Taller 02, Números complejos
Álgebra 9°

Germán Avendaño Ramírez *

Nombre: ______________________________ Curso: ______ Fecha: ___________

1. Números complejos

De la combinación de las cantidades imaginarias con los números reales, surgen los números complejos, los cuales tienen una parte real y una parte imaginaria. En general un número complejo se escribe de la forma:

$$a + bi,$$

donde a es la parte real y b es la parte imaginaria.

1.1. Operaciones con números complejos

En los números complejos se pueden realizar las operaciones que hacemos con los números reales: Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

1.1.1. Adición y sustracción

La adición o sustracción de números complejos, siendo $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ números complejos se define así:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

Es decir para sumar o restar números complejos, basta con sumar o restar la parte real con la parte real y la parte imaginaria con la parte imaginaria.

Ejemplo: Hallar $(3+4i)+(5-2i)$. Para efectuar la operación, sumamos la parte real con la parte real y la parte imaginaria con la parte imaginaria así:

$$\begin{aligned} (3 + 4i) + (5 - 2i) &= 3 + 5 + (4i + (-2i)) \\ &= 8 + 2i \end{aligned}$$

1.1.2. Multiplicación

Para multiplicar números complejos, se aplica la propiedad distributiva así:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i - bd \qquad \text{ya que } i^2 = -1 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar $(2 + 3i)(4 - 6i)$. Para multiplicar estos números complejos, usamos la propiedad distributiva así:

$$\begin{aligned} (2 + 5i)(4 - 6i) &= 2(4 - 6i) + 5i(4 - 6i) \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot -6i + 5i \cdot 4 + 5i \cdot -6i \\ &= 8 - 12i + 20i - 30i^2 \\ &= 8 + (-12 + 20)i - 30(-1) \\ &= 8 + 8i + 30 = 8 + 30 + 8i = 38 + 8i \end{aligned}$$

1.1.3. División

Para dividir números complejos, se deben multiplicar el dividendo y divisor, por el conjugado del divisor así:

Ejemplo: Efectuar $(3 - 2i) \div (5 + 2i)$. Para realizar este ejercicio, se busca el conjugado del divisor $5 + 2i$, que es $5 - 2i$, para luego multiplicar tanto el dividendo como el divisor por el conjugado del divisor. El conjugado de un número complejo se obtiene al cambiarle el signo a la parte imaginaria. Entonces para hacer esta división, se procede así:

$$\begin{aligned} (3 - 2i) \div (5 + 4i) &= \frac{(3 - 2i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} \\ &= \frac{3(5 - 4i) - 2i(5 - 4i)}{5^2 - (4i)^2} \\ &= \frac{3 \cdot 5 - 3 \cdot 4i - 2i \cdot 5 - 2i \cdot 4i}{25 - 16i^2} \\ &= \frac{15 - 12i - 10i - 8i^2}{25 - 16(-1)} \\ &= \frac{15 - (12 + 10)i - 8(-1)}{25 + 16} \\ &= \frac{15 + 8 - 22i}{41} = \frac{23 - 22i}{41} \\ &= \frac{23}{41} - \frac{22}{41}i \end{aligned}$$

*Lic. Mat. U.D., M.Sc. U.N.

2. Taller

2.1. Evaluación de conceptos

Conteste V o F para cada una de las siguientes afirmaciones, justificando su elección.

1. El producto de dos números complejos nunca es un número real
2. En el conjunto de los números complejos, -16 tiene dos ráices cuadradas
3. Cada número complejo es un número real
4. Todo número real es un número complejo
5. La parte real de el número complejo $6i$ es 0
6. Cada número complejo es un número imaginario puro
7. La suma de dos números complejos es siempre un número complejo
8. La parte imaginaria de el número complejo 7 es 0
9. La suma de dos números complejos a veces es un número real
10. La suma de dos números imaginarios puros es siempre un número imaginario puro

2.2. Problemas

Para los problemas 11-19, sume o reste según esté indicado

11. $(6+3i)+(4+5i)$
12. $(-8+4i)+(2+6i)$
13. $(3+2i)-(5+7i)$
14. $(-7+3i)-(5-2i)$
15. $(-3-10i)+(2-13i)$
16. $(4-8i)-(8-3i)$
17. $(-1-i)-(-2-4i)$
18. $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}i\right)$
19. $\left(-\frac{5}{9}+\frac{3}{5}i\right)-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{6}i\right)$

Para los problemas 20-34, escriba cada uno en términos de i y simplifique. Por ejemplo,

$$\sqrt{-20}=\sqrt{20}\sqrt{-1}=\sqrt{4}\sqrt{5}i=2\sqrt{5}i$$

20. $\sqrt{-81}$
21. $\sqrt{-49}$
22. $\sqrt{-14}$
23. $\sqrt{-33}$
24. $\sqrt{-\frac{16}{25}}$
25. $\sqrt{-\frac{64}{36}}$
26. $\sqrt{-18}$
27. $\sqrt{-84}$
28. $\sqrt{-75}$
29. $\sqrt{-63}$
30. $3\sqrt{-28}$
31. $5\sqrt{-72}$
32. $-2\sqrt{-80}$
33. $-6\sqrt{-27}$
34. $12\sqrt{-90}$

Para los problemas 35-44, escriba cada uno en términos de i, haga las operaciones indicadas y simplifique. Por ejemplo,

$$\sqrt{-3}\sqrt{-8}=\sqrt{3}i\sqrt{8}i=\sqrt{24}i^2=\sqrt{4}\sqrt{6}(-1)=-2\sqrt{6}$$

35. $\sqrt{-4}\sqrt{-16}$
36. $\sqrt{-81}\sqrt{-25}$
37. $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$
38. $\sqrt{-7}\sqrt{-10}$
39. $\sqrt{-9}\sqrt{-6}$
40. $\sqrt{-15}\sqrt{-5}$
41. $\sqrt{-2}\sqrt{-27}$
42. $\sqrt{6}\sqrt{-8}$
43. $\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$
44. $\dfrac{\sqrt{-56}}{\sqrt{-7}}$

Para los problemas 45-56, encuentre el producto y exprese las respuestas en la forma estandard de un número complejo $(a+bi)$.

45. $(5i)(4i)$
46. $(7i)(-6i)$
47. $(3i)((2-5i)$
48. $(-6i)(-2-7i)$
49. $(3+2i)(5+4i)$
50. $(6-2i)(7-i)$
51. $(-3-2i)(5+6i)$
52. $(9+6i)(-1-i)$
53. $(4+5i)^2$
54. $(-2-4i)^2$
55. $(6+7i)(6-7i)$
56. $(-1+2i)(-1-2i)$

Para los problemas 57-64, encuentre cada uno de los siguientes cocientes y exprese las respuestas en la forma estandard para un número complejo $a+bi$

57. $\dfrac{3i}{2+4i}$
58. $\dfrac{-2i}{3-5i}$
59. $\dfrac{-2+6i}{3i}$
60. $\dfrac{2}{7i}$
61. $\dfrac{2+6i}{1+7i}$
62. $\dfrac{3+6i}{4-5i}$
63. $\dfrac{-2+7i}{-1+i}$
64. $\dfrac{-1-3i}{-2-10i}$

Algunas de los conjuntos solución de las ecuaciones cuadráticas contienen números complejos como $\frac{-4+\sqrt{-12}}{2}$ y $\frac{-4-\sqrt{-12}}{2}$. Podemos simplificarlas así:

$$\frac{-4+\sqrt{-12}}{2}=\frac{-4+\sqrt{12}i}{2}=\frac{-4+\sqrt{4}\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4+2\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\frac{2(-2+\sqrt{3}i)}{2}=-2+\sqrt{3}i$$

La última expresión se obtiene al factorizar el numerador y simplificar el factor con el denominador. Simplifique las siguientes expresiones:

65. $\dfrac{-4-\sqrt{-12}}{2}$
66. $\dfrac{-1-\sqrt{-18}}{2}$
67. $\dfrac{10+\sqrt{-45}}{4}$
68. $\dfrac{4-\sqrt{-48}}{2}$