El sistema de los números racionales

National Council of Teachers of Mathematics

TEMAS DE MATEMATICAS

10

10. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Este cuaderno es uno de los diez nuevos títulos que ha elaborado el National Council of Teachers of Mathematics, los que se suman a la serie de ocho ya aparecidos y reimpresos varias veces en la versión castellana.
Como cada uno de los ocho cuadernos mencionados, el presente, el número diez en la colección, ha sido escrito para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Comprende la exposición del tema **El sistema de los números racionales**, básico en matemáticas. Este tema, como los que trata la serie, ahora de dieciocho, se halla entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.
Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje, transmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática, tratados en cada uno de estos cuadernos.
Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuader-

TEMAS
Colección DE
MATEMATICAS

Traducción:
Federico Velasco Coba
Coordinador del Instituto
de Geofísica
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

Revisión técnica:
Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

10

El sistema de los números racionales

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

Editorial F. Trillas, S. A.
México, 1970

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet number 10. The system of rational numbers.
Versión autorizada en español de la
primera edición publicada en inglés por

Primera edición en español, septiembre 1970

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prólogo

Este cuaderno es uno de la serie iniciada en 1964 por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Teniendo en cuenta que los primeros ocho cuadernos tuvieron una acogida excelente y fueron reimpresos varias veces, se pensó que sería muy conveniente una extensión de la serie a nuevos temas.

Como los primeros cuadernos (números 1 al 8), las nuevas unidades están escritas para profesores de escuelas elementales más bien que para sus alumnos. Cada cuaderno presenta una exposición de un tema básico de las matemáticas. Los temas tratados son aquéllos con los que los profesores de escuelas elementales necesitan estar familiarizados para poder tratar con comprensión las matemáticas que comúnmente se enseñan en la escuela elemental. Los cuadernos presentan un estudio introductorio a tales temas, no tratamientos exhaustivos; el lector interesado puede estudiar estos temas con mayor amplitud en otras publicaciones.

Los temas se escogieron especialmente con la finalidad de proporcionar material elemental para los profesores que creen que la experiencia de aprendizaje que se proporciona a los niños en sus primeros años escolares, debe incluir una sencilla introducción a algunos de los *conceptos unificantes centrales de la matemática*. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no les prepara para enseñar la aritmética de una manera consistente con este punto de vista. Tanto los autores como el NCTM tienen la esperanza de que esta serie de cuadernos puede ser de ayuda para estos profesores al igual que para otros, ciertamente, para todos los interesados en mejorar la enseñanza de las matemáticas.

Los primeros títulos de la serie son los siguientes:

Cuaderno 1: *Conjuntos*
Cuaderno 2: *Números enteros*
Cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4: *Algoritmos de las operaciones con números enteros*

Cuaderno 5: *Números y sus factores*
Cuaderno 6: *Números racionales*
Cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8: *Proposiciones numéricas*

Los nuevos títulos son:

Cuaderno 9: *El sistema de los enteros*
Cuaderno 10: *El sistema de los números racionales*
Cuaderno 11: *El sistema de los números reales*
Cuaderno 12: *Lógica*
Cuaderno 13: *Gráficas, relaciones y funciones*
Cuaderno 14: *Geometría informal*
Cuaderno 15: *Medida*
Cuaderno 16: *Recopilación, organización e interpretación de datos*
Cuaderno 17: *Sugerencias para la resolución de problemas*
Cuaderno 18: *Simetría, congruencia y semejanza*

Se sugiere que, en general, los cuadernos se lean en el orden de los números que se les asignaron, porque, hasta cierto punto, en su preparación se usó una presentación en espiral de los temas que en ellos se tratan.

La preparación de los nuevos cuadernos comenzó en 1966 y en ella intervinieron los miembros de un grupo de escritores de un curso de verano. Los autores expresan aquí su profundo agradecimiento a las siguientes personas por la lectura parcial del manuscrito y por la atención dada a diversas consultas durante la preparación de los cuadernos: Joseph M. Trotter, director de la Escuela de San Luis Rey, y Bonita Trotter, profesora en la Laurel School, ambos del Oceanside Union School District; John M. Hoffman, director de la Community Educational Resources Section del Departamento de Educación del Condado de San Diego, y James E. Inskeep, Jr., profesor de educación en el San Diego State College. Los autores se sienten particularmente agradecidos con Alice C. Beckenbach por su considerable ayuda en la organización y edición del material para varios de los cuadernos. Expresan también su profundo agradecimiento a Elaine Barth y su eficiente equipo de mecanógrafos por su excelente trabajo en la preparación del manuscrito.

El nuevo proyecto, emprendido para proseguir el trabajo del primero, fue iniciado y apadrinado por el Comité de Publicaciones Suplementarias de la NCTM bajo la dirección de William Wooton. Los recursos financieros fueron provistos por la NCTM, que hace ahora pública su felicitación a los

miembros del grupo de escritores que han llevado a cabo la presente extensión de la serie "Temas". He aquí sus nombres.

George Arbogast
Manuel P. Berri
Marguerite Brydegaard
Louis S. Cohen
Helen L. Curran
Patricia Davidson
Walter Fleming
Joseph Hashisaki
Lenore S. John
David Johnson
Robert H. Sorgenfrey
J. Dean Swift
William Wooton
Edwin F. Beckenbach, *coordinador*

Indice general

El sistema de los números racionales

CUADERNO 10

INTRODUCCIÓN

El primer conjunto de números que un niño aprende a usar es el conjunto N de los números naturales $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. El siguiente es el conjunto W de los números plenos $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.* Estos son suficientes para muchas de las formas en que usamos los números. Sin embargo, no lo son para otros propósitos; por ejemplo, para la medida de segmentos rectilíneos en función de un segmento unidad dado. Para anotar medidas, necesitamos el conjunto de números que contiene a los números plenos y también a números tales como

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{5}, \frac{127}{10},$$

es decir, el conjunto A de los números racionales positivos. (En realidad, en geometría necesitamos aun otros números, como $\sqrt{2}$, para expresar las verdaderas longitudes de segmentos rectilíneos.) Por ejemplo, si un cuadrado tiene lados de longitud 1, entonces la diagonal tiene longitud $\sqrt{2}$, que no es un número racional. (Véase el Cuaderno 11: *El sistema de los números reales*.) Estas tres clases de números aún no son suficientes para todos los propósitos. Para estudiar y anotar los cambios que pueden ocurrir en direcciones opuestas —tales como subidas y caídas de precios, la dilatación y la contracción de metales o el aumento y decrecimiento de la población, necesitamos números negativos. En el Cuaderno 9: *El sistema de los enteros*, ya nos encontramos con un conjunto de números negativos, a saber, el conjunto J^- de los enteros negativos, en el que todo número es el "opuesto" de un entero negativo. En este cuaderno ampliaremos nuestras consideraciones para incluir el opuesto de todo número racional positivo. Como nuestra discusión

* En los primeros cuadernos, al referirnos al conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, se empleó el nombre de números *enteros*, por ser este vocablo de uso más general en lengua española. A partir del Cuaderno 9, y en los subsiguientes, al referirnos a ellos los llamamos *plenos*.

incluirá muchos puntos de referencia a otros folletos de esta serie de "temas", el lector encontrará ayuda al repasar en este momento algunos de ellos —en particular el Cuaderno 6: *Números racionales;* el Cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales;* y el Cuaderno 9: *El sistema de los enteros.*

En este estudio del sistema de los números racionales, la primera parte está dedicada a una revisión de lo que ya hemos aprendido acerca de los números racionales *positivos* y de lo que sabemos acerca de las operaciones con enteros positivos, negativos y el cero. De esta información podemos sacar inferencias acerca de lo que deben significar para nosotros los números racionales negativos y acerca de las formas en que podemos operar con ellos.

La segunda parte de este cuaderno está dedicada a un tratamiento más sistemático del sistema de los números racionales. Las definiciones de las operaciones con números racionales se darán en términos de *pares ordenados de enteros,* y las propiedades de estas operaciones se justificarán desde su origen en las propiedades de las operaciones con enteros.

UNA OJEADA INTUITIVA A LOS NÚMEROS RACIONALES

Supongamos que la temperatura se ha elevado tres grados en cuatro horas y que deseamos conocer el aumento promedio en grados por hora. Escribimos la proposición

$$4 \times m = 3,$$

donde m representa el número de grados de aumento promedio por hora. Esta proposición no tiene solución en el conjunto de los enteros, pero en el conjunto de los racionales sí tiene una solución, a saber, $\frac{3}{4}$.

Para este problema, los números racionales positivos discutidos en el Cuaderno 6 son adecuados. El lector recordará que un número racional positivo es un número que puede representarse como el cociente de dos números de conteo; por ejemplo, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$

son números racionales positivos; también lo son 1 y 2, ya que pueden representarse, respectivamente, como

$\frac{1}{1}$ y $\frac{2}{1}$ (y como $\frac{2}{2}$ y $\frac{4}{2}$, y así sucesivamente).

Supongamos, sin embargo, que la temperatura ha *bajado* tres grados en cuatro horas. Si la representamos en grados por $^-3$, escribiremos ahora la proposición

$$4 \times m = {}^-3.$$

Para resolver una proposición como ésta, necesitamos nuevos números, a los que llamaremos *números racionales negativos*. Para nuestro ejemplo necesitamos un número que represente el mismo cambio promedio que $\frac{3}{4}$, pero un cambio en la dirección opuesta. A este número le llamaremos "tres cuartos negativo".

La recta numérica

Comencemos usando una recta numérica horizontal, como hicimos en los Cuadernos 6, 7 y 9. Escogemos un punto, llamado origen, para representar a 0, y un punto a la derecha del origen para representar al 1. A la derecha del origen podemos ahora localizar un punto único para cada número natural y, ciertamente, para cada número racional positivo. La figura 1 muestra la representación mediante puntos de algunos de estos números. Los puntos son las *gráficas* de los números correspondientes, y los números son las *coordenadas* de los puntos correspondientes.

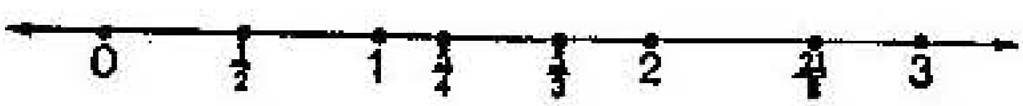


FIGURA 1

Imaginémosnos ahora un espejo, perpendicular a la recta de los números en su origen, que refleja el lado derecho de la recta sobre el lado izquierdo de la misma. Cada punto a la derecha del origen tendrá un punto reflexión de él (su imagen) que aparecerá a la izquierda del origen. Los dos puntos estarán a igual distancia del origen, pero en direcciones opuestas. Usemos el símbolo

$$^-\left(\frac{1}{2}\right)$$

como rótulo para la reflexión del punto que representa a $\frac{1}{2}$,
el símbolo $^-1$ (como hicimos en el Cuaderno 9) para la imagen del punto que representa a 1, el símbolo

$$^-\left(\frac{5}{4}\right)$$

para la reflexión del punto que representa a $\frac{5}{4}$,
y así sucesivamente. Tenemos entonces el cuadro mostrado en la figura 2.

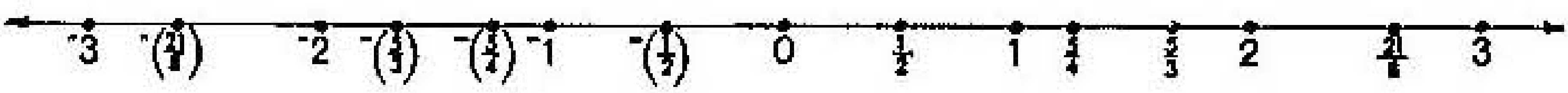


FIGURA 2

Exactamente de la misma manera que hemos asociado un número racional positivo con cada uno de los puntos rotulados a la derecha del origen, asociamos ahora un número racional negativo con cada punto rotulado a la izquierda del origen. Con el punto rotulado

$$^{-}\left(\frac{5}{4}\right),$$

por ejemplo, asociamos un número racional negativo. El símbolo

$$^{-}\left(\frac{5}{4}\right)$$

(léase "cinco cuartos negativo") se usa como un nombre para este número.

Tenemos, pues, una disposición en parejas de los números racionales. Correspondiendo a cada número racional positivo hay un número racional negativo tal que los puntos que representan estos dos números son reflexiones uno del otro.

En términos del punto de vista enunciado en la página 31 del Cuaderno 6: *Números racionales,* podemos hacer una generalización y decir: exactamente de igual modo que el sistema de los números positivos puede considerarse como un subsistema del sistema de los números racionales positivos, el sistema de los enteros puede considerarse como subsistema del sistema de los números racionales. De acuerdo con ello hablaremos de los números racionales 0, 1, $^{-}4$, $^{-}1$, etc.

Adoptemos de nuevo el vocabulario del Cuaderno 9: *El sistema de los enteros,* y usemos la expresión "el opuesto de" para reemplazar la expresión "el reflejo de", y el símbolo "$^{\circ}(\frac{1}{2})$" para expresar "el opuesto de $\frac{1}{2}$". Tenemos, entonces, por ejemplo,

$$^{\circ}\left(\frac{1}{2}\right) = {}^{-}\left(\frac{1}{2}\right),$$

que se lee "el opuesto de un medio es un medio negativo". También podemos escribir

$$^{o}\left[^{-}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2},$$

que se lee "el opuesto de un medio negativo es un medio". Para determinar $^{o}[^{o}(\frac{1}{2})]$, podemos combinar estas dos proposiciones numéricas para obtener

$$^{o}\left[^{o}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = {}^{o}\left[^{-}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

En términos generales, el opuesto del opuesto de *cualquier* número racional es el propio número.

Exactamente lo mismo que los símbolos $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ y $\frac{4}{8}$ pueden usarse como rótulos para el mismo punto a la derecha del origen sobre la recta numérica y, por tanto, como nombres para el mismo número racional (positivo), los símbolos

$$^{-}\left(\frac{1}{2}\right), {}^{-}\left(\frac{2}{4}\right), {}^{-}\left(\frac{3}{6}\right) \text{ y } {}^{-}\left(\frac{4}{8}\right)$$

todos se corresponden con el mismo punto a la izquierda del origen y todos son nombres para el mismo número racional (negativo). En realidad, si n es un número natural cualquiera, entonces

$$^{-}\left(\frac{1 \times n}{2 \times n}\right)$$

denomina al mismo número racional que

$$^{-}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Orden

El lector recordará que los números racionales positivos están "ordenados"; es decir, para dos números racionales tales como $\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{4}$, una y sólo una de las siguientes tres proposiciones es cierta: $\frac{5}{4} < \frac{7}{4}$. ("$<$" significa "es menor que") o $\frac{5}{4} = \frac{7}{4}$ o $\frac{7}{4} < \frac{5}{4}$. En este caso, la primera de las tres es cierta y las otras dos son falsas. Esto se debe a que hay un número *positivo*,

$$\frac{2}{4}, \text{ tal que } \frac{5}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7}{4}.$$

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan números racionales positivos, la afirmación $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ quiere decir que hay un número positivo que cuando se suma al

$\frac{a}{b}$ nos da $\frac{c}{d}$ En otras palabras, se debe añadir un número *positivo* a $\frac{a}{b}$ para obtener $\frac{c}{d}$. La relación de orden de cualesquiera dos números racionales positivos puede ser descrita muy fácilmente sobre la recta numérica. Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces el punto correspondiente a $\frac{a}{b}$ sobre una recta numérica horizontal está a la izquierda del punto correspondiente a $\frac{c}{d}$. Por ejemplo, sabemos que $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$, y el punto que representa a $\frac{3}{4}$ está a la izquierda del punto que representa a $\frac{5}{4}$.

La noción de orden puede extenderse a los racionales negativos [de aquí en adelante usaremos con frecuencia "racional(es)" por "número(s) racional(es)"] observando la posición de los puntos correspondientes sobre la recta numérica; es decir, si r y s son dos números racionales cualesquiera, decimos que $r < s$ si el punto de la recta numérica que corresponde a r está a la izquierda del punto que corresponde a s. Cuando (en el tratamiento sistemático que sigue) definimos la adición en el conjunto de los números racionales, vemos que nuestra forma actual de considerar el orden concuerda con la definición de que $r < s$, si hay un número positivo t que sumado con r nos da s.

¿Cómo están relacionados

$$^{-}\left(\frac{3}{4}\right) \text{ y } 0?$$

La respuesta es

$$\text{“}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) < 0\text{”}$$

porque el punto correspondiente a

$$^{-}\left(\frac{3}{4}\right)$$

está a la izquierda del origen. La acomodación de los números sobre la recta numérica indica que todo racional negativo es menor que cero, y que cero es menor que cualquier racional positivo. Además, este acomodo indica que todo racional negativo es menor que cualquier racional positivo.

¿Y qué se puede decir sobre dos racionales negativos? Consideremos, por ejemplo,

$$^{-}\left(\frac{3}{4}\right) \text{ y } ^{-}\left(\frac{5}{4}\right),$$

que son los opuestos de $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{4}$, respectivamente. El punto que representa a $\frac{3}{4}$ está a la izquierda del punto que representa a $\frac{5}{4}$ en la recta de los números. Pero, ¿qué es lo que pasa con las reflexiones de estos puntos? El punto correspondiente a

$$^{-}\left(\frac{5}{4}\right)$$

está a la izquierda del punto correspondiente a

$$^{-}\left(\frac{3}{4}\right),$$

y por tanto,

$$^{-}\left(\frac{5}{4}\right) < {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right).$$

Vemos por ello que el proceso de reflexión tiene el efecto de "invertir el orden".

La reflexión, sin embargo, no cambia la relación "entre". Por ejemplo, tenemos $\frac{5}{8} < \frac{6}{8}$ y $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$. Estas desigualdades suelen escribirse juntas en la forma $\frac{5}{8} < \frac{6}{8} < \frac{7}{8}$, y se dice que
$\frac{6}{8}$ está *entre* $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{8}$.
Para los correspondientes racionales negativos se tiene

$$^{-}\left(\frac{7}{8}\right) < {}^{-}\left(\frac{6}{8}\right) \text{ y } {}^{-}\left(\frac{6}{8}\right) < {}^{-}\left(\frac{5}{8}\right),$$

lo que escribimos en la forma

$$^{-}\left(\frac{7}{8}\right) < {}^{-}\left(\frac{6}{8}\right) < {}^{-}\left(\frac{5}{8}\right) ; \text{ y } {}^{-}\left(\frac{6}{8}\right) \text{ está entre } {}^{-}\left(\frac{7}{8}\right) \text{ y } {}^{-}\left(\frac{5}{8}\right).$$

Valor absoluto

Los números racionales pueden representarse por *flechas* sobre la recta de los números, de igual manera que se hizo con los enteros. El racional positivo $\frac{5}{4}$ puede representarse por una flecha que apunta hacia la derecha y que tiene una longitud de $\frac{5}{4}$, mientras que el racional negativo

$$^{-}\left(\frac{5}{4}\right)$$

puede representarse por una flecha que apunta hacia la izquierda y que tiene una longitud también de $\frac{5}{4}$. Tales flechas se muestran en la figura 3. Las flechas comienzan (tienen sus colas) en esta figura en el origen y terminan (tienen sus puntas) en los puntos cuyas coordenadas representan. Por esta razón estas flechas se dice que están en *posición estándar*. Una

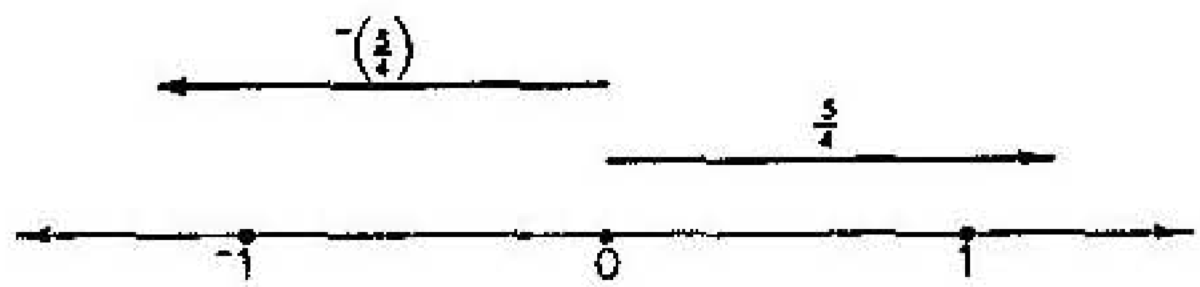


FIGURA 3

flecha que representa un número racional puede, sin embargo, tener su cola en cualquiera de los puntos de la recta, con tal de que sea de la misma longitud y esté apuntando en la misma dirección que la flecha correspondiente en posición estándar.

La longitud de la flecha que se usa para representar un número racional se llama *valor absoluto* de ese número. Así pues, el valor absoluto de cada uno de los números

$$\frac{5}{4} \text{ y } {}^-\left(\frac{5}{4}\right),$$

que se denota por

$$\left|\frac{5}{4}\right| \text{ y } \left|{}^-\left(\frac{5}{4}\right)\right|,$$

respectivamente, es $\frac{5}{4}$, ya que cada uno de tales dos números está representado por una flecha que tiene una longitud igual a $\frac{5}{4}$.
En términos generales, cualquier número racional y su opuesto tienen el mismo valor absoluto; es decir, si r es un número racional cualquiera, entonces $|r| = |{}^{\circ}r|$.

Adición y sustracción de números racionales por medio de flechas

Podemos definir la suma de números racionales en términos de flechas sobre la recta real en la misma forma en que definimos la suma de enteros.

Describamos la adición de $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{4}$. (Véase la figura 4.) La flecha para el primer sumando, $\frac{3}{4}$, está en posición estándar, con su cola en el origen; la flecha para el segundo sumando, $\frac{7}{4}$, tiene su cola en la punta o cabeza de la primera flecha. La flecha dibujada con trazo interrumpido para la suma de $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{4}$ está en posición estándar con su cola en el origen y su punta

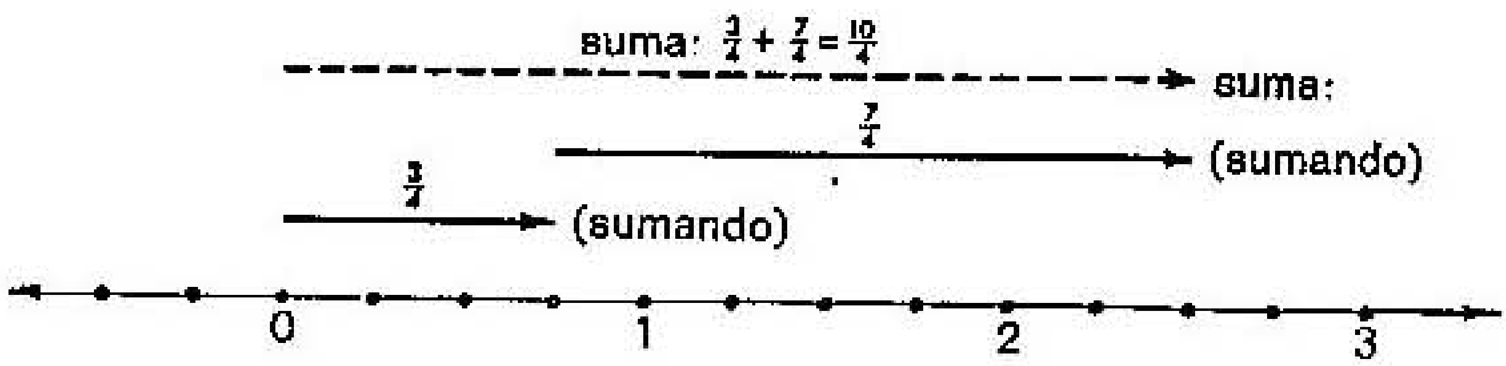


FIGURA 4

emparejada, a ras, con la punta de la segunda flecha. Nótese que la flecha para la suma se extiende desde el punto origen hasta el punto correspondiente a $\frac{10}{4}$. Así pues, la adición por medio de flechas nos da, para este ejemplo:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=\frac{10}{4}.$$

La suma de

$$^{-}\left(\frac{3}{4}\right) \text{ y } ^{-}\left(\frac{7}{4}\right)$$

aparece en una forma análoga en la figura 5.

Nótese que la figura 5 puede pensarse como reflexión de la figura 4 en 0.

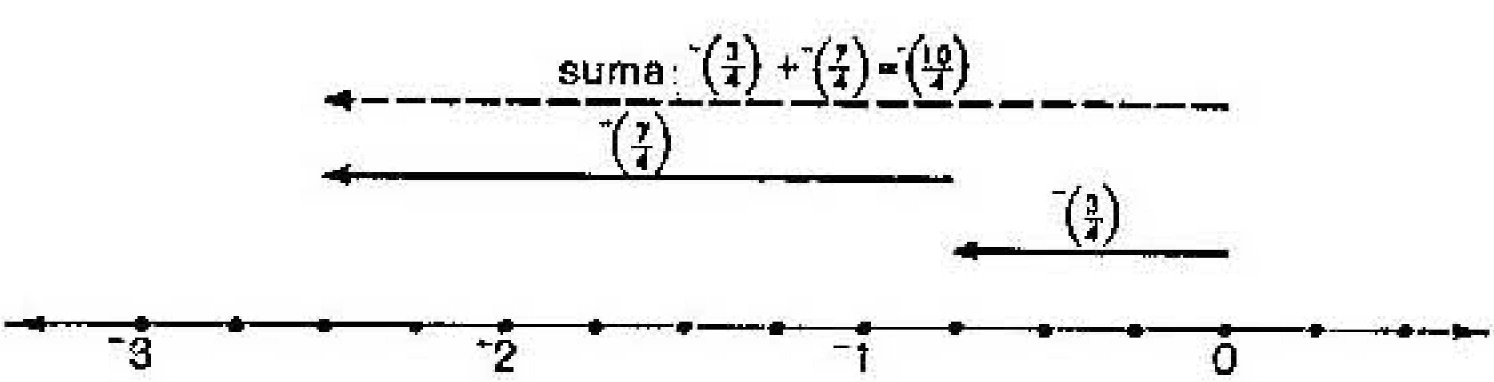


FIGURA 5

¿Qué es lo que sucede cuando se suman un racional positivo y un racional negativo? Las dos rectas numéricas de la figura 6 describen las dos sumas $\frac{5}{4}+{}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)$ y $^{-}\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}$.

Nótese que en ambos casos la longitud de la flecha para la suma es igual a la diferencia entre las longitudes de las flechas para los sumandos:

$$\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}\right).$$

La dirección de la flecha para la suma es, en cada caso, la misma que la dirección de la más larga de las dos flechas para los sumandos.

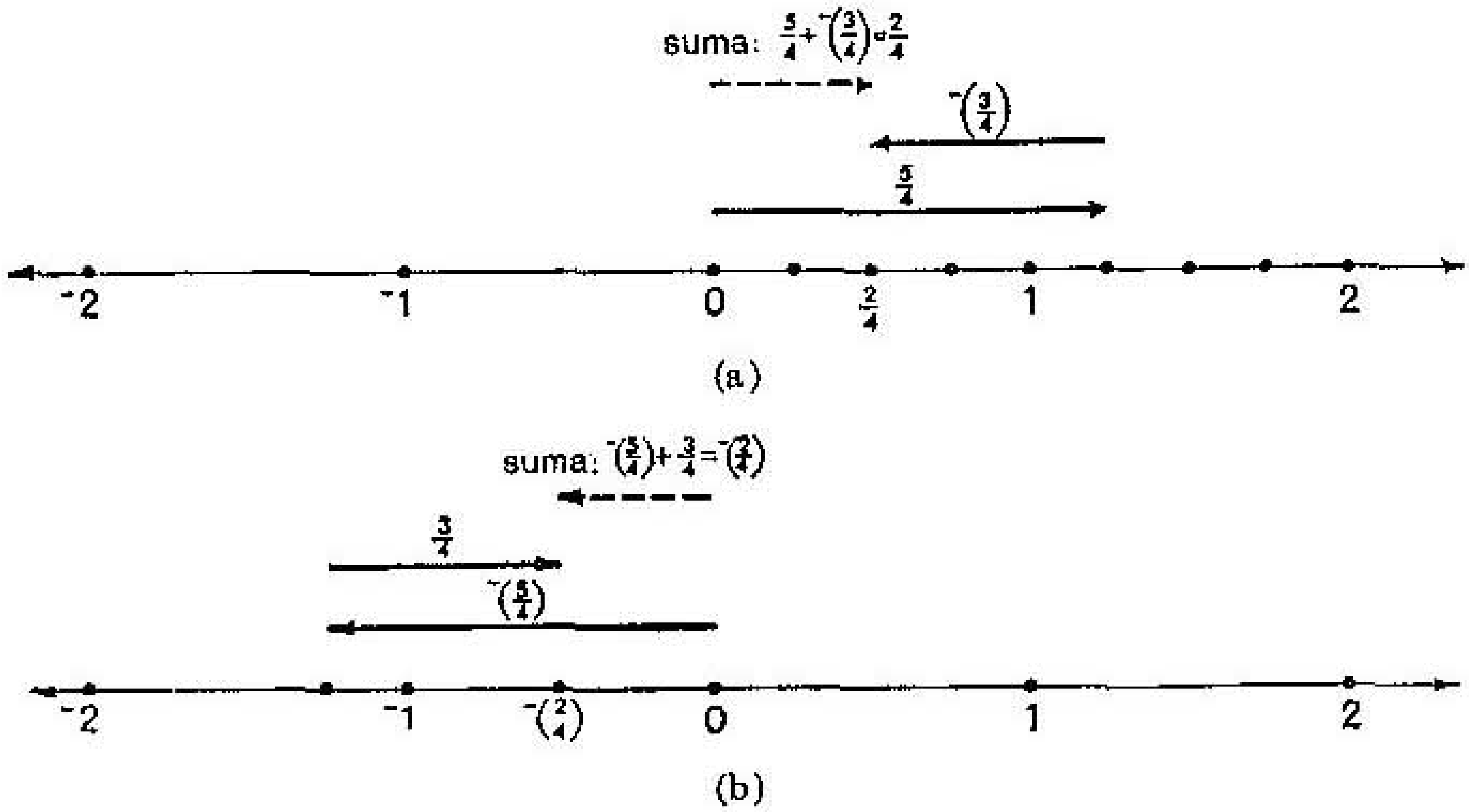


FIGURA 6

El número (racional) 0 es el *elemento identidad aditiva* en el sistema de los racionales, al igual que lo es en el sistema de los enteros. Por ejemplo,

$$0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

y

$$0 + {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) = {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) + 0 = {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right).$$

La figura 7 ilustra la suma de un número racional y su opuesto,

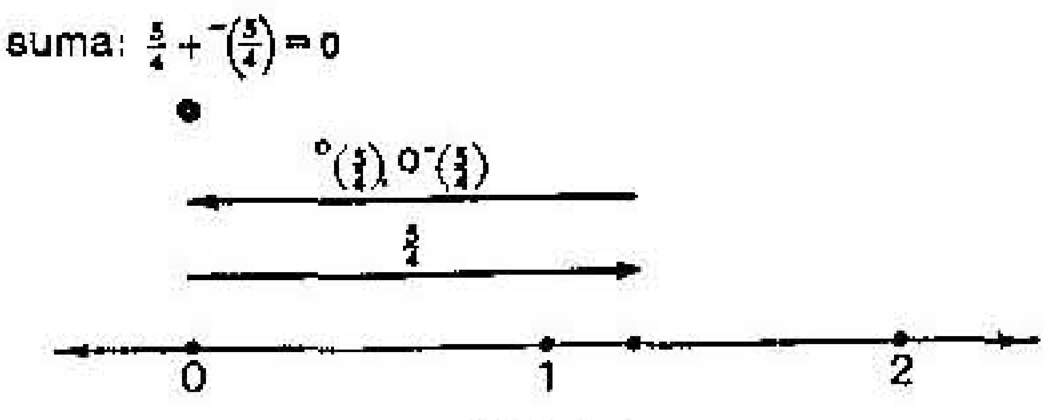


FIGURA 7

$\frac{5}{4} + {}^{\circ}\left(\frac{5}{4}\right)$. La flecha para ${}^{\circ}\left(\frac{5}{4}\right)$

(que comienza en la punta de la primera flecha) se extiende hasta el origen. Por tanto, la flecha para la suma de $\frac{5}{4}$ y ${}^{\circ}\left(\frac{5}{4}\right)$ es la flecha cero y

$$\frac{5}{4} + {}^{\circ}\left(\frac{5}{4}\right) = 0.$$

La suma de cualquier número racional y su opuesto es el elemento identidad aditiva, 0. Por esta razón, decimos que el opuesto de un número racional es su *inverso aditivo.*

La *sustracción* de un segundo número racional de un primero es ahora un problema sencillo; lo único por hacer es *sumar el opuesto,* o inverso aditivo, del segundo al primer número. (Véanse las páginas 56-58 para una explicación de por qué esto es así.) Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{7}{4} - {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{7}{4} + {}^{\circ}\left[{}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)\right] \\ &= \frac{7}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{10}{4}. \end{aligned}$$

Multiplicación y división de números racionales

¿Cómo multiplicamos en el conjunto de los racionales? Sabemos ya cómo encontrar productos de racionales positivos. El producto de $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{5}$ es $\frac{2 \times 3}{7 \times 5}$, es decir $\frac{6}{35}$. ¿A qué deberá ser igual el producto de

$$\frac{3}{5} \text{ y } {}^{-}\left(\frac{2}{7}\right)?$$

Recuérdese que en el sistema de los enteros, que se discutió en el Cuaderno 9, el producto de 7 y $^{-}9$, por ejemplo, es el opuesto del producto de 7 y 9. Es, por tanto, razonable que el producto de

$$\frac{3}{5} \text{ y } {}^{-}\left(\frac{2}{7}\right)$$

sea el opuesto del producto de $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$. De donde, decidimos que

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \times {}^{-}\left(\frac{2}{7}\right) &= {}^{\circ}\left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}\right) \\ &= {}^{\circ}\left(\frac{6}{35}\right). \\ &= {}^{-}\left(\frac{6}{35}\right). \end{aligned}$$

¿Cuál es el producto de $^{-}4$ y $\frac{16}{7}$? Es el opuesto de $4 \times \frac{16}{7}$, luego

$$\begin{aligned} {}^{-}4 \times \frac{16}{7} &= {}^{\circ}\left(4 \times \frac{16}{7}\right) \\ &= {}^{\circ}\left(\frac{4}{1} \times \frac{16}{7}\right) \\ &= {}^{\circ}\left(\frac{64}{7}\right) \\ &= {}^{-}\left(\frac{64}{7}\right). \end{aligned}$$

¿Y qué hay respecto al producto de dos racionales negativos? Consideremos el producto

$${}^{-}\left(\frac{4}{3}\right) \times {}^{-}\left(\frac{6}{5}\right)$$

Recuérdese que el producto de dos enteros negativos es igual al producto de sus opuestos. Como queremos que la misma regla se aplique a los racionales negativos, decidimos que

$$\begin{aligned} {}^{-}\left(\frac{4}{3}\right) \times {}^{-}\left(\frac{6}{5}\right) &= \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \\ &= \frac{24}{15}, \quad \text{u } \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

El número (racional) 1 es el *elemento identidad multiplicativa* en el sistema de los racionales, exactamente lo mismo que en el sistema de los enteros. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 1 \times {}^{-}\left(\frac{6}{7}\right) &= \frac{1}{1} \times {}^{-}\left(\frac{6}{7}\right) \\ &= {}^{-}\left(\frac{1 \times 6}{1 \times 7}\right) \\ &= {}^{-}\left(\frac{6}{7}\right). \end{aligned}$$

Exactamente lo mismo que en el caso de los enteros, la multiplicación de un número racional por $^-1$ nos da el opuesto de ese número.

$$^-1 \times \frac{4}{5} = {}^{o}\left(\frac{4}{5}\right), \text{ o } {}^-\left(\frac{4}{5}\right); \qquad {}^-1 \times {}^-\left(\frac{5}{3}\right) = {}^{o}\left[{}^-\left(\frac{5}{3}\right)\right], \text{ o } \frac{5}{3}.$$

El sistema de los racionales tiene una propiedad importante que no tiene el sistema de los enteros. La propiedad es la siguiente:

> *Para todo numero racional, r, excepto el cero, hay otro número racional s, el* recíproco *de r, tal que* $r \times s = 1$.

Como el producto de cualquier número racional r $(r \neq 0)$ y su recíproco es el elemento identidad multiplicativa, 1, decimos que el recíproco de un número racional distinto de cero es su *inverso multiplicativo*. Es fácil ver que el sistema de los enteros no tiene esta propiedad. No hay un entero x tal que $8 \times x = 1$. Así pues, en el sistema de los enteros, 8 no tiene inverso multiplicativo. Como un elemento del sistema de los números racionales, 8 sí tiene, sin embargo, un inverso multiplicativo, a saber, $\frac{1}{8}$, porque $8 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8}$, que es 1. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de

$${}^-\left(\frac{15}{9}\right)\ ?$$

La contestación es

$${}^-\left(\frac{9}{15}\right),$$

porque

$${}^-\left(\frac{9}{15}\right) \times {}^-\left(\frac{15}{9}\right) = \frac{9}{15} \times \frac{15}{9} = \frac{9 \times 15}{15 \times 9} = 1.$$

Para resumir, si a y b son enteros positivos, entonces el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, y el inverso multiplicativo de

$${}^-\left(\frac{a}{b}\right) \text{ es } {}^-\left(\frac{b}{a}\right).$$

La *división* de un número racional por un número racional distinto de cero es ahora un problema sencillo; sólo se tiene que *multiplicar* el número racional por el recíproco, o inverso multiplicativo, del número racional distinto de cero. (Véanse las páginas 74-77 de este mismo cuaderno, para una explicación de por qué esto es así.) Por ejemplo, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{4} \div {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{7}{4} \times {}^{-}\left(\frac{4}{3}\right) \\
&= {}^{-}\left(\frac{7}{4} \times \frac{4}{3}\right) \\
&= {}^{-}\left(\frac{7}{3}\right).
\end{aligned}
$$

GRUPO DE EJERCICIOS 1

1. Hágase un diagrama de flechas para cada una de las siguientes sumas:

   a) $\frac{7}{3} + {}^{-}\left(\frac{8}{3}\right)$ *c)* ${}^{-}\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{5}{8}$

   b) ${}^{-}\left(\frac{5}{4}\right) + {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)$ *d)* $\frac{5}{6} + \frac{7}{6}$

2. Dibújese una recta numérica con los segmentos unidad divididos en octavos. Para cada uno de los siguientes números, localícese y rotúlese el punto que le corresponde y también el correspondiente a su opuesto.

   a) $\frac{5}{8}$ *c)* ${}^{o}\left[{}^{-}\left(\frac{9}{8}\right)\right]$

   b) ${}^{-}\left(\frac{17}{8}\right)$ *d)* ${}^{-}\left(\frac{13}{8}\right)$

3. Escójase un número racional y hágase un diagrama de flechas para mostrar cuál es la suma de ese número y su opuesto.

4. Nómbrese cada producto por una expresión más sencilla.

   a) $\frac{3}{5} \times \frac{7}{10}$ *c)* ${}^{-}\left(\frac{7}{9}\right) \times {}^{-}\left(\frac{5}{4}\right)$

   b) ${}^{-}\left(\frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{10}$ *d)* $\left(\frac{11}{4}\right) \times {}^{-}\left(\frac{13}{5}\right)$

5. Escríbase un nombre más sencillo de cada uno de los siguientes productos.

   a) $4 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$ *e)* $0 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$

   b) $3 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$ *f)* ${}^{-}1 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$

   c) $2 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$ *g)* ${}^{-}2 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$

   d) $1 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$ *h)* ${}^{-}3 \times {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$

NÚMEROS RACIONALES DENOMINADOS POR MEDIO DE FRACCIONES

Pares ordenados de enteros

Hasta el momento, hemos estudiado en nuestra discusión el conjunto total de los números racionales considerando primero el conjunto de los números racionales no negativos, o números que pueden denominarse por fracciones de la forma $\frac{a}{b}$, en que b es un número natural y a es un número pleno. Los números plenos 0, 1, 2, 3 son elementos de este conjunto, ya que se les puede denominar mediante fracciones tales como $\frac{0}{7}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{3}{1}$. Considerábamos los puntos de la recta de los números que se corresponden con tales números. Hacíamos notar también que toda fracción $\frac{a}{b}$ se corresponde exactamente con un punto de la recta y que si a no es igual a cero, entonces cada uno de los números denominados por estas fracciones es mayor que 0 y todos los puntos correspondientes a ellas se encuentran a la derecha del origen en la recta numérica. Nos imaginábamos después un espejo en el origen que reflejaba la mitad derecha de la recta numérica en su mitad izquierda. A los números correspondientes a las reflexiones se les llamaba números racionales negativos. Estos números, junto con cero y los números racionales positivos, constituyen el conjunto de los números racionales en su totalidad. Vimos, utilizando lo que sabíamos acerca de la aritmética de los racionales no negativos y las operaciones con enteros positivos y negativos, como parecería razonable sumar y multiplicar en el conjunto total de los números racionales.

Observemos ahora a los números racionales desde otro punto de vista. Cuando usamos por primera vez una *fracción* (un símbolo o nombre que indicaba el cociente de dos números), como por ejemplo, $\frac{2}{3}$, probablemente la usamos para designar una parte de un objeto, por ejemplo, una parte de una región cuadrada. Si la región está dividida en tres regiones congruentes que no se traslapan y luego dos de ellas se sombrean (fig. 8), decimos que las dos terceras partes de la región están sombreadas. La fracción $\frac{2}{3}$ está formada por un par de números naturales. El número 3 (el denominador) es el número de regiones congruentes en que la región unidad ha sido dividida, y el número 2 (el numerador) es el número de partes congruentes que se han sombreado. Si la región cuadrada se toma como región *unidad* con medida 1, entonces la medida de la parte sombreada es el número racional positivo $\frac{2}{3}$.

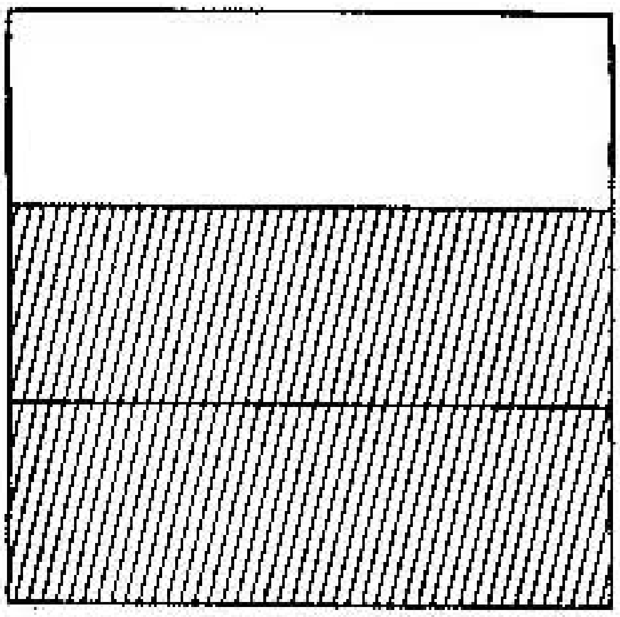


FIGURA 8

Se llama número *racional* porque puede ser denominado en una forma que indica la razón del número de partes sombreadas (2) con el número de partes congruentes de la región unidad (3). Como la fracción $\frac{2}{3}$ nombra un número diferente de la fracción $\frac{3}{2}$ (fracción esta última que sugeriría la división de varias regiones unidad en dos partes congruentes y el sombreado de 3 de esas partes), una fracción se considera a veces un nombre para un *par ordenado de números*. Por tanto, $\frac{2}{3}$ puede pensarse como denominando el par ordenado (2, 3) y $\frac{3}{2}$ como denominando el par ordenado (distinto del anterior) (3, 2).

Al pensar en las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ como nombres para los números racionales, hemos requerido hasta aquí que a sea un elemento del conjunto W de los números plenos, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, y b un elemento del conjunto N de los números naturales. No es razonable permitir que b sea cero, ya que (si pensamos de nuevo en la región cuadrada unitaria) no podemos concebir que podría significar dividir la región unidad en cero regiones.

Deseamos ahora dar sentido a los números denominados por fracciones de la forma $\frac{m}{n}$, en que m sea *cualquier entero* y n sea *cualquier entero excepto el* 0. Por ejemplo, tendremos fracciones tales como $\frac{-4}{3}, \frac{5}{-7}, \frac{-2}{-3}, \frac{0}{-6}$, junto con las fracciones que ya nos son familiares, por ejemplo, $\frac{12}{10}$. Los números denominados por tales fracciones constituyen el conjunto total de los números racionales, y estos números, junto con las operaciones de adición y multiplicación entre ellos, constituyen el *sistema de los números racionales.*

La recta numérica

Repasemos la forma en que los enteros, $\{\ldots, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, están representados sobre la recta numérica. Un punto, al que llamamos el origen, se elige como correspondiente al entero 0. A continuación, se elige un punto como correspondiente al 1. Este nuevo punto puede ser cualquiera de los de la recta con excepción del origen, pero generalmente se escoge a una distancia conveniente a la derecha del origen (fig. 9). El segmento

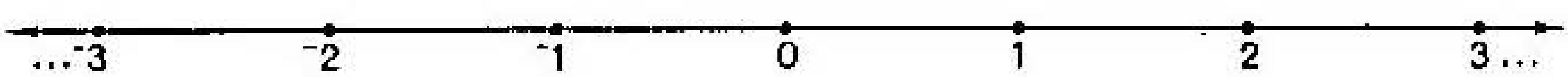


FIGURA 9

que tiene el origen y el punto correspondiente a 1 como puntos extremos se llama *segmento unidad,* y lo mismo cualquier segmento que sea congruente a él. Tal segmento unidad se usa para marcar puntos a la derecha y a la izquierda del origen. Los puntos a la derecha del origen van correspondiéndose consecutivamente con los enteros positivos $^+1, {}^+2, {}^+3, \ldots$; los puntos a la izquierda del origen se corresponden consecutivamente con los enteros negativos $^-1, {}^-2, {}^-3, \ldots$. Para los enteros positivos generalmente usaremos la notación $1, 2, 3, \ldots$, en lugar de $^+1, {}^+2, {}^+3, \ldots$.

Supongamos que se divide un segmento unidad en dos segmentos congruentes y que uno de estos segmentos más cortos se usa para marcar puntos a la derecha y a la izquierda del origen (fig. 10). Rotulamos los puntos a la derecha del origen en forma consecutiva con las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, que se leen "un medio", "dos medios", "tres medios", o "uno sobre dos", "dos sobre dos", "tres sobre dos", y así sucesivamente. Rotulamos también en forma consecutiva los puntos a la izquierda del origen con las fracciones

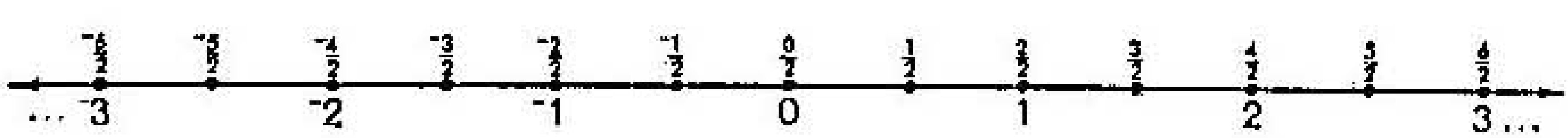


FIGURA 10

$\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}$, que se leen "un medio negativo", "dos medios negativos", "tres medios negativos", o "uno negativo sobre dos", "dos negativo sobre dos", "tres negativo sobre dos", y así sucesivamente. Rotulamos al origen con $\frac{0}{2}$, fracción que se lee "cero medios" o "cero sobre dos".

Notará el lector que cada uno de los fragmentos que aparecen en la recta numérica en la figura 10 tiene el entero 2 como denominador. Esto nos recuerda que el segmento usado para marcar los puntos igualmente espaciados se obtuvo dividiendo un segmento unidad en dos segmentos congruentes. ¿Qué es lo que significan los numeradores? El numerador 3 de la fracción $\frac{3}{2}$, por ejemplo, indica que el punto que tiene $\frac{3}{2}$ como su rótulo está a 3 medias unidades *a la derecha* del origen. El numerador $^-4$ de la fracción $\frac{-4}{2}$ indica que el punto rotulado con $\frac{-4}{2}$ está a 4 medias unidades *a la izquierda* del origen. ¿Qué rótulos se les deben asignar a los dos puntos que se encuentran a 9 medias unidades del origen? Estos rótulos deben ser $\frac{9}{2}$ y $\frac{-9}{2}$. El rótulo $\frac{0}{2}$ para el origen indica que este punto se encuentra a 0 medias unidades del origen.

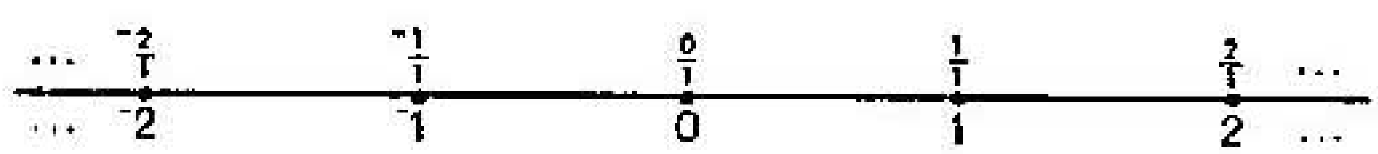


FIGURA 11

En la recta numérica de la figura 11 se han dado nuevos rótulos a los puntos correspondientes a los enteros, en la forma que sigue:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots$ a los puntos a la derecha del origen,

$\frac{0}{1}$ al origen,

$\frac{-1}{1}, \frac{-2}{1}, \ldots$ a los puntos a la izquierda del origen.

Este esquema de rotulación es consistente con el esquema usado en el párrafo precedente. El denominador 1 de cada una de las fracciones indica que para marcar los puntos se usó un segmento unitario en su totalidad. A cada punto correspondiente a un entero le estamos asignando un símbolo de fracción cuyo numerador es ese entero y cuyo denominador es 1. La fracción $\frac{1}{1}$ puede leerse "uno sobre uno", $\frac{^-1}{1}$ se lee "uno sobre uno negativo", y así sucesivamente.

Fracciones equivalentes

Sobre la recta numérica de la figura 12 se muestran tres esquemas diferentes de rotulación. Sobre *a)*, cada segmento *unidad* ha sido dividido en *dos* segmentos congruentes y el punto *R* se corresponde con $\frac{^-3}{2}$. Sobre *b)*, cada segmento de longitud $\frac{1}{2}$ ha sido dividido en *dos* segmentos congruentes, y el punto *R* se corresponde con $\frac{^-(3\times 2)}{2\times 2}$, es decir, con $\frac{^-6}{4}$. Sobre *c)*, cada segmento de longitud $\frac{1}{2}$ ha sido dividido en *tres* segmentos congruentes, y el punto *R* se corresponde con $\frac{^-(3\times 3)}{2\times 3}$, es decir, con $\frac{^-9}{6}$. Vemos que si un punto se corresponde con la fracción $\frac{^-3}{2}$, también se corresponde con las fracciones $\frac{^-3\times 2}{2\times 2}$ y $\frac{^-3\times 3}{2\times 3}$. Si continuamos dividiendo los segmentos de longitud $\frac{1}{2}$ en distintos números de partes congruentes, se puede hacer ver que *R* se corresponde con la fracción $\frac{^-3\times n}{2\times n}$ en donde *n* es un número natural cualquiera. Si un punto de la recta numérica se corresponde con dos fracciones diferentes, entonces decimos que estas fracciones son *equivalentes* (la una a la otra) o que son *fracciones equivalentes.*

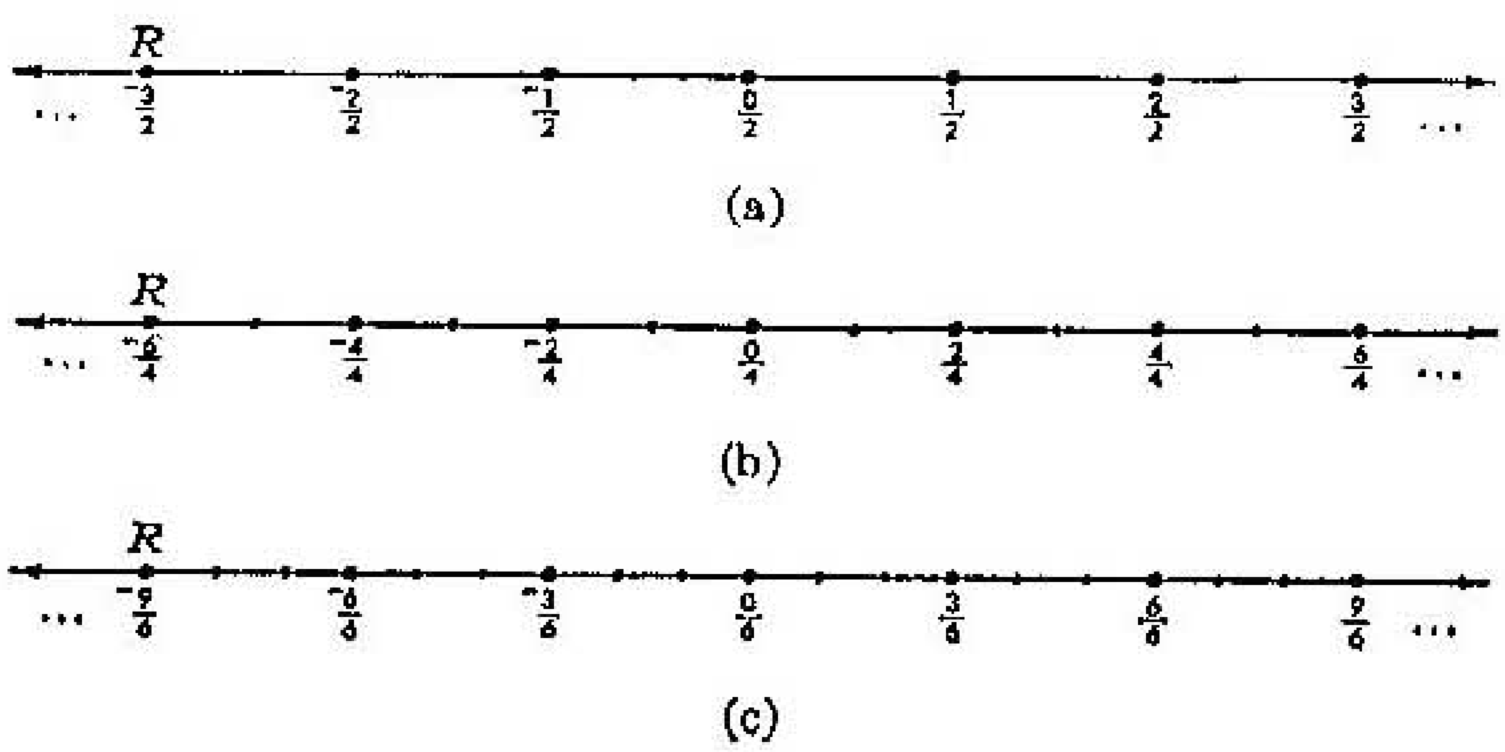


FIGURA 12

Nos será útil ver en otra forma cómo están relacionadas las fracciones $\frac{^-3}{2}$, $\frac{^-6}{4}$ y $\frac{^-9}{6}$. En el Cuadro I vemos que los numeradores y los denominadores de cualesquiera de estas fracciones están relacionados de un modo bastante interesante.

CUADRO I

Par de fracciones	Relación
$\frac{^-3}{2}, \frac{^-6}{4}$	$^-3 \times 4 = 2 \times {^-6}$
$\frac{^-3}{2}, \frac{^-9}{6}$	$^-3 \times 6 = 2 \times {^-9}$
$\frac{^-6}{4}, \frac{^-9}{6}$	$^-6 \times 6 = 4 \times {^-9}$

Para cada par de fracciones, el "producto cruzado" del numerador de la primera fracción y el denominador de la segunda fracción es igual al producto del denominador de la primera fracción y el numerador de la segunda. Así pues, $\frac{^-3}{2}$ y $\frac{^-6}{4}$ son equivalentes entre sí porque $^-3 \times 4 = {^-12}$ y $2 \times {^-6} = 12$. También $\frac{5}{9}$ y $\frac{20}{36}$ son equivalentes porque $5 \times 36 = 180$ y $9 \times 20 = 180$.

En general, dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en que a y c representan enteros y b y d representan enteros positivos, son equivalentes entre sí, si y sólo si $a \times d = b \times c$. Para ver por qué es esto, adviértase que $\frac{a}{b}$ y $\frac{a \times d}{b \times d}$ se corresponden con el mismo punto de la recta, digamos P, y que $\frac{c}{d}$ y $\frac{c \times b}{d \times b}$ se corresponden también con un mismo punto; llamémosle Q. En las últimas denominaciones para P y Q, los segmentos unitarios se han dividido en $b \times d$ partes congruentes. Entonces, los puntos P y Q son el mismo punto si y sólo si se encuentran el mismo número de estas partes congruentes a la derecha o a la izquierda del origen; es decir, si y sólo si los numeradores $a \times d$ y $c \times b$ son iguales.

Si dos fracciones son, ambas, equivalentes a una tercera fracción, entonces son equivalentes entre sí. Luego, tan pronto como veamos que cada una de las fracciones $\frac{^-14}{21}$ y $\frac{^-20}{30}$ es equivalente a la fracción $\frac{^-2}{3}$ sabremos que son equivalentes una a la otra. Debe hacerse notar también que toda fracción es equivalente a sí misma; la fracción $\frac{-3}{4}$, por ejemplo, es equivalente a la fracción $\frac{-3}{4}$ porque $-3 \times 4 = 4 \times -3$.

Denominadores negativos

Hemos mostrado ya que cualquier fracción de la forma $\frac{-3 \times n}{2 \times n}$, en donde n es un número natural, puede usarse para designar el mismo punto R sobre la recta real (fig. 12). Por tanto, R puede denominarse por cualquiera de las fracciones del conjunto

$$\left\{\frac{-3}{2}, \frac{-6}{4}, \frac{-9}{9}, \frac{-12}{8}, \frac{-15}{10}, \dots\right\}.$$

Llamamos a este conjunto, conjunto de fracciones equivalentes porque cada fracción del conjunto es equivalente a cualquiera otra del conjunto.

¿Podemos extender aún más nuestro conjunto de fracciones equivalentes? ¿Hay otras fracciones equivalentes a $\frac{-3}{2}$? ¿Qué se puede decir sobre fracciones tales como $\frac{3}{-2}, \frac{6}{-4}, \frac{9}{-6}$, etc? Estas fracciones son de la forma $\frac{-3 \times n}{2 \times n}$ cuando n es un entero *negativo*. Excepto por el hecho de que tienen denominadores negativos, cada una de estas fracciones parecería equivalente a $\frac{-3}{2}$. Si calculamos los productos cruzados de $\frac{3}{-2}$ y $\frac{-3}{2}$, por ejemplo, encontramos que $3 \times 2 = -2 \times -3$. ¿Deseamos o necesitamos permitir a las fracciones que tengan denominadores negativos? Podemos usar tal fracción para denominar un punto en la recta de los números si introducimos la noción de un segmento unidad *negativo*, o segmento unidad *dirigido a la izquierda*, digamos de 0 a -1. En tal caso, $\frac{3}{-2}$, por ejemplo, indica que hemos dividido segmentos unidad negativos en mitades y hemos tomado tres de éstas. El lector puede ver que el punto designado por $\frac{3}{-2}$ es el mismo que el punto designado por $\frac{-3}{2}$. Así pues, la introducción de fracciones con denominadores negativos nos hace posible extender el conjunto de fracciones que son equivalentes a la fracción $\frac{-3}{2}$.

Las fracciones tienen muchos usos, como más tarde veremos, y para algunos de estos usos los denominadores negativos nos prestarán un buen servicio. Convengamos, pues, que las fracciones pueden tener enteros negativos como denominadores. No solamente tendremos, por tanto, los símbolos $\frac{3}{4}$, $\frac{0}{5}$, $\frac{^-7}{1}$ y $\frac{10}{10}$ como símbolos de fracciones, sino también símbolos como $\frac{^-4}{^-2}$, $\frac{0}{^-3}$, $\frac{5}{^-2}$ y $\frac{^-1}{^-1}$. La fracción $\frac{^-4}{^-2}$ se lee "cuatro negativo sobre dos negativo". Reformulamos nuestro criterio para la equivalencia de fracciones como sigue:

> *Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, en que a, c, b y d son enteros, $b \neq 0$ y $d \neq 0$, son equivalentes entre sí, si y sólo si $a \times d = b \times c$.*

Las fracciones $\frac{^-4}{1}$ y $\frac{4}{^-1}$ son equivalentes entre sí porque $^-4 \times {}^-1 = 4$ y $^-4 \times {}^-1 = 4$. También $\frac{16}{^-12}$ es equivalente, por ejemplo, a $\frac{^-4}{3}$, puesto que $16 \times 3 = {}^-12 \times {}^-4$ (ambos iguales a 48). ¿Para qué entero a es la fracción $\frac{a}{^-12}$ equivalente a la fracción $\frac{^-6}{9}$? Formamos los productos $a \times 9$ y $^-12 \times {}^-6$. El segundo producto es 72. ¿Para qué valor de a es $a \times 9$ igual a 72? La respuesta es: para 8. Luego la fracción $\frac{a}{^-12}$ es equivalente a la fracción $\frac{^-6}{9}$ si $a = 8$.

GRUPO DE EJERCICIOS 2

1. ¿Cuáles de los siguientes pares de fracciones son equivalentes?

   a) $\frac{4}{5}, \frac{4}{^-5}$ *d)* $\frac{^-105}{99}, \frac{^-175}{165}$

   b) $\frac{9}{16}, \frac{18}{32}$ *e)* $\frac{38}{65}, \frac{114}{185}$

   c) $\frac{8}{2}, \frac{^-4}{^-1}$ *f)* $\frac{^-14}{195}, \frac{^-15}{196}$

2. La fracción $\frac{6}{25}$

   es equivalente a la fracción $\frac{18}{75}$

   porque $6 \times 75 = 25 \times 18$. Compruébese que estos dos productos son iguales encontrando los factores primos de 6×75 y 25×18 en vez de hacerlo calculando los productos.

3. *a)* Trácese una recta numérica y divídase cada segmento unidad desde $^-2$ a 2 en tres partes congruentes. Localícense los puntos A, B y C que se corresponden con

$$\frac{3}{5},\ {}^{-}\left(\frac{4}{3}\right)\ \text{y}\ {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right),$$

respectivamente, y rotúlense estos puntos.

b) Divídanse ahora cada uno de los segmentos resultantes de longitud $\frac{1}{3}$ en dos partes congruentes, y encuéntrense nuevos rótulos fraccionarios para A, B y C.

4. ¿Cuál es la fracción de entre las de este conjunto que no es equivalente a las otras?

$$\left\{\frac{150}{400},\ \frac{^{-}6}{^{-}16},\ \frac{51}{136},\ \frac{^{-}21}{^{-}56},\ \frac{48}{145},\ \frac{^{-}9}{^{-}24}\right\}$$

Números racionales y conjuntos de fracciones equivalentes

Hemos extendido el conjunto

$$\left\{\frac{^{-}3}{2},\ \frac{^{-}6}{4},\ \frac{^{-}9}{6},\ \frac{^{-}12}{8},\ \frac{^{-}15}{10},\ \ldots\right\}$$

de fracciones de denominador positivo que son equivalentes a la fracción $\frac{^{-}3}{2}$ de modo que incluya a las fracciones

$$\frac{3}{^{-}2},\ \frac{6}{^{-}4},\ \frac{9}{^{-}6}$$

y, ciertamente, cualquier fracción de la forma

$$\frac{3\times n}{^{-}2\times n},$$

donde n es un número natural. Por ejemplo, la fracción

$$\frac{3\times 11}{^{-}2\times 11},$$

es decir, $\frac{33}{^{-}22}$, es equivalente a la fracción $\frac{^{-}3}{2}$,
ya que $33 \times 2 = {}^{-}22 \times {}^{-}3$. Llegamos, pues, al siguiente conjunto de fracciones equivalentes a la fracción $\frac{^{-}3}{2}$:

$$\left\{\ldots,\ \frac{9}{^{-}6},\ \frac{6}{^{-}4},\ \frac{3}{^{-}2},\ \frac{^{-}3}{2},\ \frac{^{-}6}{4},\ \frac{^{-}9}{6},\ \ldots\right\}$$

Los tres puntos en cada uno de los extremos indican que la lista podría continuar indefinidamente en ambas direcciones. El conjunto es el conjunto total de fracciones, con enteros como numeradores y denominadores, que son equivalentes a la fracción $\frac{^-3}{2}$. Cada fracción del conjunto es de la forma

$$\frac{^-3\times n}{2\times n}$$

donde n es un entero distinto de cero, y cada una de ellas está asociada con el mismo punto de la recta numérica. Hemos, pues, asociado con un solo punto de la recta de los números un conjunto infinito de fracciones equivalentes en el sentido de que cada fracción puede usarse para designar el punto.

Hemos llegado a un punto muy importante en nuestra discusión. Asociamos con el conjunto expuesto de fracciones equivalentes a un solo número, que está asociado con un punto bien determinado de la recta numérica. Lo llamamos *número racional*. Exactamente igual que las fracciones equivalentes antes expuestas pueden usarse todas para designar tal punto, decimos ahora que cada una de tales fracciones es un nombre del mismo número racional.

Echemos ahora una breve ojeada a la notación usada para los números racionales. Recordará el lector que el punto rotulado $\frac{3}{2}$ sobre la recta numérica estaba localizado dividiendo el segmento unidad en dos partes congruentes y contando tres de ellas a la derecha del origen, mientras que el punto rotulado $\frac{^-3}{2}$ se obtenía contando tres de estas partes hacia la izquierda del origen. Este segundo punto es, desde luego, la reflexión del primer punto, cuando la mitad positiva de la recta de los números se refleja en la mitad negativa, como estudiamos en una anterior sección. El símbolo que se asignó al punto reflexión en la anterior discusión fue el

$$^-\left(\frac{3}{2}\right).$$

Vemos pues que la fracción $\frac{^-3}{2}$ se asigna al mismo punto que la

$$^-\left(\frac{3}{2}\right).$$

La fracción $\frac{^-3}{2}$ puede leerse aún "tres negativo sobre dos", pero nombra el mismo número que el símbolo

$$^-\left(\frac{3}{2}\right)$$

que se lee "tres sobre dos negativo". Cuando nos referimos al número racional sin ningún énfasis particular en ninguno de sus nombres, usamos ordinariamente la frase "tres medios negativo".

El siguiente es otro conjunto de fracciones equivalentes:

$$\left\{\ldots, \frac{^-3}{^-6}, \frac{^-2}{^-4}, \frac{^-1}{^-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$$

Escójanse unos cuantos pares de estas fracciones y compruébese su equivalencia. Para el par $\frac{^-3}{^-6}, \frac{2}{4}$, examínense los productos $^-3 \times 4$ y $^-6 \times 2$. El lector verá que estos dos productos son iguales, y por tanto $\frac{^-3}{^-6}$ y $\frac{2}{4}$ son fracciones equivalentes. Este conjunto de fracciones está también asociado con un solo número racional, un medio.

Si examinamos los dos conjuntos que hemos estudiado,

$$\left\{\ldots, \frac{^-3}{^-6}, \frac{^-2}{^-4}, \frac{^-1}{^-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$$

y

$$\left\{\ldots, \frac{9}{^-6}, \frac{6}{^-4}, \frac{3}{^-2}, \frac{^-3}{2}, \frac{^-6}{4}, \frac{^-9}{6}, \ldots\right\},$$

notaremos que estos conjuntos no tienen ninguna fracción como elemento común, es decir, que los dos conjuntos son ajenos. En realidad, toda fracción $\frac{a}{b}$ pertenece exactamente a un conjunto de fracciones equivalentes (de aquí en adelante siempre supondremos en este libro que a y b son enteros y que b es distinto de cero) y, por tanto, nombra exactamente a un número racional. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones, entonces pertenecen al mismo conjunto de fracciones equivalentes o pertenecen a dos conjuntos de fracciones equivalentes que no tienen ninguna fracción en común. En el primer caso las dos fracciones denominan al mismo número racional; en el segundo caso nombran a dos racionales distintos. Las fracciones $\frac{^-10}{5}$ y $\frac{2}{^-1}$ pertenecen al mismo conjunto de fracciones equivalentes y nombran, por tanto, al mismo número racional. Las fracciones $\frac{9}{6}$ y $\frac{4}{3}$, por el contrario, pertenecen a dos conjuntos ajenos de fracciones equivalentes (puesto que $9 \times 3 \neq 6 \times 4$), y nombran así, a dos números racionales distintos.

El número racional *cero* y el número racional *uno* son de especial interés. Cero está denominado por cualquiera de las fracciones del conjunto

$$\left\{\ldots, \frac{0}{^-3}, \frac{0}{^-2}, \frac{0}{^-1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\right\}$$

¿Se da cuenta el lector de que éste es un conjunto de fracciones equivalentes? Las fracciones $\frac{0}{^-3}$ y $\frac{0}{2}$, por ejemplo, son equivalentes, puesto que $0 \times 2 = {}^-3 \times 0$, ya que ambos productos son iguales a cero. El número racional uno está asociado con el siguiente conjunto de fracciones equivalentes:

$$\left\{\ldots, \frac{^-3}{^-3}, \frac{^-2}{^-2}, \frac{^-1}{^-1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots\right\}$$

Veremos que los números racionales cero y uno juegan el mismo papel en el sistema de los números racionales que el que desempeñan los enteros cero y uno en el sistema de los enteros.

GRUPO DE EJERCICIOS 3

1. *a)* En una recta numérica horizontal, divídase cada segmento unitario desde $^-2$ hasta 2 en 4 partes congruentes. Localícese y rotúlese el punto correspondiente a la fracción $\frac{^-5}{4}$.

   b) ¿Cuáles de las siguientes fracciones son rótulos correctos para el mismo punto que $\frac{^-5}{4}$?

$$\frac{5}{^-4}, \frac{5}{4}, \frac{^-5}{^-4}, \frac{^-10}{8}, \frac{10}{^-8}, \frac{^-10}{^-8}, \frac{^-500}{400}, \frac{500}{^-400}$$

   c) ¿Cuál es el número que debe reemplazar a a si la fracción $\frac{^-15}{a}$ denomina al mismo número racional que $\frac{^-5}{4}$?

   d) ¿Cuál es el número que debe reemplazar a a si la fracción $\frac{a}{^-20}$ denomina al mismo número racional que $\frac{^-5}{4}$?

2. Toda fracción de la forma

$$\frac{^-5 \times n}{4 \times n}$$

   donde n es un entero distinto de cero, es un nombre para el número racional cinco cuartos negativo. Escríbase la fracción que denomina a cinco cuartos negativo y tiene:

a) $^{-}15$ como su numerador.
b) 25 como su numerador.
c) 36 como su denominador.
d) $^{-}40$ como su denominador.

3. *a)* ¿Cuáles de las fracciones

$$\frac{^{-}5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{^{-}19}{^{-}2}, \frac{0}{^{-}5}, \frac{3 \times {}^{-}6}{5 \times {}^{-}6}, \frac{4 \times 3}{^{-}7 \times 3}, \frac{7}{^{-}3}$$

denominan números racionales positivos?

b) ¿Cuáles de estas fracciones denominan a números racionales negativos?

c) ¿Cuáles de estas fracciones denominan a cero?

4. Escríbanse seis nombres fraccionarios distintos para el número representado por $\frac{^{-}8}{1}$.

El nombre fraccionario más simple para un número racional

Al tratar de los nombres fraccionarios para los números racionales positivos en el Cuaderno 6, definimos el nombre fraccionario *más simple* como aquel en que el denominador y el numerador no tenían otro factor común que el 1. Por ejemplo, para el número racional asociado con el conjunto de fracciones equivalentes

$$\left\{\frac{21}{35}, \frac{6}{10}, \frac{30}{50}, \frac{18}{30}, \ldots\right\}$$

el nombre fraccionario más simple es $\frac{3}{5}$,

porque 3 y 5 no tienen otro factor común que 1.

Ahora tenemos fracciones en las que el numerador, el denominador, o ambos, pueden ser negativos. ¿Cuál es un nombre más simple,

a) $\frac{3}{5}$ o $\frac{^{-}3}{^{-}5}$?

b) $\frac{^{-}3}{5}$ o $\frac{3}{^{-}5}$?

c) $\frac{^{-}6}{10}$ o $\frac{3}{^{-}5}$?

Esta pregunta queda respondida por *definición*:

El nombre fraccionario más simple para un número racional denominado por una fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros dis-

tintos de cero, es la fracción equivalente $\frac{c}{d}$, *en que* d *es un entero positivo y los enteros* c *y* d *no tienen ningún factor positivo común aparte de* 1. *El nombre fraccionario más simple para* $\frac{0}{b}$, *con* $b \neq 0$, *es* $\frac{0}{1}$.

Si aplicamos la definición al ejemplo anterior, veremos que

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{^-3}{5}$$

son nombres fraccionarios de simplicidad máxima de números racionales, pero ni $\frac{^-6}{10}$ ni $\frac{3}{^-5}$
lo son. Usando, como es habitual en castellano, fracción irreducible por nombre fraccionario más simple, vemos que $\frac{^-6}{10}$
no es una expresión irreducible porque el numerador y el denominador tienen el factor positivo común 2. Para encontrar la expresión irreducible del número racional denominado por $\frac{^-6}{10}$, podemos escribir

$$\frac{^-6}{10} = \frac{^-3 \times 2}{5 \times 2}$$

$$= \frac{^-3}{5}.$$

(Cuando escribimos

$$``\frac{^-6}{10} = \frac{^-3}{5}",$$

no queremos decir que las dos fracciones son la misma, sino que denominan al mismo número racional. El lector está ya familiarizado con esta idea; por ejemplo, cuando escribimos "5 + 3 = 8", lo que queremos decir es que los numerales "3 + 5" y "8" denominan al mismo número.) La fracción $\frac{3}{^-5}$ no es irreducible, ya que su denominador es negativo. Podemos multiplicar el numerador y el denominador por $^-1$ para obtener

$$\frac{3}{^-5} = \frac{3 \times {}^-1}{^-5 \times {}^-1} = \frac{^-3}{5}.$$

El proceso de factorización en primos es útil para encontrar la fracción irreducible de un número racional.[1] Consideremos la fracción $\frac{56}{^-420}$.

[1] Véase el cuaderno 5, *Números y sus factores.*

Para expresar el número por una fracción con un denominador positivo, multiplicamos primero el numerador y el denominador por $^-1$:

$$\frac{56 \times {}^-1}{{}^-420 \times {}^-1} = \frac{{}^-56}{420}.$$

Expresemos ahora el numerador y el denominador factorizados en primos, expresando primero $^-56$ como $^-1 \times 56$:

$$\frac{{}^-56}{420} = \frac{{}^-1 \times 56}{420} = \frac{{}^-1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7}$$

$$= \frac{{}^-1 \times 2 \times (2 \times 2 \times 7)}{3 \times 5 \times (2 \times 2 \times 7)}$$ (Los factores han sido reordenados.)

$$= \frac{{}^-1 \times 2}{3 \times 5}$$ (El numerador y el denominador han sido divididos entre $2 \times 2 \times 7$.)

$$= \frac{{}^-2}{15}.$$ (Esta es la expresión irreducible del número.)

Los enteros como números racionales

En una sección previa presentamos una recta numérica rotulada como se muestra en la figura 13. Cada uno de los puntos gruesos tiene un rótulo fraccionario y un rótulo entero que representa un número racional y un entero, respectivamente. ¿Son éstos el mismo número? ¿Es el número racio-

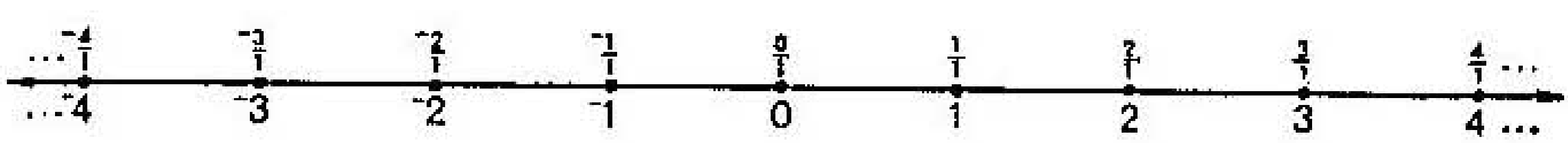


FIGURA 13

nal $\frac{2}{1}$ el mismo que el entero 2? En un sentido exacto, no. El número racional $\frac{2}{1}$ está identificado con el conjunto infinito de fracciones

$$\left\{\ldots, \frac{{}^-4}{{}^-2}, \frac{{}^-2}{{}^-1}, \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \ldots\right\}.$$

No es este el caso con el entero 2; las fracciones no entran en el desarrollo del sistema de los enteros. A pesar de ello nos gustaría tratar a los dos conjuntos de números

$$\left\{\ldots, \frac{{}^-4}{1}, \frac{{}^-3}{1}, \frac{{}^-2}{1}, \frac{{}^-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots\right\}$$

y

$$\{\ldots, {}^-4, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

como si fuesen el mismo. Para todos los propósitos prácticos podemos hacer esto. Antes que nada fijémosnos en que hay la correspondencia uno a uno natural entre los dos conjuntos de números abajo indicada:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{\ldots, & {}^-4, & {}^-3, & {}^-2, & {}^-1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \Big\{\ldots, & \frac{^-4}{1}, & \frac{^-3}{1}, & \frac{^-2}{1}, & \frac{^-1}{1}, & \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \ldots\Big\} \end{array}$$

El esquema de correspondencia puede indicarse en forma más breve, como sigue:

$$\frac{n}{1} \leftrightarrow n \text{ para todo entero } n.$$

Además, en secciones posteriores, definiremos la adición y la multiplicación de los números racionales en tal forma que el subconjunto de números racionales

$$\left\{\ldots, \frac{^-4}{1}, \frac{^-3}{1}, \frac{^-2}{1}, \frac{^-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots\right\}$$

se comporte exactamente en la misma forma bajo la adición y la multiplicación que el conjunto de enteros $\{\ldots, {}^-4, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. La suma $\frac{4}{1} + \frac{3}{1}$, por ejemplo, será por definición $\frac{7}{1}$.
Esto se corresponde con el hecho de que en los enteros, $4 + 3 = 7$. La suma $\frac{^-3}{1} + \frac{9}{1}$ será por definición $\frac{6}{1}$.
Lo que se corresponde con que en los enteros, ${}^-3 + 9 = 6$. Análogamente, por la definición de la multiplicación de números racionales, tendremos

$$\frac{7}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{21}{1} \quad \text{y} \quad \frac{^-4}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{^-20}{1},$$

lo que se corresponde con que

$$7 \times 3 = 21 \quad \text{y} \quad {}^-4 \times 5 = {}^-20$$

en los enteros.

Decimos que el sistema de los enteros, y el subsistema particular de los números racionales cuyos elementos son

$$\left\{\ldots, \frac{^-3}{1}, \frac{^-2}{1}, \frac{^-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\right\}$$

son *isomorfos*. A causa de esta fuerte correlación entre ellos, lo común es no hacer ninguna distinción entre los dos sistemas ni entre los elementos que les corresponden. De acuerdo con ello, consideraremos a los enteros 5 y $^-3$, por ejemplo, como números racionales, no simplemente como enteros correspondientes a números racionales.

De acuerdo con la definición dada en las páginas 37-39, las fracciones irreducibles para los números racionales cinco y tres negativos son $\frac{5}{1}$ y $\frac{-3}{1}$, respectivamente. Llamaremos a estos símbolos *nombres comunes* de estos números.

GRUPO DE EJERCICIOS 4

1. ¿Cuáles de las fracciones

$$\frac{6}{5}, \frac{^-6}{9}, \frac{0}{2}, \frac{1}{^-6}, \frac{15}{1}, \frac{^-31}{73}, \frac{^-4}{^-11}, \frac{^-31}{93}$$

son expresiones irreducibles de números racionales?

2. Escríbanse las expresiones irreducibles (los nombres fraccionarios más simples) de los números racionales denominados por cada una de las siguientes fracciones:

a) $\frac{24}{36}$ *e)* $\frac{^-32}{^-80}$

b) $\frac{24}{^-36}$ *f)* $\frac{165}{^-5}$

c) $\frac{^-7 \times 14}{8 \times 14}$ *g)* $\frac{^-64}{^-64}$

d) $\frac{0}{^-19}$

3. Escríbase el nombre común de cada uno de los enteros expresado por cada uno de los siguientes nombres de fracciones.

a) $\frac{^-27}{3}$ *d)* $\frac{0}{5}$

b) $\frac{16}{^-1}$ *e)* $\frac{^-84}{^-21}$

c) $\frac{6}{6}$ *f)* $\frac{^-14 \times 19}{1 \times 19}$

4. La descomposición en factores primos de 490 es $2 \times 5 \times 7 \times 7$, porque el producto es igual a 490 y cada uno de los factores es un número primo.

a) Exprésense los números 126 y 60 como productos de factores primos.

b) Úsense las descomposiciones en factores primos que se escribieron en la parte (*a*) de este ejercicio, para encontrar la expresión irreducible del número racional denominado por:

i) $\frac{126}{60}$ *ii)* $\frac{^-126}{60}$ *iii)* $\frac{^-60}{^-126}$

5. Encuéntrese la expresión irreducible para el número racional denominado por

a) $\frac{2 \times 2 \times 3 \times 19}{5 \times 2 \times 3 \times 19}$

b) $\frac{3 \times 11 \times 23}{^-1 \times 3 \times 23 \times 29}$

c) $\frac{^-1 \times 7 \times 11 \times 17}{2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17}$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Suma de dos números racionales

Recordemos, de nuestra discusión en el Cuaderno 6, cómo se sumaban los números racionales positivos. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2 + 5}{3} = \frac{7}{3}.$$

Sobre la recta numérica, significa esto que usamos segmentos unitarios divididos en tres partes congruentes y contamos dos de estas partes, luego contamos cinco más, es decir, siete en total.

En términos generales, si *a* y *c* son enteros no negativos y *b* es un entero positivo, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

¿Será cierta la misma relación si *b* es positivo pero *a* o *c*, o ambos, son negativos? ¿Es cierto que

$$\frac{2}{3} + \frac{^-5}{3} = \frac{(2 + {^-5})}{3}?$$

Sobre la recta numérica el denominador 3 indica que tenemos que usar segmentos unitarios divididos en tres partes congruentes. Siguiendo la pauta de la "adición por flechas" de los enteros, convengamos en que la expresión

$$“\frac{2}{3} + \frac{^-5}{3}”$$

indica que debemos contar dos partes en la dirección positiva y luego cinco

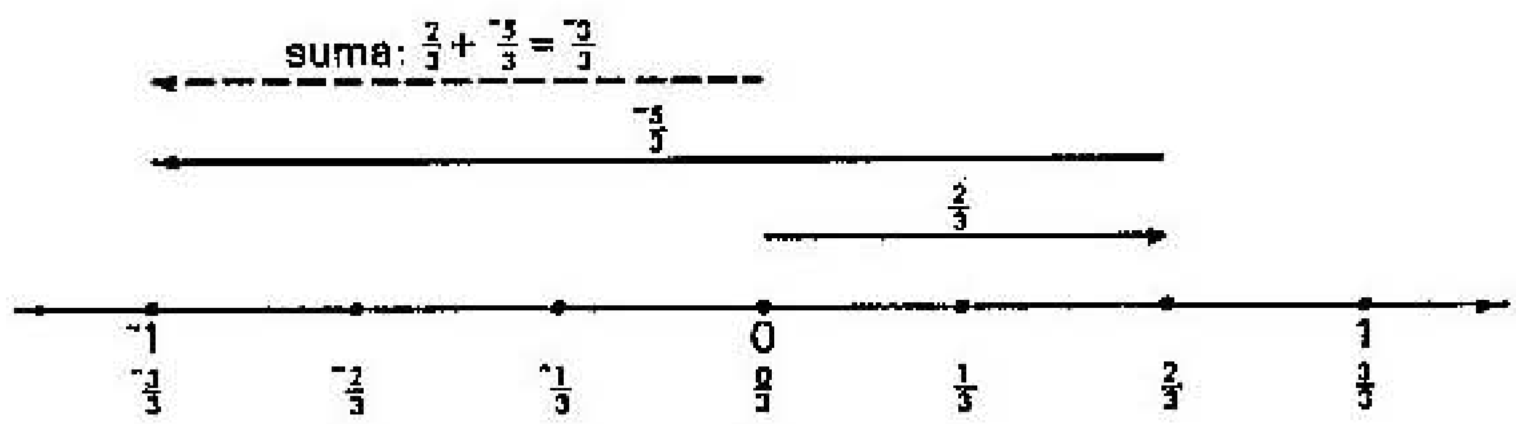


FIGURA 14

partes en la dirección negativa (fig. 14). El diagrama de flechas indica que

$$\frac{2}{3} + \frac{^-5}{3} = \frac{2 + {}^-5}{3} = \frac{^-3}{3}.$$

Como ejercicios de este mismo tipo, el lector puede usar la adición de flechas para mostrar que

$$\frac{^-2}{3} + \frac{^-5}{3} = \frac{^-2 + {}^-5}{3} = \frac{^-7}{3}$$

y que

$$\frac{^-2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{^-2 + 5}{3} = \frac{3}{3}.$$

Si dos números racionales están representados por fracciones con denominadores diferentes, podemos volverlos a denominar con fracciones de igual denominador. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{^-1}{2}$$

pueden denominarse también

$$\frac{4}{6} \text{ y } \frac{^-3}{6},$$

respectivamente. Podemos ahora usar la adición de flechas (fig. 15) como en los ejemplos previos, para obtener

$$\frac{4}{6} + \frac{^-3}{6} = \frac{4 + {}^-3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Estos ejemplos sugieren que si tenemos dos números racionales representados por fracciones

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{b},$$

donde a y c son enteros y b es un entero positivo, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

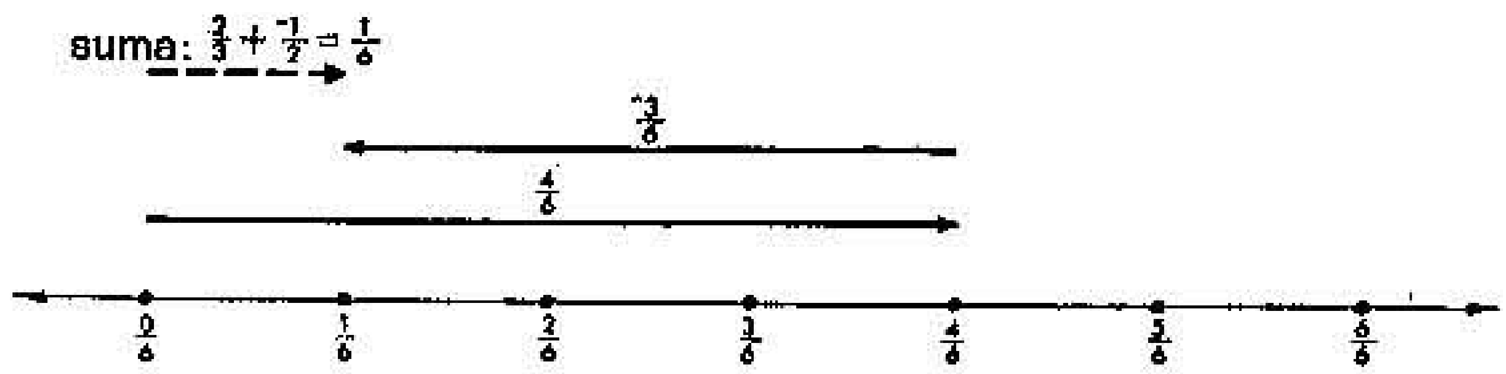


FIGURA 15

Veamos ahora lo que sucede cuando sumamos dos números racionales que están representados por fracciones que tienen un denominador común negativo. Tomemos, por ejemplo,

$$\frac{5}{^-3} \text{ y } \frac{6}{^-3}.$$

Podemos denominar de nuevo a los números racionales como sigue:

$$\frac{5}{^-3} = \frac{^-5}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{6}{^-3} = \frac{^-6}{3}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{5}{^-3} + \frac{6}{^-3} &= \frac{^-5}{3} + \frac{^-6}{3} \\ &= \frac{^-5 + {}^-6}{3} \\ &= \frac{^-11}{3}.\end{aligned}$$

¿Obtenemos la misma respuesta si aplicamos la "fórmula"

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

directamente a

$$\frac{5}{^-3} + \frac{6}{^-3}\,?$$

Así es, puesto que en este caso

$$\frac{a+c}{b} \text{ es } \frac{5+6}{3},$$

es decir,

$$\frac{11}{-3}, \text{ y } \frac{11}{-3}$$

es equivalente a

$$\frac{-11}{3}.$$

Esto indica que la proposición

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

es válida no solamente cuando b es un entero positivo, sino también cuando es un entero negativo.

Veamos ahora como puede usarse esta fórmula para sumar dos números racionales que están representados por fracciones que tienen distinto denominador (positivo o negativo). La misma propiedad de redenominación puede aplicarse.

EJEMPLO: Encuéntrese la suma $\frac{-5}{6} + \frac{7}{-10}$.

Solución: $\frac{-5}{6} + \frac{7}{-10} = \frac{-5}{6} + \frac{-7}{10}$ $\left(\frac{7}{-10} \text{ y } \frac{-7}{10} \text{ son equivalentes.}\right)$

$= \frac{-5 \times 5}{6 \times 5} + \frac{-7 \times 3}{10 \times 3}$ (Redenominado, usando fracciones de igual denominador.)

$= \frac{-25}{30} + \frac{-21}{30}$

$= \frac{-46}{30}$

$= \frac{-23}{15}.$

Formalicemos lo que hasta ahora hemos hecho respecto a la adición de numeros racionales.

La suma de los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$, donde a y c son enteros y b es un entero distinto de cero, es

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

Esta definición puede usarse para sumar dos números racionales cualesquiera, porque siempre es posible expresar dos números racionales como fracciones que tienen un denominador común.

Al sumar dos números racionales representados por fracciones que tienen denominadores diferentes, podemos usar el producto de los denominadores como un denominador común. Así, en el ejemplo anterior pudimos usar $6 \times {}^-10$, es decir, $^-60$, como denominador común en lugar de 30. En tal caso la solución habría sido así:

$$\begin{aligned}\frac{^-5}{6} + \frac{7}{^-10} &= \frac{^-5 \times {}^-10}{6 \times {}^-10} + \frac{7 \times 6}{^-10 \times 6}\\ &= \frac{50}{^-60} + \frac{42}{^-60}\\ &= \frac{50 + 42}{^-60}\\ &= \frac{92}{^-60}\\ &= \frac{^-23}{15}.\end{aligned}$$

Obtenemos, pues, la misma solución que antes.

Surge así una cuestión fundamental. Nuestra definición de adición de números racionales se dio en términos de las fracciones que representaban los números racionales. La proposición

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

señala una forma de manipulación de los símbolos

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{b}$$

para obtener el símbolo

$$\frac{a+c}{b}.$$

Pero nuestra principal preocupación deben ser los números racionales y no las fracciones que los representan. Cada uno de estos números racionales tiene muchos nombres fraccionarios, y antes de que apliquemos la fórmula

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},$$

tenemos que escoger nombres fraccionarios para los sumandos. El problema que se nos plantea es el siguiente: ¿existe alguna diferencia en los nombres fraccionarios que usemos para designar a los números racionales que estamos sumando? Afortunadamente la contestación es "no". Al sumar dos números racionales podemos usar cualesquiera fracciones representativas de estos dos números. Los ejemplos previos ilustran este hecho. Primero añadimos los números racionales

$$\frac{^-5}{6} \text{ y } \frac{7}{^-10}$$

usando las fracciones

$$\frac{^-25}{30} \text{ y } \frac{^-21}{30}$$

como nombres para estos números, y obtuvimos la suma

$$\frac{^-23}{15}.$$

Sumamos después los mismos números usando las fracciones

$$\frac{50}{^-60} \text{ y } \frac{42}{^-60},$$

y obtuvimos la misma suma,

$$\frac{^-23}{15}.$$

Representemos ahora por

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}$$

dos números racionales cualesquiera, donde a y c representan enteros y b y d representan enteros distintos de cero. La suma de los dos números racionales puede encontrarse usando el producto de los denominadores como denominador, de la manera que sigue:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{b \times c}{b \times d}. \qquad \text{(Cambiando de denominación.)}$$

$$= \frac{(a \times d) + (b \times c)}{b \times d} \qquad \text{(Usando la definición de adición de fracciones de igual denominador.)}$$

Vemos, pues, que nuestra definición de adición puede usarse para encontrar la suma de dos números racionales *cualesquiera*. Este ejemplo "general" nos muestra también un modo rápido de obtener una fracción para la suma de dos números racionales cualesquiera. Se puede seguir el modelo $(a \times d) + (b \times c)$ para encontrar el numerador y usar el producto de los denominadores $(b \times d)$ para el denominador. Ilustremos este ventajoso esquema para encontrar la suma de los números racionales

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{2}{7}.$$

El numerador es $(3 \times 7) + (5 \times 2)$ y el denominador es 5×7, luego:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) + (5 \times 2)}{5 \times 7}$$
$$= \frac{21 + 10}{35}$$
$$= \frac{31}{35}.$$

No es necesario, sin embargo, usar el producto de los dos denominadores como el denominador común al sumar números racionales. Cualquier entero que sea múltiplo de ambos (denominadores) es un número adecuado. Por ejemplo, tenemos

$$\frac{1}{6} + \frac{^-1}{9} = \frac{3}{18} + \frac{^-2}{18}$$
$$= \frac{3 + {}^-2}{18}$$
$$= \frac{1}{18}.$$

Señalamos finalmente el hecho de que nuestra definición de suma de números racionales es consistente con la adición de enteros, en el sentido de que la suma de los números racionales

$$\frac{a}{1} \text{ y } \frac{b}{1},$$

donde a y b representan enteros, está dada por

$$\frac{a+b}{1}.$$

Corresponde esta fracción al entero $a + b$, la suma de los enteros a y b.

GRUPO DE EJERCICIOS 5

1. Hágase un diagrama de flechas para ilustrar cada una de las siguientes sumas:

a) $\frac{^-7}{3} + \frac{^-4}{3}$

b) $\frac{^-7}{3} + \frac{4}{3}$

c) $\frac{7}{3} + \frac{4}{3}$

d) $\frac{7}{3} + \frac{^-4}{3}$

2. Resuélvanse para n:

a) $\left|\frac{^-7}{3}\right| = n.$ *e)* $\left|\frac{3}{3}\right| = n.$

b) $\left|\frac{4}{3}\right| = n.$ *f)* $\left|\frac{^-3}{3}\right| = n.$

c) $\left|\frac{^-4}{3}\right| = n.$ *g)* $\left|\frac{^-11}{3}\right| = n.$

d) $\left|\frac{7}{3}\right| = n.$ *h)* $\left|\frac{11}{3}\right| = n.$

3. Encuéntrese la expresión irreducible o el nombre común para cada una de las siguientes fracciones.

a) $\frac{^-7}{9} + \frac{5}{6}$ *d)* $\left(\frac{13}{20} + \frac{5}{6}\right) + \frac{^-7}{12}$

b) $\left(\frac{^-5}{12} + \frac{7}{6}\right) + \frac{^-3}{4}$ *e)* $\frac{13}{20} + \left(\frac{5}{6} + \frac{^-7}{12}\right)$

c) $\frac{^-5}{12} + \left(\frac{7}{6} + \frac{^-3}{4}\right)$ *f)* $\frac{^-17}{10} + \frac{13}{6}$

4. Encuéntrese la n que hace verdadera cada proposición.

a) $\frac{5}{8} + n = \frac{1}{8}$ Supóngase: $\frac{5}{8} + \frac{x}{8} = \frac{1}{8}$

$$\frac{5 + x}{8} = \frac{1}{8} \text{ luego,}$$

$$5 + x = 1,$$

$$5 + {}^-4 = 1,$$

$$x = {}^-4,$$

$$n = \frac{^-4}{8}.$$

b) $n + \frac{^-2}{3} = \frac{5}{3}.$ *e)* $\frac{^-5}{8} + n = \frac{^-1}{8}$

c) $n + \frac{^-2}{3} = \frac{^-5}{3}$ *f)* $\frac{^-5}{16} + n = \frac{3}{4}$

d) $\frac{^-5}{8} + n = \frac{1}{8}.$ *g)* $\frac{7}{22} + n = \frac{^-3}{2}$

Propiedades de la adición

En el Cuaderno 9: *Sistema de los enteros,* observamos que la operación de *adición* en el conjunto de los enteros tiene las siguientes propiedades:

CERRADURA

Si a y b son enteros, entonces $a + b$ es un entero.

CONMUTATIVIDAD

Para dos enteros cualesquiera a y b, $a + b = b + a$.

ASOCIATIVIDAD

Para cualesquiera tres enteros a, b y c, $(a + b) + c = a\ (b + c)$.

IDENTIDAD ADITIVA

Hay un entero, 0, tal que para todo entero a, $a + 0 = 0 + a = a$.

ELEMENTO INVERSO ADITIVO

Para todo entero a, hay un entero $^{\circ}a$ tal que $a + {}^{\circ}a = 0$.

Hemos encontrado que es razonable definir la suma de dos números racionales,

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d},$$

donde a y c representan enteros y b y d representan enteros distintos de cero, como

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) + (b \times c)}{b \times d}.$$

¿Serán ciertas estas propiedades para la adición de números racionales? Veamos si éste es el caso.

1. *Propiedades de cierre de la adición*: si

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}$$

representan números racionales, ¿representa

$$\frac{(a \times d) + (b \times c)}{b \times d} \text{ un número racional?}$$

Consideremos la suma

$$\frac{^-2}{3} + \frac{5}{^-6} = \frac{(^-2 \times {^-6}) + (3 \times 5)}{3 \times {^-6}}$$

¿Es $^-2 \times {^-6}$ un entero? ¿Es 3×5 un entero? ¿Es $(^-2 \times {^-6}) + (3 \times 5)$ un entero? La contestación correcta a cada una de estas preguntas es "sí". Luego, el numerador de la anterior fracción es un entero. El denominador $3 \times {^-6}$ es también un entero, diferente de cero. De donde vemos que

$$\frac{(^-2 \times {^-6}) + (3 \times 5)}{3 \times {^-6}}$$

especifica un número racional porque el numerador es un entero y el denominador un entero distinto de cero. De una manera análoga, puede mostrarse que si

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}$$

son números racionales, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

es un número racional.

2. *Propiedad conmutativa de la adición*: si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

son números racionales, ¿es cierto que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}?$$

Un ejemplo nos ayudará a ver que la contestación correcta es de nuevo "sí". ¿Es

$$\frac{^-2}{3} + \frac{5}{^-6} = \frac{5}{^-6} + \frac{2}{^-3}$$

una proposición verdadera? Tenemos

$$\frac{^-2}{3} + \frac{5}{^-6} = \frac{(^-2 \times {^-6}) + (3 \times 5)}{3 \times {^-6}}$$

y

$$\frac{5}{^-6} + \frac{^-2}{3} = \frac{(5 \times 3) + (^-6 \times {^-2})}{^-6 \times 3}.$$

¿Es cierto que

$$\frac{(^-2 \times {}^-6) + (3 \times 5)}{3 \times {}^-6} = \frac{(5 \times 3) + (^-6 \times {}^-2)}{^-6 \times 3}?$$

¿Es cierto que

$$^-2 \times {}^-6 = {}^-6 \times {}^-2,$$

$$3 \times 5 = 5 \times 3,$$

y

$$3 \times {}^-6 = {}^-6 \times 3?$$

Estas proposiciones son todas ciertas, porque la multiplicación es conmutativa en el conjunto de los enteros. Además

$$(^-2 \times {}^-6) + (3 \times 5) = (3 \times 5) + (^-2 \times {}^-6),$$

porque la adición es conmutativa en el conjunto de los enteros, y

$$(^-2 \times {}^-6) + (3 \times 5) = (5 \times 3) + (^-6 \times {}^-2)$$

porque la multiplicación es conmutativa en el conjunto de los enteros. De donde

$$\frac{^-2}{3} + \frac{5}{^-6} = \frac{5}{^-6} + \frac{^-2}{3}.$$

La misma clase de argumento puede aplicarse a la suma de dos números racionales cualesquiera para deducir de ello que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

para cualesquiera números racionales

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}.$$

3. *Propiedad asociativa de la adición*: ¿es cierto, para números racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ que

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)?$$

Por ejemplo, ¿es cierto que

$$\left(\frac{^-2}{3} + \frac{5}{^-6}\right) + \frac{3}{4} = \frac{^-2}{3} + \left(\frac{5}{^-6} + \frac{3}{4}\right)?$$

El primer miembro nos da

$$\left(\frac{-2}{3} + \frac{5}{-6}\right) + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{(-2 \times -6) + (3 \times 5)}{(3 \times -6)} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{12 + 15}{-18} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{27}{-18} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{(27 \times 4) + (-18 \times 3)}{-18 \times 4}$$
$$= \frac{108 + -54}{-72}$$
$$= \frac{54}{-72}$$
$$= \frac{-3}{4}.$$

El segundo miembro nos da

$$\frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{-6} + \frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{-2}{3} + \frac{(5 \times 4) + (-6 \times 3)}{(-6 \times 4)}$$
$$= \frac{-2}{3} + \frac{20 + -18}{-24}$$
$$= \frac{-2}{3} + \frac{2}{-24}$$
$$= \frac{(-2 \times -24) + (3 \times 2)}{(3 \times -24)}$$
$$= \frac{48 + 6}{-72}$$
$$= \frac{54}{-72}$$
$$= \frac{-3}{4}.$$

Vemos pues, que

$$\left(\frac{-2}{3} + \frac{5}{-6}\right) + \frac{3}{4} = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{-6} + \frac{3}{4}\right).$$

Este ejemplo sugiere que la adición de números racionales tiene la propiedad asociativa, y esto es en realidad cierto: para cualesquiera números racionales

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \text{ y } \frac{e}{f},$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right).$$

4. *Elemento identidad para la adición*: ¿hay un número racional $\frac{c}{d}$ que para todos los números racionales $\frac{a}{b}$ se tenga

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}?$$

Sabemos que 0 es el elemento identidad para la adición de los enteros. Esto sugiere que 0, considerado como un elemento del conjunto de los números racionales, puede ser el elemento identidad para la adición de los racionales. Es claro que 0 puede denominarse

$$\frac{0}{1}, \text{ o } \frac{0}{2} \text{ o } \frac{0}{-7} \text{ o } \frac{0}{b},$$

para $b \neq 0$. Como suma de

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{0}{b}, \text{ obtenemos}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b}.$$

Tenemos pues,

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a}{b},$$

o lo que es equivalente,

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b},$$

y cero es un elemento identidad para la adición de los números racionales. Es, en realidad, el *único* elemento identidad para la adición, ya que para cualesquiera elementos tales 0 y $0'$ tendríamos $0 + 0' = 0$ y $0 + 0' = 0'$, de donde $0 = 0'$.

5. *El elemento inverso aditivo*: recuérdese que el inverso aditivo de un entero es un entero tal que la suma de los dos enteros es 0. Por ejemplo, 5 es el inverso aditivo de $^{-}5$, porque $^{-}5 + 5 = 0$. También $^{-}5$ es el inverso aditivo de 5.

Sugiere esto que el inverso aditivo de un número racional podría ser su opuesto. Por ejemplo, esperamos que el inverso aditivo de

$$\frac{3}{4} \text{ sea } {}^{\circ}\left(\frac{3}{4}\right), \text{ el opuesto de } \frac{3}{4}.$$

Veamos si esto es cierto. Recuérdese que

$${}^{\circ}\left(\frac{3}{4}\right) = {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) \text{ y que } {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{^{-}3}{4}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + {}^{\circ}\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{3}{4} + \frac{^{-}3}{4} \\ &= \frac{3 + {}^{-}3}{4} = \frac{0}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así pues, el inverso aditivo de

$$\frac{3}{4} \text{ es } {}^{\circ}\left(\frac{3}{4}\right)\text{, es decir, } \frac{^{-}3}{4}\text{. También } \frac{3}{4}$$

es el inverso aditivo de $\frac{^{-}3}{4}$. Análogamente,

$$\frac{11}{7} \text{ y } \frac{^{-}11}{7}$$

son inversos aditivos uno del otro. Todo número racional tiene un inverso aditivo. El inverso aditivo de $\frac{a}{b}$ es ${}^{\circ}\left(\frac{a}{b}\right)$, que puede también escribirse $\frac{^{\circ}a}{b}$. Nótese que, como con los enteros, el inverso aditivo de cero es cero, ya que $0 + 0 = 0$.

GRUPO DE EJERCICIOS 6

1. ¿Qué propiedad de la adición ilustra cada una de las siguientes igualdades?

   a) $\frac{^{-}5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{^{-}5}{8}.$

   b) $\frac{^{-}5}{8} + \frac{5}{8} = 0.$

   c) $\frac{^{-}5}{8} + 0 = \frac{^{-}5}{8}.$

   d) $\frac{^{-}7}{6} + \left(\frac{^{-}5}{8} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{^{-}7}{6} + \frac{^{-}5}{8}\right) + \frac{3}{4}.$

2. Si n es un número racional tal que

$$n + \frac{^{-}2}{5} = \frac{7}{8},$$

   podemos probar que

$$n = \frac{7}{8} + \frac{2}{5}.$$

   ¿Cuáles son las propiedades que se ilustran en los pasos *b)* a *e)* del argumento que sigue?

   a) $n + \frac{^{-}2}{5} = \frac{7}{8}.$ (Dado.)

   b) $\left(n + \frac{^{-}2}{5}\right) + \frac{2}{5} = \frac{7}{8} + \frac{2}{5}.$

c) $n + \left(\frac{^-2}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{8} + \frac{2}{5}.$

d) $n + 0 = \frac{7}{8} + \frac{2}{5}.$

e) $n = \frac{7}{8} + \frac{2}{5}.$

Sustracción de números racionales

Recuérdese que en el sistema de los números plenos y en el sistema de los enteros, sustraer un número b de un número a quiere decir encontrar un número c tal que $b + c = a$. El número $6 - 2$ es 4 porque $2 + 4 = 6$, y el número $3 - (^-5)$ es 8 porque $^-5 + 8 = 3$. Recuérdese también que en el Cuaderno 9, *El sistema de los enteros,* se indicaba que la sustracción de un entero b a partir de un entero a se efectuaba *sumando* a a el inverso aditivo, u opuesto, de b. En forma simbólica, esto se escribe

$$a - b = a + {}^{\circ}b.$$

En el sistema de los números plenos, la sustracción no siempre es posible. Por ejemplo, no hay ningún número pleno x tal que $2 - 7 = x$. En el sistema de los enteros, sin embargo, la sustracción siempre es posible. La razón para esto está en que todo entero tiene un inverso aditivo.

¿Qué puede decirse sobre la sustracción en el sistema de los números racionales? ¿Es posible sustraer

$$\frac{5}{12} \text{ de } \frac{1}{4}?$$

Escribimos

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{12}$$

por el número que buscamos. Denotemos

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{12}$$

por x. Entonces x es el número racional (si es que hay alguno) tal que

$$x + \frac{5}{12} = \frac{1}{4},$$

porque esto es lo que entendemos por sustracción. El inverso aditivo (u opuesto) de $\frac{5}{12}$, denotado por

$$\left(\frac{5}{12}\right), \text{ es } \frac{^{-}5}{12}.$$

Sumando este número a ambos miembros de la proposición

$$x + \frac{5}{12} = \frac{1}{4}, \text{ obtenemos}$$

$$\left(x + \frac{5}{12}\right) + \frac{^{-}5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{^{-}5}{12}.^{2}$$

Luego

$$x + \left(\frac{5}{12} + \frac{^{-}5}{12}\right) = \frac{1}{4} + \frac{^{-}5}{12}.$$

según la propiedad asociativa de la adición. Como

$$\frac{5}{12} + \frac{^{-}5}{12} = 0, \text{ tenemos}$$

$$x + 0 = \frac{1}{4} + \frac{^{-}5}{12},$$

y

$$x = \frac{1}{4} + \frac{^{-}5}{12}.$$

El lector puede comprobar que este valor satisface realmente la ecuación

$$x + \frac{5}{12} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, exactamente lo mismo que para los enteros, la sustracción de

$$\frac{5}{12} \text{ de } \frac{1}{4}$$

se efectúa sumando a $\frac{1}{4}$ el inverso aditivo, $\frac{^{-}5}{12}$, de $\frac{5}{12}$.

Vemos pues que para sustraer un número racional $\frac{c}{d}$ de un número racional $\frac{a}{b}$, añadimos a $\frac{a}{b}$ el inverso aditivo de $\frac{c}{d}$.

[2] Nótese que $x + \frac{5}{12}$ y $\frac{1}{4}$ son nombres del mismo número. Por tanto, sumando $\frac{^{-}5}{12}$ a ese número se obtiene exactamente un número como suma, independientemente de cuáles sean los numerales usados. Queda esto implicado por la propiedad de cierre, pero a veces se formaliza en la proposición de que si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

En forma simbólica esto se escribe

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + {}^{-}\left(\frac{c}{d}\right).$$

Como todo número racional tiene un inverso aditivo (u opuesto), la sustracción siempre es posible en el sistema de los números racionales.

La operación de sustracción es la inversa de la adición: las dos operaciones "se deshacen" una a la otra. Así pues

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

y

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) - \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Opuesto de una suma

Hemos visto que la propiedad asociativa de la adición justifica la omisión del paréntesis en una expresión tal como $\frac{{}^{-}4}{9} + \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right)$, porque para todos los números racionales a, b y c, $a + (b + c) = (a + b) + c$.

¿Se aplica la propiedad asociativa a una expresión en la que aparecen sustracciones como, por ejemplo, $\frac{{}^{-}4}{9} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right)$? Es decir, ¿es cierto que

$$\frac{{}^{-}4}{9} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{{}^{-}4}{9} - \frac{5}{6}\right) + \frac{2}{3}?$$

La expresión del primer miembro nos da

$$\begin{aligned}\frac{{}^{-}4}{9} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) &= \frac{{}^{-}4}{9} - \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6}\right)\\ &= \frac{{}^{-}4}{9} - \left(\frac{9}{6}\right)\\ &= \frac{{}^{-}4}{9} + \frac{{}^{-}9}{6}\\ &= \frac{{}^{-}8}{18} + \frac{{}^{-}27}{18}\\ &= \frac{{}^{-}35}{18}.\end{aligned}$$

La expresión del segundo miembro nos da

$$\begin{aligned}\left(\frac{{}^{-}4}{9} - \frac{5}{6}\right) + \frac{2}{3} &= \left(\frac{{}^{-}4}{9} + \frac{{}^{-}5}{6}\right) + \frac{2}{3}\\ &= \left(\frac{{}^{-}8}{18} + \frac{{}^{-}15}{18}\right) + \frac{2}{3}\\ &= \frac{{}^{-}23}{18} + \frac{2}{3}\\ &= \frac{{}^{-}23}{18} + \frac{12}{18}\\ &= \frac{{}^{-}11}{18}.\end{aligned}$$

Es claro que la propiedad asociativa *no* se aplica en este ejemplo. La definición de sustracción implica que

$$\frac{^-4}{9} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) = \frac{^-4}{9} + {}^\circ\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right).$$

Pero, ¿cómo se encuentra el opuesto de una suma?

Quizá se adivine que el opuesto de una suma es la suma de los opuestos. Para

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right)$$

esto equivaldría a decir que

$${}^\circ\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) = {}^\circ\left(\frac{5}{6}\right) + {}^\circ\left(\frac{2}{3}\right).$$

¿Es esto cierto? Sí lo es, porque

$$\begin{aligned}{}^\circ\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) &= {}^\circ\left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6}\right)\\ &= {}^\circ\left(\frac{5+4}{6}\right)\\ &= {}^\circ\left(\frac{9}{6}\right)\\ &= \frac{^-9}{6},\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}{}^\circ\left(\frac{5}{6}\right) + {}^\circ\left(\frac{2}{3}\right) &= {}^\circ\left(\frac{5}{6}\right) + {}^\circ\left(\frac{4}{6}\right)\\ &= \frac{^-5}{6} + \frac{^-4}{6}\\ &= \frac{^-5 + {}^-4}{6}\\ &= \frac{^-9}{6}.\end{aligned}$$

En términos generales, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos racionales cualesquiera, entonces

$${}^\circ\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = {}^\circ\left(\frac{a}{b}\right) + {}^\circ\left(\frac{c}{d}\right).$$

Podemos ahora calcular

$$\frac{{}^{-}4}{9} - \left[\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

en la forma que sigue:

$$\frac{{}^{-}4}{9} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{{}^{-}4}{9} + {}^{\circ}\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) \qquad \text{(Definición de sustracción.)}$$

$$= \frac{{}^{-}4}{9} + \left[{}^{\circ}\left(\frac{5}{6}\right) + {}^{\circ}\left(\frac{2}{3}\right)\right] \qquad \left[{}^{\circ}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = {}^{\circ}\left(\frac{a}{b}\right) + {}^{\circ}\left(\frac{c}{d}\right).\right]$$

$$= \frac{{}^{-}4}{9} + \left(\frac{{}^{-}5}{6} + \frac{{}^{-}2}{3}\right) \qquad \left[{}^{\circ}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{{}^{-}5}{6} \text{ y } {}^{\circ}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{{}^{-}2}{3}.\right]$$

$$= \frac{{}^{-}4}{9} + \frac{{}^{-}9}{6}$$

$$= \frac{{}^{-}8}{18} + \frac{{}^{-}27}{18}$$

$$= \frac{{}^{-}35}{18}.$$

Nótese que este resultado coincide con el cálculo anterior de

$$\frac{{}^{-}4}{9} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right)$$

que se hizo en la página 58, en donde primero encontramos la suma

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$$

y luego restamos esta suma de $\frac{{}^{-}4}{9}$.

Formas mixtas

Consideremos las fracciones

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{7}{4} \text{ y } \frac{11}{4}.$$

El número denominado por $\frac{4}{4}$

puede ser designado más simplemente por $\frac{1}{1}$ o 1.

Las fracciones

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{4} \text{ y } \frac{11}{4}$$

están en forma irreducible. Los números positivos tales como

$$\frac{7}{4} \text{ y } \frac{11}{4}$$

suelen, sin embargo, denominarse de manera diferente, como la suma de un entero y un número racional positivo menor que uno. Así pues,

$$\frac{7}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}.$$

Esta suma se escribe usualmente sin el símbolo "+" como $1\frac{3}{4}$.
Análogamente escribimos

$$\frac{11}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

A un numeral de esta clase se le llama a menudo "forma mixta" o "número mixto".

Los racionales negativos pueden redenominarse de un modo análogo como negativos de números mixtos positivos. Así, $\frac{{}^-7}{4}$ puede denominarse como sigue:

$$\frac{{}^-7}{4} = {}^-\left(\frac{7}{4}\right) = {}^-\left(1\,\frac{3}{4}\right), \quad \text{o a menudo} \quad {}^-1\frac{3}{4}.$$

Si se nos da una forma mixta como ${}^-2\frac{5}{8}$ podemos encontrar una fracción equivalente invirtiendo el proceso. Tenemos así,

$$\begin{aligned} {}^-2\frac{5}{8} = {}^-\left(2\,\frac{5}{8}\right) &= {}^-\left(2 + \frac{5}{8}\right) \\ &= {}^-\left(\frac{16}{8} + \frac{5}{8}\right) \\ &= {}^-\left(\frac{16+5}{8}\right) \\ &= {}^-\left(\frac{21}{8}\right), \quad \text{o} \quad \frac{{}^-21}{8}. \end{aligned}$$

Las formas mixtas se usan con frecuencia para anotar resultados de medidas. Por ejemplo, si una persona tiene una estatura de 5 pies $6\frac{1}{2}$ pulgadas, es muy poco probable que diga "tengo una estatura de 6 pies y $\frac{13}{2}$ pulgadas", y un cronista de béisbol tampoco dirá "ya se han jugado $\frac{11}{2}$ innings del juego".

Las formas mixtas se usan con frecuencia para encontrar sumas de números racionales. Las propiedades asociativa y conmutativa nos dicen, por ejemplo, que

$$\begin{aligned}
2\frac{1}{2} + 8\frac{1}{3} &= \left(2 + \frac{1}{2}\right) + \left(8 + \frac{1}{3}\right) \\
&= 2 + \left(\frac{1}{2} + 8\right) + \frac{1}{3} \\
&= 2 + \left(8 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \\
&= (2 + 8) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\
&= 10 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\
&= 10 + \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \\
&= 10\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Consideremos, como un ejemplo de sustracción de números racionales representados por formas mixtas,

$$2\frac{1}{2} - 8\frac{1}{3}, \quad \text{o} \quad \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(8 + \frac{1}{3}\right).$$

La sustracción no tiene las propiedades asociativa y conmutativa; así que usamos la definición de sustracción y el hecho de que el opuesto de una suma es la suma de los opuestos. Tenemos, pues,

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)-\left(8+\frac{1}{3}\right)=\left(2+\frac{1}{2}\right)+{}^{\circ}\left(8+\frac{1}{3}\right)$$
$$=2+\frac{1}{2}+{}^{-}8+\frac{{}^{-}1}{3}$$
$$=(2+{}^{-}8)+\left(\frac{1}{2}+\frac{{}^{-}1}{3}\right)$$
$$={}^{-}6+\frac{1}{6}$$
$$={}^{-}5\,\frac{5}{6}.$$

En los últimos tres pasos usamos las propiedades familiares de la adición de números racionales.

GRUPO DE EJERCICIOS 7

1. Úsese el hecho de que

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$$

significa que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}+\frac{x}{y}$$

para escribir una proposición aditiva equivalente a cada proposición sustractiva y una proposición sustractiva equivalente a cada proposición aditiva.

a) $\frac{9}{10}+\frac{{}^{-}7}{8}=\frac{1}{40}.$

b) $\frac{7}{12}-\frac{{}^{-}3}{4}=\frac{4}{3}.$

c) ${}^{-}1\frac{3}{4}+2\frac{1}{6}=\frac{5}{12}.$

d) $n-\frac{17}{3}=\frac{5}{6}.$

e) $7\frac{1}{8}-n={}^{-}1\frac{1}{4}.$

f) $\frac{{}^{-}14}{7}+\frac{{}^{-}5}{14}=n.$

2. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

a) ${}^{\circ}\left(\frac{7}{8}+\frac{{}^{-}3}{4}\right)=\frac{{}^{-}7}{8}+\frac{{}^{-}3}{4}.$

b) ${}^{\circ}\left(\frac{7}{8}-\frac{{}^{-}3}{4}\right)=\frac{{}^{-}7}{8}+\frac{{}^{-}3}{4}.$

c) ${}^{\circ}\left(\frac{7}{8}+\frac{{}^{-}3}{4}\right)=\frac{{}^{-}7}{8}+\frac{3}{4}.$

d) ${}^{\circ}\left(\frac{7}{8}+\frac{{}^{-}3}{4}\right)=\frac{7}{8}+\frac{3}{4}.$

3. Demuéstrese que cada una de las siguientes proposiciones es cierta.

a) $^-7\frac{3}{8} = \frac{^-59}{8}$.

b) $\frac{64}{11} = 5\frac{9}{11}$.

c) $\frac{^-13}{7} = {^-1}\frac{6}{7}$.

d) $\frac{37}{18} = 2\frac{1}{18}$.

4. Encuéntrese para cada una de las siguientes sentencias el valor de n que las hace ciertas.

a) $\frac{7}{15} - \frac{19}{30} = n$.

b) $\frac{^-17}{12} - \frac{^-11}{6} = n$.

c) $^-3\frac{1}{8} - 12\frac{1}{16} = n$.

d) $9\frac{3}{4} + {^-2}\frac{7}{8} = n$.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Producto de dos números racionales

¿Cómo se definirá el producto de dos números racionales cualesquiera? Recordemos las definiciones de multiplicación de números en los siguientes dos subconjuntos del conjunto de los números racionales:

1. Aquellos números racionales representados por fracciones cuyos numeradores son números plenos y cuyos denominadores son números naturales.

   Esto incluye números tales como

$$\frac{0}{2}, \frac{5}{1}, \frac{4}{7} \text{ y } \frac{13}{125}.$$

   El producto de

$$\frac{4}{7} \text{ y } \frac{13}{125},$$

   por ejemplo, es

$$\frac{4}{7} \times \frac{13}{125} = \frac{4 \times 13}{7 \times 125} = \frac{52}{875}.$$

   Para números racionales

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}$$

en este conjunto, tenemos

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

2. Los enteros, es decir, el conjunto $\{\ldots, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, \ldots\}$

La multiplicación en este conjunto está ilustrada por los siguientes ejemplos:

$${}^-3 \times 2 = {}^-6, \quad 3 \times {}^-2 = {}^-6, \quad {}^-3 \times {}^-2 = 6, \quad \text{y} \quad 3 \times 2 = 6.$$

La definición general de multiplicación de números racionales sería preferible que fuera consistente con la definición de multiplicación para estos subconjuntos. La siguiente definición cumple con ello.

Si $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{c}{d}$ *son dos números racionales cualesquiera, en que a, b, c y d son enteros y b y d son distintos de cero, entonces*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Como los números racionales positivos se corresponden con los elementos del primer subconjunto arriba mencionado, esta definición es consistente con la definición de multiplicación para ese subconjunto. El producto de los números racionales

$$\frac{5}{1} \text{ y } \frac{{}^-6}{1},$$

de acuerdo con esta definición, es

$$\frac{5 \times {}^-6}{1 \times 1},$$

es decir,

$$\frac{{}^-30}{1},$$

lo que se corresponde con el producto de los enteros 5 y $^-6$: $5 \times {}^-6$ o $^-30$. Lo anterior ilustra cómo se ha conseguido la consistencia con la multiplicación con los enteros.

Es esencial que, independientemente de cuáles sean las fracciones representativas escogidas como nombres de los números racionales, el producto que resulta de la definición sea el mismo. Este es el caso con nuestra definición, hecho que queda ilustrado con el siguiente ejemplo. Encontremos el producto de los números racionales *dos tercios* y *cuatro quintos negativo*, usando primero las fracciones

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{^-4}{5},$$

luego

$$\frac{4}{6} \text{ y } \frac{4}{^-5},$$

y finalmente

$$\frac{^-2}{^-3} \text{ y } \frac{^-8}{10},$$

para los dos números racionales:

$\frac{2}{3} \times \frac{^-4}{5} = \frac{2 \times {^-4}}{3 \times 5}$	$\frac{4}{6} \times \frac{4}{^-5} = \frac{4 \times 4}{6 \times {^-5}}$	$\frac{^-2}{^-3} \times \frac{^-8}{10} = \frac{^-2 \times {^-8}}{^-3 \times 10}$
$= \frac{^-8}{15}.$	$= \frac{16}{^-30} \times \frac{^-16}{30}$	$= \frac{16}{^-30} = \frac{^-16}{30}$
	$= \frac{^-8 \times 2}{15 \times 2}$	$= \frac{^-8}{15}.$
	$= \frac{^-8}{15}.$	

Luego, el producto en cualquiera de los casos es el mismo.

Recuérdese que en cada uno de los dos subconjuntos mencionados, el elemento identidad para la multiplicación es el número 1. Por ejemplo,

$$1 \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \times 1 = \frac{6}{5} \text{ y } 1 \times {^-7} = {^-7} \times 1 = {^-7}.$$

¿Qué sucede cuando multiplicamos un número racional cualquiera $\frac{a}{b}$ por el número racional *uno*, $\frac{1}{1}$?

De acuerdo con nuestra definición de multiplicación,

$$\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a \times 1}{b \times 1}$$

$$= \frac{a}{b}. \quad (a \times 1 = a \text{ se sabe que es cierto para los enteros.})$$

Análogamente, $\frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. Por esta razón al número racional 1 se le llama *elemento identidad multiplicativa* para el conjunto de los números racionales. Una vez más, esta propiedad de 1 no depende de la forma fraccionaria que se use para representarlo. Así, por ejemplo, tenemos

$$\frac{a}{b} \times \frac{4}{4} = \frac{a \times 4}{b \times 4}$$

$$= \frac{a}{b}, \text{ porque } \frac{a \times 4}{b \times 4} \text{ es equivalente a } \frac{a}{b}.$$

Llegamos ahora a una importante propiedad de los números racionales, una propiedad que comparte el primer subconjunto, el conjunto de los números racionales no negativos, pero que no comparte el segundo, el conjunto de los enteros. Correspondiéndose con cualquier número racional distinto de cero, hay un número racional único tal que el producto de los dos números es 1. Vemos, así, que correspondiéndose con

$$\frac{4}{5} \text{ tenemos a } \frac{5}{4}, \text{ ya que}$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{4 \times 5}{5 \times 4} = \frac{1}{1}.$$

Decimos que $\frac{5}{4}$ es el *inverso multiplicativo* de

$$\frac{4}{5} \text{ y que } \frac{4}{5}$$

es el inverso multiplicativo de $\frac{5}{4}$.

¿Cuál es el inverso multiplicativo de $\frac{^-2}{3}$?

¿Cuál es el número racional que multiplicado por $\frac{^-2}{3}$ nos da el producto 1? La contestación es $\frac{3}{^-2}$, porque

$$\frac{^-2}{3} \times \frac{3}{^-2} = \frac{^-2 \times 3}{3 \times {^-2}}$$

$$= \frac{^-6}{^-6} = \frac{1}{1}.$$

Resumiendo, el inverso multiplicativo del número racional representado por la fracción $\frac{a}{b}$, donde el entero a es distinto de cero (y desde luego, el entero b tampoco es cero), es $\frac{b}{a}$ porque

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a}$$

$$= \frac{a \times b}{a \times b} \text{(La multiplicación de enteros es conmutativa.)}$$

$$= \frac{1}{1} \qquad \left(\frac{a \times b}{a \times b} \text{ es equivalente a } \frac{1}{1}.\right)$$

Así pues, $\frac{b}{a}$, el *recíproco* de $\frac{a}{b}$, es el inverso multiplicativo del número racional distinto de cero representado por la fracción $\frac{a}{b}$.

El número cero, $\frac{0}{1}$, no tiene ningún inverso multiplicativo. No hay número racional alguno $\frac{a}{b}$ tal que

$$\frac{0}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$$

porque para cualquier número racional $\frac{a}{b}$

$$\frac{0}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{0 \times a}{1 \times b}$$

$$= \frac{0}{1}, \text{ que no es igual a } \frac{1}{1}.$$

El resultado de multiplicar por 0 es el mismo en los números racionales que el que habíamos obtenido en cada uno de sus subconjuntos. Si $\frac{a}{b}$ es un número racional cualquiera, entonces

$$\frac{a}{b} \times \frac{0}{1} = \frac{a \times 0}{b \times 1} \qquad \text{(De acuerdo con la definición de multiplicación.)}$$

$$= \frac{0}{b} \qquad (a \times 0 = 0 \text{ y } b \times 1 = b \text{ para los enteros.})$$

$$= \frac{0}{1}. \qquad \left(\frac{0}{b} \text{ y } \frac{0}{1} \text{ son equivalentes.}\right)$$

Análogamente,

$$\frac{0}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{0}{1}.$$

El producto de cualquier número racional y cero es cero. Además, *si el producto de dos números racionales es* 0, *al menos uno de los números es* 0.

GRUPO DE EJERCICIOS 8

1. Consideremos los dos pares de fracciones equivalentes

$$\frac{^-5}{9}, \frac{15}{^-27} \quad \text{y} \quad \frac{7}{10}, \frac{14}{20}.$$

Fórmense cuatro productos, en cada uno de los cuales aparezca una fracción del primer par y una fracción del segundo par, para ilustrar el hecho de que el producto de dos números racionales no depende de cuáles sean las fracciones usadas para denominar los números.

2. Usando el número racional $\frac{25}{^-17}$, ilústrese que $\frac{1}{1}$ es el elemento identidad para la multiplicación de números racionales.

3. Considérense los numerales

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{^-4}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8}\right) \quad \text{y} \quad \frac{2}{3} \times \left(\frac{^-4}{5} + \frac{3}{8}\right).$$

a) Exprésese cada uno como una fracción simple en su forma más simple.

b) Este ejemplo debe sugerir que una propiedad familiar de otros conjuntos de números la comparten también los racionales. ¿Cuál es esa propiedad?

4. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de cada uno de los siguientes números?

a) $\frac{^-7}{3}$ *b)* $\frac{18}{^-13}$ *c)* $\frac{485}{1}$ *d)* $\frac{3}{97}$

Demuéstrese que la contestación es correcta.

5. ¿Cuál es el recíproco de cada número en el ejercicio 4?

6. Considérense los numerales

$$\left(\frac{^-12}{5} \times \frac{15}{4}\right) \times \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{^-12}{5} \times \left(\frac{15}{4} \times \frac{2}{3}\right).$$

a) Encuéntrese para cada uno de ellos una fracción en la forma más simple.

b) ¿Cuál es la propiedad que sugiere el resultado?

Propiedades de la multiplicación

Recuérdese que en los sistemas que son ya familiares para el lector, se encontró que la multiplicación tenía las propiedades de cerradura, conmutatividad, asociatividad y un elemento identidad. La propiedad de existencia de un inverso multiplicativo se observó también para los racionales positivos, pero no para los enteros. Además, cada conjunto tenía la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición. Hay también una propiedad multiplicativa especial del 0. Encontramos que nuestra definición general de multiplicación de números racionales es tal que todas estas propiedades continúan siendo ciertas. Las demostraciones de que esto es cierto (omitidas aquí en la mayoría de los casos) se basan en las propiedades de los enteros, porque un número racional está definido en términos de un par ordenado de enteros (el numerador y el denominador de una fracción que denomina el número racional).

1. *Propiedad de cerradura de la multiplicación*: si

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}$$

son números racionales, entonces el producto

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

es un número racional.

2. *Propiedad conmutativa de la multiplicación*: si

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}$$

son números racionales, entonces

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}.$$

3. *Propiedad asociativa de la multiplicación*: si

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \text{ y } \frac{e}{f}$$

son números racionales, entonces

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right).$$

4. *Elemento identidad para la multiplicación*: el número racional uno, $\frac{1}{1}$, es el elemento identidad para la multiplicación; es decir, si $\frac{a}{b}$ es un número racional cualquiera, entonces

$$\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

5. *Propiedad del inverso multiplicativo*: para cada número racional $\frac{a}{b}$ distinto de cero, hay un número racional único $\frac{x}{y}$ tal que

$$\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = 1.$$

El número $\frac{x}{y}$ se llama inverso multiplicativo del número

$$\frac{a}{b} \text{ y a } \frac{a}{b}$$

se le llama inverso multiplicativo de $\frac{x}{y}$.

El número 0 no tiene un inverso multiplicativo.

Vale la pena repetir que los enteros no tienen la propiedad de existencia del inverso multiplicativo. Como elemento del sistema de los enteros, 5 no tiene un inverso multiplicativo, pues no hay entero alguno n tal que $5 \times n = 1$. Como elemento del sistema de los números racionales, $\frac{5}{1}$ (que se corresponde con 5) sí tiene un inverso multiplicativo, $\frac{1}{5}$.

La propiedad del inverso multiplicativo hace posible resolver ecuaciones como las siguientes:

$$\frac{^-2}{3} \times n = \frac{1}{5}, \quad \text{y} \quad \frac{4}{7} \times n = \frac{^-3}{8}.$$

Cada una de ellas tiene una solución que es un número racional. Mostremos cómo puede resolverse la primera. Multipliquemos ambos miembros por el inverso multiplicativo de

$$\frac{^-2}{3} \text{ que es } \frac{3}{^-2}.$$

Tenemos

$$\frac{^-2}{3} \times n = \frac{1}{5},$$

$$\frac{3}{^-2} \times \left(\frac{^-2}{3} \times n\right) = \frac{3}{^-2} \times \frac{1}{5},$$

puesto que

$$\frac{^-2}{3} \times n \text{ y } \frac{1}{5}$$

denominan al mismo número racional. De acuerdo con la propiedad asociativa tenemos

$$\left(\frac{3}{^-2} \times \frac{^-2}{3}\right) \times n = \frac{3}{^-2} \times \frac{1}{5},$$

y según la multiplicación de inversos multiplicativos

$$\frac{1}{1} \times n = \frac{3}{^-2} \times \frac{1}{5}.$$

Finalmente, como $\frac{1}{1} \times n$ es n, podemos escribir

$$n = \frac{3 \times 1}{^-2 \times 5} = \frac{3}{^-10} = \frac{^-3}{10}.$$

Vemos, pues, que $\frac{^-3}{10}$ es ciertamente la solución de la ecuación.

$$\frac{^-2}{3} \times n = \frac{1}{5}$$

porque la proposición

$$\frac{^-2}{3} \times \frac{^-3}{10} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \text{ es cierta.}$$

Puede seguirse un proceso análogo para mostrar que si

$$\frac{4}{7} \times n = \frac{^-3}{8},$$

entonces $n = \frac{^-21}{32}$,
y recíprocamente (véase el Cuaderno 12: *Lógica*).

6. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición*: si

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \text{ y } \frac{e}{f}$$

son números racionales, entonces

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \times \frac{e}{f}\right).$$

La justificación de esta propiedad en términos generales es algo tediosa, aunque no difícil. Contentémosnos con ilustrarla mediante un ejemplo. Mostraremos que

$$\frac{3}{4}\times\left(\frac{^-5}{6}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{^-5}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right).$$

En el primer miembro, encontramos primero la suma $\frac{-5}{6}+\frac{1}{2}$; luego la multiplicamos por $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}\times\frac{(^-5\times 2)+(6\times 1)}{6\times 2}$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{^-10+6}{12}$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{^-4}{12}$$
$$=\frac{3\times{}^-4}{4\times 12}$$
$$=\frac{^-12}{48}$$
$$=\frac{^-1}{4}.$$

En el segundo miembro, calculamos primero los productos $\frac{3}{4}\times\frac{-5}{6}$ y $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$; luego encontramos su suma:

$$\frac{3\times{}^-5}{4\times 6}+\frac{3\times 1}{4\times 2}$$
$$=\frac{^-15}{24}+\frac{3}{8}$$
$$=\frac{(^-15\times 8)+(24\times 3)}{24\times 8}$$
$$=\frac{^-120+72}{192}$$
$$=\frac{^-48}{192}$$
$$=\frac{^-1}{4}.$$

Vemos, pues, cómo las dos operaciones dan lugar a la misma respuesta.

7. *Multiplicación por cero*: el producto de cualquier número racional por cero es cero; es decir, si $\frac{a}{b}$ es un número racional cualquiera, entonces

$$\frac{a}{b}\times\frac{0}{1}=\frac{0}{1}\times\frac{a}{b}=\frac{0}{1}.$$

Recíprocamente, si el producto de dos números racionales es cero, entonces al menos uno de los dos factores es cero.

GRUPO DE EJERCICIOS 9

1. Enumérense las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números racionales que hemos discutido en la sección precedente.

2. Úsense fracciones del conjunto

$$\left\{\frac{-1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{-4}{5}\right\}$$

para construir un ejemplo ilustrativo de cada una de las propiedades discutidas en la sección precedente.

3. Úsese el hecho de que

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

para mostrar cómo puede usarse la propiedad distributiva para encontrar las siguientes sumas.

EJEMPLO: $\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(7 \times \frac{1}{6}\right)$

$= (5 + 7) \times \frac{1}{6}$ (Propiedad distributiva.)

$= 12 \times \frac{1}{6}$

$= \frac{12}{6}$

$= 2.$

a) $\frac{4}{11} + \frac{13}{11}$ *c)* $\frac{5}{6} + \frac{-4}{6}$

b) $\frac{-3}{4} + \frac{9}{4}$ *d)* $\frac{1}{13} + \frac{-2}{13} + \frac{7}{13}$

División de números racionales

En los sistemas de números con los que el lector está familiarizado, la operación de división se definió como la operación inversa de la multiplicación.[3] Por ejemplo, en el sistema de los números plenos,

$$15 \div 3 = 5 \quad \text{porque} \quad 3 \times 5 = 15.$$

En el sistema de los racionales no negativos,

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{porque} \quad \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

[3] Véase el Cuaderno 2: *Números enteros*; el Cuaderno 6: *Números racionales*; y el Cuaderno 9: *El sistema de los enteros.*

En el sistema de los enteros,

$$^-15 \div 3 = {^-5} \quad \text{porque} \quad 3 \times {^-5} = {^-15}.$$

En el sistema de los números plenos y en el sistema de los enteros, la división no siempre es posible. No hay ningún número pleno n tal que $2 \times n = 5$, y no hay ningún entero n tal que $4 \times n = {^-9}$. En el segundo sistema, el de los racionales no negativos, la división siempre es posible salvo que el divisor sea cero.

En el sistema de los números racionales, la división se define una vez más en términos de la multiplicación:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos números racionales cualesquiera con $\frac{c}{d} \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$$

quiere decir que

$$\frac{c}{d} \times \frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

No podemos dividir por el número racional cero. No hay ningún número racional $\frac{x}{y}$ que corresponda a

$$\frac{^-4}{3} \div \frac{0}{1},$$

ya que la afirmación

$$\frac{^-4}{1} \div \frac{0}{1} = \frac{x}{y}$$

querría decir que

$$\frac{^-4}{3} = \frac{0}{1} \times \frac{x}{y}.$$

Esto es imposible, porque

$$\frac{0}{1} \times \frac{x}{y} = \frac{0}{y}, \text{ o } \frac{0}{1}$$

(el producto de cero y cualquier número racional es cero), que no es igual a $\frac{^-4}{3}$. Por otra parte, el número cero puede dividirse por cualquier número racional distinto de cero, y el cociente que siempre se obtiene es cero. Por ejemplo,

$$\frac{0}{1} \div \frac{^-4}{15} = \frac{0}{1},$$

porque

$$\frac{^-4}{15} \times \frac{0}{1} = \frac{0}{15}, \quad \text{o} \quad \frac{0}{1}.$$

Usemos ahora la definición de división en un ejemplo.

Ejemplo: Divídase $\frac{-6}{7}$ entre $\frac{2}{3}$.

Solución: Si denotamos $\left(\frac{-6}{7}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right)$ por $\frac{x}{y}$,

entonces:

$\frac{2}{3} \times \frac{x}{y} = \frac{-6}{7}$, (Definición de división.)

$\frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{x}{y}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{-6}{7}$, (Multiplicando ambos miembros por $\frac{3}{2}$; se escogió $\frac{3}{2}$ porque es el inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$.)

$\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{x}{y} = \frac{-6}{7} \times \frac{3}{2}$, (Propiedad asociativa de la multiplicación, propiedad conmutativa de la multiplicación.)

$1 \times \frac{x}{y} = \frac{-6}{7} \times \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1.\right)$

$\frac{x}{y} = \frac{-6}{7} \times \frac{3}{2}$. $\left(1 \times \frac{x}{y} = \frac{x}{y}.\right)$

Así pues,

$\frac{-6}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{-6}{7} \times \frac{3}{2}$. $\left(\text{Puesto que } \frac{-6}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{x}{y} \text{ y } \frac{x}{y} = \frac{-6}{7} \times \frac{3}{2}\right)$

Este ejemplo ilustra el hecho de que dividir por un número racional (distinto de cero) da exactamente el mismo resultado que multiplicar por su inverso multiplicativo. Podemos enunciar este hecho en la forma siguiente.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos números racionales y

$$\frac{c}{d} \neq \frac{0}{1}$$

entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Como todo número racional, excepto el cero, tiene inverso multiplicativo, la división de un número racional entre un número racional distinto de cero es siempre posible, y el propio cociente es él mismo un número racional.

Por tanto, el sistema de los números racionales es *cerrado* respecto a la división, si excluimos la división entre cero.

La operación de división es la inversa de la de multiplicación, exactamente lo mismo que la operación de sustracción es la operación inversa de la de adición; es decir, la multiplicación y la división deshacen una a la otra exactamente igual que la adición y la sustracción se deshacen una a la otra (págs. 57-58). Por ejemplo,

$$\left(\frac{4}{5} \div \frac{^-6}{7}\right) \times \frac{^-6}{7} = \frac{4}{5}$$

y

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{^-6}{7}\right) \div \frac{^-6}{7} = \frac{4}{5}.$$

Si esto no parece de inmediato claro, reemplácese

$$\text{“}\div \frac{^-6}{7}\text{”}$$

en cada una de las proposiciones, por

$$\text{“}\times \frac{7}{^-6}\text{”}$$

y calcúlense los productos

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{7}{^-6}\right) \times \frac{^-6}{7}$$

y

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{^-6}{7}\right) \times \frac{7}{^-6}.$$

Las fracciones como símbolos para la división

En una de las secciones anteriores, indicábamos que como el subconjunto

$$\left\{\ldots, \frac{^-3}{1}, \frac{^-2}{1}, \frac{^-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\right\}$$

de los números racionales se comporta exactamente igual que el conjunto de los enteros,

$$\{\ldots, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

consideraríamos a los dos conjuntos como uno mismo y por ello al conjunto de los enteros como un subconjunto del conjunto de los números racionales.

Con esta convención, veremos ahora que cualquier fracción $\frac{a}{b}$ puede considerarse como un cociente de los enteros a y b.

En el sistema de los enteros la división de $^-8$ entre 3 no es posible. En el sistema de los números racionales, la división *es* posible. El número racional

$$^-8 \left(\text{considerado como el mismo que } \frac{^-8}{1}\right)$$

dividido por el número racional 3, nos da un cociente que es un número racional:

$$\begin{aligned} ^-8 \div 3 &= \frac{^-8}{1} \div \frac{3}{1} \\ &= \frac{^-8}{1} \times \frac{1}{3} && \left(\text{La división por } \frac{3}{1} \text{ da el mismo resultado que la multiplicación por } \frac{1}{3}.\right) \\ &= \frac{^-8 \times 1}{1 \times 3} && (\text{Multiplicación de números racionales.}) \\ &= \frac{^-8}{3}. \end{aligned}$$

Luego, los símbolos

$$^-8 \div 3,\ ^-8 \times \frac{1}{3} \text{ y } \frac{^-8}{3}$$

son nombres para el mismo número racional. Más generalmente, si a es cualquier entero y b es cualquier entero distinto de cero, entonces

$$\begin{aligned} a \div b &= \frac{a}{1} \div \frac{b}{1} \\ &= \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} \\ &= \frac{a \times 1}{1 \times b} \\ &= \frac{a}{b}, \end{aligned}$$

y $a \div b$, $a \times \frac{1}{b}$ y $\frac{a}{b}$ denominan al mismo número racional.

Fracciones complejas

El hecho de que el cociente de dos enteros, por ejemplo, $^-8 \div 3$, pueda representarse por una fracción, sugiere una pregunta: ¿puede el cociente de dos racionales, por ejemplo,

$$\frac{-1}{2} \div \frac{3}{4},$$

escribirse como la "fracción"

$$\frac{-1/2}{3/4}?$$

La realidad es que a menudo se usan fracciones de esta clase. La cuestión que aquí planteamos es ésta: si el concepto de fracción se extiende de modo que se puedan incluir símbolos tales como

$$\frac{-1/2}{3/4},$$

más generalmente, símbolos como

$$\frac{a/b}{c/d},$$

donde a, b, c y d son enteros con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, ¿denominarán estas nuevas fracciones a números racionales y tendrán las mismas propiedades que las fracciones que nos son ya familiares?

Consideraremos

$$\frac{a/b}{c/d}$$

como un símbolo de un cociente; es entonces claro que

$$\frac{a/b}{c/d}$$

denomina a un número racional, porque ya hemos demostrado que la operación de división de racionales tiene la propiedad de cerradura, es cerrada, excepto para la división entre cero. ¿Cuál es la denominación más simple para el número racional

$$\frac{-1/2}{3/4}?$$

Tenemos

$$\frac{-1/2}{3/4} = \frac{-1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{-1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}.$$

Luego

$$\frac{-1/2}{3/4} = \frac{-2}{3}.$$

¿Cómo se pueden calcular sumas y productos cuando los números racionales están denominados por estas nuevas fracciones (llamadas "fracciones complejas")? ¿Es posible usar la propiedad de "redenominación" que se encontró que era adecuada para las fracciones familiares? Hemos usado la propiedad de que

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$$

cuando a, b y n son enteros y $b \neq 0$, $n \neq 0$. ¿Será válida esta propiedad cuando a, b y n son números racionales y $b \neq 0$, $n \neq 0$? Consideremos la fracción $\frac{2/3}{^-4/5}$ y sea $n = \frac{^-3}{4}$. ¿Es

$$\frac{2/3}{^-4/5} = \frac{2/3 \times {^-3/4}}{^-4/5 \times {^-3/4}}$$

una proposición verdadera? La fracción del primer miembro puede escribirse $\frac{^-6/12}{12/20}$, que es equivalente a

$$\frac{^-1/2}{3/5}.$$

¿Es cierto que

$$\frac{2/3}{^-4/5} = \frac{^-1/2}{3/5}?$$

Efectuemos las dos divisiones:

$$\begin{aligned} \frac{2/3}{^-4/5} &= \frac{2}{3} \div \frac{^-4}{5} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{5}{^-4} \\ &= \frac{10}{^-12} \\ &= \frac{^-5}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{^-1/2}{3/5} &= \frac{^-1}{2} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{^-1}{2} \div \frac{5}{3} \\ &= \frac{^-5}{6}. \end{aligned}$$

Vemos, así, que en este caso la "propiedad de redenominación" nos ha proporcionado una fracción que denomina al mismo número racional que la fracción primitiva, y puede probarse que si a, b y n son números racionales y

$$b \neq 0, \qquad n \neq 0,$$

entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}.$$

En el ejemplo anterior se encontró que las dos fracciones complejas

$$\frac{2/3}{^-4/5} \text{ y } \frac{^-1/2}{3/5}$$

son iguales. Sin embargo, ambas son complejas y no nos dan la denominación más simple para el número real que representan. Para encontrar tal denominación efectuamos la división. Una elección juiciosa de n al aplicar la propiedad de redenominación nos lleva de inmediato a una fracción más simple. Supongamos que para redenominar

$$\frac{2/3}{^{-}4/5} \text{ escogemos } n = \frac{5}{^{-}4}.$$

$\left(\text{Nótese que } \frac{5}{^{-}4} \text{ es el recíproco de } \frac{^{-}4}{5}.\right)$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{2/3}{^{-}4/5} &= \frac{2/3 \times 5/^{-}4}{^{-}4/5 \times 5/^{-}4} \\ &= \frac{10/^{-}12}{1} \\ &= \frac{10}{^{-}12} \\ &= \frac{^{-}5}{6}. \end{aligned}$$

Así pues, si escogemos como n al inverso multiplicativo del denominador de la fracción compleja, la operación con las fracciones complejas se hace más fácil.

Hemos visto que una fracción compleja puede denominar a un número racional. Hemos visto también que una propiedad de las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$, en que a y b son enteros y $b \neq 0$, también se verifica para las fracciones complejas de la forma

$\frac{a/b}{c/d}$, donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales y $\frac{c}{d} \neq 0$,

a saber, la propiedad de "redenominación". ¿Se verificarán también otras propiedades? En particular, ¿siguen siendo válidas las expresiones para la suma y producto de los números racionales para los números racionales denominados por fracciones complejas? Es decir, si

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \text{ y } \frac{g}{h}$$

son todos números racionales y

$$\frac{c}{d} \neq 0 \text{ y } \frac{g}{h} \neq 0,$$

¿es cierto que

$$\frac{a/b}{c/d} + \frac{e/f}{g/h} = \frac{(a/b \times g/h) + (c/d \times e/f)}{c/d \times g/h} \text{ y } \frac{a/b}{c/d} = \frac{e/f}{g/h} \times \frac{a/b \times e/f}{c/d \times g/h}?$$

La contestación es "sí". En el ejercicio 3*d* del grupo de ejercicios que sigue, el lector tendrá la oportunidad de ilustrar, por ejemplo, que la definición de multiplicación es válida también para las fracciones complejas.

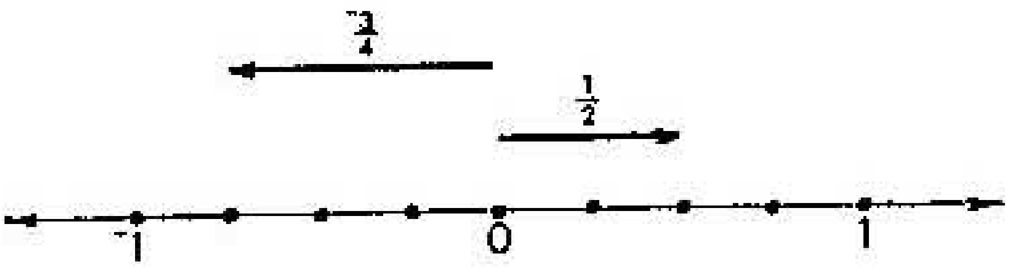
GRUPO DE EJERCICIOS 10

1. Encuéntrense las fracciones más simples equivalentes a las siguientes fracciones complejas:

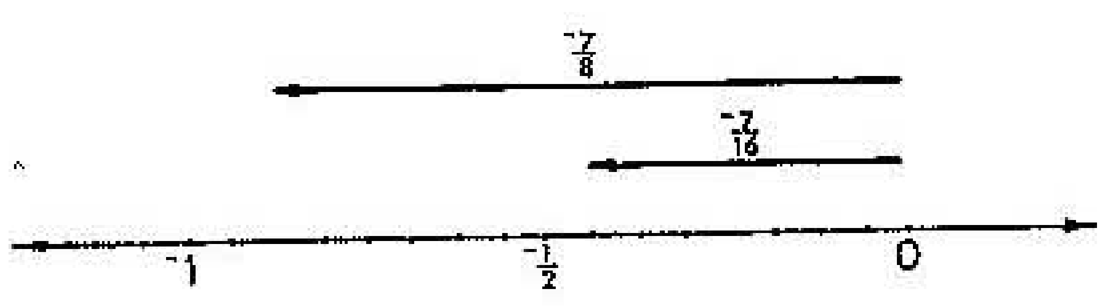
a) $\dfrac{1/2}{{}^-3/4}$ *b)* $\dfrac{{}^-7/16}{{}^-7/8}$ *c)* $\dfrac{4/3}{8/9}$

2. Sobre cada una de las rectas numéricas que abajo aparecen se encuentran flechas para representar al numerador y al denominador de una fracción compleja de las del ejercicio 1. Proporciónese la razón de la longitud de las flechas en cada dibujo y dígase si las flechas están en la misma dirección o en direcciones opuestas, usando las contestaciones que se obtuvieron en el ejercicio 1.

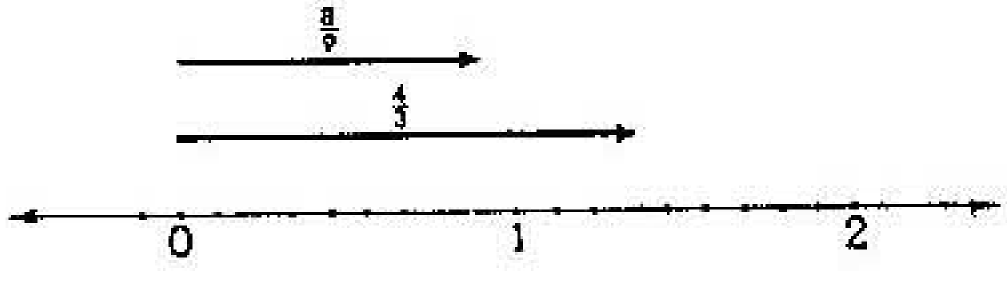
a)



b)



c)



3. *a)* Las dos fracciones

$$\frac{7/3}{7/2} \text{ y } \frac{5/2}{15/4}$$

denominan al mismo número racional. Encuéntrese su denominación fraccionaria más simple.

b) La propiedad de equivalencia de las fracciones afirma que si a, b, c y d son enteros, y $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si y sólo si $a \times d = b \times c$. Aplíquese esta propiedad a las fracciones complejas en el ejercicio 3*a*. ¿Es la propiedad cierta para estas dos fracciones?

c) Demuéstrese que la propiedad de "redenominación"

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$$

se verifica para la fracción compleja

$$\frac{7/3}{7/2}.$$

Hágase $n = \frac{^-6}{7}$.

d) Si a, b, c y d son enteros y $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

se ha definido como

$$\frac{a \times c}{b \times d}.$$

¿Se verifica esta definición para los números racionales representados por fracciones complejas? ¿Es cierto que

$$\frac{1/2}{3/8} \times \frac{7/9}{5/6} = \frac{1/2 \times 7/9}{3/8 \times 5/6}?$$

El lector podrá contestar a esta pregunta cuando haya terminado con el siguiente ejemplo:

i) Si

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

es cierto para fracciones complejas, entonces

$$\frac{1/2}{3/8} \times \frac{7/9}{5/6} = \frac{1/2 \times 7/9}{3/8 \times 5/6} = \underline{\qquad\qquad}.$$

ii) La denominación fraccional más simple para la contestación de $3d$-*i* es ———.

iii) La denominación fraccional más simple para

$$\frac{1/2}{3/8}$$

es ———.

La denominación fraccional más simple para

$$\frac{7/9}{5/6}$$

es ———.

iv) Encuéntrese el producto de las dos respuestas al ejercicio $3d$-*iii*.

v) Compárense las contestaciones de los ejercicios $3d$-*ii* y $3d$-*iv*.

vi) ¿Parece verificarse la definición para la multiplicación cuando se usan fracciones complejas?

COMPARACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Propiedad de orden de los números racionales

Una propiedad importante del sistema de los enteros (y también del sistema de los números plenos) es la propiedad de orden. En cada sistema, está definida una relación, denotada por "$<$", tal que si a y b son números cualesquiera de ese sistema, exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta y las otras son falsas:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

Para los números $^-8$ y 3, en el sistema de los enteros, de las tres proposiciones

$$^-8 < 3, \qquad ^-8 = 3, \qquad 3 < {}^-8,$$

la primera es cierta, y la segunda y la tercera falsas. ¿Qué significa decir que $^-8 < 3$? Significa que hay un entero positivo n tal que $^-8 + n = 3$. En este caso $n = 11$, porque $^-8 + 11 = 3$.

En términos generales, si a y b son enteros, entonces "$a < b$" significa que hay un entero positivo n tal que $a + n = b$.

Podemos definir una relación $<$ para el sistema de los números racionales tal que para dos números racionales cualesquiera

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}$$

hay exactamente una de las siguientes proposiciones que es cierta y las otras dos son falsas:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{c}{d} < \frac{a}{b}.$$

En realidad, definimos la relación en la misma forma que lo hicimos para los enteros:

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces la proposición

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

significa que hay un número racional positivo $\frac{x}{y}$ tal que

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d}.$$

Como la adición de un número positivo se representa como un "movimiento hacia la derecha" sobre la recta numérica, la proposición

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

es equivalente a la proposición de que el punto correspondiente a $\frac{a}{b}$ está a la izquierda del punto correspondiente a $\frac{c}{d}$.

La proposición $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
puede también escribirse de modo equivalente como

$$\frac{c}{d} > \frac{a}{b},$$

en donde el símbolo ">" se lee "es mayor que".

Consideremos los números racionales

$$\frac{3}{8} \text{ y } \frac{^-3}{4}.$$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta,

$$\frac{3}{8} < \frac{^-3}{4}, \qquad \frac{3}{8} = \frac{^-3}{4}, \qquad \frac{^-3}{4} < \frac{3}{8}?$$

Fácilmente podemos descartar a la segunda sentencia con sólo usar la condición para la equivalencia de fracciones. Puesto que $3 \times 4 \neq 8 \times {^-3}$, sabemos que

$$\frac{3}{8} \neq \frac{^-3}{4}. \text{ ¿Es } \frac{3}{8} < \frac{^-3}{4}?$$

Sumando un número positivo a $\frac{3}{8}$, ¿es posible alcanzar a $\frac{^-3}{4}$?

Con sólo pensar un poco sobre la adición con flechas sobre la recta numérica nos convenceremos de que la contestación correcta es "no". Lo anterior sólo deja pendiente un problema que, de acuerdo con lo dicho, debe tener una contestación afirmativa:

$$¿\text{es } \frac{^-3}{4} < \frac{3}{8}?$$

¿Hay un número racional positivo que sumado a

$$\frac{^-3}{4} \text{ dé como resultado } \frac{3}{8}?$$

Sí, ese número es $\frac{9}{8}$, puesto que

$$\frac{^-3}{4} + \frac{9}{8} = \frac{^-6}{8} + \frac{9}{8} = \frac{3}{8}.$$

La proposición de que, dado un número racional cualquiera $\frac{a}{b}$ y un número racional cualquiera $\frac{c}{d}$, exactamente una de las siguientes afirmaciones es cierta,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{c}{d} < \frac{a}{b},$$

se llama *principio de tricotomía.*

Una manera de comprobar como están relacionados dos números racionales entre sí consiste en expresarlos mediante fracciones que tengan el mismo denominador positivo. Consideremos los números

$$\frac{^-2}{3} \text{ y } \frac{^-4}{5}.$$

Pueden ser redenominados como sigue:

$$\frac{^-2}{3} = \frac{^-10}{15}, \qquad \frac{^-4}{5} = \frac{^-12}{15}.$$

Podemos ahora ver que

$$\frac{^-12}{15} < \frac{^-16}{15}$$

porque

$$\frac{^-12}{15} + \frac{2}{15} = \frac{^-10}{15},$$

y $\frac{2}{15}$ es positivo. Por tanto,

$$\frac{^-4}{5} < \frac{^-2}{3}.$$

Nótese que cuando hemos redenominado a los números

$$\frac{^-10}{15} \text{ y } \frac{^-12}{15},$$

necesitamos solamente observar que $^-12 < {}^-10$, para decidir que

$$\frac{^-12}{15} < \frac{^-10}{15}.$$

Es cierto que si

$$\frac{a}{c} \text{ y } \frac{b}{c}$$

son números racionales y c es un entero positivo, entonces

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

si y sólo si $a < b$.

Supongamos que r, s y t son números racionales y que se sabe que $r < s$ y $s < t$. ¿Podemos de eso concluir que $r < t$?

Sea $r = \frac{^-12}{15}$, $s = \frac{^-10}{15}$ y $t = \frac{^-9}{15}$. Entonces $\frac{^-12}{15} < \frac{^-10}{15}$, porque $\frac{^-12}{15} + \frac{2}{15} = \frac{^-10}{15}$; también $\frac{^-10}{15} < \frac{^-9}{15}$, porque $\frac{^-10}{15} + \frac{1}{15} = \frac{^-9}{15}$. ¿Es $\frac{^-12}{15}$, entonces, menor que $\frac{^-9}{15}$? Consideremos las dos proposiciones

$$\frac{^-12}{15} + \frac{2}{15} = \frac{^-10}{15},$$

$$\frac{^-10}{15} + \frac{1}{15} = \frac{^-9}{15}.$$

Reemplacemos ahora $\frac{^-10}{15}$ en la segunda proposición por

$$\left(\frac{^-12}{15} + \frac{2}{15}\right).$$

Tenemos entonces

$$\left(\frac{^-12}{15} + \frac{2}{15}\right) + \frac{1}{15} = \frac{^-9}{15},$$

o bien

$$\frac{^-12}{15} + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{15}\right) = \frac{^-9}{15}, \text{ (Propiedad asociativa de la adición.)}$$

o bien

$$\frac{^-12}{15} + \frac{3}{15} = \frac{^-9}{15}.$$

Vemos con esto que

$$\frac{^-12}{15} < \frac{^-9}{15}$$

porque se suma un número racional positivo,

$$\frac{3}{15}, \text{ a } \frac{^-12}{15}$$

para obtener

$$\frac{^-9}{15}.$$

La clase de razonamiento que aquí hemos usado puede usarse para demostrar que si r, s y t son números racionales cualesquiera tales que $r < s$ y $s < t$, entonces $r < t$. Esta importante propiedad se llama la *propiedad transitiva del orden.*

Sobre la recta numérica, observamos que si $r < s$, entonces el punto correspondiente a r está a la izquierda del punto correspondiente a s. Si $s < t$, entonces el punto correspondiente a s está a la izquierda del punto correspondiente a t, de donde el punto correspondiente a r está a la izquierda del punto correspondiente a t. (Fig. 16.) Esto ilustra de nuevo la propiedad transitiva del orden.

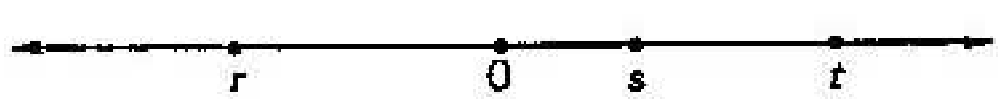


FIGURA 16

Es en particular cierto que cualquier número racional negativo es menor que cero, que cero es menor que cualquier número racional positivo, y que, por tanto, cualquier número racional negativo es menor que cualquier número racional positivo.

Principio de adición de desigualdades

Ciertas leyes para operar con desigualdades (consideramos aquí sentencias en que la frase verbal se denota por "$<$" o "$>$") se siguen fácilmente de la definición de la relación de orden.

Supongamos que tenemos dos números racionales, y que a cada uno le sumamos el mismo número racional. ¿Cuál será el orden de las sumas obtenidas?

Las edades relativas ilustran muy bien la situación. Si el lector tiene un hermano que es dos años mayor que él, es claro que tanto él como su hermano tendrán un año más de edad cada año que pase, pero el orden entre sus edades no cambiará por eso.

Para generalizar, si a, b y c son números racionales y $a < b$, entonces

$$a + c < b + c.$$

Es útil visualizar lo que esto significa sobre la recta de los números según se muestra en la figura 17. La proposición "$a < b$" significa que el punto b está a la derecha del punto a. Sumar c significa mover a la derecha si c es positivo, o a la izquierda si c es negativo. La figura 17 muestra

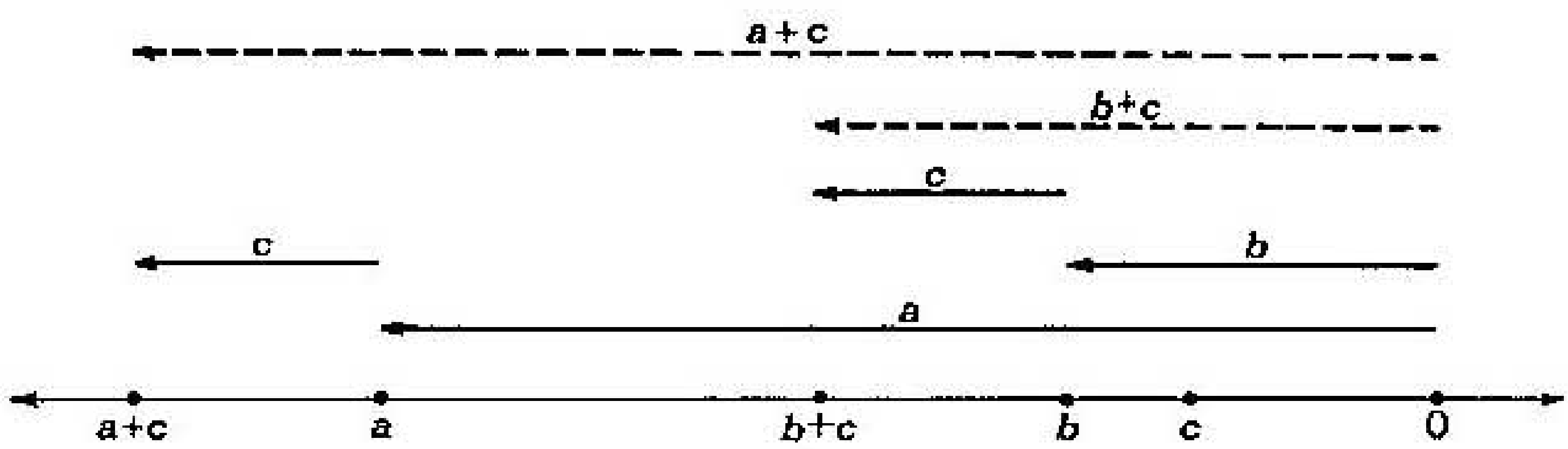


FIGURA 17

la situación para el caso en que a, b y c son negativos. Nótese que el punto para $b + c$ está a la derecha del punto para $a + c$, exactamente como el punto para b está a la derecha del punto para a.

Si consideramos el mismo problema desde el punto de vista numérico,

$$a < b$$

significa que hay un número positivo n tal que

$$a + n = b.$$

Sumando c a ambos miembros, obtenemos

$$(a + n) + c = b + c.$$

Las propiedades asociativa y conmutativa nos dan

$$(a + c) + n = b + c,$$

y como n es positivo, según la definición de "$<$" tenemos

$$a + c < b + c.$$

GRUPO DE EJERCICIOS 11

1. Complétense las siguientes proposiciones:

   a) $^-7 < {}^-4$, porque, $^-7 +$ ——— $= {}^-4$, y———, es un número———.

   b) $587 < 625$, porque ———.

   c) $\frac{^-257}{2} < \frac{423}{4}$, porque ———.

   d) $0 < \frac{93}{7}$, porque ———.

2. Hágase un diagrama de flechas para la sentencia que se completó en el ejercicio 1*a*.

3. Úsese la propiedad de adición de la desigualdad para encontrar el conjunto solución de cada una de las siguientes proposiciones.

   a) $n + {}^-2 < 9$. (*Sugerencia*: súmese el inverso aditivo de $^-2$ a ambos miembros.)

   b) $\frac{^-3}{4} + n < \frac{7}{8}$.

   c) $\frac{^-7}{10} < \frac{3}{10} + n$.

Principio de la multiplicación de las desigualdades

Hemos visto que si a, b y c son números racionales y $a < b$, entonces $a + c < b + c$. Algunas veces decimos que "al sumar el mismo número a ambos miembros de una desigualdad se conserva la desigualdad en la misma dirección". Veamos ahora el efecto de multiplicar ambos miembros de una desigualdad por el mismo número racional.

Consideremos primero una desigualdad entre números racionales específicos:

$$\frac{^-3}{4} < \frac{5}{2} \quad \text{porque} \quad \frac{^-3}{4} + \frac{13}{4} = \frac{5}{2}, \quad \text{y} \quad \frac{13}{4} \text{ es positivo.}$$

Multipliquemos ahora ambos números por el número racional positivo $\frac{8}{3}$.

$$\frac{8}{3} \times \frac{^-3}{4} = {}^-2 \quad \text{y} \quad \frac{8}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{20}{3}.$$

Seguramente $^-2 < \frac{20}{3}$,

porque $^-2$ es negativo y $\frac{20}{3}$ es positivo.

Luego $\frac{8}{3} \times \frac{^-3}{4} < \frac{8}{3} \times \frac{5}{2}$,

y vemos así que la multiplicación por $\frac{8}{3}$

preservó la desigualdad en la misma dirección.

Pero supongamos que hubiésemos multiplicado por el número racional cero. Como la multiplicación de cualquier número racional por 0 da 0 como producto, tenemos

$$0 \times \frac{^-3}{4} = 0 \quad \text{y} \quad 0 \times \frac{5}{2} = 0.$$

Por tanto $0 \times \frac{^-3}{4} = 0 \times \frac{5}{2}$,

y vemos que la multiplicación por cero reemplazó la desigualdad por una igualdad; la desigualdad no se preservó.

Probemos ahora la multiplicación por un número negativo. Tenemos

$$\frac{^-3}{4} < \frac{5}{2}.$$

Multiplíquense ambos números por $\frac{^-8}{3}$:

$$\frac{^-8}{3} \times \frac{^-3}{4} = \frac{24}{12} = 2, \quad \text{y} \quad \frac{^-8}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{^-40}{6} = \frac{^-20}{3}.$$

Claramente,

$$\frac{^-20}{3} < 2, \text{ porque } \frac{^-20}{3}$$

es negativo y 2 es positivo. Luego

$$\frac{^-3}{4} < \frac{5}{2}$$

pero

$$\frac{^-8}{3} \times \frac{5}{2} < \frac{^-8}{3} \times \frac{^-3}{4},$$

o bien

$$\frac{^-8}{3} \times \frac{^-3}{4} > \frac{^-8}{3} \times \frac{5}{2}$$

Vemos que la multiplicación por $\frac{^-8}{3}$
resultó en una desigualdad *en sentido opuesto*. Así pues, para la multiplicación hemos observado tres resultados diferentes que dependen de nuestra elección del número por el que multiplicamos los miembros de la desigualdad,

$$\frac{^-3}{4} < \frac{5}{2}.$$

Cuando multiplicamos ambos miembros por un número positivo, $\frac{8}{3}$,
se preservó la desigualdad. Cuando multiplicábamos por 0, la desigualdad quedaba convertida en igualdad. Cuando multiplicábamos por un número negativo, $\frac{^-8}{3}$, cambiaba de sentido la desigualdad.

En la figura 18, el efecto de multiplicar ambos miembros de la desigualdad $a < b$ por un número positivo, por 0, y por un número negativo está representado por medio de flechas. Usamos aquí los números 2, 0 y $^-2$ como multiplicadores. Con un número negativo escogido para a y un número positivo para b, el efecto de la multiplicación por un número positivo fue el de colocar al punto para $2 \times a$ a la izquierda del punto para a, y el punto para $2 \times b$ más a la derecha que el punto para b. Así pues, si

$$a < b, \quad \text{entonces} \quad 2 \times a < 2 \times b.$$

El efecto de la multiplicación por 0 fue el de "encoger" cada flecha hasta un mismo punto, 0. Así pues, si

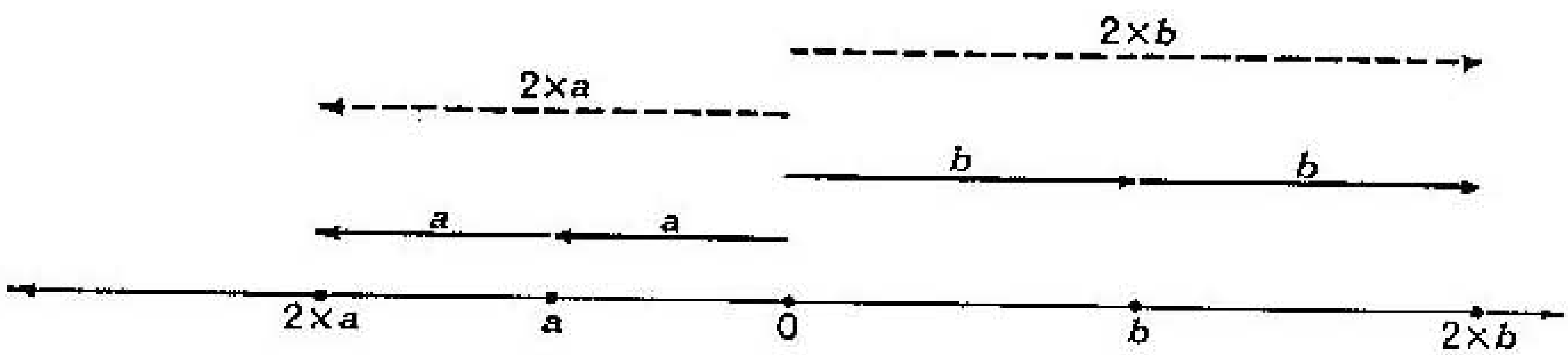
$$a < b, \quad \text{entonces} \quad 0 \times a = 0 \times b.$$

El efecto de la multiplicación por $^-2$ fue el de doblar las longitudes de las flechas y luego reflejarlas en 0. La reflexión pone $^-2 \times a$ a la derecha de 0 y $^-2 \times b$ a la izquierda de 0. De forma que si

$$a < b, \quad \text{entonces} \quad {}^-2 \times a > {}^-2 \times b.$$

Si escogemos una desigualdad en la cual ambos miembros sean positivos, y una en que ambos miembros sean negativos, el lector puede convencerse por sí mismo de que las mismas relaciones tienen lugar, y de que si a, b y c son racionales y $a < b$, entonces

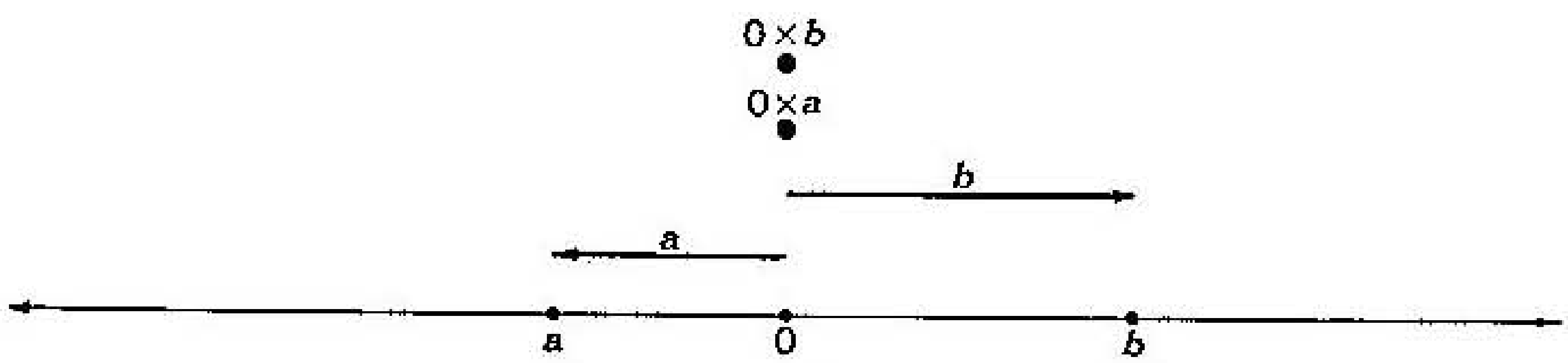
$$\begin{aligned} c \times a &< c \times b \quad \text{si} \quad c > 0, \\ c \times a &= c \times b \quad \text{si} \quad c = 0, \\ c \times a &> c \times b \quad \text{si} \quad c < 0. \end{aligned}$$



$a < b$

$2 \times a < 2 \times b$

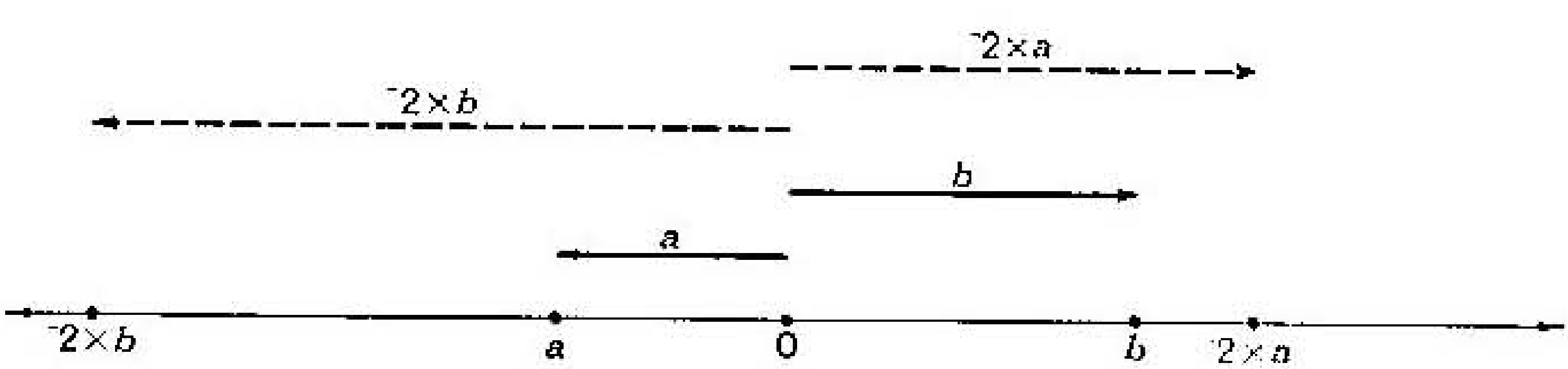
Multiplicación por 2



$a < b$

$0 \times a = 0 \times b$

Multiplicación por 0



$a < b$

$^{-}2 \times a > {^{-}2} \times b$

Multiplicación por $^{-}2$

FIGURA 18

GRUPO DE EJERCICIOS 12

1. Dada la desigualdad

$$\frac{^-9}{10} < \frac{^-9}{100},$$

ilústrese el principio de la multiplicación de desigualdades multiplicando por:

a) $\frac{10}{3}$ *b)* 0 *c)* $\frac{^-10}{3}$

2. Encuéntrese el conjunto solución de cada una de las siguientes desigualdades.

a) $\frac{2}{3} \times n < 5$ *c)* $\frac{8}{5} \times n < 25$

$\left(\textit{Sugerencia}\text{: multiplíquese por } \frac{3}{2}.\right)$

b) $\frac{^-2}{3} \times n < 5$ *d)* $\frac{^-8}{5} \times n < 25$

3. Aquí está una prueba de que si $r < s$, entonces $2 \times r < 2 \times s$. Proporciónese una razón para cada paso desde el *b* hasta el *f*.

a) $r < s$. (Dado.)
b) Hay un número positivo n tal que $r + n = s$.
c) $2 \times (r + n) = 2 \times s$.
d) $(2 \times r) + (2 \times n) = 2 \times s$.
e) $2 \times n$ es positivo.
f) $2 \times r < 2 \times s$.

Densidad

Decimos que el número racional $\frac{7}{8}$ está *entre* los números racionales

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{9}{8}$$

porque

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{8} \text{ y } \frac{7}{8} < \frac{9}{8},$$

lo que usualmente se escribe

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{9}{8}.$$

Sobre la recta numérica esto significa que el punto correspondiente a $\frac{7}{8}$ está entre los puntos correspondientes a

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{9}{8}.$$

¿Hay un número racional entre

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{7}{8}?$$

Redenominemos estos dos números como sigue:

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}, \quad \frac{7}{8} = \frac{14}{16}.$$

Es fácil ver que $\frac{12}{16} < \frac{13}{16} < \frac{14}{16}$, de manera que $\frac{13}{16}$ está entre $\frac{12}{16}$ y $\frac{14}{16}$, es decir, entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$. ¿Hay un número racional entre $\frac{12}{16}\left(\text{o } \frac{3}{4}\right)$ y $\frac{13}{16}$? Si redenominamos estos dos números $\frac{24}{32}$ y $\frac{26}{32}$, puede verse que $\frac{24}{32} < \frac{25}{32} < \frac{26}{32}$, de manera que $\frac{25}{32}$ está entre $\frac{24}{32}$ y $\frac{26}{32}$; es decir, $\frac{25}{32}$ está entre $\frac{12}{16}\left(\text{o } \frac{3}{4}\right)$ y $\frac{13}{16}$.

Quizá estos ejemplos sugieran que entre dos números racionales cualesquiera siempre hay otro número racional. Y en realidad esto es lo cierto. Hay un modo directo de encontrar tal número. En el párrafo precedente, encontramos que $\frac{13}{16}$ está entre

$$\frac{12}{16} \text{ y } \frac{14}{16}.$$

El siguiente ejemplo mostrará cómo podemos obtener $\frac{13}{16}$ partiendo de

$$\frac{12}{16} \text{ y } \frac{14}{16}:$$

$$\frac{\frac{12}{16}+\frac{14}{16}}{2}=\frac{\frac{12+14}{16}}{2}$$

$$=\frac{\frac{26}{16}}{\frac{2}{1}}$$

$$=\frac{26}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{26}{32}$$

$$=\frac{13}{16}.$$

Vemos que $\frac{13}{16}$ se obtuvo sumando los números

$$\frac{12}{16} \text{ y } \frac{14}{16}$$

y dividiendo luego la suma entre 2. En otras palabras, $\frac{16}{13}$ es el promedio de

$$\frac{12}{16} \text{ y } \frac{14}{16}$$

¿Será siempre el promedio de dos números racionales un número racional que está entre los dos números racionales originales? Veamos si tal cosa ocurre con $\frac{{}^-5}{6}$ y $\frac{{}^-6}{7}$. Nótese que $\frac{{}^-6}{7}<\frac{{}^-5}{6}$, ya que $\frac{{}^-6}{7}=\frac{{}^-36}{42}$, $\frac{{}^-5}{6}=\frac{{}^-35}{42}$, $\frac{{}^-36}{42}<\frac{{}^-35}{42}$

Tenemos

$$\frac{\frac{{}^-5}{6}+\frac{{}^-6}{7}}{2}=\frac{\frac{({}^-5\times 7)+(6\times{}^-6)}{6\times 7}}{2}$$

$$=\frac{\frac{{}^-35+{}^-36}{42}}{2}$$

$$=\frac{\frac{{}^-71}{42}}{\frac{2}{1}}$$

$$=\frac{{}^-71}{42}\times\frac{1}{2}=\frac{{}^-71}{84}.$$

¿Está $\frac{{}^-71}{84}$ entre

$$\frac{{}^-5}{6} \text{ y } \frac{{}^-6}{7}?$$

Para ver que tal es el caso, redenominemos los números

$$\frac{^-5}{6} \text{ y } \frac{^-6}{7}$$

por fracciones que tengan 84 como denominador. Entonces tenemos:

$$\frac{^-5}{6} = \frac{^-5 \times 14}{6 \times 14} = \frac{^-70}{84},$$

$$\frac{^-6}{7} = \frac{^-6 \times 12}{7 \times 12} = \frac{^-72}{84}.$$

Vemos ahora que

$$\frac{^-72}{84} < \frac{^-71}{84} < \frac{^-70}{84},$$

ya que $^-72 < {}^-71 < {}^-70$.

Luego $\frac{^-71}{84}$ está entre

$$\frac{^-72}{84} \text{ y } \frac{^-70}{84}$$

De un modo análogo, se puede demostrar que si r y s son dos números racionales cualesquiera, entonces

$$\frac{r+s}{2}$$

es un racional entre r y s. Si $r < s$, entonces

$$r < \frac{r+s}{2} < s.$$

Debe hacerse notar que el proceso de encontrar el promedio es sólo una forma de producir un número racional que esté entre dos números racionales dados. El significado principal del proceso se encuentra en el hecho de que presenta una forma precisa de demostrar la existencia de un número racional entre dos números racionales dados al mostrar realmente tal número.

El hecho de que entre dos números racionales hay otro número racional (y por tanto muchos) es de gran importancia para nosotros. Le llamamos *propiedad de densidad* del sistema de los números racionales. Es también frecuente decir que los números racionales son *densos*. (Véase el Cuaderno 11: *Sistema de los números reales.*)

El sistema de los enteros no tiene esta propiedad. No hay ningún entero, por ejemplo, entre 2 y 3, ni tampoco entre $^-3$ y $^-2$.

¿Cuál es el significado geométrico de la propiedad de densidad de los racionales? Es esta: entre dos puntos cualesquiera (no importa cuán próximos se encuentren) que se correspondan con números racionales, hay otro punto (en realidad, infinitos puntos) que se corresponden con números racionales. Esto es cierto incluso cuando intuitivamente parezca que no hay espacio alguno entre los dos puntos. Puede que no haya espacio alguno para los puntos materiales que usamos para representar; pero los puntos son abstracciones y entre dos cualesquiera de ellas siempre hay otra.

GRUPO DE EJERCICIOS 13

1. Ordénese cada par de números y justifíquese la contestación escribiendo una sentencia aditiva.

   a) $\frac{3}{7}, \frac{4}{8}$ *c)* $\frac{3}{5}, \frac{11}{14}$

   b) $\frac{^-9}{10}, \frac{^-8}{9}$ *d)* $\frac{^-6}{13}, \frac{1}{26}$

2. Para cada uno de los pares de números racionales del ejercicio 1, encuéntrese un tercer número racional que esté entre los dos números.
3. Colóquense los siguientes números en orden de menor a mayor:

$$0, \frac{^-528}{3}, \frac{200}{^-3}, \frac{^-4}{^-2}, \frac{75}{3}, \frac{1}{2}.$$

4. En el Cuaderno 6: *Números racionales*, se mostró que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } a \times d < b \times c,$$

   expresiones en las que a y c son números plenos y b y d son números naturales. ¿Es esta prueba aplicable a cualquier par de números racionales y se aplica cuando se usan fracciones con denominador negativo para denominar a estos números racionales? Para cada una de las siguientes verdaderas desigualdades, calcúlense y ordénense $a \times d$ y $b \times c$ y compruébese si este ordenamiento coincide con el de los números racionales.

   a) $\frac{^-7}{4} < \frac{^-5}{4}.$ *c)* $\frac{7}{^-4} < \frac{5}{4}$

   b) $\frac{^-7}{4} < \frac{5}{4}.$ *d)* $\frac{^-7}{4} < \frac{^-5}{^-4}.$

e) $\frac{7}{-4} < \frac{-5}{-4}$. *g)* $\frac{-5}{4} < \frac{7}{4}$

f) $\frac{5}{4} < \frac{7}{4}$. *h)* $\frac{-5}{4} < \frac{-7}{-4}$.

5. ¿Puede el lector sacar una conclusión de los resultados del ejercicio anterior respecto a la forma en que deben escribirse las fracciones racionales para que la prueba de desigualdad pueda aplicarse?
6. Escríbanse las siguientes proposiciones como desigualdades:

   a) $\frac{5}{8}$ está entre $\frac{8}{9}$ y $\frac{1}{3}$

   b) $\frac{7}{100}$ está entre 0.7 y 0.007.

   c) 999.5 está entre 946 y 1002.

   d) $223\frac{1}{10}$ está entre $223\frac{1}{20}$ y $223\frac{3}{20}$.

RESUMEN

En el Cuaderno 9: *El sistema de los enteros,* se demostró que los enteros tienen todas las propiedades de los números plenos, y además una adicional: cada entero tiene un inverso aditivo único. Una consecuencia importante de esta propiedad es que el sistema de los enteros es cerrado respecto a la sustracción, al igual que para la adición y la multiplicación.

El sistema de los números racionales, como hemos mostrado en este cuaderno, tiene todas las propiedades del sistema de los enteros y dos propiedades adicionales:

1. Todo número racional distinto de cero tiene un inverso multiplicativo (o recíproco) único.

   Esta propiedad tiene una consecuencia importante, a saber, que los números racionales son cerrados respecto a la división de divisor distinto de cero.
2. Los números racionales tienen la propiedad de *densidad;* es decir, entre dos números racionales cualesquiera hay otro número racional (de donde hay infinitos números racionales).

   Esta propiedad de densidad no es compartida por el sistema de los números plenos ni por el sistema de los enteros, aunque en ambos hay una relación de orden. Sin embargo, la densidad *sí* es compartida por el sistema de los números racionales no negativos y por el sistema de los números reales, del que todo el sistema de los números racionales es un subsistema. El sistema de los números reales se estudiará en el Cuaderno 11.

———oOo———

Lecturas complementarias

Entre las muchas referencias útiles que tratan el tema que aquí hemos introducido, se encuentran los siguientes libros:

COURANT, RICHARD y ROBBINS, HERBERT E. *What Is Mathematics?* Londres y Nueva York: Oxford University Press, 1941. (Reimpreso en 1958.) 521 páginas. Puede obtenerse en la Oxford University Press, Inc., 200 Madison Avenue, Nueva York, N. Y. 10016.

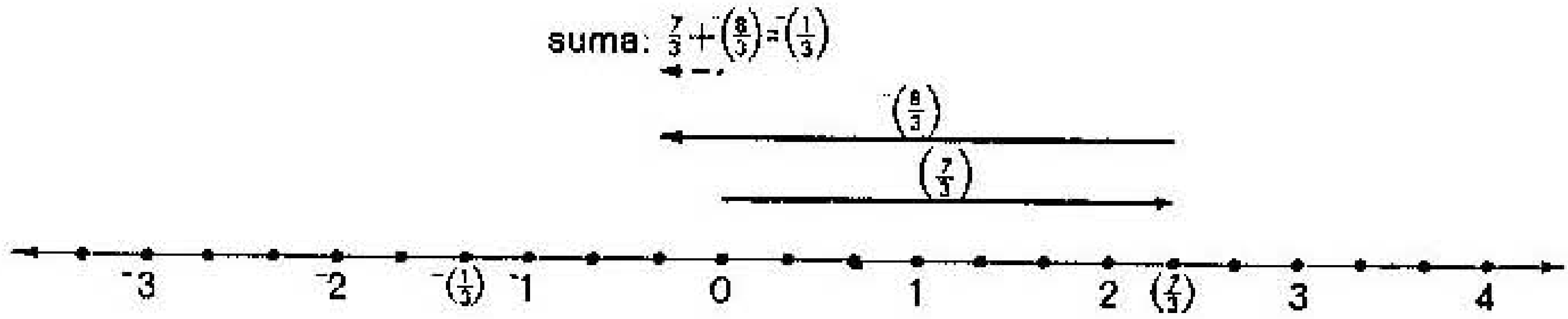
FEHR, HOWARD F. y HILL, THOMAS J. *Contemporary Mathematics for Elementary Teachers*. Boston: D. C. Heath & Co., 1966, 394 páginas. Puede obtenerse en D. C. Heath & Co., 285 Columbus Ave., Boston, Mass. 02116.

VAN ENGEN, HENRY, HARTUNG, MAURICE L. y STOCHL, JAMES E. *Foundations of Elementary School Arithmetic.* Chicago: Scott, Foresman & Co., 1965. 450 páginas. Puede obtenerse en Scott, Foresman & Co., 1900 E. Lake Ave., Glenview, Ill. 60025.

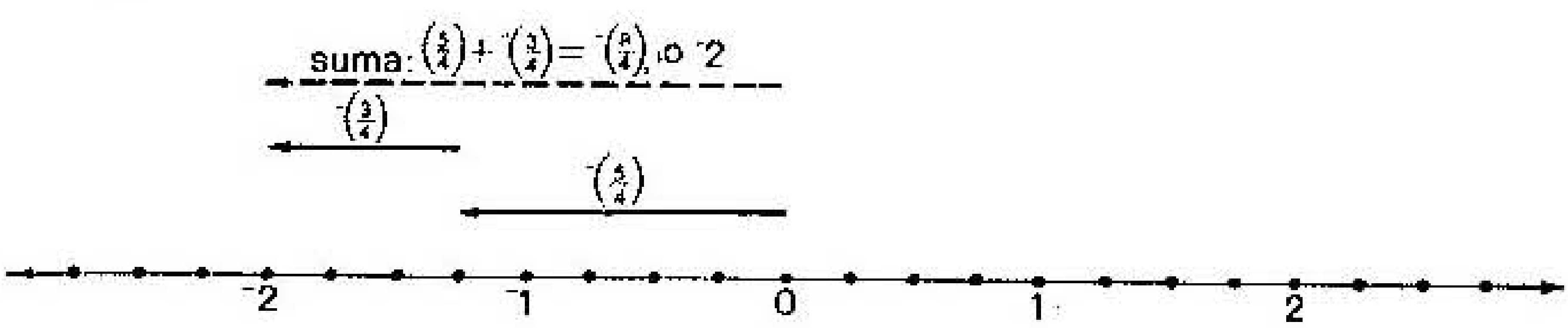
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1 (pág. 24)

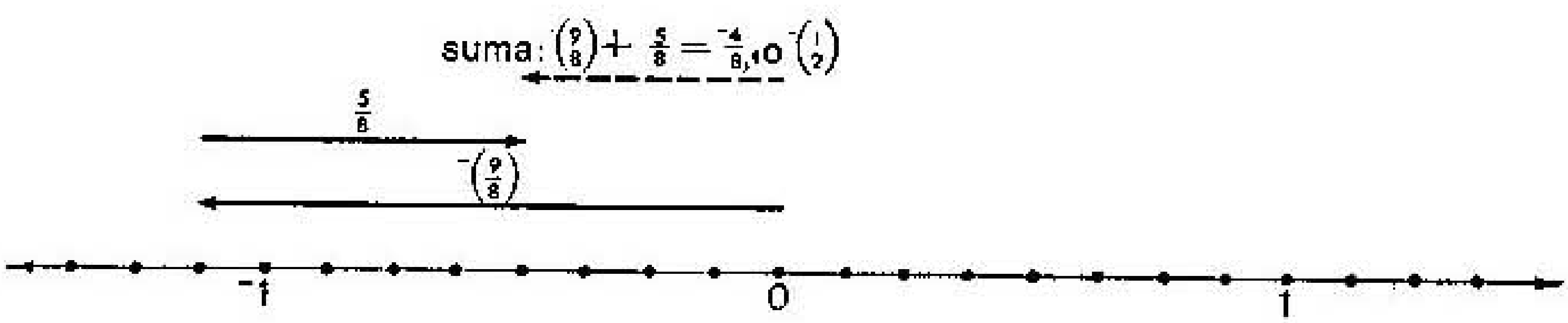
1. *a)*



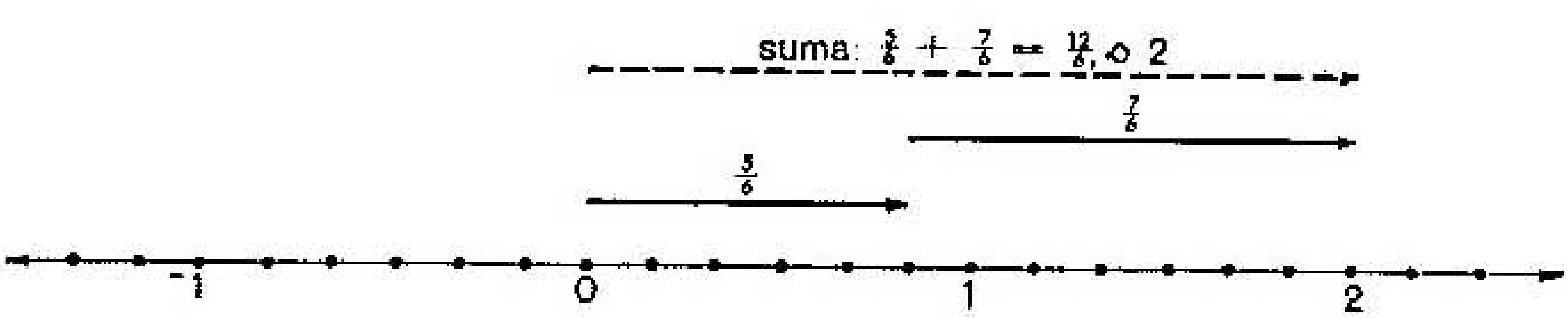
b)



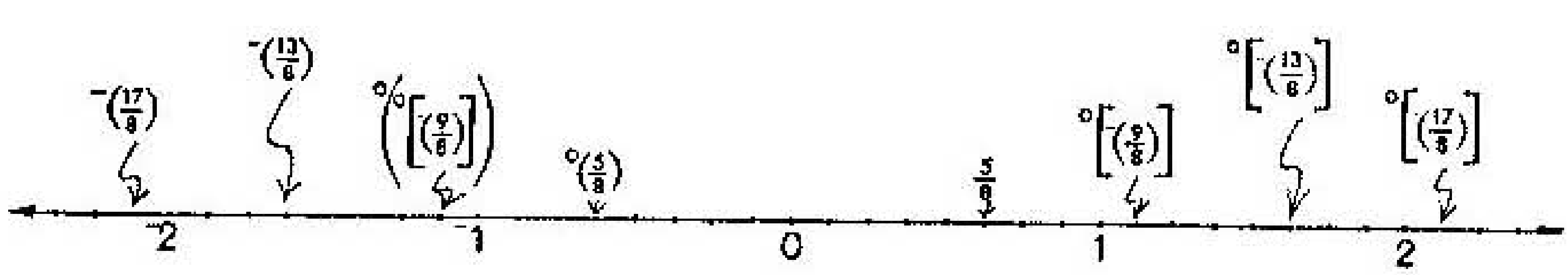
c)



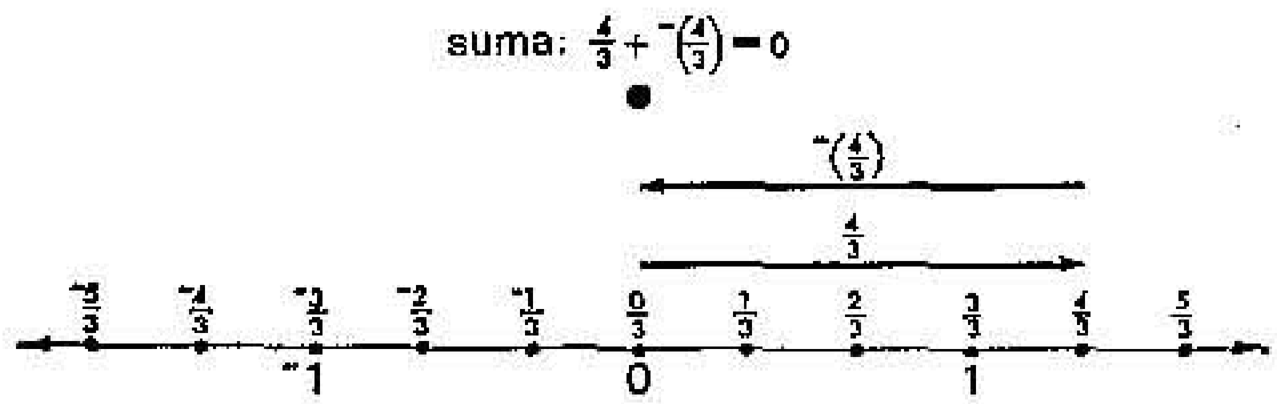
d)



2.



3. Puede usarse cualquier número racional. Aquí mostramos el diagrama para $\frac{4}{3}$ y su opuesto.



$$\frac{4}{3} + {}^{-}\left(\frac{4}{3}\right) = 0.$$

4. *a)* $\frac{21}{50}$ *c)* $\frac{35}{36}$

b) ${}^{-}\left(\frac{21}{50}\right)$ *d)* ${}^{-}\left(\frac{143}{20}\right)$

5. *a)* ${}^{-}\left(\frac{12}{5}\right)$ *e)* 0

b) ${}^{-}\left(\frac{9}{5}\right)$ *f)* $\frac{3}{5}$

c) ${}^{-}\left(\frac{6}{5}\right)$ *g)* $\frac{5}{6}$

d) ${}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$ *h)* $\frac{9}{5}$

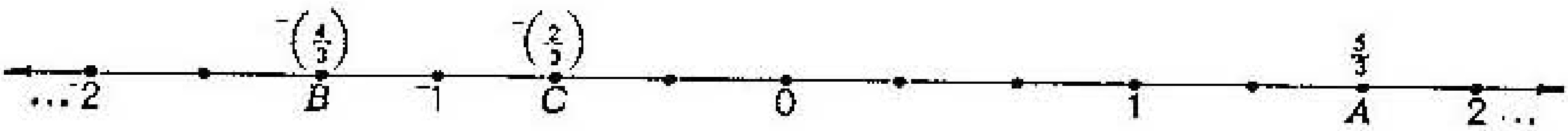
Grupo de ejercicios 2 (págs. 32-33)

1. Los pares en *b)*, *c)* y *d)*

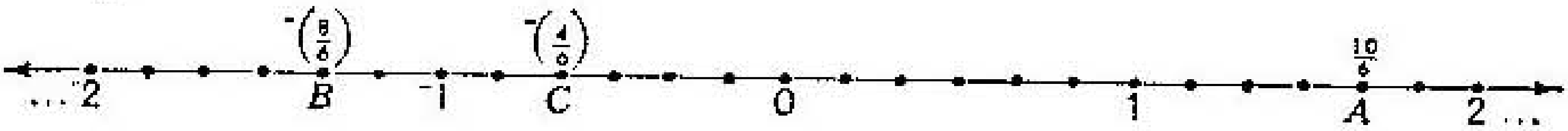
2. $6 = 2 \times 3.$

$75 = 3 \times 5 \times 5.$
$6 \times 75 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5.$
$25 = 5 \times 5.$
$18 = 2 \times 3 \times 3.$
$25 \times 18 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5.$

3. *a)*



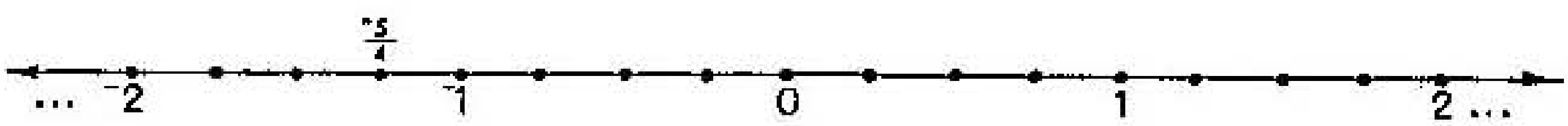
b)



4. $\frac{48}{145}$

Grupo de ejercicios 3 (págs. 36-37)

1. *a)*



b) $\frac{5}{^-4}, \frac{^-10}{8}, \frac{10}{^-8}, \frac{^-500}{400}, \frac{500}{^-400}.$

c) 12

d) 25

2. *a)* $\frac{^-5}{4} = \frac{^-15}{12}.$ *c)* $\frac{^-5}{4} = \frac{^-45}{36}.$

b) $\frac{^-5}{4} = \frac{25}{^-20}.$ *d)* $\frac{^-5}{4} = \frac{50}{^-40}$

3. *a)* $\frac{3}{1}, \frac{^-19}{^-2},$ y $\frac{3 \times {^-6}}{5 \times {^-6}}.$

b) $\frac{^-5}{2}, \frac{4 \times 3}{^-7 \times 3},$ y $\frac{7}{^-3}.$

c) $\frac{0}{^-5}.$

4. Las respuestas pueden variar. Algunos nombres correctos son

$$\frac{^-16}{2}, \frac{^-24}{3}, \frac{32}{^-4}, \frac{^-40}{5}, \frac{48}{^-6}, \frac{^-800}{100}.$$

Grupo de ejercicios 4 (págs. 41-42)

1. $\frac{5}{6}$, $\frac{15}{1}$ y $\frac{^{-}31}{73}$.

   ($\frac{1}{^{-}6}$ no es una denominación de máxima simplicidad porque el denominador es negativo.)

2. *a)* $\frac{2}{3}$ *d)* $\frac{0}{1}$ *g)* $\frac{1}{1}$

   b) $\frac{^{-}2}{3}$ *e)* $\frac{2}{5}$

   c) $\frac{^{-}7}{8}$ *f)* $\frac{^{-}33}{1}$

3. *a)* $^{-}9$ *d)* 0

   b) $^{-}16$ *e)* 4

   c) 1 *f)* $^{-}14$

4. *a)* $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7.$

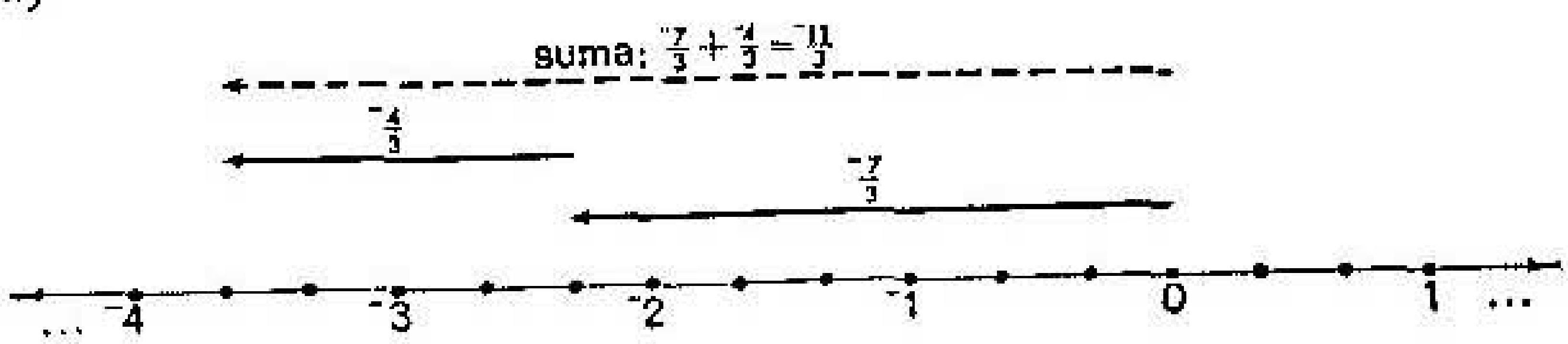
   $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$

   b) *i)* $\frac{21}{10}$ *ii)* $\frac{21}{10}$ *iii)* $\frac{10}{^{-}21}$

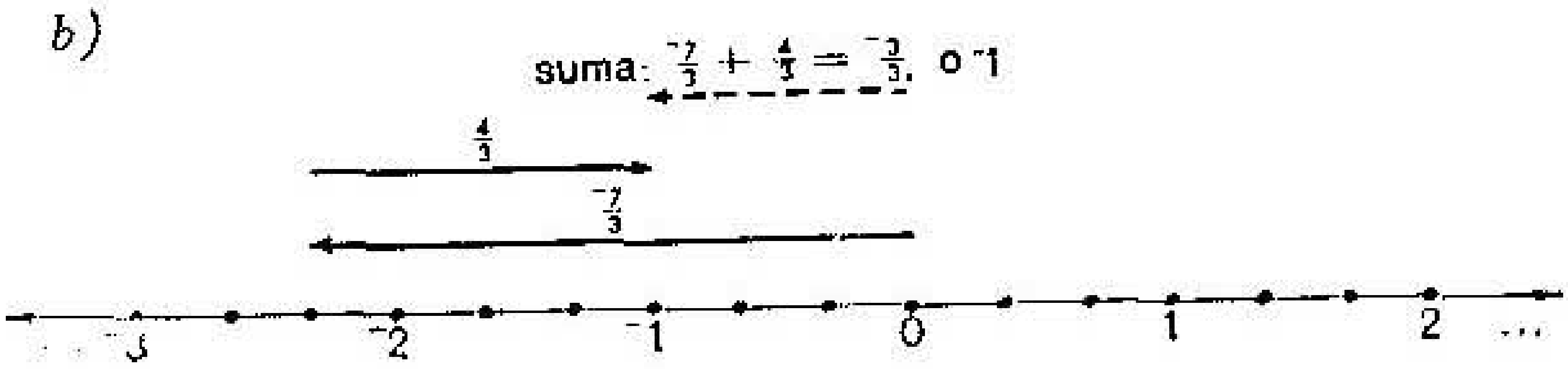
5. *a)* $\frac{2}{5}$ *b)* $\frac{^{-}11}{29}$ *c)* $\frac{^{-}1}{78}$

Grupo de ejercicios 5 (págs. 48-50)

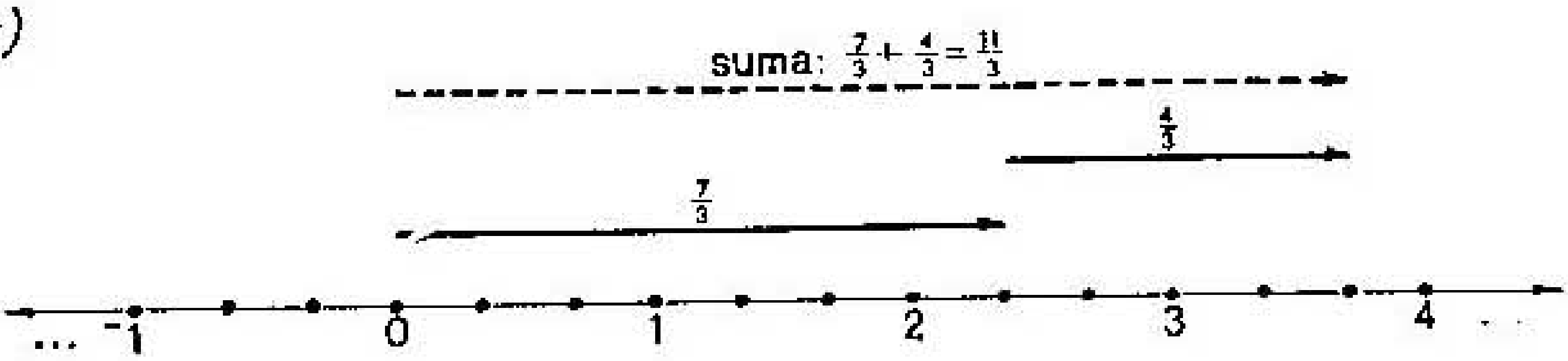
1. *a)*



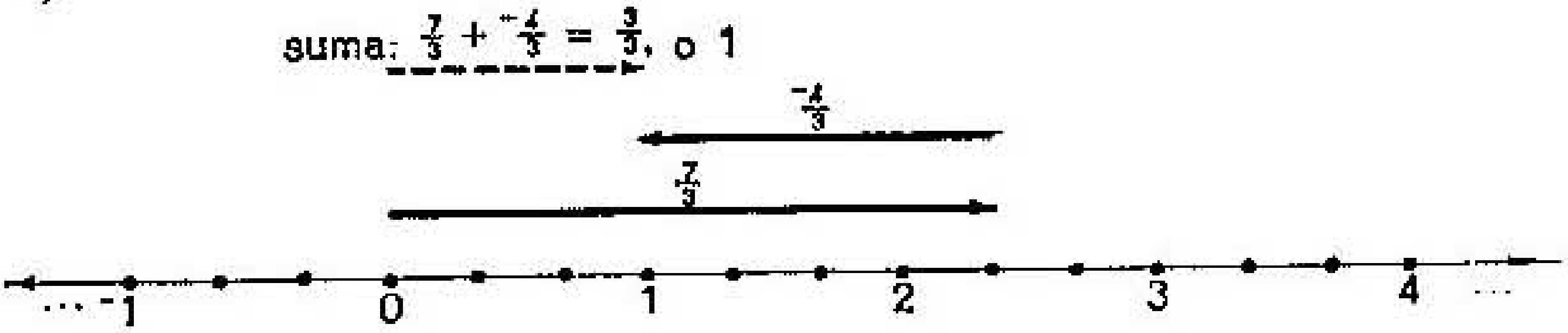
   b)



c)



d)



2. *a)* $\frac{7}{3}$ *e)* $\frac{3}{3}$, o 1

b) $\frac{4}{3}$ *f)* $\frac{3}{3}$, o 1

c) $\frac{4}{3}$ *g)* $\frac{11}{3}$

d) $\frac{7}{3}$ *h)* $\frac{11}{3}$

3. *a)* $\frac{1}{18}$ *d)* $\frac{9}{10}$

b) 0 *e)* $\frac{9}{10}$

c) 0 *f)* $\frac{7}{15}$

4. *a)* $\frac{^-4}{8}$, o $\frac{^-1}{2}$ *e)* $\frac{4}{8}$ o $\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{3}$ *f)* $\frac{17}{16}$

c) $\frac{^-3}{3}$, o $^-1$ *g)* $\frac{^-40}{22}$, o $\frac{^-20}{11}$

d) $\frac{6}{8}$, o $\frac{3}{4}$

Grupo de ejercicios 6 (págs. 55-56)

1. *a)* Propiedad conmutativa
   b) Propiedad de la existencia del inverso aditivo
   c) Propiedad asociativa
2. *b)* $n + \frac{-2}{5}$ y $\frac{7}{8}$ denominan el mismo número; de donde, las dos sumas son iguales
   c) Propiedad asociativa de la adición
   d) Propiedad de la existencia del inverso aditivo
   e) Cero es el elemento identidad aditiva.

Grupo de ejercicios 7 (págs. 63-64)

1. *a)* $\frac{1}{40} - \frac{^-7}{8} = \frac{9}{10}$ o $\frac{1}{40} - \frac{9}{10} = \frac{^-7}{8}$.

   b) $\frac{4}{3} + \frac{^-3}{4} = \frac{7}{12}$

   c) $\frac{5}{12} - 2\frac{1}{6} = {^-1}\frac{3}{4}$ o $\frac{5}{12} - {^-1}\frac{3}{4} = 2\frac{1}{6}$.

   d) $\frac{5}{6} + \frac{17}{3} = n$.

   e) ${^-1}\frac{1}{4} + n = 7\frac{1}{8}$.

   f) $n - \frac{^-14}{7} = \frac{^-5}{14}$ o $n - \frac{^-5}{14} = \frac{^-14}{7}$.

2. *b)* *c)*

3. *a)* $^-\left(7\,\frac{3}{8}\right) = {^-}\left(7 + \frac{3}{8}\right) = {^-}\left(\frac{56}{8} + \frac{3}{8}\right) = \frac{^-59}{8}$.

   b) $\frac{64}{11} = \frac{55 + 9}{11} = \frac{55}{11} + \frac{9}{11} = 5 + \frac{9}{11} = 5\,\frac{9}{11}$.

   c) $\frac{^-13}{7} = {^-}\left(\frac{7 + 6}{7}\right) = {^-}\left(\frac{7}{7} + \frac{6}{7}\right) = {^-}\left(1 + \frac{6}{7}\right) = {^-1}\,\frac{6}{7}$.

   d) $\frac{37}{18} = \frac{36 + 1}{18} = \frac{36}{18} + \frac{1}{18} = 2 + \frac{1}{18} = 2\,\frac{1}{18}$.

4. *a)* $\frac{^-5}{30}$ o $\frac{^-1}{6}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{^-243}{16}$, o $^-15\frac{3}{16}$

d) $\frac{55}{8}$, o $6\frac{7}{8}$

Grupo de ejercicios 8 (pág. 69)

1. $\frac{^-5}{9} \times \frac{7}{10} = \frac{^-35}{90} = \frac{^-7}{18}$.

$\frac{15}{^-27} \times \frac{7}{10} = \frac{105}{^-270} = \frac{7}{^-18} = \frac{^-7}{18}$.

$\frac{^-5}{9} \times \frac{14}{20} = \frac{^-70}{180} = \frac{^-7}{18}$.

$\frac{15}{^-27} \times \frac{14}{20} = \frac{210}{^-540} = \frac{7}{^-18} = \frac{^-7}{18}$

2. $\frac{25}{^-17} \times \frac{1}{1} = \frac{25 \times 1}{^-17 \times 1} = \frac{25}{^-17}$.

3. *a)* Cada una puede expresarse como $\frac{^-17}{60}$.

b) Propiedad distributiva

4. *a)* $\frac{3}{^-7}$, o $\frac{^-3}{7}$ $\qquad \frac{^-7}{3} \times \frac{3}{^-7} = \frac{^-21}{^-21} = 1$.

b) $\frac{^-13}{18}$ $\qquad \frac{18}{^-13} \times \frac{^-13}{18} = \frac{^-234}{^-234} = 1$.

c) $\frac{1}{485}$ $\qquad \frac{485}{1} \times \frac{1}{485} = \frac{485}{485} = 1$.

d) $\frac{97}{3}$ $\qquad \frac{3}{97} \times \frac{97}{3} = \frac{291}{291} = 1$.

5. *a)* $\frac{^-3}{7}$

b) $\frac{^-13}{18}$

c) $\frac{1}{485}$

d) $\frac{97}{3}$

6. *a)* $\frac{^{-}6}{1}$

b) Propiedad asociativa de la multiplicación

Grupo de ejercicios 9 (págs. 73-74)

1. Propiedad de cerradura de la multiplicación
   Propiedad conmutativa de la multiplicación
   Propiedad asociativa de la multiplicación
   Elemento identidad de la multiplicación
   Propiedad multiplicativa del cero
   Propiedad del inverso multiplicativo
   Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

2. Las respuestas pueden variar. Abajo se sugieren algunos ejemplos.
   Cerradura:

$$\frac{^{-}1}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{^{-}3}{63} \text{ o } \frac{^{-}1}{21}$$

$\left(\frac{^{-}1}{21}\right.$ denomina a un número racional.$\left.\right)$

Conmutatividad:

$$\frac{^{-}1}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{^{-}1}{9}.$$

Asociatividad:

$$\left(\frac{^{-}1}{9} \times \frac{3}{7}\right) \times \frac{^{-}4}{5} = \frac{^{-}1}{9} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{^{-}4}{5}\right).$$

Elemento identidad:

$$\frac{^{-}1}{9} \times \frac{1}{1} = \frac{^{-}1}{9}.$$

Propiedad multiplicativa del cero:

$$\frac{^{-}1}{9} \times \frac{0}{1} = \frac{0}{9} = \frac{0}{1}, \text{ o } 0.$$

Propiedad del inverso multiplicativo:

$$\frac{^-1}{9} \times \frac{9}{^-1} = \frac{^-9}{^-9} = 1.$$

Propiedad distributiva:

$$\frac{^-1}{9} \times \left(\frac{3}{7} + \frac{^-4}{5}\right) = \left(\frac{^-1}{9} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{^-1}{9} \times \frac{^-4}{5}\right).$$

3. *a)* $\frac{4}{11} + \frac{13}{11} = \left(4 \times \frac{1}{11}\right) + \left(13 \times \frac{1}{11}\right)$

$$= (4 + 13) \times \frac{1}{11}$$

$$= 17 \times \frac{1}{11} = \frac{17}{11}.$$

b) $\left(^-3 \times \frac{1}{4}\right) + \left(9 \times \frac{1}{4}\right) = (^-3 + 9) \times \frac{1}{4} = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$, o $\frac{3}{2}$.

c) $\frac{5}{6} + \frac{^-4}{6} = \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(^-4 \times \frac{1}{6}\right) = (5 + {^-4}) \times \frac{1}{6} = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$

d) $\left(1 \times \frac{1}{13}\right) + \left(^-2 \times \frac{1}{13}\right) + \left(7 \times \frac{1}{13}\right)$

$$= (1 + {^-2} + 7) \times \frac{1}{13} = 6 \times \frac{1}{13} = \frac{6}{13}.$$

Grupo de ejercicios 10 (págs. 82-84)

1. *a)* $\frac{^-2}{3}$ *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{3}{2}$

2. *a)* La longitud de la flecha para

$$\frac{1}{2} \text{ es } \frac{2}{3}$$

la longitud de la flecha para $\frac{^-3}{4}$

y las flechas están en direcciones opuestas. La razón es la de dos a tres.

b) La longitud de la flecha para

$$\frac{7}{16} \text{ es } \frac{1}{2}$$

la longitud de la flecha para $\frac{7}{8}$, y las flechas están en la misma dirección. La razón es la de uno a dos.

c) La longitud de la flecha para

$$\frac{4}{3} \text{ es } \frac{3}{2}$$

veces la longitud de la flecha para $\frac{8}{9}$,

y las flechas están en la misma dirección. La razón es la de tres a dos.

3. *a)* $\frac{2}{3}$

b) $\frac{7}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{105}{12} = \frac{35}{4}$.

$\frac{7}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{4}$.

La propiedad de equivalencia de las fracciones *sí* se aplica a las fracciones complejas en el ejercicio 3*a*.

c) $$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{7}{3} \times \frac{^-6}{7}}{\frac{7}{2} \times \frac{^-6}{7}} = \frac{\frac{^-42}{21}}{\frac{^-42}{14}} = \frac{^-42}{21} \times \frac{14}{^-42} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

d) *i)* $\frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{9}}{\frac{3}{8} \times \frac{5}{6}} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{15}{48}}$.

ii) $\frac{56}{45}$

iii) $\frac{1/2}{3/8} = \frac{4}{3}$. $\frac{7/9}{5/6} = \frac{14}{15}$.

iv) $\frac{56}{45}$

v) Las respuestas son iguales.

vi) Sí.

Grupo de ejercicios 11 (pág. 90)

1. *a)* $^-7 < 4$ porque $^-7 + 3 = {}^-4$ y 3 es un número positivo.
   b) $587 < 625$ porque $587 + 38 = 625$ y 38 es un número positivo.

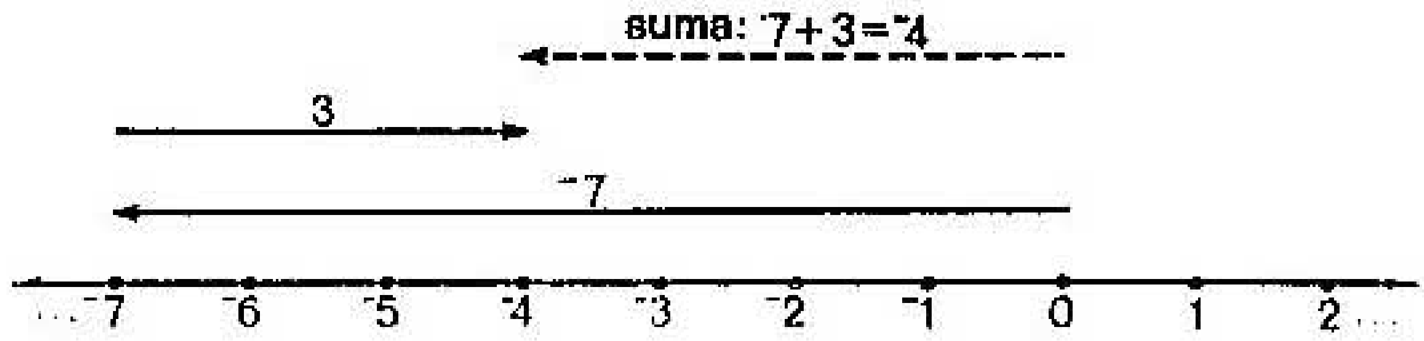
c) $\frac{{}^{-}257}{2} < \frac{423}{4}$ porque $\frac{{}^{-}257}{2} + \frac{937}{4} = \frac{423}{4}$ y $\frac{937}{4}$

es un número positivo.

d) $0 < \frac{93}{7}$ porque $0 + \frac{93}{7} = \frac{93}{7}$ y $\frac{93}{7}$

es un número positivo.

2.



3. *a)* $(n + {}^{-}2) + 2 < 9 + 2,$
$n + ({}^{-}2 + 2) < 9 + 2,$
$n + 0 < 9 + 2,$
$n < 11.$

El conjunto solución consiste en todos los números racionales menores que 11.

b) $\frac{{}^{-}3}{4} + \left(\frac{3}{4} + n\right) < \frac{3}{4} + \frac{7}{8},$

$\left(\frac{{}^{-}3}{4} + \frac{3}{4}\right) + n < \frac{3}{4} + \frac{7}{8},$

$0 + n < \frac{13}{8},$

$n < \frac{13}{8}.$

El conjunto solución consiste en todos los números racionales menores que $\frac{13}{8}$.
(Nótese que si reemplazamos a n por cualquier número menor que $\frac{13}{8}$, la proposición será cierta.)

c) $\frac{{}^{-}3}{10} + \frac{{}^{-}7}{10} < \frac{{}^{-}3}{10} + \left(\frac{3}{10} + n\right),$

$$\frac{^-3}{10} + \frac{^-7}{10} < \left(\frac{^-3}{10} + \frac{3}{10}\right) + n,$$

$$\frac{^-10}{10} < 0 + n,$$

$$^-1 < n.$$

El conjunto solución consiste en todos los números racionales mayores que $^-1$.

Grupo de ejercicios 12 (pág. 94)

1. *a)* $\frac{^-9}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{^-90}{30} = {^-3},$

$$\frac{^-9}{100} \times \frac{10}{3} = \frac{^-90}{300} = \frac{^-3}{10},$$

$$^-3 < \frac{^-3}{10}.$$

Se preserva la equivalencia en la misma dirección.

b) $\frac{^-9}{10} \times 0 = 0;\quad \frac{^-9}{100} \times 0 = 0.$

La desigualdad queda reemplazada por la igualdad.

c) $\frac{^-9}{10} \times \frac{^-10}{3} = \frac{90}{30} = 3,$

$$\frac{^-9}{100} \times \frac{^-10}{3} = \frac{90}{300} = \frac{3}{10},$$

$$\frac{3}{10} < 3.$$

La desigualdad se cambia en dirección contraria.

2. *a)* $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times n < \frac{3}{2} \times 5,$

$$1 \times n < \frac{15}{2},$$

$$n < \frac{15}{2}.$$

El conjunto solución consiste en todos los racionales menores que $\frac{15}{2}$.

b) $\frac{^-3}{2} \times \frac{^-2}{3} \times n > \frac{^-3}{2} \times 5,$

$$1 \times n > \frac{^-15}{2},$$

$$n > \frac{^-15}{2}.$$

El conjunto solución consiste en todos los racionales mayores que $\frac{^-15}{2}$.

c) $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} \times n < \frac{5}{8} \times 25,$

$$1 \times n < \frac{125}{8}, \quad \text{o} \quad 15\frac{5}{8},$$

$$n < 15\frac{5}{8}.$$

El conjunto solución consiste en todos los racionales menores que $15\frac{5}{8}$.

d) $\frac{^-5}{8} \times \frac{^-8}{5} \times n > \frac{^-5}{8} \times 25,$

$$1 \times n > \frac{^-125}{8}, \quad \text{o} \quad {}^-15\frac{5}{8},$$

$$n > {}^-15\frac{5}{8}.$$

El conjunto solución consiste en todos los racionales mayores que ${}^-15\frac{5}{8}$.

3. *b)* Definición de orden.
   c) $r + n$ y s denominan al mismo número.
   d) Propiedad distributiva.
   e) Producto de dos números positivos.
   f) Definición de orden.

Grupo de ejercicios 13 (págs. 98-99)

1\. *a)* $\frac{3}{7} < \frac{4}{8}$,

$\frac{24}{56} + n = \frac{28}{56}$,

$\frac{24}{56} + \frac{4}{56} = \frac{28}{56}$.

Así pues, $\frac{3}{7} + \frac{4}{56} = \frac{4}{8}$, y $\frac{4}{56} > 0$.

b) $\frac{^-9}{10} < \frac{^-8}{9}$,

$\frac{^-81}{90} + n = \frac{^-80}{90}$,

$\frac{^-81}{90} + \frac{1}{90} = \frac{^-80}{90}$.

Así pues, $\frac{^-9}{10} + \frac{1}{90} = \frac{^-8}{9}$, y $\frac{1}{90} > 0$.

c) $\frac{3}{5} < \frac{11}{14}$,

$\frac{42}{70} + n = \frac{55}{70}$,

$\frac{42}{70} + \frac{13}{70} = \frac{55}{70}$.

Así pues, $\frac{3}{5} + \frac{13}{70} = \frac{11}{14}$, y $\frac{13}{70} > 0$.

d) $\frac{^-6}{13} < \frac{1}{26}$,

$\frac{^-12}{26} + n = \frac{1}{26}$,

$\frac{^-12}{26} + \frac{13}{26} = \frac{1}{26}$.

Así pues, $\frac{^-6}{13} + \frac{13}{26} = \frac{1}{26}$, y $\frac{13}{26} > 0$.

2. *a)* $\frac{3}{7} < \frac{4}{8}$,

$$\frac{\frac{3}{7} + \frac{4}{8}}{2} = \frac{26}{56},$$

$$\frac{24}{56} < \frac{26}{56} < \frac{28}{56}, \quad \text{o} \quad \frac{3}{7} < \frac{26}{56} < \frac{4}{8}.$$

b) $\frac{^-9}{10} < \frac{^-8}{9}$,

$$\frac{\frac{^-9}{10} + \frac{^-8}{9}}{2} = \frac{^-161}{180},$$

$$\frac{^-162}{180} < \frac{^-161}{180} < \frac{^-160}{180}, \quad \text{o} \quad \frac{^-9}{10} < \frac{^-161}{180} < \frac{^-8}{9}.$$

c) $\frac{3}{5} < \frac{11}{14}$,

$$\frac{\frac{3}{5} + \frac{11}{14}}{2} = \frac{97}{140},$$

$$\frac{84}{140} < \frac{97}{140} < \frac{110}{140}, \quad \text{o} \quad \frac{3}{5} < \frac{97}{140} < \frac{11}{14}.$$

d) $\frac{^-6}{13} < \frac{1}{26}$,

$$\frac{\frac{^-6}{13} + \frac{1}{26}}{2} = \frac{^-11}{52},$$

$$\frac{^-24}{52} < \frac{^-11}{52} < \frac{2}{52}, \quad \text{o} \quad \frac{^-6}{13} < \frac{^-11}{52} < \frac{1}{26}.$$

(Una forma mucho más sencilla de resolver este problema es observar que el número 0 está entre $\frac{^-6}{13}$ y $\frac{1}{26}$.)

3. $\frac{^-528}{3}, \frac{200}{^-3}, 0, \frac{1}{2}, \frac{^-4}{^-2}, \frac{75}{3}.$

(Exprésese cada una como una fracción que tenga 6 como denominador.)

4. *a)* $^-28 < {}^-20$; concuerda.
   b) $^-28 < 20$; concuerda.
   c) $28 > {}^-20$; no concuerda.
   d) $28 > {}^-20$; no concuerda.
   e) $^-28 < 20$; concuerda.
   f) $20 < 28$; concuerda.
   g) $^-20 < 28$; concuerda.
   h) $20 > {}^-28$; no concuerda.

5. La prueba se aplica a cualquier par de números racionales, con tal de que ambos estén expresados por fracciones que tengan denominadores positivos, o ambos estén expresados por fracciones que los tengan negativos.

6. *a)* $\frac{1}{3} < \frac{5}{8} < \frac{8}{9}$.

   b) $0.007 < \frac{7}{100} < 0.7$.

   c) $946 < 999.5 < 1002$.

   d) $223\,\frac{1}{20} < 223\,\frac{1}{10} < 223\,\frac{3}{20}$.

Esta obra terminó de imprimirse el día 30 de septiembre de 1970, en los talleres de Programex Editora, S. A., Comonfort 58-6, México, D. F.

Se tiraron 8 000 ejemplares

nos pueda auxiliar tanto a los maestros en su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.

Títulos que componen esta colección:

1. Conjuntos
2. Números enteros
3. Sistemas de numeración para los números enteros
4. Algoritmos de las operaciones con números enteros
5. Números y sus factores
6. Números racionales
7. Sistemas de numeración para los números racionales
8. Proposiciones numéricas
9. El sistema de los números enteros
10. El sistema de los números racionales
11. El sistema de los números reales
12. Lógica
13. Gráficas, relaciones y funciones
14. Geometría informal
15. Medida
16. Recopilación, organización e interpretación de datos
17. Sugerencias para resolver problemas
18. Simetría, congruencia y semejanza

OTRO TÍTULO

Manual de lógica para estudiantes de matemáticas
Gonzalo Zubieta Russi

Es una valiosa ayuda para la mejor comprensión del lenguaje matemático. Ofrece a los estudiantes de matemáticas, el material que necesitan sobre técnicas de orden lógico del manejo del lenguaje matemático, el empleo de métodos eficaces de razonamiento, etc., ya que, muchas de las dificultades con que tropiezan se deben a la falta de familiaridad con todos estos factores.