa la posición 1 y el dígito 3 ocupa la posición 2. Cada posición tiene asignado un número que es el valor posicional de dicha posición. Uno es el valor posicional de la posición 0; cuatro es el valor posicional de la posición 1, y dieciséis es el valor posicional de la posición 2. Cualquier dígito de éstos, 0, 1, 2, 3, en base cuatro puede ocupar cualquier posición.

Para encontrar un numeral de base diez que simbolice el número representado por el numeral 312_{cuatro} , necesitamos aplicar el principio de notación posicional. El número representado por cada dígito en este numeral es un producto. El número representado por el dígito 3 es el producto de 3 por el valor posicional asignado a la posición 2; en este caso dieciséis. El número representado por el dígito 1 es el producto de uno por el valor posicional asignado a la posición 1; esto es cuatro. El número representado por el dígito 2 es el producto de dos por el valor posicional asignado a la posición cero; o sea uno. Por último, el numeral completo representa la suma de los tres productos:

$$312_{\text{cuatro}} = [3 \times (\text{cuatro} \times \text{cuatro})] + (1 \times \text{cuatro}) + (2 \times \text{uno}).$$

En numerales de base diez

$$\begin{aligned} & (3 \times 16_{\text{diez}}) + (1 \times 4_{\text{diez}}) + (2 \times 1_{\text{diez}}) \\ &= 48_{\text{diez}} + 4_{\text{diez}} + 2_{\text{diez}} \\ &= 54_{\text{diez}}. \end{aligned}$$

Asimismo, $323_{\text{cuatro}} = 59_{\text{diez}}$; esto es 323_{cuatro} y 59_{diez} son numerales que representa el mismo número, cincuenta y nueve.

Para escribir un numeral de base diez que signifique el número representado por 132_{cuatro} , primero expresamos el número en notación desarrollada:

$$\begin{aligned} 132_{\text{cuatro}} &= [1 \times (\text{cuatro} \times \text{cuatro})] + (3 \times \text{cuatro}) + (2 \times \text{uno}) \\ &= (1 \times 4^2_{\text{diez}}) + (3 \times 4^1_{\text{diez}}) + 2 \times 4^0_{\text{diez}} \\ &= 16_{\text{diez}} + 12_{\text{diez}} + 2_{\text{diez}} \\ &= 30_{\text{diez}}. \end{aligned}$$

Los siguientes conjuntos (figura 3) muestran que el mismo número de elementos se representa por 132_{cuatro} y 30_{diez} .

Para escribir mediante un numeral de base cuatro un número representado por un numeral de base diez, imagínense los objetos en conjuntos modelo en grupos de cuatro. Entonces, si tenemos 46 objetos (46_{diez}) ¿puede formarse un conjunto de dieciséis objetos? Sí, podemos formar dos conjuntos de dieciséis objetos y entonces colocaremos "2" en la posición 2. (Véase cuadro 6.) Tenemos agrupados treinta y dos objetos y catorce sin agrupar. ¿Podemos formar conjuntos de cuatro objetos cada uno, de estos catorce objetos? Sí, podemos formar tres conjuntos de cuatro objetos. Escribamos "3" en la posición 1. Sobran dos objetos, por tanto escribamos "2" en la posición 0.

De acuerdo con esto tenemos:

$$\begin{aligned}
 46_{\text{diez}} &= 32_{\text{diez}} + 12_{\text{diez}} + 2_{\text{diez}} \\
 &= (2 \times 16_{\text{diez}}) + (3 \times 4_{\text{diez}}) + 2_{\text{diez}} \\
 &= (2 \times \text{cuatro}^2) + (3 \times \text{cuatro}^1) + (2 \times \text{cuatro}^0) \\
 &= 232_{\text{cuatro}}
 \end{aligned}$$

Entonces, 46_{diez} y 232_{cuatro} representan el mismo número.

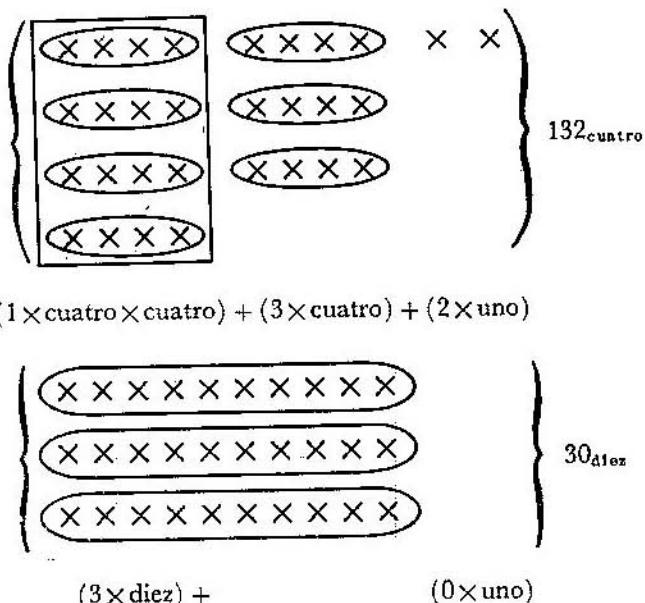


FIGURA 3

Grupo de ejercicios 4

- Escriba los numerales de base cuatro que representan a los números del 1 al 25.
- ¿Qué números representan los numerales 132_{cuatro} ? ¿ 200_{cuatro} ?
- ¿Cuál es el mayor número que puede representarse por un numeral de 3 dígitos en base cuatro? ¿Puede usted escribir el numeral de base cuatro? ¿El numeral decimal?

4. Escriba cada uno de los siguientes numerales en notación desarrollada.

Ejemplo: $321_{\text{cuatro}} = (3 \times \text{cuatro}^2) + (2 \times \text{cuatro}^1) + (1 \times \text{cuatro}^0)$.

a) 30_{cuatro}

d) 330_{cuatro}

b) 201_{cuatro}

e) 233_{cuatro}

c) 33_{cuatro}

f) $1\,000_{\text{cuatro}}$

EL SISTEMA DUODECIMAL

Hemos visto cómo construir un sistema de numeración de base distinta de diez. Aunque empleamos la base cuatro, que es menor que diez, podemos también emplear una base mayor que diez.

Convendría tener una base relacionada con las unidades comunes de medida. Muchas unidades están basadas en doce. Hay doce pulgadas en un pie, doce horas en la carátula de un reloj, y doce huevos en una docena.

Un sistema de numeración de base doce se llama *sistema duodecimal*. En el sistema duodecimal tenemos doce símbolos, y formamos grupos de doce (docena), doce docenas (gruesa), doce docenas de docenas, etc. Necesitamos nuevos símbolos. Los símbolos T y E frecuentemente se usan para diez y once, respectivamente. Nuestros doce dígitos son:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \text{T}, \text{E}\}.$$

En el sistema duodecimal agrupamos en conjuntos de doce. Entonces, el numeral para esta colección:

$$\{\times \times \quad \times \times \times\}$$

es 13_{doce} (se lee "uno, tres, base doce", "una docena y tres") porque tenemos una docena (doce) y tres unidades.

El cuadro VII muestra numerales de los sistemas decimal y duodecimal.

Cuando los símbolos T y E se usan para diez y once en el sistema duodecimal tenemos algunos numerales interesantes, tales como

$$\begin{aligned} &\text{TOE}_{\text{doce}} \\ &\text{T00}_{\text{doce}} \\ &\text{TEE}_{\text{doce}} \\ &\text{ET}_{\text{doce}} \end{aligned}$$

¿Cuál es el numeral decimal que expresa el numeral TOE_{doce} ?

CUADRO VII

<i>Notación decimal</i>	<i>Agrupación duodecimal</i>	<i>Notación duodecimal</i>
0		0
1	x	1
2	xx	2
3	xxx	3
4	xxxx	4
5	xxxxx	5
6	xxxxxx	6
7	xxxxxxx	7
8	xxxxxxx	8
9	xxxxxxx	9
10	xxxxxxx	T
11	xxxxxxx	E
12	xxxxxxx	10
13	xxxxxxxx	11
14	xxxxxxxx	12
.	.	.
24	xxxxxxxx	20
.	.	.
35	xxxxxxxx	2E
	xxxxxxxx	

Usamos el mismo método para cambiar un numeral de base diez a base doce que es el que usamos para cambiar de base diez a base cuatro. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 35_{\text{diez}} &= 24_{\text{diez}} + 11_{\text{diez}} \\
 &= (2 \times \text{doce}^1) + (\text{E} \times \text{doce}^0) \\
 &= 2\text{E}_{\text{doce}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 148_{\text{diez}} &= 144_{\text{diez}} + 4_{\text{diez}} \\
 &= (1 \times \text{doce}^2) + (0 \times \text{doce}^1) + (4 \times \text{doce}^0) \\
 &= 104_{\text{doce}}
 \end{aligned}$$

30 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

Grupo de ejercicios 5

1. Escriba los numerales decimales correspondientes a los números que expresan los siguientes numerales:
 - a) $T0_{\text{doce}}$
 - b) $3T_{\text{doce}}$
 - c) ET_{doce}
 - d) $1TT_{\text{doce}}$

2. Escriba los numerales duodecimales correspondientes a los números expresados por los siguientes numerales decimales.
 - a) 37_{diez}
 - b) 34_{diez}
 - c) 131_{diez}
 -

3. Escriba los siguientes numerales duodecimales en notación exponencial.
 - a) 132_{doce}
 - b) $T0E_{\text{doce}}$
 - c) 64_{doce}

EL SISTEMA BINARIO

Desde un punto de vista práctico, el sistema de notación posicional más importante, exceptuando el decimal, es probablemente el de base dos, llamado *sistema binario* de numeración. El trabajo de las modernas computadoras electrónicas está basado en la notación binaria para los números. De aquí la atención especial que concedemos a este sistema de numeración.

El sistema binario requiere sólo dos símbolos 0 y 1. Los valores posicionales de este sistema son potencias de dos, que son: uno, dos, dos \times dos,

CUADRO VIII

Notación base diez	Agrupamiento binario	Notación binaria
0		0
1	x	1
2	xx	10
3	xx x	11
4	xxxx	100
5	xxxx x	101
6	xxxx xx	110
7	xxxx xx x	111
8	xxxx xx xx	1 000

$\text{dos} \times \text{dos} \times \text{dos}$, y así sucesivamente. El numeral binario para dos es 10_{dos} puesto que,

$$10_{\text{dos}} = (1 \times \text{dos}) + (0 \times \text{uno}).$$

Los numerales binarios se agrupan de dos en dos, tal como en el sistema decimal se agrupa de diez en diez. El cuadro VIII muestra la relación que existe entre los numerales de base dos y los respectivos de base diez.

Los valores posicionales del sistema de numeración binaria se muestran en el siguiente cuadro,

CUADRO IX

Valores posicionales de base dos						
Posición 6	Posición 5	Posición 4	Posición 3	Posición 2	Posición 1	Posición 0
sesenta y cuatro	treinta y dos	dieciséis	ochos	cuatro	dos	uno
$\text{dos} \times \text{dos}$ $\times \text{dos} \times$ $\text{dos} \times \text{dos}$ $\times \text{dos}$	$\text{dos} \times \text{dos}$ $\times \text{dos} \times$ $\text{dos} \times \text{dos}$	$\text{dos} \times \text{dos}$ $\times \text{dos} \times$ dos	$\text{dos} \times \text{dos}$ $\times \text{dos}$	$\text{dos} \times \text{dos}$	dos	uno
dos^6	dos^5	dos^4	dos^3	dos^2	dos^1	dos^0

Veamos algunos numerales binarios:

$$\begin{aligned} 1101_{\text{dos}} &= (1 \times \text{dos}^3) + (1 \times \text{dos}^2) + (0 \times \text{dos}^1) + (1 \times \text{dos}^0) \\ &= (1 \times \text{ocho}) + (1 \times \text{cuatro}) + (0 \times \text{dos}) + (1 \times \text{uno}) \\ &= (1 \times 8_{\text{diez}}) + (1 \times 4_{\text{diez}}) + (0 \times 2_{\text{diez}}) + (1 \times 1_{\text{diez}}) \\ &= 8_{\text{diez}} + 4_{\text{diez}} + 0 + 1_{\text{diez}} \\ &= 13_{\text{diez}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11011_{\text{dos}} &= (1 \times \text{dos}^4) + (1 \times \text{dos}^3) + (0 \times \text{dos}^2) + (1 \times \text{dos}^1) + (1 \times \text{dos}^0) \\ &= (1 \times \text{dieciséis}) + (1 \times \text{ocho}) + (0 \times \text{cuatro}) + (1 \times \text{dos}) + 1 \\ &= (1 \times 16_{\text{diez}}) + (1 \times 8_{\text{diez}}) + (0 \times 4_{\text{diez}}) + (1 \times 2_{\text{diez}}) + (1 \times 1_{\text{diez}}) \\ &= 16_{\text{diez}} + 8_{\text{diez}} + 0 + 2_{\text{diez}} + 1_{\text{diez}} \\ &= 27_{\text{diez}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 111111_{\text{dos}} &= (1 \times \text{dos}^5) + (1 \times \text{dos}^4) + (1 \times \text{dos}^3) + (1 \times \text{dos}^2) \\ &\quad + (1 \times \text{dos}^1) + (1 \times \text{dos}^0) \\ &= (1 \times \text{treinta y dos}) + (1 \times \text{dieciséis}) + (1 \times \text{ocho}) \\ &\quad + (1 \times \text{cuatro}) + (1 \times \text{dos}) + (1 \times \text{uno}) \end{aligned}$$

32 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

$$\begin{aligned}
 &= (1 \times 32_{\text{diez}}) + (1 \times 16_{\text{diez}}) + (1 \times 8_{\text{diez}}) + (1 \times 4_{\text{diez}}) \\
 &\quad + (1 \times 2_{\text{diez}}) + (1 \times 1_{\text{diez}}) \\
 &= 32_{\text{diez}} + 16_{\text{diez}} + 8_{\text{diez}} + 4_{\text{diez}} + 2_{\text{diez}} + 1_{\text{diez}} \\
 &= 63_{\text{diez}}
 \end{aligned}$$

Podemos cambiar numerales decimales a numerales binarios por los mismos métodos que empleamos para cambiar numerales de base diez a base cuatro. Por ejemplo, obtengamos el numeral binario correspondiente a 12_{diez} :

$$\begin{aligned}
 12_{\text{diez}} &= 8_{\text{diez}} + 4_{\text{diez}} \\
 &= (1 \times 8_{\text{diez}}) + (1 \times 4_{\text{diez}}) + (0 \times 2_{\text{diez}}) + (0 \times 1_{\text{diez}}) \\
 &= (1 \times \text{dos}^3) + (1 \times \text{dos}^2) + (0 \times \text{dos}^1) + (0 \times \text{dos}^0) \\
 &= 1100_{\text{dos}}
 \end{aligned}$$

Veamos dos ejemplos más:

$$\begin{aligned}
 27_{\text{diez}} &= 16_{\text{diez}} + 8_{\text{diez}} + 2_{\text{diez}} + 1_{\text{diez}} \\
 &= (1 \times 16_{\text{diez}}) + (1 \times 8_{\text{diez}}) + (0 \times 4_{\text{diez}}) + (1 \times 2_{\text{diez}}) + (1 \times 1_{\text{diez}}) \\
 &= (1 \times \text{dos}^4) + (1 \times \text{dos}^3) + (0 \times \text{dos}^2) + (1 \times \text{dos}^1) + (1 \times \text{dos}^0) \\
 &= 11011_{\text{dos}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 31_{\text{diez}} &= 16_{\text{diez}} + 8_{\text{diez}} + 4_{\text{diez}} + 2_{\text{diez}} + 1_{\text{diez}} \\
 &= (1 \times 16_{\text{diez}}) + (1 \times 8_{\text{diez}}) + (1 \times 4_{\text{diez}}) + (1 \times 2_{\text{diez}}) + (1 \times 1_{\text{diez}}) \\
 &= (1 \times \text{dos}^4) + (1 \times \text{dos}^3) + (1 \times \text{dos}^2) + (1 \times \text{dos}^1) + (1 \times \text{dos}^0) \\
 &= 11111_{\text{dos}}
 \end{aligned}$$

Grupo de ejercicios 6

Puede hacerse una computadora sencilla para ilustrar los numerales binarios, empleando una caja de cartón y una serie de focos de navidad.

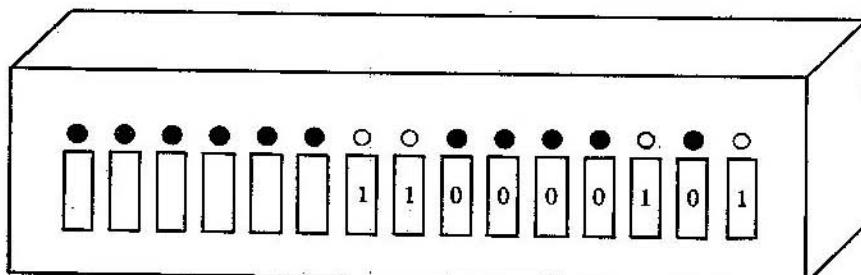
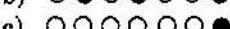


FIGURA 4

Cuando está encendida la luz, se indica en la figura 4 mediante el signo \circ y corresponde al numeral 1 del sistema binario. Si está apagada la luz, se representa en la misma figura, mediante el signo \bullet ; y corresponde al numeral 0. El numeral binario representado en la figura 4 es 110000101_{dos} .

1. Escriba los numerales binarios correspondientes a las siguientes señales mostradas en el computador de la figura 4.
- | | |
|--|--|
| a)  | d)  |
| b)  | e)  |
| c)  | |
2. Escriba los numerales del ejercicio anterior en la notación exponencial binaria.
 3. ¿Qué numerales decimales expresan los mismos números que expresan los numerales binarios del ejercicio 1?

EL SISTEMA DE BASE OCHO (OCTAL)

Se ha dicho que el uso del sistema binario es esencial para trabajar las computadoras electrónicas. La razón consiste en que un circuito eléctrico puede estar abierto o cerrado, sólo hay estas dos posibilidades. El sistema binario tiene sólo dos símbolos 0 y 1. Apareando los miembros de estos dos conjuntos

circuito abierto \leftrightarrow 0

circuito cerrado \leftrightarrow 1

obtenemos la correspondencia siguiente: cuando el circuito está abierto, la computadora registra 0; y cuando está cerrado, registra 1.

El gran número de dígitos requerido para escribir los numerales binarios hacen el sistema engorroso. Por ejemplo, mientras que cuarenta y cinco en numerales decimales requiere dos dígitos solamente, el numeral binario requiere seis

$$45_{\text{dez}} = 101\ 101_{\text{dos}}$$

Los numerales $1\ 023_{\text{dez}}$ y 111111111_{dos} representan el mismo número.

Los numerales binarios se convierten fácilmente en numerales de base ocho y los numerales de base ocho requieren menos numerales que los numerales binarios. Por ejemplo:

$$132_{\text{ocho}} = 1011010_{\text{dos}}$$

En el sistema base ocho hay ocho símbolos,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Sus valores posicionales son $ocho^0$, $ocho^1$ $ocho^2$, etc. El numeral 15_{ocho} representa $(1 \times ocho^1) + (5 \times ocho^0)$, o sea trece.

¿Qué número representa 132_{ocho} ?

$$\begin{aligned} 132_{ocho} &= (1 \times ocho^2) + (3 \times ocho^1) + (2 \times ocho^0) \\ &= (1 \times 64_{diez}) + (3 \times 8_{diez}) + (2 \times 1_{diez}) \\ &= 64_{diez} + 24_{diez} + 2_{diez} \\ &= 90_{diez} \end{aligned}$$

Por tanto, 132_{ocho} representa el número noventa.

Ahora veamos cómo podemos escribir el numeral de base ocho para 1110101_{dos} . Primero inserte comas de tal forma que los dígitos queden en grupos de tres, empezando por la derecha,

$$1,110,101_{dos}.$$

Este numeral puede transformarse en numeral de base ocho como sigue:

$$\begin{aligned} 1,110,101_{dos} &= [(1 \times dos^6)] + [(1 \times dos^5) + (1 \times dos^4) + (0 \times dos^3)] \\ &\quad + [(1 \times dos^2) + (0 \times dos^1) + (1 \times dos^0)]. \end{aligned}$$

Nótese que los primeros paréntesis angulares encierran el número representado por "1" en la posición 6, el segundo, encierra el número representado por "110" y el tercero encierra el número representado por "101".

Véanse las tres expresiones encerradas en paréntesis angulares:

$$\begin{aligned} 1 \times dos^6 &= sesenta y cuatro \\ &= 1 \times ocho^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 \times dos^5) + (1 \times dos^4) + (0 \times dos^3) &= treinta y dos + dieciséis + cero \\ &= 32_{diez} + 16_{diez} + 0 \\ &= 48_{diez} \\ &= 6 \times ocho^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 \times dos^2) + (0 \times dos^1) + (1 \times dos^0) &= cuatro + cero + uno \\ &= 4_{diez} + 0_{diez} + 1_{diez} \\ &= 5 \times uno \\ &= 5 \times ocho^0. \end{aligned}$$

Anotando esto junto, tenemos

$$\begin{aligned} 1,110,101_{dos} &= (1 \times ocho^2) + (6 \times ocho^1) + (5 \times ocho^0) \\ &= 165_{ocho}. \end{aligned}$$

Este ejemplo puede sugerir que el proceso requerido para convertir el numeral $1,110,101_{\text{dos}}$ al numeral 165_{ocho} no es sencillo. Hay, sin embargo, una relación directa entre ambos numerales. Véase otra vez el número

$1,110,101_{\text{dos}}$.

Hay tres grupos dígitos: 1, 110, 101. Considérese cada grupo como un numeral de base dos. ¿Qué números representan estos numerales binarios?

- “1” representa uno;
- “110” representa seis;
- “101” representa cinco.

El cuadro X ofrece el modelo de la conversión; como puede verse, tenemos una clase de algoritmo, o proceso especial, para convertir un numeral binario en uno de base ocho.

CUADRO X

<i>Conversión de numerales binarios a los de base ocho</i>			
Numeral binario	1	110	101
Número representado	uno	seis	cinco
Numeral de base ocho	1	6	5

El numeral binario $11,001,100,101,011,111_{\text{dos}}$ convertido al correspondiente de base ocho sería $3\ 1\ 4\ 5\ 3\ 7_{\text{ocho}}$. Aquí el numeral binario tiene diecisiete dígitos, mientras que el numeral de base ocho tiene sólo seis. Una computadora puede operar con numerales binarios de 36 dígitos; cantidad que se indica con 12 dígitos en el sistema de base ocho.

CUADRO XI

<i>Conversión de numerales de base ocho en numerales binarios</i>				
Numerales base ocho	4	1	6	7
Número representado	cuatro	uno	seis	siete
Numeral binario	100	001	110	111

$$4167_{\text{ocho}} = 100,001,110,111_{\text{dos}}$$

Si se quiere convertir un numeral de base ocho en binario, para alimentar una computadora se procede así: considere, por ejemplo, el numeral $4\ 167_{\text{ocho}}$. Tome cada dígito de base ocho por separado y expréselo en notación binaria, como lo muestra el cuadro XI.

SISTEMAS DE NOTACION POSICIONAL

El cuadro XII muestra algunas características comunes para todos los sistemas de numeración de notación posicional. La forma adecuada de leer este cuadro es de derecha a izquierda.

CUADRO XII

<i>Sistemas de numeración de notación posicional</i>				<i>Símbolos</i>	<i>Base</i>	
<i>Posición</i>	<i>Posición</i>	<i>Posición</i>	<i>Posición</i>			
3	2	1	0			
...	dos^3	dos^2	dos^1	dos^0	{0, 1}	dos
...	tres^3	tres^2	tres^1	tres^0	{0, 1, 2}	tres
...
...
...
...	ocho^3	ocho^2	ocho^1	ocho^0	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	ocho
...	nueve^3	nueve^2	nueve^1	nueve^0	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	nueve
...	diez^3	diez^2	diez^1	diez^0	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,}	diez
...	doce^3	doce^2	doce^1	doce^0	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, T, E}	doce
...	base^3	base^2	base^1	base^0	Varían	Cualquier número entero mayor que uno

Nótense las siguientes características:

1. Todo sistema de numeración de notación posicional tiene una base que puede ser cualquier número entero mayor que uno. Un sistema de numeración de base uno es imposible porque sus valores posicionales serían potencias de uno, y cualquier potencia de uno es uno. Además el único numeral en un sistema de base uno sería 0.
2. El número de símbolos de un sistema es igual a su base. Estos símbolos, también llamados dígitos, son numerales para los números enteros menores que la base. Entonces, los numerales empleados en el sistema de base siete son:
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$
3. A cada posición del numeral se asigna un valor posicional que es, a su vez, potencia de la base. El valor posicional asignado a la posición 0 es $base^0 = 1$. El valor posicional asignado a la posición 1 es $base^1$. El valor posicional asignado a la posición 2 es $base^2$, etc. Nótese que el exponente corresponde a la posición en el numeral.

CUADRO XIII

<i>Valor posicional en base siete</i>			
<i>Posición 3</i>	<i>Posición 2</i>	<i>Posición 1</i>	<i>Posición 0</i>
trescientos cuarenta y tres	cuarenta y nueve	siete	uno
siete \times siete \times siete	siete \times siete	siete	uno
siete ³	siete ²	siete ¹	siete ⁰

Al escribir numerales en un sistema posicional, observamos los siguientes requisitos y convenciones:

1. Debe emplearse más de un dígito para escribir el numeral que represente a la base o a un número mayor que la base. El símbolo 10 representa a la base, sea cual sea la que se esté empleando. El numeral 10 representa $(1 \times \text{base}) + 0$.

2. La base del sistema que se está usando se indica como subíndice a la derecha del numeral. El subíndice se escribe con letras.
3. Cada dígito de un numeral representa un número. Este número es el producto del número representado por el dígito y el valor posicional de la posición que ocupa el dígito en el numeral (véase el cuadro XIII). Por ejemplo, considérese el numeral 546_{siete} : el dígito 5 está en la posición 2 del numeral; el valor posicional asignado a la posición 2 es siete², por tanto el dígito 5 representa el número ($\text{cinco} \times \text{siete}^2$). De igual modo el dígito 4 representa el producto ($4 \times \text{siete}^1$) y el dígito 6 representa el producto ($6 \times \text{siete}^0$) o ($\text{seis} \times \text{uno}$).
4. El número representado por el numeral 546_{siete} es la suma de los productos mencionados anteriormente. Entonces, 546 en base siete expresa la suma.

$$546_{\text{siete}} = (\text{cinco} \times \text{siete} \times \text{siete}) + (\text{cuatro} \times \text{siete}) + (\text{seis} \times \text{uno}),$$

o sea el número doscientos setenta y nueve.

Grupo de ejercicios 7

1. Escriba en notación desarrollada.
 - a) 325_{seis}
 - b) $2\ 102_{\text{tres}}$
 - c) 875_{diez}
 - d) 413_{cinco}
2. Exprese en notación decimal los números representados por los siguientes numerales:
 - a) 212_{tres}
 - b) 561_{siete}
 - c) $1\ 001_{\text{dos}}$
 - d) 208_{doce}
3. ¿Qué número representa el dígito 2 en cada numeral?
 - a) 238_{diez}
 - b) 432_{cinco}
 - c) $2\ 010_{\text{tres}}$
 - d) 526_{siete}
4. ¿Qué número representa n ?

$$n_{\text{cuatro}} + 2_{\text{cuatro}} = 11_{\text{cuatro}}$$

5. Llene los espacios.

- a) $42_{\text{cinco}} = \underline{\hspace{2cm}}_{\text{tres}}$
- b) $54_{\text{siete}} = \underline{\hspace{2cm}}_{\text{ocho}}$

6. Use símbolo $=$, $>$ o $<$ en cada espacio, de tal manera que el resultado sea cierto.

a) $100_{\text{tres}} \underline{\quad} 21_{\text{cuatro}}$ b) $54_{\text{seis}} \underline{\quad} 201_{\text{cuatro}}$ c) $106_{\text{siete}} \underline{\quad} 63_{\text{diez}}$.

SUMARIO

1. Todos los sistemas de numeración de notación posicional pueden tener una base que sea cualquier número entero mayor que uno. El sistema de numeración que empleamos comúnmente es de base diez.
2. Se usa un conjunto de símbolos para escribir cualquier número entero. Estos símbolos (también llamados dígitos) son los numerales representativos de los números enteros menores que la base. Entonces el número de símbolos usados en un sistema es igual que la base. Por ejemplo, para escribir los numerales de base siete se usa el conjunto

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

3. Se usa más de un dígito para escribir numerales mayores que la base. En este caso, tres condiciones determinan el número que representa el dígito:

- a)* el dígito mismo,
- b)* la base del sistema,
- c)* la posición del dígito en el numeral, que determina un *valor posicional*.

4. Un valor posicional es una potencia de la base. El valor posicional asignado a la posición de la extrema derecha de un numeral que representa un número entero es base, (recuerde que la potencia cero de cualquier número natural es igual a uno). El valor posicional asignado a la segunda posición a partir de la derecha es base¹, y el de la tercera, es base² o (base \times base), el valor de la cuarta posición es base³ o (base \times base \times base) etc. Veamos a continuación el ejemplo donde el valor de los dígitos del numeral 213 en el sistema de base cuatro tienen los siguientes valores posicionales:

- | | |
|---|---|
| 2 | cuatro ² , o (cuatro \times cuatro); |
| 1 | cuatro ¹ , o cuatro; |
| 3 | cuatro ⁰ , o uno. |

40 SISTEMAS DE NUMERACION PARA LOS NUMEROS ENTEROS

5. El número representado por un dígito en cualquier numeral es el producto de dos números:

- El número representado por el dígito considerado como un numeral simple (y por tanto, menor que la base);
- El valor posicional de la posición donde se encuentra el dígito.

Entonces, en el ejemplo anterior:

- 2 representa el número ($dos \times cuatro^2$) o ($dos \times cuatro \times cuatro$),
- 1 representa el número ($uno \times cuatro^1$) o ($uno \times cuatro$),
- 3 representa el número ($tres \times cuatro^0$) o ($tres \times uno$).

6. El número representado por cada numeral completo es la suma de estos productos. Entonces, el numeral 213 en el sistema de base cuatro representa la suma

$$(\text{dos} \times \text{cuatro} \times \text{cuatro}) + (\text{uno} \times \text{cuatro}) + (\text{tres} \times \text{uno}),$$

o sea el número treinta y nueve.

7. La base del sistema correspondiente al numeral se indica como subíndice, a la derecha del mismo; por ejemplo,

$$213_{\text{cuatro}}, \quad 528_{\text{diez}} \quad 513_{\text{ocho}}.$$

El número que indica cuál es la base se escribe *con letras* porque en cualquier sistema el numeral de la base es "10". Entonces, si escribimos 213_{10} no nos indica la base de que se trata.

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1

1. Hay muchas respuestas correctas. Algunas de ellas son:

- $6+1, \quad 0+7, \quad VII, \quad \cancel{III} \quad //, \quad 56 \div 8.$
 - $I, \quad 2-1, \quad 3-2, \quad 4 \div 4, \text{ etc.}$
 - $1-1, \quad 2-2, \quad 0 \times 6, \quad 4 \times 0, \text{ etc.}$
- $a) (5 \times 10) + (7 \times 1)$
 $b) (4 \times 100) + (1 \times 10) + (9 \times 1)$
 $c) (6 \times 100) + (2 \times 10) + (0 \times 1)$
 $d) (2 \times 1000) + (0 \times 100) + (8 \times 10) + (7 \times 1)$

3. a) diez b) uno c) mil d) diez mil

4. a) diez b) cien c) mil

Grupo de ejercicios 2

1. a) 5^3 b) 11^2 c) 2^4 d) 3^7 e) 9^5 f) 100^3

2. a) $4 \times 4 \times 4$
 b) $3 \times 3 \times 3 \times 3$
 c) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
 d) $13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13 \times 13$
 e) 67×67
 f) $2 \times 2 \times 2$

3. a) 3^3 b) 5^2 c) 6^3
 d) 10^7 e) 10^1 f) n^0 , donde n representa cualquier número excepto cero.

Grupo de ejercicios 3

1. a) $(6 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (7 \times 10^0)$
 b) $(4 \times 10^3) + (8 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (0 \times 10^0)$
 c) $(1 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$
 d) $(1 \times 10^4) + (4 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (9 \times 10^1) + (0 \times 10^0)$
 e) $(4 \times 10^6) + (8 \times 10^5) + (1 \times 10^4) + (9 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (0 \times 10^1)$
 $+ (0 \times 10^0)$
 f) $(1 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (0 \times 10^0)$

2. a) 235 b) 43 064 c) 3 020 060 d) 100 001

Grupo de ejercicios 4

1. (Todos los numerales son de base cuatro.) 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21,
 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, 113, 120, 121.
 2. 30_{diez}, 32_{diez}.

3. Sesenta y tres, 333_{cuatro}, 63_{diez}.

4. a) $(3 \times \text{cuatro}^1) + (0 \times \text{cuatro}^0)$
 b) $(2 \times \text{cuatro}^2) + (0 \times \text{cuatro}^1) + (1 \times \text{cuatro}^0)$
 c) $(3 \times \text{cuatro}^1) + (3 \times \text{cuatro}^0)$
 d) $(3 \times \text{cuatro}^2) + (3 \times \text{cuatro}^1) + (0 \times \text{cuatro}^0)$
 e) $(2 \times \text{cuatro}^2) + (3 \times \text{cuatro}^1) + (3 \times \text{cuatro}^0)$
 f) $(1 \times \text{cuatro}^3) + (0 \times \text{cuatro}^2) + (0 \times \text{cuatro}^1) + (0 \times \text{cuatro}^0)$

Grupo de ejercicios 5

1. a) 120 b) 46 c) 142 d) 274
 2. a) 31_{doce} b) 2T_{doce} c) TE_{doce}
 3. a) $(1 \times \text{doce}^2) + (3 \times \text{doce}^1) + (2 \times \text{doce}^0)$
 b) $(\text{T} \times \text{doce}^2) + (0 \times \text{doce}^1) + (\text{E} \times \text{doce}^0)$
 c) $(6 \times \text{doce}^1) + (4 \times \text{doce}^0)$

Grupo de ejercicios 6

1. a) 111,000_{dos} d) 100_{dos}
 b) 10,101,100_{dos} e) 111,110,101_{dos}
 c) 1,111,110_{dos}
2. a) $(1 \times \text{dos}^5) + (1 \times \text{dos}^4) + (1 \times \text{dos}^3) + (0 \times \text{dos}^2) + (0 \times \text{dos}^1)$
 + $(0 \times \text{dos}^0)$
 b) $(1 \times \text{dos}^7) + (0 \times \text{dos}^6) + (1 \times \text{dos}^5) + (0 \times \text{dos}^4) + (1 \times \text{dos}^3)$
 + $(1 \times \text{dos}^2) + (0 \times \text{dos}^1) + (0 \times \text{dos}^0)$
 c) $(1 \times \text{dos}^6) + (1 \times \text{dos}^5) + (1 \times \text{dos}^4) + (1 \times \text{dos}^3) + (1 \times \text{dos}^2)$
 + $(1 \times \text{dos}^1) + (0 \times \text{dos}^0)$
 d) $(1 \times \text{dos}^2) + (0 \times \text{dos}^1) + (0 \times \text{dos}^0)$
 e) $(1 \times \text{dos}^8) + (1 \times \text{dos}^7) + (1 \times \text{dos}^6) + (1 \times \text{dos}^5) + (1 \times \text{dos}^4)$
 + $(0 \times \text{dos}^3) + (1 \times \text{dos}^2) + (0 \times \text{dos}^1) + (1 \times \text{dos}^0)$
3. a) $32 + 16 + 8 + 0 + 0 + 0 = 56$
 b) $128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 = 172$
 c) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 0 = 126$
 d) $4 + 0 + 0 = 4$
 e) $256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 4 + 8 + 1 = 501$

Grupo de ejercicios 7

1. a) $(3 \times \text{seis}^2) + (2 \times \text{seis}^1) + (5 \times \text{seis}^0)$
b) $(2 \times \text{tres}^3) + (1 \times \text{tres}^2) + (0 \times \text{tres}^1) + (2 \times \text{tres}^0)$
c) $(8 \times \text{diez}^2) + (7 \times \text{diez}^1) + (5 \times \text{diez}^0)$
d) $(4 \times \text{cinco}^2) + (1 \times \text{cinco}^1) + (3 \times \text{cinco}^0)$
2. a) 23 b) 288 c) 9 d) 296
3. a) 2×100 , ó 200 b) 2×1 , ó 2 c) 2×27 , ó 54 d) 2×7 , ó 14
4. $n=3$
5. a) 211_{tres} b) 47_{ochos}
6. a) = b) > c) <

