Taller, Límites de funciones en $\mathbb{R}$
Cálculo 11°

Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

Nombre: ________________________________ Curso: _________ Fecha: ______________

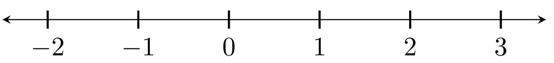
Introducción

Materiales: Regla, escuadra, calculadora, esferos o lápices de diferentes colores.

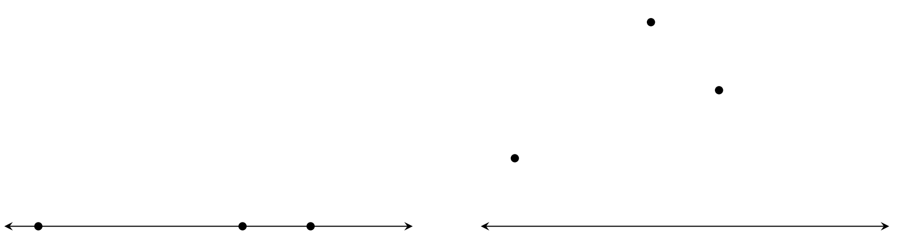
1. Grafica cada una de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números Reales:

   a) $y = f(x) = 2x + 1$ *b)* $y = g(x) = x^2 - 4$ *c)* $y = h(x) = x^3 - 2x$

2. En la siguiente recta numérica, escoge un par de unidades consecutivas y cada una divídelas en 10 partes iguales. Coloca el número correspondiente a cada división. ¿Cuáles serían los números si cada unidad es dividida en 100 partes iguales?



3. A continuación encontrarás dibujadas dos rectas. Traza perpendiculares por los puntos dibujados

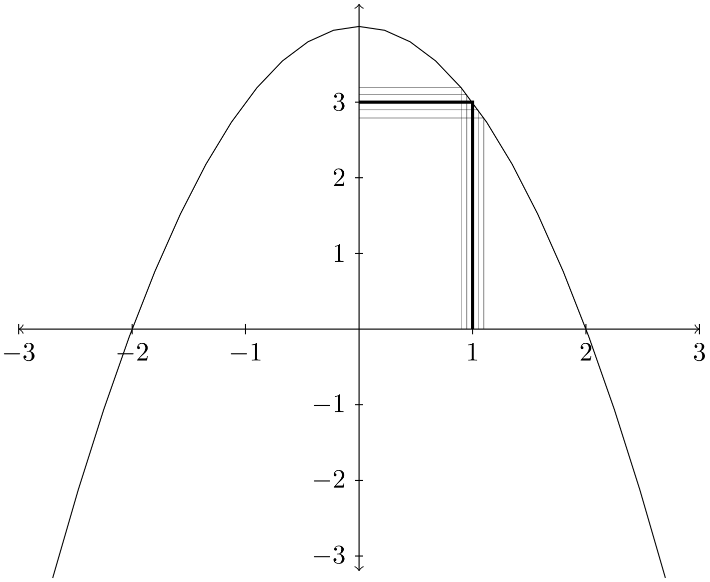


4. Consideremos la función definida mediante la expresión $y = j(x) = 4 - x^2$. Observemos los valores del recorrido (y) cuando los del dominio (x) están cerca de 1. Para ello:

a) Elaboramos una tabla de valores donde se observen los valores de "y" cuando los de "x" se están acercando a 1:

	Por la izquierda de 1 $\longrightarrow$				Por la derecha de 1 $\longleftarrow$		
x	0.97	0.98	0.99	**1**	1.01	1.02	1.03
y							

b) Construimos su gráfica conectando mediante segmentos de rectas, los elementos del Dominio próximos a 1, con su correspondiente elemento del recorrido:



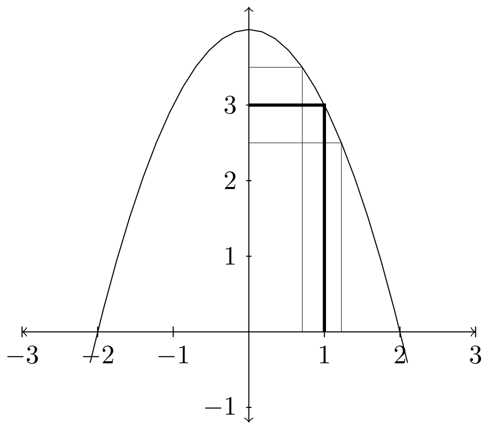
c) Hacia que valores se aproximan los de "y", cuando los de "x" se acercan a 1?

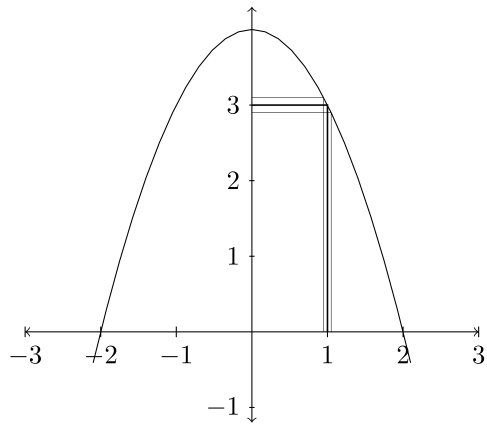
d) Observemos que ocurre gráficamente. Para ello haz cuatro gráficas de la función. En cada una de ellas:

- Dibuja en el eje "y", una de las siguientes vecindades del 3: $V_1(3)$, $V_{\frac{1}{2}}(3)$, $V_{\frac{1}{4}}(3)$ y $V_{\frac{1}{10}}(3)$. (Vecindad $V_{\frac{1}{2}}(3)$ significa que cerca de tres se construye una vecindad de radio $\frac{1}{2}$, es decir de radio 0.5; tenemos entonces el invervalo abierto (–2.5,3.5))
- Escoge varios puntos de la vecindad (pueden ser dos, por encima y por debajo de 3). Levanta en cada uno de ellos una perpendicular que llegue hasta la gráfica. A continuación, traza desde aquí, otra perpendicular que llegue hasta el eje "x".
- ¿Dentro de qué vecindad quedan los puntos de los extremos de los segmentos que llegan hasta el eje "x"?

- ¿Qué pasa cuando la vecindad es más pequeña?

5. De lo anterior, podemos darnos cuenta que no importa la vecindad de 3 que escojamos, que siempre tendremos una vecindad (del número 1) en el eje “x” dentro de la cual se encuentran los valores del dominio próximo a él, pero que cuanta más pequeña sea la vecindad escogida en el eje “y”, más cercanos al número 1 estarán los valores de "x". Ver gráficos:



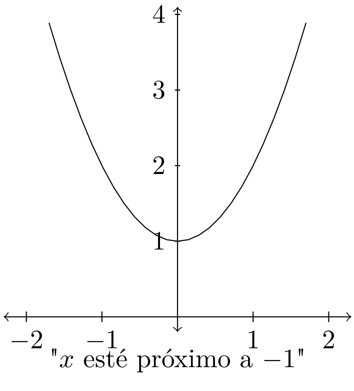


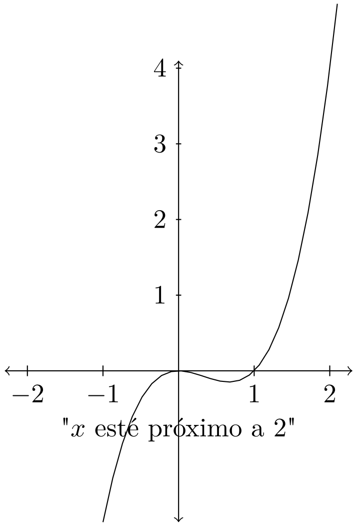
La situación anterior es descrita en matemáticas diciendo que el Límite de la función $j(x) = 4-x^2$, cuando x esta próxima (o tiende) a 1, es igual a 3. También suele decirse que “$j(x)$ tiende a 3, cuando x tiende a 1” y se escribe:

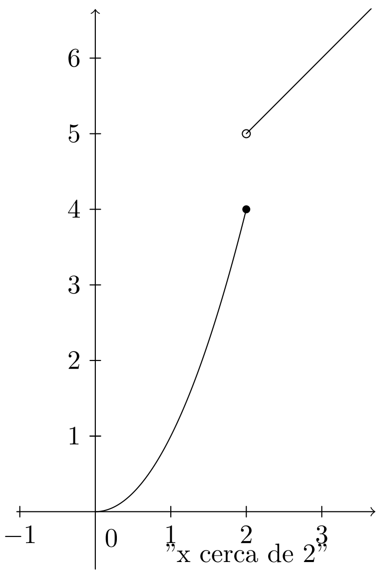
$$\lim_{x\to 1} j(x) = 3$$

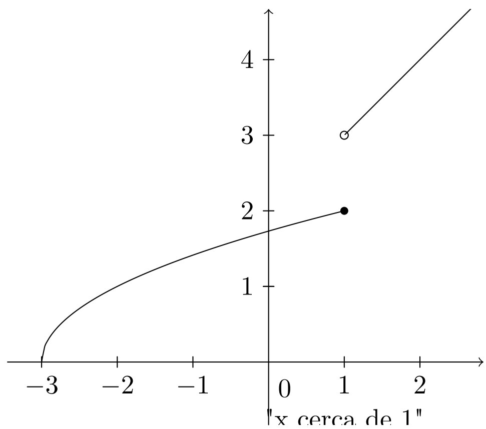
En ocasiones se escribe $j(x) \to 3$ cuando $x \to 1$

6. A continuación te presentamos varias gráficas de funciones definidas en los números reales para que determines el valor hacia donde se acercan los de “$y = f(x)$” cuando “x” se aproxima al valor indicado, escribiendo el resultado con notación de límites:









7. Determine los siguientes límites haciendo la tabla de valores cercanos al número indicado por el límite. (Ejemplo, si $\lim_{x\to 2} f(x)$, entonces se deberá hacer una tabla de valores cercanos a 2 por la izquierda y derecha, los cuales podrían ser 1.9, 1.99, 1.999 por izquierda y 2.001, 2.01, 2.1 por derecha).

a) $\lim_{x\to 1} 3x+1 =$ *b*) $\lim_{x\to 3} x^2-4 =$ *c*) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ *d*) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$