



Taller de Nivelación 2018

Matemáticas 11°



Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

La solución del siguiente taller tiene como propósito que el estudiante repase los temas fundamentales vistos durante el presente año. Este trabajo tiene un valor del 40 % y la sustentación tendrá un valor del 60 %. La sustentación se hará con una evaluación escrita.

Números reales

1. a) Grafique el intervalo $(-5, 3)$ y $(2, \infty)$ en la recta real
b) Expresé las desigualdades $x \leq 3$ y $-1 \leq x < 4$ en notación de intervalos
c) Encuentre la distancia entre -7 y 9 sobre la recta real

2. Evalúe cada expresión

a) $(-3)^4$ b) -3^4 c) $\frac{5^{23}}{5^{24}}$ d) $\left(\frac{3}{3}\right)^{-2}$ e) $16^{-3/4}$

3. Escriba cada número en notación científica

a) 186 000'000 000 b) 0.0000003965

4. Simplifique cada expresión. Escriba su respuesta final sin exponentes negativos

a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ c) $\left(\frac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$ e) $\frac{x^2}{x^2 - 4} - \frac{x + 1}{x + 2}$
b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ d) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ f) $\frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$

5. Racionalice el denominador y simplifique: $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$

6. Realice las operaciones indicadas y simplifique:

a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ e) $(x + 2)^3$
b) $(x + 3)(4x - 5)$ d) $(2x + 3)^2$

7. Factorice completamente cada expresión

a) $4x^2 - 25$ c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$
b) $2x^2 + 5x - 12$ d) $x^4 + 27x$ f) $x^3y - 4xy$

8. Encuentre las soluciones reales:



a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$

c) $x^2 - x - 12 = 0$

f) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$

d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

e) $\sqrt{3 - \sqrt{x+5}} = 2$

g) $3|x-4| = 10$

9. Mary condujo de Bogotá a Melgar a una rapidez promedio de 80 km/h. De regreso, ella condujo en promedio a 70 km/h. El tiempo total de viaje fue de $4\frac{2}{3}$ de hora. Encuentre la distancia entre las dos ciudades.
10. Una lote rectangular tiene 70 m más de largo que de ancho y su diagonal mide 130 m. Encuentre las dimensiones del lote.
11. Solucione cada inecuación. Escriba la respuesta usando la notación de intervalos y dibuje la solución en la recta real.

a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$

c) $|x - 4| < 3$

b) $x(x-1)(x+2) > 0$

d) $\frac{2x-3}{x+1} \leq 1$

12. Una botella de medicina debe ser guardada a una temperatura entre 5°C y 10°C . Qué rango correspondería si se toma la escala Fahrenheit? (Recuerde que la temperatura en Fahrenheit (F) y Celsius (C) satisface la relación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$)

Funciones

13. Sea $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = \sqrt{x+4}$, encuentre:
- El dominio de f y el dominio de g
 - $f(-2)$, $f(0)$, $f(4)$, $g(0)$, $g(8)$, $g(-6)$
 - $f(x+2)$, $g(x+2)$, $f(2+h)$
 - La razón de cambio de g entre $x = 5$ y $x = 21$. (Recuerde que la razón de cambio entre los extremos x_1 y x_2 se define como $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$)
 - $f(g)$, $g(f)$, $f(g(12))$, $g(f(12))$
14. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 2 \\ x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- Evalúe $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$
 - Haga la gráfica de f
15. Sea f la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$.
- Expresa f en la forma estándar (La forma estándar de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, es $f(x) = a(x-h) + k$, que se obtiene completando el cuadrado donde el vértice está dado por el punto (h, k))
 - Encuentre los valores máximo y mínimo de la función f
 - Haga la gráfica de f
 - Encuentre el intervalo en el cual f es creciente y el intervalo en el cual f es decreciente
 - ¿Cómo es la gráfica de la función $g(x) = -2x^2 + 8x + 10$ respecto de la función f ?
 - ¿Cómo es la gráfica de la función $h(x) = -2(x+3)^2 + 8(x+3) + 5$ con respecto a la función f ?
16. Sin usar dispositivos electrónicos, encuentre la correspondencia entre las ecuaciones siguientes y las gráficas que se dan. Explique las razones de su elección.

■ $f(x) = x^3 - 8x$

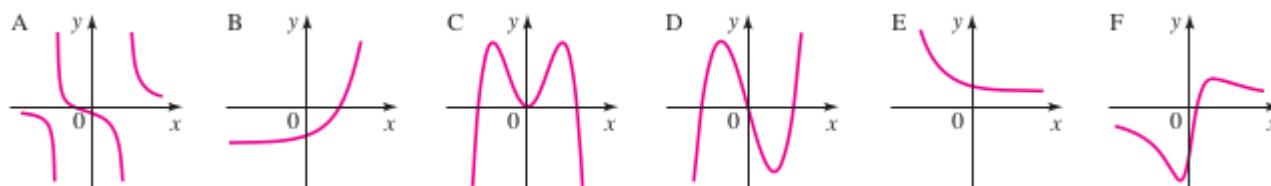
■ $k(x) = 2^{-x} + 3$

■ $s(x) = \frac{2x-3}{x^2+9}$

■ $g(x) = -x^4 + 8x^2$

■ $r(x) = \frac{2x+3}{x^2-9}$

■ $h(x) = x^2 - 5$



17. Una suma de \$25 000 es depositada en una cuenta que paga 5.4 % de interés compuesto por año.

- ¿Cuánto será el monto en la cuenta después de 3 años?
- ¿Cuándo la cuenta tendrá un saldo que ascienda a \$35 000?
- ¿En cuánto tiempo el depósito inicial se duplicará?

Sucesiones y progresiones

Para las secuencias dadas en 18–21

- Encuentre los cinco primeros términos para la sucesión dada.
- ¿Cuál es la diferencia común d ?
- Grafique los términos que encuentre en a

18. $a_n = 5 + 2(n - 1)$

20. $a_n = \frac{5}{2} - (n - 1)$

19. $a_n = 3 - 4(n - 1)$

21. $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)$

22–25 Encuentre el n -ésimo término de la progresión aritmética dado el primer término a_1 y la diferencia común d .
¿Cuál es el décimo término?

22. $a_1 = 3, d = 5$

24. $a_1 = \frac{5}{2}, d = -\frac{1}{2}$

23. $a_1 = -6, d = 3$

25. $a_1 = \sqrt{3}, d = \sqrt{3}$

26. Determine la diferencia común, el quinto término, el n -ésimo término y el centésimo término de las progresiones aritméticas

a) 1, 5, 9, 13, ...

c) $\frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}, \dots$

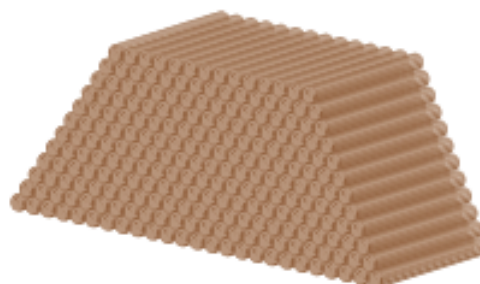
b) 11, 8, 5, 2, ...

d) 15, 12.3, 9.6, 6.9, ...

27. El décimo término de una progresión aritmética es $\frac{55}{2}$, y, el segundo término es $\frac{7}{2}$. Encuentre el primer término.

28. El duodécimo término de una progresión aritmética es 32, y el quinto término es 18. Encuentre el vigésimo término.

29. Los postes de teléfono son puestos en pila, con 25 postes en el primer nivel, 24 en el segundo y así sucesivamente. Si hay 12 niveles, ¿cuántos postes de teléfono contiene la pila de postes?



30–33 Dado el n -ésimo término de la progresión.

- Encuentre los cinco primeros términos
- ¿Cuál es la razón común r ?
- Grafique los términos que encuentre en a



30. $a_n = 5(2)^{n-1}$

32. $a_n = \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

31. $a_n = 3(-4)^{n-1}$

33. $a_n = 3^{n-1}$

34–37 Determine si la sucesión es progresión geométrica. Si es, encuentre la razón común r

34. 2, 6, 18, 36, ...

36. $e^2, e^4, e^6, e^8, \dots$

35. 27, -9, 3, -1, ...

37. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$

38. Las frecuencias de las notas musicales (medidas en ciclos por segundo) forman una progresión geométrica. El DO central tiene una frecuencia de 256, y el DO una octava arriba tiene una frecuencia de 512. Encuentre la frecuencia del DO dos octavas abajo del DO central.

39. Un cultivo de bacterias tiene inicialmente 5000 bacterias y su número aumenta 8% cada hora. ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 5 horas? Encuentre una expresión que indique el número de bacterias que hay al cabo de n horas.

Límites

40. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 < x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Grafique la función f

b) Evalúe

1) $f(0)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

5) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

41. Evalúe los límites, si existen.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x - 2}$

Probabilidad

42. La administración Federal de Ferrocarriles proporcionó las cinco categorías principales de violaciones para el ferrocarril CSX para los años 1999-2003 en la tabla siguiente. Hubo un total de 1897 violaciones. La información estuvo contenida en el artículo *Democrat and Chronicle*, 29 de diciembre, 2004, titulado "Rail cop lacks a big stick". (El uniformado no lleva "garrote").

Si una violación (infracción) se selecciona al azar para repaso, ¿cuál es la probabilidad de que la violación para el CSX se deba a lo siguiente?

a) Equipo de seguridad en trenes

b) Horas de trabajo de empleados

c) Seguridad en furgones o seguridad en vía.
¿Qué pasa si se seleccionan dos violaciones?

d) ¿Sería esto un ejemplo de muestreo con o sin
restitución? Explique por qué.

Categoría	Número
Seguridad en vías	485
Equipo de seguridad en trenes	324
Horas de trabajo de empleados	323
Seguridad en furgones	289
Locomotoras	248
Todos los otros	228
Total	1897

43. Mil personas seleccionadas de cierta enfermedad reciben un examen clínico. Como consecuencia del examen, la muestra de 1000 personas se clasifica de acuerdo con su estatura y situación de su enfermedad.

Estatura	Situación de enfermedad				
	Ninguno	Benigno	Moderado	Grave	Total
Alta	122	78	139	61	400
Media	74	51	90	35	250
Corta	104	71	121	54	350
Total	300	200	350	150	1000

Use la información de la tabla para estimar la probabilidad de ser de estatura media o corta y tener situación de enfermedad moderada o grave.

44. Determinar o estimar la probabilidad p de cada uno de los eventos siguientes:

- a) Al lanzar una vez un dado obtener un número non.
- b) Al lanzar dos veces una moneda obtener por lo menos una cara.
- c) Al sacar una carta de una baraja, bien barajada, con 52 cartas obtener un as, un 10 de diamantes o un 2 de espadas.
- d) Al lanzar una vez un par de dados su suma sea siete.
- e) Si en 100 lanzamientos de una moneda se obtuvieron 56 caras, en el siguiente lanzamiento obtener una cruz.

45. Un experimento consiste en lanzar una moneda y un dado. Si E_1 es el evento en que se obtenga “cara” al lanzar la moneda y E_2 es el evento en que se obtenga “3 o 6” al lanzar el dado, expresar en palabras cada uno de los eventos siguientes:

- a) E_1
- b) E_2
- c) $E_1 E_2$
- d) $P(E_1 E_2)$
- e) $P_1 | E_2$
- f) $P(E_1 + E_2)$

46. De una caja que contiene 6 pelotas rojas, 4 pelotas blancas y 5 pelotas azules se extrae, de manera aleatoria, una pelota. Determinar la probabilidad de que la pelota extraída sea: a) roja, b) blanca, c) azul, d) no sea roja y e) sea roja o blanca.

47. Un dado se lanza dos veces. Encontrar la probabilidad de obtener un 4, un 5 o un 6 en el primer lanzamiento y un 1, 2, 3 ó 4 en el segundo lanzamiento.

48. De una baraja, bien barajada, con 52 cartas se extraen dos cartas. Encuentre la probabilidad de que las dos sean ases si la primera carta: a) se devuelve a la baraja y b) no se devuelve a la baraja.

49. De la caja del problema 46 se extraen, sucesivamente, tres pelotas. Encuéntrese la probabilidad de que se extraigan en el orden roja, blanca y azul: a) si cada pelota se devuelve a la caja y b) si no se devuelve.