Taller de repaso, Límites
Cálculo 11°

Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

Nombre: ______________________________ Curso: ________ Fecha: ____________

Siempre que al hacer la sustitución directa al resolver un límite, nos encontramos con la indeterminación $\frac{0}{0}$, entonces, debemos recurrir al álgebra para eliminar la intederminación, generalmente factorizando o multiplicando por el conjugado de una expresión que contenga radicales.

Así que es importante recordar los principales casos de factorización:

Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Trinomios

i) $x^2 + 3x - 10$.
En este caso debemos buscar dos números que multiplicados den el tercer término -10 y sumados den el coeficiente del segundo término 3, los cuales son 5 y -2. De tal forma que la factorización es:

$$x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$$

ii) $6x^2 + 7x - 20$
Se puede resolver este caso de forma similar al anterior, multiplicando y dividiendo por el coeficiente del primer término 6, para que quede un trinomio de la forma anterior haciendo que el primer término sea un cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}
6x^2 + 7x - 20 &= \frac{6(6x^2) + 7x(6) - 20(6)}{6} \\
&= \frac{36x^2 + 7(6x) - 120}{6} && \text{Buscamos dos números que sumados} \\
&= \frac{(6x+15)(6x-8)}{6} && \text{den 7 y multiplicados } -120 \\
&= \frac{3(2x+5)2(3x-4)}{6} && \text{Cancelamos los factores 3 y 2 con} \\
&= (2x+5)(3x-4) && \text{el 6 del denominador}
\end{aligned}$$

Eliminar raíces

En otros ejercicios, se deben eliminar las raíces para obviar la interminación. Esto se hace multiplicando por el conjugado de la expresión que contiene radicales. Si la expresión es por ejemplo $\sqrt{x+5} - 10$ entonces su conjugado es $\sqrt{x+5} + 10$ y viceversa.

Ejemplo:

Deseamos resolver el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

Evidentemente al hacer la sustitución directa, se obtiene indeterminación. Luego entonces debemos eliminarla como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} &= \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3} && \text{multiplicando por el conjugado } \sqrt{x}+3 \\
&= \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}^2 - 3^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3} && \text{se obtiene una diferencia de cuadrados en el numerador} \\
&= \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} && \text{se simplifica} \\
&= \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Ejercicios

Resuelva los siguientes límites. Con el fin de que puedan verificar, se dan las respuestas. Recuerde que es más importante el proceso que la misma respuesta.

1. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+8x+15}{x+3}$
2. $\lim_{t\to 4} \frac{3t^2-11t-4}{t-4}$
3. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
4. $\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x+4}$
5. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+5x-24}{x-3}$
6. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-4}$
7. $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-7x-20}{x-4}$
8. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
9. $\lim_{t\to 5} \frac{t^2-25}{t-5}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
11. $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
12. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
14. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$
15. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$