



Taller, Calculando límites algebraicamente Cálculo 11°



Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____

Propiedades de los límites

Para resolver límites algebraicamente, es necesario y útil aplicar sus propiedades:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ Límite de una suma

2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ Límite de una diferencia

3. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Límite de una constante por una función

4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ Límite del producto

5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ Límite de un cociente

Estas propiedades las aplicamos al resolver un límite de una función polinómica o racional. Además de éstas propiedades, también tenemos las siguientes propiedades especiales, algunas aplicadas a la potenciación y la radicación:

6. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

7. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

8. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ Para n entero positivo

9. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ Para n entero positivo y $a > 0$



Ejemplos: Resolver los límites siguientes:

1. $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4)$

2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Solución:

Taller

1. Suponga que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$$

Encuentre los valores de los límites. Si el límite no existe, explique por qué

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}$

g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2$

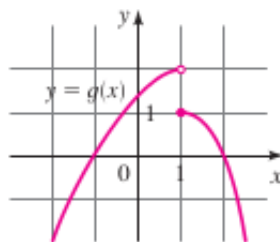
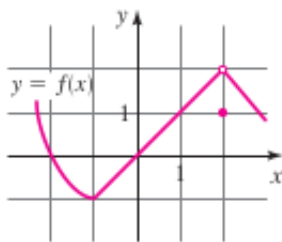
e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$

h) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$

2. Observe las gráficas de f y g . Úselas para evaluar cada límite si existe. Si no existe, explique por qué.



a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$

Evalúe el límite justificando cada paso con el uso de las propiedades.

- | | |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 3. $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)^2$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$ | 7. $\lim_{t \rightarrow -2} (t + 1)^9(t^2 - 1)$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$ | 8. $\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$ |

Evalúe cada límite si existe

- | | |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x} - 4$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x + 2}$ | 17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$ |
| 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ | 18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$ |
| 13. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$ |
| 14. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$ | 20. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$ |

Encuentre los límites y luego use geogebra para verificar el resultado

- | | |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ | 23. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x}$ |
| 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 + x)^3 - 64}{x}$ | 24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 1}{x^5 - x}$ |

Encuentre el límite si existe. Si el límite no existe explique por qué

- | | |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 25. $\lim_{x \rightarrow -4} x + 4 $ | 27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x - 2 }{x - 2}$ |
| 26. $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{ x + 4 }{x + 4}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow 1.5} \frac{2x^2 - 3x}{ 2x - 3 }$ |



29. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

30. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

31. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Encuentre $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe?

c) Grafique la función f

32. Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Evalúe cada límite si existe

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

33. Cancelación y límites

a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Teniendo en cuenta la parte a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

Contracción de Lorentz: En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v \rightarrow c} L$ e interprete el resultado. Es necesario calcular el límite por izquierda?