TEOREMAS SOBRE PROBABILIDAD

1.77. Completar la demostración en el Problema 1.14(*b*) demostrando (sin emplear el diagrama de Venn) que

$$A \cup B \quad = \quad A \cup [B - (A \cap B)]$$

donde A y $B - (A \cap B)$ son mutuamente excluyentes.

1.78. Demostrar el resultado (*11*), página 7.

1.79. Generalizar los resultados (*10*) y (*11*), página 7, y así demostrar el resultado (*1*) del Problema 1.54, página 30.

1.80. Demostrar que $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$.

CALCULO DE PROBABILIDADES

1.81. Determinar la probabilidad p, o un estimador de ella, para cada uno de los sucesos siguientes:

(*a*) La aparición de un rey, as, jota de tréboles o reina de diamantes al extraer una sola carta de una baraja común de 52 cartas.
(*b*) La suma 8 aparezca en un solo lanzamiento de un par de dados honrados.
(*c*) Encontrar un tornillo defectuoso si después de examinar 600 tornillos se han encontrado 12 defectuosos.
(*d*) Un 7 u 11 resulte en un solo lanzamiento de un par de dados honrados.
(*e*) Al menos aparezca una cara en tres lanzamientos de una moneda honrada.

1.82. Un experimento consiste en la sucesiva extracción de tres cartas de una baraja. Sea A_1 el suceso "rey en la primera extracción", A_2 el suceso "rey en la segunda extracción", y A_3 el suceso "rey en la tercera extracción". Explicar el significado de cada una de las siguientes:

(*a*) $P(A_1 \cap A_2')$, (*b*) $P(A_1 \cup A_2)$, (*c*) $P(A_1' \cup A_2')$, (*d*) $P(A_1' \cap A_2' \cap A_3')$, (*e*) $P[(A_1 \cap A_2) \cup (A_2' \cap A_3)]$.

1.83. Se extrae una bola aleatoriamente de un caja que contiene 10 bolas rojas, 30 blancas, 20 azules y 15 naranjas. Hallar la probabilidad de que sea (*a*) naranja o roja, (*b*) ni roja ni azul, (*c*) no azul, (*d*) blanca, (*e*) roja, blanca o azul.

1.84. Se extraen dos bolas sucesivamente de la caja del Problema 1.83, remplazando la bola extraída después de cada extracción. Hallar la probabilidad de que (*a*) ambas sean blancas, (*b*) la primera sea roja y la segunda sea blanca, (*c*) ninguna sea naranja, (*d*) sean rojas o blancas o de ambos colores (roja y blanca), (*e*) la segunda no sea azul, (*g*) al menos una sea azul, (*h*) máximo una sea roja, (*i*) la primera sea blanca pero la segunda no, (*j*) solamente una sea roja.

1.85. Resolver el Problema 1.84 si no hay remplazamiento después de cada extracción.

PROBABILIDAD CONDICIONAL Y SUCESOS INDEPENDIENTES

1.86. Una caja contiene 2 bolas rojas y 3 azules. Hallar la probabilidad de que si dos bolas se extraen aleatoriamente (sin remplazamiento) (*a*) ambas sean azules, (*b*) ambas sean rojas, (*c*) una sea roja y la otra azul.

1.87. Hallar la probabilidad de extraer 3 ases aleatoriamente de una baraja de 52 cartas si las cartas (*a*) se remplazan, (*b*) no se remplazan.

1.88. Si al menos un hijo en una familia con dos hijos es un niño ¿cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niños?

1.89. Demostrar que la probabilidad condicional definida por (*17*), página 8, satisface los axiomas de probabilidad en la página 6 y por tanto todos los teoremas sobre probabilidad.

1.90. Demostrar que si $P(A) > P(B)$ entonces $P(A \mid B) > P(B \mid A)$.

1.91. Si A es independiente de B demostrar que (*a*) A es independiente de B', (*b*) A' es independiente de B.

1.92. Si A, B, C son sucesos independientes, demostrar que (*a*) A y $B \cup C$, (*b*) A y $B \cap C$, (*c*) A y $B - C$, son independientes.

1.93. Sea A_1 = suceso "número impar en el primer dado", A_2 = suceso "número impar en el segundo dado", A_3 = suceso "total impar en ambos dados". Demostrar que $A_1, A_2; A_2, A_3; A_1, A_3$ son independientes pero que A_1, A_2, A_3 no son independientes.

1.94. La caja *I* contiene 3 bolas rojas y 5 blancas, en tanto que la caja *II* contiene 4 bolas rojas y 2 blancas. Se escoge una bola aleatoriamente de la primera caja y se coloca en la segunda caja sin observar su color. Luego se extrae una bola de la segunda caja. Hallar la probabilidad de que sea blanca.

TEOREMA O REGLA DE BAYES

1.95. Una caja contiene 3 bolas azules y 2 rojas mientras que otra caja contiene 2 bolas azules y 5 rojas. Una bola extraída aleatoriamente de una de las cajas resulta azul. ¿Cuál es la probabilidad de haberla extraído de la primera caja?

1.96. Tres joyeros idénticos tienen dos compartimientos. En cada compartimiento del primer joyero hay un reloj de oro. En cada compartimiento del segundo joyero hay un reloj de plata. En el tercer joyero en un compartimiento hay un reloj de oro, en tanto que en el otro hay un reloj de plata. Si seleccionamos un joyero aleatoriamente, abrimos uno de los compartimientos y hallamos un reloj de plata, ¿cuál es la probabilidad de que el otro compartimiento tenga un reloj de oro?

1.97. La urna I tiene 2 bolas blancas y 3 negras; la urna II, 4 blancas y 1 negra; y la urna III, 3 blancas y 4 negras. Se selecciona una urna aleatoriamente y una bola extraída aleatoriamente es blanca. Hallar la probabilidad de haber escogido la urna I.

ANALISIS COMBINATORIO, CUENTA Y DIAGRAMAS ARBOL

1.98. Se lanza una moneda tres veces. Utilizar un diagrama árbol para determinar las diferentes posibilidades que pueden suceder.

1.99. Se extraen tres cartas aleatoriamente (sin remplazamiento) de una baraja de 52 cartas. Utilizar un diagrama árbol para determinar el número de maneras en las que se puede extraer (*a*) un diamante y un trébol y un corazón en secuencia (*b*) dos corazones y luego un trébol o una pica.

1.100. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 3 monedas diferentes en 2 posiciones diferentes?

PERMUTACIONES

1.101. Hallar el valor de (*a*) ${}_4P_2$, (*b*) ${}_7P_5$, (*c*) ${}_{10}P_3$.

1.102. ¿Para qué valor de n es ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_4$?

1.103. ¿De cuántas formas pueden 5 personas sentarse en un sofá si tiene solamente tres asientos?

1.104. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 7 libros en un estante si (*a*) es posible cualquier ordenación, (*b*) 3 libros determinados deben estar juntos, (*c*) 2 libros determinados deben ocupar los extremos?

1.105. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, . . . , 9 si (*a*) los números deben ser impares, (*b*) las primeras dos cifras de cada número son pares?

1.106. Resolver el problema anterior si las cifras de los números pueden estar repetidas.

1.107. ¿Cuántos números diferentes de 3 cifras pueden formarse con 3 cuatros, 4 doses y 2 treses?

1.108. ¿De cuántas formas pueden 3 hombres y 3 mujeres sentarse alrededor de una mesa si (*a*) no se impone ninguna restricción, (*b*) dos mujeres determinadas no deben sentarse juntas, (*c*) cada mujer debe estar entre dos hombres?

COMBINACIONES

1.109. Hallar el valor de (*a*) ${}_5C_3$, (*b*) ${}_8C_4$, (*c*) ${}_{10}C_8$.