Taller 08, Diferencia de cuadrados y cubos Álgebra 8°

Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

Nombre: _____Curso: _________ Fecha: _______________ A continuación se explican dos casos de factorización a abordar en este taller.

Diferencia de cuadrados

Se presenta como su nombre lo indica cuando existe una diferencia entre dos cantidades o expresiones que son cuadrados perfectos y se factoriza según el siguiente patrón:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Siempre que se tenga una diferencia de cuadrados perfectos, se factoriza como una suma por una diferencia de sus raíces.

Ejemplo 1

Factorizar $x^2 - 16$

Se observa que tanto x^2 como 16 son cuadrados perfectos, ya que x^2 es el cuadrado de x y 16 es el cuadrado de 4. Luego factorizamos así:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= x^2 - 4^2 && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x-4)(x+4) && \text{suma por diferencia} \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Factorizar $4x^2 - 9y^2$

Nuevamente observamos que tanto 4 como x^2 son cuadrados perfectos, así como 9 y y^2. Más específicamente podemos asumir que $4x^2$ es el cuadrado de $2x$ y que $9y^2$ es el cuadrado de $3y$. Así que factorizamos así:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 &= 2^2x^2 - 3^2y^2 && \text{Cada término es cuadrado perfecto} \\ &= (2x)^2 - (3y)^2 && \text{Se expresa como Diferencia de cuadrados} \\ &= (2x-3y)(2x+3y) && \text{Se factoriza} \end{aligned}$$

A veces se debe factorizar completamente porque uno de los factores es a su vez una diferencia de cuadrados, como en los siguientes ejemplos

Ejemplo 3:

$$16x^4 - 81y^4$$

Se procede a factorizar como ya sabemos:

$$\begin{aligned}
16x^4 - 81y^4 &= 4^2(x^2)^2 - 9^2(y^2)^2 && \text{Los términos son C. P.}\\
&= (4x^2)^2 - (9y^2) && \text{Se expresa como diferencia de C.P.}\\
&= (4x^2 - 9y^2)(4x^2 + 9y^2) && \text{El primer factor es una Dif. de C.P.}\\
&= \left((2x)^2 - (3y)^2\right)(4x^2 + 9y^2) && \text{Se expresa el primer factor como una D. de C.P.}\\
&= (2x - 3y)(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2) && \text{Se factoriza a su vez el 1er factor}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4:

$$(x-1)^2 - (x+4)^2$$

Claramente se observa una Dif. de C.P. Luego se procede así:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 - (x+4)^2 &= ((x-1) + (x+4))\,((x-1) - (x+4)) &&\\
&= (x - 1 + x + 4)(x - 1 - x - 4) && \text{Destruyendo los paréntesis internos}\\
&= (2x+3)(-5) && \text{Reduciendo términos semejantes}\\
&= -5(2x+3) &&
\end{aligned}$$

Ejemplo 5:

$$48y^3 - 27y$$

Aquí no se observan claramente los C.P. Entonces debemos ver si primero podemos aplicar factor común. Evidentemente sí

$$\begin{aligned}
48y^3 - 27y &= 3y(16y^2 - 9) && \text{Aplicando Factor común}\\
&= 3y(4y+3)(4y-3) && \text{Aplicando nuevamente Dif de C.}
\end{aligned}$$

Quiz conceptual

Para los siguientes enunciados escriba V o F según corresponda.

a. Un binomio que tiene dos cuadrados perfectos que se restan es una diferencia de cuadrados.

b. La suma de dos cuadrados es factorizable usando enteros.

c. La suma de dos cubos se puede factorizar usando enteros.

d. La diferencia de dos cuadrados es factorizable.

e. La diferencia de dos cubos es factorizable

f. Para factorizar es aconsejable inspeccionar que se pueda aplicar factor común en primera instancia.

g. El polinomio $4x^2 + y^2$ se factoriza como $(2x + y)(2x + y)$

h. La factorización completa de $y^4 - 81$ es $(y^2 + 9)(y^2 - 9)$

i. La ecuación $x^2 = -9$ no tiene soluciones reales.

j. La ecuación $abc = 0$ si y sólo sí $a = 0$

Ejercicios

Factorice usando el caso diferencia de cuadrados.

1. $x^2 - 9$
2. $4x^2 - 49$
3. $x^2 - 64y^2$
4. $x^2y^2 - a^2b^2$
5. $x^6 - 9y^2$
6. $25 - 49n^2$
7. $(3x + 5y)^2 - y^2$
8. $x^2 - (y - 5)^2$
9. $16s^2 - (3t + 1)^2$
10. $(x - 1)^2 - (x - 8)^2$

Factorice cada uno de los siguientes polinomios completamente. Indique cuáles no son factorizables usando coeficientes enteros. No olvide los casos vistos antes, como "factor común"

11. $8x^2 - 72$
12. $7x^2 + 28$
13. $5y^2 - 80$
14. $x^3y^2 - xy^2$
15. $x^4 - 16$
16. $4x^2 + 9$
17. $20x^3 + 45x$
18. $12x^3 - 27xy^2$
19. $1 - 16x^4$
20. $20x - 5x^3$
21. $9x^2 - 81y^2$
22. $2x^5 - 162x$

Para los siguientes ejercicios, use la suma o diferencia de cubos para factorizar.

23. $a^3 - 27$
24. $x^3 + 8$
25. $8x^3 + 27y^3$
26. $1 - 8x^3$
27. $125x^3 + 27y^3$
28. $x^6 + y^6$

Para los problemas siguientes, encuentre todos los números reales que son solución de cada ecuación.

29. $x^2 - 1 = 0$
30. $4y^2 = 25$
31. $3x^2 - 108 = 0$
32. $4x^3 = 64x$
33. $54 - 6x^2 = 0$
34. $x^5 - x = 0$
35. $4x^3 + 12x = 0$

Para los problemas siguientes, plantee una ecuación y soluciónela para resolver el problema.

36. El cubo de un número es igual a su cuadrado. Encuentre el número
37. La suma de las áreas de dos cuadrados es 26 m^2. El lado del cuadrado grande es cinco veces el lado del cuadrado pequeño. Encuentre las dimensiones de cada cuadrado.
38. Suponga que el largo de un rectángulo es $1\frac{1}{3}$ veces su ancho. El área del rectángulo es 48 cm^2. Encuentre el largo y ancho del rectángulo.
39. La superficie total de un cono circular recto es 108π cm^2. Si la altura del cono es dos veces la longitud del radio de la base, encuentre la longitud del radio.
40. La altura de un triángulo es $\frac{1}{3}$ la longitud del lado sobre el que se dibuja la altura. Si el área del triángulo es 6 cm^2, encuentre su altura.