



# Taller, Calculando límites algebraicamente Cálculo 11°



Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

Nombre: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

## Propiedades de los límites

Para resolver límites algebraicamente, es necesario y útil aplicar sus propiedades:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  Límite de una suma

2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  Límite de una diferencia

3.  $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  Límite de una constante por una función

4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  Límite del producto

5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  Límite de un cociente

Estas propiedades las aplicamos al resolver un límite de una función polinómica o racional. Además de éstas propiedades, también tenemos las siguientes propiedades especiales, algunas aplicadas a la potenciación y la radicación:

6.  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

7.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

8.  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  Para  $n$  entero positivo

9.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$  Para  $n$  entero positivo y  $a > 0$



**Ejemplos:** Resolver los límites siguientes:

1.  $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4)$

2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

**Solución:**

## Taller

1. Suponga que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$$

Encuentre los valores de los límites. Si el límite no existe, explique por qué

a)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}$

g)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2$

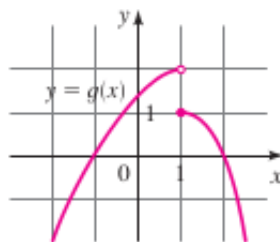
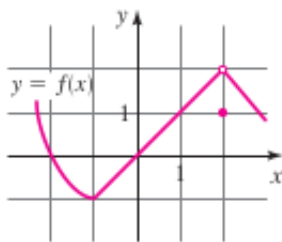
e)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$

h)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

c)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)}$

f)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$

2. Observe las gráficas de  $f$  y  $g$ . Úselas para evaluar cada límite si existe. Si no existe, explique por qué.



a)  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$

Evalúe el límite justificando cada paso con el uso de las propiedades.

- |   |   |
|---|---|
| 3. $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3)$             | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)^2$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$         | 7. $\lim_{t \rightarrow -2} (t + 1)^9(t^2 - 1)$                                 |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$ | 8. $\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$                                |

Evalúe cada límite si existe

- |   |   |
|---|---|
| 9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$           | 15. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$                 |
| 10. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x} - 4$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$                         |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x + 2}$          | 17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$                        |
| 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$            | 18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$                |
| 13. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$     | 19. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$       |
| 14. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$         | 20. $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$ |

Encuentre los límites y luego use geogebra para verificar el resultado

- |   |   |
|---|---|
| 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x}$ |
| 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 + x)^3 - 64}{x}$     | 24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 1}{x^5 - x}$      |

Encuentre el límite si existe. Si el límite no existe explique por qué

- |   |   |
|---|---|
| 25. $\lim_{x \rightarrow -4}  x + 4 $                 | 27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x - 2 }{x - 2}$        |
| 26. $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{ x + 4 }{x + 4}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow 1.5} \frac{2x^2 - 3x}{ 2x - 3 }$ |



29.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

30.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

31. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existe?

c) Grafique la función  $f$

32. Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Evalúe cada límite si existe

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

33. Cancelación y límites

a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Teniendo en cuenta la parte a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

**Contracción de Lorentz:** En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud  $L$  de un objeto como función de su velocidad  $v$  con respecto a un observador, donde  $L_0$  es la longitud del objeto en reposo y  $c$  es la rapidez de la luz.

Encuentre  $\lim_{v \rightarrow c} L$  e interprete el resultado. Es necesario calcular el límite por izquierda?