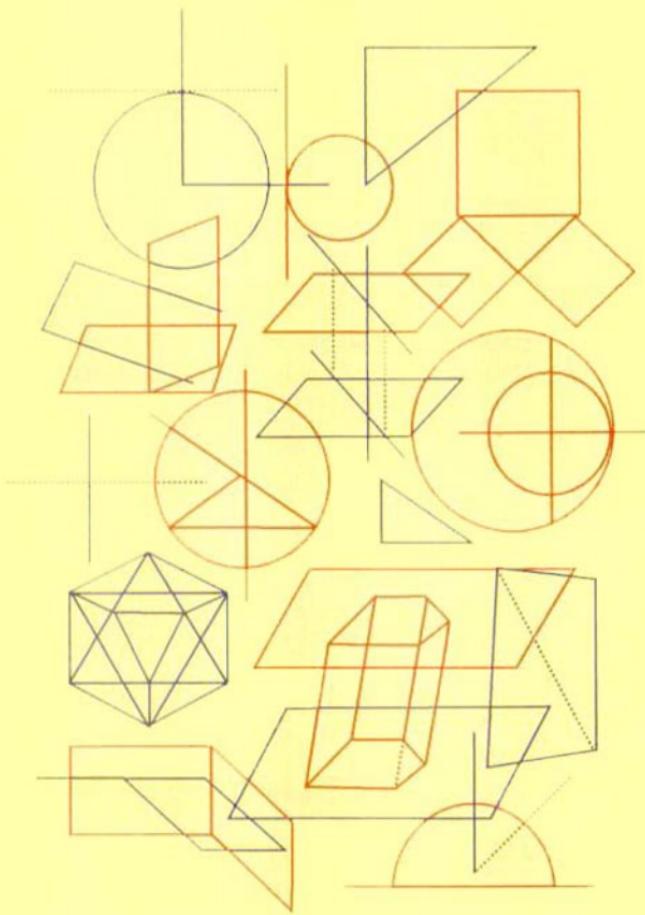


Geometría elemental

A.V. Pogorélov



Editorial Mir Moscú



А. В. Погорелов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

Издательство «Наука»
Москва

Geometría elemental

A. V. Pogorélov

Traducido del ruso por
CARLOS VEGA,
catedrático de Matemáticas Superiores

Editorial Mir
Moscú

Impreso en la URSS 1974

Derechos reservados

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe, alemán e italiano. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhs-ki per., 2, GSP, Moscú 1-110, 129820 URSS.

INDICE

Prefacio	9
Parte primera	
Planimetría	
§ 1. Propiedades fundamentales de las figuras geométricas elementales	17
Punto y recta (18). Propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano (18). Propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y en el plano (19). Propiedades fundamentales de la medición de segmentos y ángulos (21). Propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos (23). Primer criterio de la igualdad de los triángulos (24). Propiedad fundamental de las paralelas (25). Preguntas de repaso y ejercicios (25).	
§ 2. De cómo se estudian en la Geometría las propiedades de las figuras	27
Axiomas, teoremas y demostraciones (27). Posición de los ángulos construidos en un mismo semiplano (28). Separación de los lados de un ángulo por una recta (29). Preguntas de repaso (30). Ejercicios (30).	
§ 3. Ángulos	31
Ángulos adyacentes (31). Ángulos verticales (31). Ángulo recto. Rectas perpendiculares (32). Preguntas de repaso (33). Ejercicios (33).	
§ 4. Igualdad de los triángulos	33
Segundo criterio de la igualdad de los triángulos (33). Triángulo isósceles (34). Mediana, bisectriz y altura (35). Tercer criterio de la igualdad de los triángulos (36). Preguntas de repaso (37). Ejercicios (38).	
§ 5. Relaciones entre los ángulos y los lados del triángulo	38
Relaciones entre los ángulos del triángulo (38). Relación entre los ángulos del triángulo y sus lados opuestos (39). Relaciones entre los lados del triángulo (40). Desigualdad triangular (40). Preguntas de repaso (42). Ejercicios (42).	
§ 6. Triángulos rectángulos	43
Ángulos y lados del triángulo rectángulo (43). Igualdad de los triángulos rectángulos (43). Perpendicular y oblicua (45). Preguntas de repaso (46). Ejercicios (47).	
§ 7. Construcciones geométricas	47
En qué consisten los problemas de construcción (47). Construcción del triángulo de	

lados dados (48). Construcción del ángulo igual a uno dado (49). División del ángulo por la mitad (49). División del segmento por la mitad (49). Construcción de la perpendicular (50). Lugar geométrico de puntos (50). Método de lugares geométricos (52). Preguntas de repaso (53). Ejercicios (54).	
<u>§ 8.</u> Rectas paralelas	54
Criterios de paralelismo de rectas (54). Suma de los ángulos del triángulo (56). Las paralelas como rectas equidistantes (57). Preguntas de repaso (59). Ejercicios (59).	
<u>§ 9.</u> Cuadriláteros	60
Cuadriláteros convexos (60). Paralelogramo (61). Rectángulo. Rombo. Cuadrado (63). Trapecio (64). Punto de intersección de las medianas del triángulo (65). Preguntas de repaso (67). Ejercicios (67).	
<u>§ 10.</u> Movimientos. Igualdad de figuras	68
Concepto del movimiento (68). Propiedades del movimiento (69). Simetría respecto a la recta (69). Simetría respecto al punto (71). Traslación paralela (72). Rotación (73). Preguntas de repaso (75). Ejercicios (75).	
<u>§ 11.</u> Circunferencia	76
Propiedades elementales de la circunferencia (76). Ángulos centrales (77). Ángulos inscritos (79). Circunferencias inscrita y circunscrita (81). Preguntas de repaso (83). Ejercicios (83).	
<u>§ 12.</u> Semejanza de los triángulos	84
Criterio principal de la semejanza de los triángulos (84). Otros criterios de la semejanza de los triángulos (87). Segmentos proporcionales en el triángulo (88). Proporcionalidad de los segmentos de cuerdas y secantes (89). Intersección ⁷ de la recta con la circunferencia (90). Dos problemas de construcción (91). Semejanza de las figuras. Homotecia (92). Preguntas de repaso (93). Ejercicios (94).	
<u>§ 13.</u> Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones	95
Teorema de Pitágoras (95). Relaciones en el triángulo oblicuángulo (96). Relación entre las diagonales y los lados del paralelogramo (97). Existencia del triángulo de lados dados (98). Posición recíproca de dos circunferencias (99). Algunos problemas (102). Preguntas de repaso (103). Ejercicios (103).	
<u>§ 14.</u> Funciones trigonométricas del ángulo	104
Definición de las funciones trigonométricas (104). Fórmulas de reducción (105). Relaciones entre los lados y los ángulos en el triángulo rectángulo (106). Teorema del	

coseno (108). Teorema de los senos (109).	
Preguntas de repaso y ejercicios (110).	
<u>§ 15. Polígonos</u>	110
Polígonos convexos (110). Suma de los ángulos del polígono convexo (111). Polígono complementado. Quebrada convexa (113). Polígonos regulares (115). Polígonos inscritos y circunscritos (116). Polígonos semejantes (117). Preguntas de repaso y ejercicios (119).	
<u>§ 16. Áreas de figuras</u>	119
Concepto del área (119). Área del rectángulo (120). Áreas de las figuras elementales (122). Independencia entre el área de una figura simple y el modo de dividirla en triángulos (123). Áreas de las figuras semejantes (127). Preguntas de repaso y ejercicios (128).	
<u>§ 17. Longitud de la circunferencia. Área del círculo</u>	128
Longitud de la circunferencia (128). Longitud del arco de circunferencia. Medida radial del ángulo (130). Área del círculo y de sus partes (133). Preguntas de repaso y ejercicios (135).	
Parte segunda	
Estereometría	
<u>§ 18. Axiomas de la Estereometría y algunos corolarios</u>	137
Algunos corolarios de los axiomas de la Estereometría (138). División del espacio en dos semiespacios por un plano (139). Observación al axioma I_1 (140). Ejercicios (141).	
<u>§ 19. Paralelismo de rectas y planos</u>	141
Rectas paralelas en el espacio (141). Paralelismo de la recta y del plano (143). Paralelismo de los planos (144). Segmentos de rectas paralelas entre planos paralelos (145). Rectas cruzadas (146). Ejercicios (147).	
<u>§ 20. Perpendicularidad de rectas y planos</u>	147
Perpendicularidad de las rectas (147). Perpendicularidad de la recta y del plano (148). Propiedades de la perpendicularidad de la recta y del plano (150). Construcción del plano y de la recta preperpendiculares (152). Preperpendicular y oblicua (153). Perpendicularidad de los planos (155). Ejercicios (157).	
<u>§ 21. Ángulos entre rectas y planos</u>	158
Ángulo entre rectas (158). Ángulo entre recta y plano (159). Ángulo entre planos (160). Ejercicios (162).	

§ 22.	Ángulos diedros, triédros y poliedros . .	163
	Definición de los ángulos diedros y triédros (163). Teorema de los cosenos para el ángulo triédro (164). Ángulo triédro polar a un ángulo triédro (165). Teorema de los senos para el ángulo triédro (166). Relación entre los ángulos planos del ángulo triédro (167). Ángulos poliedros (167). Ejercicios (169).	
§ 23.	Movimiento y otras transformaciones en el espacio El movimiento y sus propiedades (169). Simetrías respecto al plano y al punto (170). Traslación paralela y rotación en el espacio (171). Transformación de semejanza y homotecia en el espacio (172). Proyección de un plano sobre otro (173). Ejercicios (174).	169
§ 24.	Poliedros El cuerpo geométrico (175). Prisma (175). Paralelepípedo (176). Pirámide (178). Poliedros regulares (180). Ejercicios (182).	175
§ 25.	Elementos de delineación proyectiva Representación del punto en el diseño (182). Problemas de recta (183). Determinación de la longitud del segmento (184). Problemas de recta y plano (185). Ejercicios (187).	182
§ 26.	Volumenes de cuerpos simples Concepto del volumen (187). Volumen del paralelepípedo rectangular (188). Volumen del paralelepípedo oblicuo (189). Volumen del prisma (191). Volumen de la pirámide (192). Volumenes de los cuerpos semejantes (194). Exactitud de la definición del volumen de los cuerpos simples (195). Ejercicios (199).	187
§ 27.	Cuerpos de revolución Cilindro (199). Cono (201). Esfera (203). Ejercicios (206).	199
§ 28.	Volumenes de cuerpos de revolución Definición general del volumen (207). Volumen del cilindro (209). Volumen del cono (210). Volumen de la esfera (212).	207
§ 29.	Areas de superficies de revolución Concepto del área de la superficie convexa (216). Área de la superficie esférica (217). Área del segmento esférico (219). Área lateral del cilindro (219). Área lateral del cono (220).	216
§ 30.	Nociones de historia de la Geometría . .	221

PREFACIO

En las etapas iniciales, la enseñanza de la Geometría tiene por objeto, además de comunicar a los alumnos los resultados geométricos, darles a conocer el método con ayuda del cual se obtienen esos resultados. Sabido es que los resultados geométricos (teoremas) son obtenidos por medio de razonamientos lógicos (demonstraciones) arrancando de algunos planteamientos de partida (axiomas). Los razonamientos lógicos son parte indispensable de todo saber. La Geometría se distingue por la claridad y la sencillez tanto en el enunciado del resultado como en los planteamientos de arranque a partir de los cuales debe obtenerse ese resultado. De ahí que la Geometría nos brinde las mejores oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en la escuela.

Al ofrecer el curso presente partimos de que la tarea esencial de la enseñanza de la Geometría en la escuela consiste en enseñar al alumno a razonar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostrarlas. Muy pocos de los egresados de la escuela serán matemáticos y mucho menos geómetras. También habrá los que no utilicen ni una vez en su actividad práctica el teorema de Pitágoras. Sin embargo, difícilmente hallarse uno sólo que no deba razonar, analizar o demostrar.

La experiencia secular de la enseñanza de la Geometría elemental desde los tiempos de Euclides prueba la eficiencia del sistema tradicional. Su perfeccionamiento, relacionado con el desarrollo general de la ciencia, no debe afectar, creemos nosotros, sus bases racionales y profundamente meditadas. Por eso, el curso que ofrecemos, tradicional en esencia, se distingue sólo por una exposición más rigurosa de la materia y cierta revaloración del significado de sus partes componentes.

Este curso de Geometría se basa en un sistema muy poco numeroso de hechos geométricos bien conocidos del alumno y asimilados en los grados primarios. Este sistema de planteamientos de arranque, llamados más adelante axiomas, ha sido seleccionado del previo análisis minucioso del curso escolar de Geometría tomando en consideración los elementos de demostraciones tradicionales.

La exposición comienza con la repetición, típica en la enseñanza escolar, de lo estudiado anteriormente. Por lo

menos, así será considerado por el alumno. Empero, nuestra meta auténtica es distinta y más profunda: introducir los conceptos y planteamientos de arranque fundamentales, es decir, los axiomas. Los axiomas están enunciados en forma de las propiedades fundamentales de las figuras geométricas elementales compuestas de puntos y rectas. Estos axiomas son sencillos y naturales. Hay casos en que los axiomas son enunciados más ampliamente que exigiría la cuestión para evitar preguntas y confusiones. Por ejemplo, decimos que existen puntos que se hallan en una recta dada y puntos que no se hallan en dicha recta. En realidad, nos bastaría la exigencia de dos puntos en la recta y un punto fuera de la recta.

Una peculiaridad distintiva de nuestra axiomática son los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos. Estos axiomas nos brindan ventajas metódicas substanciales. En primer lugar, eludimos el escollo de introducir la medida para los segmentos y los ángulos. Sabido es que la solución de este problema, dada la construcción axiomática de la geometría, no es nada sencilla y requiere el empleo de medios inasequibles para el alumno por su profundidad. Segundo, a través de los axiomas de la medición incorporamos la Aritmética cursada ya para entonces con lo cual se ensancha notablemente el arsenal de medios utilizados en la demostración geométrica.

Naturalmente, los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos requieren la definición correspondiente de los conceptos de la igualdad de los segmentos y los ángulos. Llamamos iguales a los segmentos de longitud idéntica. Por extraño que parezca, la mayoría de las personas consideran los segmentos iguales precisamente en este caso, aunque la igualdad de los segmentos se define en la escuela a través de la superposición. Por ello, nuestra definición de la igualdad de los segmentos también es natural desde este punto de vista. En nuestra exposición, la superposición y el movimiento en general son conceptos derivados y sólo los introducimos a mediados del curso.

El segundo párrafo se inicia con una definición tan precisa de los conceptos axioma, teorema y demostración que nos permite dar siempre una respuesta neta al «por qué» en cada punto de las demostraciones. Por otra parte, tenemos el derecho moral de plantear ese «por qué» al alumno y de exigirle una respuesta. El concepto de la demostra-

ción es ilustrado con ejemplos sencillos de análisis circunstanciado.

Conservamos el orden tradicional de distribución del material. Por eso consagramos el § 3 a los ángulos. En este parágrafo las demostraciones de los teoremas son sencillas y naturales. Se basan en los axiomas de la medición y de la construcción de los ángulos.

El parágrafo siguiente se dedica a la igualdad de los triángulos. Su contenido es corriente y las demostraciones sencillas e irreprochables. En términos generales, las demostraciones empleadas no contienen, en cuanto a la idea, nada nuevo. Son bien conocidas. Sin embargo, gracias a la formulación precisa de los planteamientos de arranque, logramos con unas cuantas pinceladas hacer estas demostraciones absolutamente irreprochables. Estas «pinceladas» se refieren en la mayoría de los casos a las propiedades de la posición recíproca de los puntos en la recta y de los rayos en el haz. Dentro de las matemáticas en general, y de las matemáticas modernas en particular, la relación de orden desempeña tanto papel como la relación de equivalencia. Por eso, también desde este punto de vista es conveniente desarrollar este concepto en las figuras geométricas sencillas.

En el § 5 y el § 6 son tratadas las cuestiones tradicionales: propiedad del ángulo exterior del triángulo, relación entre los lados del triángulo y los ángulos opuestos, desigualdad triangular, la perpendicular y la oblicua. Termina cada parágrafo con numerosas preguntas de repaso y ejercicios. Las preguntas de repaso comprenden la definición de los conceptos y la demostración de los teoremas así como de los corolarios que de ellos se desprenden. También abarcan cuestiones no tan esenciales del curso. Las preguntas de repaso determinan exactamente el volumen de los conocimientos necesarios para el alumno y son medio de autocontrol.

El parágrafo siguiente está dedicado a las construcciones geométricas. Analiza los principales problemas de construcción utilizando el compás y la regla y explica el método de los lugares geométricos. Debe decirse que en el actual curso escolar de Geometría no se presta al tema de las construcciones geométricas tanta importancia como en el pasado. Se comprende: las construcciones geométricas ofrecen interés, principalmente, para el desarrollo de las búsquedas de solución y el entrenamiento en las demostraciones.

Pero las construcciones geométricas no son el único medio de lograr este propósito.

Los siete primeros párrafos de este libro podrían ser abarcados bajo el título de Geometría absoluta. En ellos no se utiliza el axioma de las paralelas. Queda sentado que el empleo del axioma de las paralelas no ofrece ventajas palpables en la exposición de esta parte. Si se toma en consideración que la Planimetría está calculada para tres años de enseñanza, esta parte del curso se puede recomendar para el primer año. En el segundo año de enseñanza incluimos la teoría de las paralelas y los temas colaterales inmediatos (§§ 8—12).

El párrafo octavo del libro está dedicado a la teoría de las paralelas. Comienza con la demostración de los criterios de paralelismo. Alterando la tradición, nos limitamos a dos pares de ángulos de dos paralelas con una secante: los correspondientes internos y los alternos internos. En efecto, estos dos pares de ángulos bastan plenamente para exponer la teoría de las paralelas y de sus aplicaciones. Otros pares de ángulos, como son los correspondientes externos, los alternos externos y demás, no se utilizan prácticamente. En cambio, los ángulos correspondientes internos y alternos son determinados por nosotros rigurosamente, y no sólo por medio de figuras como se hace a menudo, y su empleo en las demostraciones se argumenta a fondo. El § 9 contiene el material tradicional sobre los cuadriláteros.

En el § 10 introducimos el concepto del movimiento que, en nuestra exposición, es concepto derivado. Se define como una aplicación que conserva la distancia. Son demostradas las propiedades principales del movimiento y estudiados los casos particulares de los movimientos: simetría respecto a una recta, simetría respecto a un punto, traslación paralela y rotación. Conviene señalar que el concepto del movimiento geométrico se asocia naturalmente con un proceso. La manera de exponer la Geometría en la escuela, empleando el concepto del movimiento desde el comienzo, da lugar a embrollitos y confusiones. Según nuestro método, las propiedades del movimiento netamente formuladas son primero demostradas y luego se aplican.

En el párrafo siguiente se estudia la circunferencia. El tema central de este párrafo es el problema de los ángulos en la circunferencia. Se define con precisión los conceptos del arco de circunferencia, del ángulo central que

le corresponde y de la medida del ángulo central. Se introduce el concepto del ángulo inscrito y se demuestran los teoremas correspondientes de los ángulos inscritos.

El § 12 contiene el tema final del segundo año de enseñanza. En él se expone, ante todo, la cuestión de la semejanza de los triángulos que, como se sabe, no se lleva nunca hasta el fin en la exposición escolar. En efecto, su solución completa exige el empleo del axioma de la continuidad. Por eso la demostración de la semejanza de los triángulos en el caso principal suele detenerse a mitad del camino. En nuestra exposición el axioma de la continuidad actúa a través del axioma de la medición. Concluimos la demostración del criterio principal de la semejanza con una sencilla observación que se desprende del axioma de la medición.

En el curso escolar de la Geometría suele quedar abierta la cuestión de la intersección de la recta con la circunferencia y de la intersección de dos circunferencias. Siempre por la misma causa: la cuestión tropieza con el axioma de la continuidad. Nosotros damos una solución sencilla y exhaustiva de este problema. Y esto se logra, en fin de cuentas, también gracias a los axiomas de la medición.

La tercera parte del curso arranca con el teorema de Pitágoras y sus corolarios: relaciones métricas en un triángulo oblicuángulo, relación entre las diagonales y los lados de un paralelogramo, etc. Además de estas cuestiones tradicionales, se da una demostración sencilla del importante teorema de la existencia del triángulo de lados dados previo cumplimiento de ciertas condiciones necesarias. Este teorema da solución exhaustiva al problema de la posición recíproca de dos circunferencias en dependencia de sus radios y de la distancia entre los centros.

En el § 14 se introducen las funciones trigonométricas de los ángulos. Nos limitamos a tres funciones: seno, coseno y tangente. Sabido es que las tres funciones restantes—secante, cosecante y cotangente—no se utilizan prácticamente. El material de este parágrafo es corriente: fórmulas de reducción, relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo rectángulo, teorema del coseno y teorema de los senos. El parágrafo que le sigue está consagrado a los polígonos convexos con problemas tradicionales acerca de la suma de los ángulos internos y externos, de la relación entre la longitud de una quebrada convexa y de una quebrada abarcante y, en fin, a los polígonos regulares.

En el curso escolar ofrece ciertas dificultades la exposición del problema del área de las figuras. Nosotros solucionamos este problema de la siguiente manera. Al principio, el concepto del área se introduce, argumentando a fondo sus propiedades, al estudiar un problema práctico concreto. Luego se explica que estas propiedades determinan el área únicamente. En fin, se demuestra que es correcta la definición del área con esas propiedades. Esta última cuestión puede considerarse facultativa en la enseñanza escolar.

Finalmente, el último tema de la Planimetría: longitud de la circunferencia y área del círculo. En cualquier variante esta cuestión ofrece grandes dificultades. Una es el problema de la existencia, aunque en los grados superiores se vence fácilmente. Hemos unificado las definiciones de los conceptos principales relacionados con la medición de los arcos y las áreas para la circunferencia y el círculo, lo que debe simplificar la exposición. A parte de las cuestiones de la existencia, que han quedado abiertas, otras cuestiones están resueltas con plenitud y precisión suficientes.

La segunda parte del libro, la Estereometría, arranca con el enunciado de los tres axiomas del espacio y la deducción de sus corolarios directos (§ 18). Los axiomas aceptados por nosotros suponen cierta modificación de los axiomas de enunciado tradicional y concuerdan bien con los axiomas del plano. El párrafo siguiente trata de las cuestiones del paralelismo de las rectas y los planos en el espacio con teoremas y demostraciones tradicionales.

El extenso § 20 está dedicado a diferentes cuestiones de la perpendicularidad de las rectas y los planos. Los párrafos 18, 19 y 20 constituyen la base de la segunda parte del curso. Hay un párrafo especial (el 21) para las cuestiones relacionadas con el concepto de ángulo entre rectas y planos. Estos conceptos son definidos con claridad. Quedan demostrados los correspondientes teoremas acerca de los ángulos.

El párrafo 22 acerca de los ángulos diedros, triédros y poliedros contiene, además de las cuestiones tradicionales del curso escolar, la demostración del teorema de los cosenos y del teorema de los senos para el ángulo triédrico. Suponemos que estos teoremas, importantes y muy usuales, deben darse en el curso escolar. Sabido es que la solución de los problemas de la posición recíproca de las rectas y los planos en el espacio, y en particular la solución de los problemas de

prismas y pirámides, se reduce en su parte esencial a la demostración de estos teoremas generales en distintos casos particulares.

El párrafo siguiente (23) está dedicado a las transformaciones en el espacio (movimiento, simetría, semejanza y demás). En este párrafo, la exposición repite deliberadamente, y en ciertos casos textualmente, el párrafo acerca de las transformaciones en el plano. Para el alumno adelantado, este párrafo será un agradable repaso de hechos de Planimetría que ya conoce.

El tema de los poliedros (§ 24) comienza con la definición del concepto del cuerpo geométrico. Este concepto se introduce de manera rigurosa y, al mismo tiempo, muy asequible. La rigurosa introducción del concepto del cuerpo geométrico permite llevar más adelante ese rigor a la exposición del problema del volumen y del área del cuerpo geométrico. Los teoremas de prismas y pirámides dados en este párrafo son tradicionales. El tema de los poliedros regulares se expone de manera más circunstanciada que suele hacerse en el curso escolar.

El cuarto año de estudio de la Geometría termina aquí con el § 25 sobre los rudimentos de la delineación proyectiva. Este párrafo contiene todas las tareas principales de la posición recíproca de los puntos, las rectas y los planos al representarlos en el diseño.

En el § 26, partiendo de la tarea práctica de comparar la capacidad de dos recipientes, se introduce el concepto del volumen del cuerpo y se dilucidan sus propiedades esenciales. Por el método corriente, basándose en esas propiedades, se encuentran los volúmenes de los cuerpos elementales: prismas y pirámides. En fin, se demuestra la justeza de la definición formal del volumen de un poliedro como suma de los volúmenes de las pirámides que lo constituyen. Este último punto puede recomendarse para estudio facultativo. La cuestión del volumen de los cuerpos está expuesta de manera deliberadamente próxima a la cuestión del área de las figuras planas y, para el alumno adelantado, también será un repaso agradable.

Las cuestiones tradicionales relativas a los cuerpos de revolución —cilindro, cono y esfera— están expuestas en el § 27. La medición de los volúmenes y las áreas de estos cuerpos no está incluida aquí, sino que se le consagra párrafos especiales.

El § 28 ofrece la definición del volumen para cualquier cuerpo. Partiendo de los volúmenes de los cuerpos simples (divisibles en un número finito de pirámides triangulares), el volumen de cualquier cuerpo se define, en esencia, como la cota inferior máxima de los volúmenes de los cuerpos simples que lo contienen. Arrancando de esta definición general se encuentran los volúmenes de todos los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes. Se demuestra la aditividad del volumen para los cuerpos limitados por superficies simples (plana, cilíndrica, cónica y esférica).

El § 29 trata del área de una superficie. Partiendo de la tarea práctica de la cantidad de pintura necesaria para recubrir dos superficies, llegamos a la definición geométrica natural del concepto del área (según Minkowski). Arrancando de esta definición se encuentra, por un método standard, el área de las superficies de los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes.

A. V. Pogorélov

§ 1. PROPIEDADES FUNDAMENTALES
DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS
ELEMENTALES

Geometría, palabra griega que significa medición de la tierra, es la ciencia que trata de las propiedades de las figuras geométricas empleadas para la medición de extensiones.

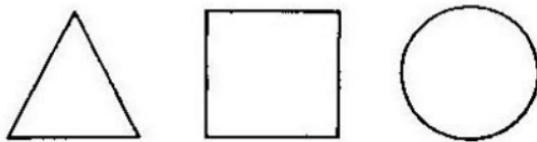


Fig. 1

El triángulo, el cuadrado y la circunferencia (fig. 1) son ejemplos de figuras geométricas.

Las figuras geométricas son muy diversas. Una parte de una figura geométrica cualquiera es, a su vez, una figura

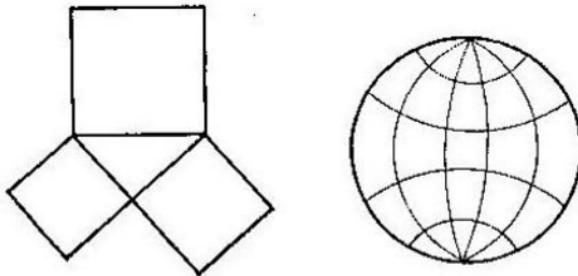


Fig. 2

geométrica. La unión de varias figuras geométricas es igualmente una figura geométrica. En la fig. 2 vemos que la figura de la izquierda consta de un triángulo y tres cuadrados, mientras que la figura de la derecha está formada por una circunferencia y partes de circunferencia. Se considera que toda figura geométrica está compuesta por puntos.

La parte de la Geometría que trata de las figuras en el plano se llama *Planimetría*. Por ella comenzaremos el estudio de la Geometría.

Punto y recta. Las figuras geométricas elementales en el plano son el *punto* y la *recta*. Los puntos y las rectas se marcan en el dibujo con un lápiz bien afilado. Para que resulte más neto, el punto se representa con un círculo pequeño. Para designar los puntos se emplean letras latinas mayúsculas: *A*, *B*, *C*, *D*, Las rectas se designan por letras latinas minúsculas: *a*, *b*, *c*, *d*, ... En la fig. 3 puede verse el punto *A* y la recta *a*.

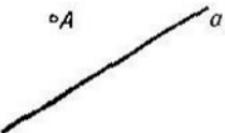


Fig. 3

Propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano. En la fig. 4 están representadas las rectas *a* y *b* y los puntos *A*, *B* y *C*. Los puntos *A* y *C* se hallan

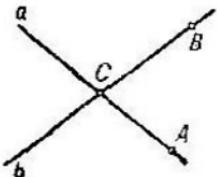


Fig. 4

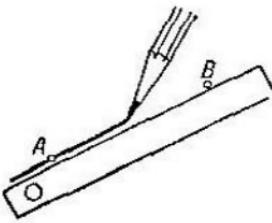


Fig. 5

en la recta *a*. Podemos también decir que los puntos *A* y *C* pertenecen a la recta *a* o que la recta *a* pasa por los puntos *A* y *C*.

El punto *B* se halla en la recta *b* pero no se halla en la recta *a*. El punto *C* se halla en la recta *a* y en la recta *b*. Las rectas *a* y *b* se cortan en el punto *C*. El punto *C* es el *punto de intersección de las rectas a y b*.

Para dibujar las rectas se emplea la regla. En la fig. 5 puede verse cómo se construye con la regla la recta que pasa por dos puntos *A* y *B*.

Las propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano son las dos propiedades siguientes:

I₁. *Cualquiera que sea la recta, existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenecen a la recta.*

I₂. Cualesquiera que sean dos puntos, existe una recta que pasa por estos puntos, y sólo una.

Una recta puede ser designada con dos puntos que se hallan en ésta. Por ejemplo, la recta a de la fig. 4 se puede designar por AC y la recta b se puede designar por BC .

Ya que por dos puntos se puede trazar solamente una recta, dos rectas distintas no se cortan o se cortan en un punto único. Si hubiese dos puntos de intersección de estas rectas, resultaría que por estos puntos pasan dos rectas diferentes. Pero esto es imposible. Luego, se obtiene la propiedad siguiente:

1.1. Dos rectas diferentes no se cortan o se cortan en un punto único.

Propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y en el plano. En la fig. 6 puede verse la recta a y tres puntos A , B y C situados en la misma. El punto B se encuentra entre los puntos A y C . Refiriéndonos

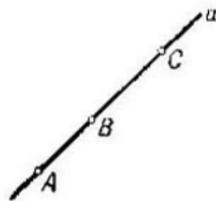


Fig. 6

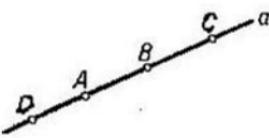


Fig. 7

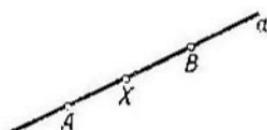


Fig. 8

a esta posición de los puntos A , B y C , diremos que los puntos A y C se hallan a *distintos lados* del punto B . También se puede decir que el punto B separa los puntos A y C . Los puntos A y B se hallan a *un mismo lado* del punto C y no están separados por el punto C . Los puntos B y C están a *un mismo lado* del punto A .

Fíjense en la fig. 7. El punto A divide la recta a en dos partes llamadas *semirrectas*. Los puntos B y C se hallan en una misma semirrecta. El punto A no los separa. Los puntos B y D se hallan en diferentes semirrectas. El punto A los separa. El punto A que divide la recta a en semirrectas se llama *punto de origen* de las semirrectas. En cuanto a las semirrectas, se las denomina *complementarias*. Una semirrecta también es llamada *rayo*.

Las semirrectas se designan con letras latinas minúsculas. Una semirrecta se puede designar también con dos puntos:

el punto de origen y otro punto suyo cualquiera. Con la particularidad de que el punto de origen siempre se coloca en primer lugar. Por ejemplo, el punto A divide la recta a (fig. 7) en dos semirrectas: AB y AD .

Supongamos que los puntos A y B se hallan en la recta a (fig. 8). Se llama *segmento AB* a la parte de la recta a cuyos puntos son todos los puntos X de la recta a situados entre A y B . Los puntos A y B se denominan *extremos del segmento*.

1.2. *El segmento AB es una parte de la semirrecta AB, o sea, todo punto del segmento AB es un punto de la semirrecta AB.*

Efectivamente, tomemos un punto X cualquiera en el segmento AB (fig. 8). Se encuentra entre los puntos A y B .

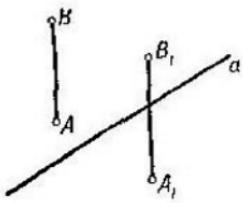


Fig. 9

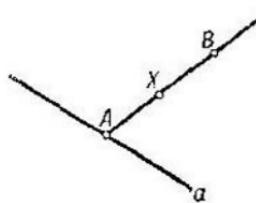


Fig. 10

Luego, el punto A no se encuentra entre los puntos X y B ya que sólo uno de los tres puntos A , X y B se halla entre los otros dos. Por consiguiente, el punto A no separa los puntos X y B . Esto significa que el punto X pertenece a la semirrecta AB y no a su complemento.

En la fig. 9 la recta a divide el plano en dos *semiplanos*. Los puntos A y B se hallan en un mismo semiplano. El segmento AB no corta la recta a . Los puntos A_1 y B_1 se hallan en distintos semiplanos. El segmento A_1B_1 corta la recta a . Designaremos los semiplanos con letras griegas α , β , γ , ...

Tracemos por el punto de origen A de la semirrecta AB una recta a que no pase por el punto B (fig. 10). La recta a y la recta AB se cortan en el punto A . No tienen otros puntos de intersección. Tomemos en la semirrecta AB un punto X cualquiera. El segmento BX no corta la recta a .

En efecto, el segmento BX podría cortar la recta a solamente en el punto A . Pero el punto A no pertenece al segmento BX ya que no separa los puntos B y X .

Puesto que el segmento BX no corta la recta a , resulta que el punto X se halla, respecto a la recta a , en el mismo semiplano que el punto B . Así, obtenemos la propiedad siguiente:

1.3. Si por el punto de origen A de una semirrecta AB se traza una recta a que no pase por el punto B , toda la semirrecta AB estará en un semiplano respecto a la recta a .

Ya que el segmento AB es una parte de la semirrecta AB , obtenemos la siguiente propiedad:

1.4. Si por el extremo A del segmento AB se traza una recta a que no pase por el punto B , todo el segmento AB quedará situado en un semiplano respecto a la recta a ; a saber: estará situado en el semiplano donde se encuentra el extremo B .

Las propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en una recta y en el plano son las tres propiedades siguientes:

II₁. De tres puntos de una recta, uno de ellos, y sólo uno, se halla entre los otros dos.

II₂. Un punto situado en una recta la divide en dos semirrectas. Los puntos de una semirrecta no están separados por el punto de división. Los puntos de diferentes semirrectas están separados por este punto.

II₃. Toda recta divide el plano en dos semiplanos. Si los extremos de un segmento cualquiera pertenecen a un semiplano, el segmento no corta la recta. Si los extremos del segmento pertenecen a diferentes semiplanos, el segmento corta la recta.

Propiedades fundamentales de la medición de segmentos y ángulos. Para medir los segmentos se emplean diversos instrumentos de medición. El instrumento más sencillo es la regla graduada. En la fig. 11 el segmento AB es igual



Fig. 11

a 10 cm, el segmento AC es igual a 6 cm y el segmento BC es igual a 4 cm. La longitud del segmento AB es igual a la suma de las longitudes de los segmentos AC y BC .

Las propiedades fundamentales de la medición de segmentos son las siguientes:

III₁. Todo segmento tiene una longitud determinada mayor que cero.

III₂. Si el punto C de la recta AB se halla entre los puntos A y B, la longitud del segmento AB es igual a la suma de las longitudes de los segmentos AC y BC.

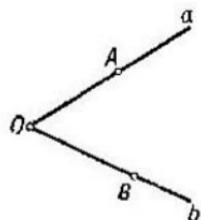


Fig. 12

Se llama *ángulo* a una figura formada por dos semirrectas distintas con un punto de origen común. Este punto se denomina *vértice del ángulo* y las semirrectas reciben el nombre de *lados* del ángulo. Si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de una misma recta, el ángulo se llama *llano*.

En la fig. 12 puede verse un ángulo de vértice O y de lados a y b. Para designar un ángulo se señala su vértice, sus lados o tres puntos: el vértice y dos puntos en los lados del ángulo. La palabra «ángulo» suele sustituirse por el símbolo \angle . El ángulo de

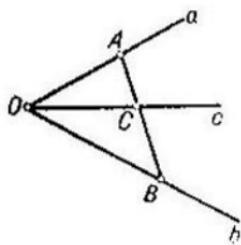


Fig. 13

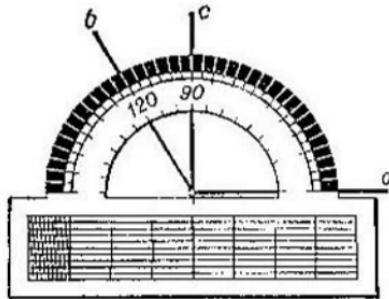


Fig. 14

la fig. 12 puede ser designado de tres formas: $\angle O$, $\angle (ab)$ y $\angle AOB$. En el tercer caso el vértice se coloca en el medio.

Fíjense en la fig. 13. Diremos que el rayo c que parte del vértice O del ángulo (ab) pasa *entre* sus lados si corta un segmento AB cualquiera cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo. En el caso del ángulo llano, aceptamos que *cualquier rayo* que arranca de su vértice y no coincide con sus lados pasa entre los lados del ángulo.

Los ángulos se miden en grados mediante el transportador. El ángulo (ab) de la fig. 14 es igual a 120° . La semirrecta c pasa entre los lados del ángulo (ab). El ángulo (ac) es igual a 90° y el ángulo (bc) es igual a 30° . El ángulo (ab) es igual a la suma de los ángulos (ac) y (bc).

Las propiedades fundamentales de la medición de ángulos son las siguientes:

III₃. *Todo ángulo tiene una medida en grados determinada mayor que cero. El ángulo llano es igual a 180° .*

III₄. *Si un rayo c parte del vértice de un ángulo (ab) y pasa entre sus lados, el ángulo (ab) es igual a la suma de los ángulos (ac) y (bc).*

Propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos. Fíjense en la fig. 15. Muestra cómo se construye, valiéndose de una regla, en la semirrecta a de punto de origen A un segmento de 3 cm de longitud.

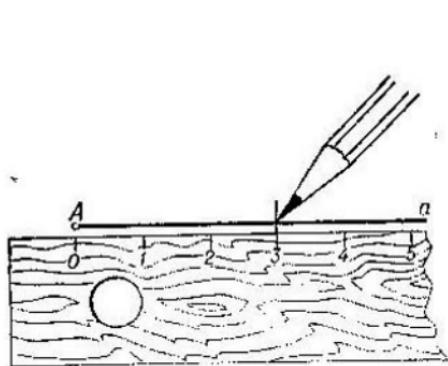


Fig. 15

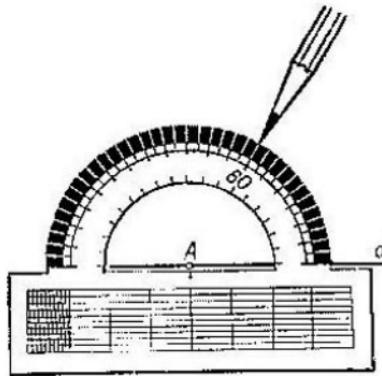


Fig. 16

Fíjense en la fig. 16. La semirrecta a , prolongada más allá de su punto de origen A , divide el plano en dos semiplanos.

La figura muestra cómo se construye, a partir de la semirrecta a y en el semiplano superior, un ángulo (de 60°) mediante el transportador.

Las propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos son las propiedades siguientes:

IV₁. *Cualquiera que sea el número positivo m , en una semirrecta se puede construir a partir de su punto de origen un segmento de longitud m (cm) y sólo uno.*

IV₂. Cualquiera que sea el número positivo n menor que 180, se puede construir, a partir de una semirrecta dada y en el semiplano dado, un ángulo de n grados, y sólo uno.

Construyamos, a partir del punto de origen A de la semirrecta AB , un segmento AC menor que AB . ¿Cuál de los puntos A , B y C se halla entre los otros dos? El punto A no puede encontrarse entre B y C ya que B y C se hallan en la misma semirrecta cuyo punto de origen es A . Si el punto B estuviese entre los puntos A y C , tendríamos, según la propiedad de la medición de segmentos, $AB + BC = AC$, o sea, $AB < AC$. Pero, por hipótesis, es $AC < AB$. Luego, el punto B tampoco se encuentra entre A y C . Puesto que uno de los puntos se halla necesariamente entre los otros dos, este punto puede ser únicamente el punto C . Así se obtiene la propiedad siguiente:

1.5. Si en una semirrecta AB se construye, a partir de su punto de origen A , un segmento AC menor que AB , estará C entre A y B .

Primer criterio de la igualdad de los triángulos. Un triángulo es una figura de tres puntos no pertenecientes a una

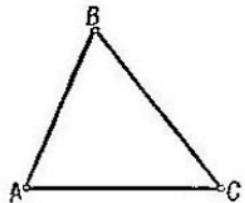


Fig. 17

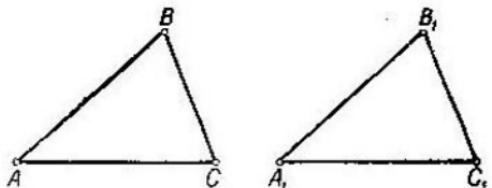


Fig. 18

misma recta y de tres segmentos que unen estos puntos de dos en dos. Los puntos se llaman *vértices* y los segmentos, *lados* del triángulo. En la fig. 17 puede observarse un triángulo de vértices A , B y C y de lados AB , BC y AC . El triángulo se designa por sus vértices. A veces en lugar de la palabra «triángulo» se emplea el símbolo Δ . Por ejemplo, el triángulo de la figura 17 se designa así: ΔABC .

Dos segmentos se denominan *iguales* si tienen la misma longitud. Dos ángulos se llaman *iguales* si tienen la misma medida angular expresada en grados. Dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se llaman *iguales* si se tiene $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ y $AC =$

$= A_1C_1$. En la fig. 18 puede verse dos triángulos iguales ABC y $A_1B_1C_1$.

El primer criterio de la igualdad de los triángulos consiste en lo siguiente:

V. Si en dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$ y $AC = A_1C_1$, los triángulos son iguales, es decir, también $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ y $BC = B_1C_1$.

Propiedad fundamental de las paralelas. En el plano se llama *paralelas* a dos rectas que no se cortan, con la particularidad de que las rectas se consideran prolongadas indefinidamente en ambas direcciones.

La fig. 19 muestra cómo se puede, empleando la escuadra y la regla, trazar por el punto B la recta b paralela a la recta a .

La propiedad fundamental de las paralelas consiste en lo siguiente:

VI. Por todo punto B que no se halla en la recta a se puede trazar en el plano no más de una paralela a la recta a .

Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es Geometría?

2. Dígame ejemplos de figuras geométricas.

3. Señálense las figuras geométricas elementales en el plano.

4. ¿Qué es Planimetría?

5. ¿Cómo se representan los puntos y las rectas en el dibujo?

6. ¿Qué instrumento de dibujo se emplea para trazar rectas?

7. ¿Cómo se designan los puntos y las rectas?

8. ¿Qué puntos de la fig. 4 se hallan en la recta a y qué puntos se hallan en la recta b ? ¿En qué punto se cortan las rectas a y b ?

9. ¿Cómo se traza con la regla la recta que pasa por dos puntos? Tómense dos puntos en una hoja de papel y trácese por ellos la recta.

10. Enunciense las propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano.

11. ¿Por qué dos rectas diferentes no pueden tener dos puntos de intersección?

12. ¿Cuál de los tres puntos de la fig. 6 separa los otros dos? ¿En qué posición están los puntos B y C respecto al punto A ?

13. Trácese una recta y tómense en ella cuatro puntos A , B , C y D de modo que el punto C separe los puntos A y D y el punto D separe los puntos B y C .

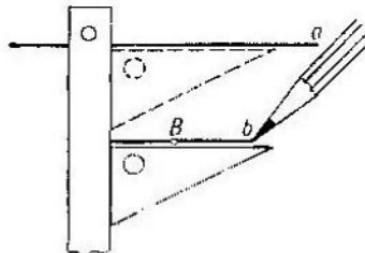


Fig. 19

14. ¿Qué propiedades se observan al dividir una recta en dos semirrectas? ¿Cómo se designan las semirrectas?
15. ¿Qué es segmento de extremos A y B ?
16. ¿Cuál de los tres puntos A , B y C se halla entre los otros dos si B es un punto del segmento AC ?
17. ¿Por qué todo punto del segmento AB pertenece a la semirrecta AB ?
18. ¿Qué propiedades se observan al dividir el plano en dos semiplanos?
19. ¿Cuál es la posición de la semirrecta AB respecto a una recta a que pasa por el punto A ?
20. Enúnciese las propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y el plano.
21. ¿Qué instrumento se emplea para medir los segmentos?
22. Trácese una recta. Tómense en ella tres puntos A , B y C de modo que el punto B esté entre los puntos A y C . Mídanse los segmentos AB , AC y BC . Compárese la longitud del segmento AC con la suma de las longitudes de los segmentos AB y BC .
23. Enúnciese las propiedades fundamentales de la medición de los segmentos.
24. ¿Qué figura se denomina ángulo?
25. ¿Qué ángulo se denomina llano?
26. ¿Cómo se designa el ángulo?
27. Explíquese el sentido de la expresión: una semirrecta pasa entre los lados de un ángulo.
28. ¿Qué unidades y qué instrumento se emplean para medir los ángulos? ¿Cómo se realiza la medición?
29. Constrúyase un ángulo (ab) cualquiera y trácese en el interior de este ángulo un rayo c a partir de su vértice. Mídanse los ángulos (ab), (ac) y (bc). Compárese el ángulo (ab) y la suma de los ángulos (ac) y (bc).
30. Enúnciese las propiedades fundamentales de la medición de los ángulos.
31. Tómese un punto cualquiera. Trácese a partir de él una semirrecta. Constrúyase en la semirrecta desde su punto de origen un segmento igual a 5 cm.
32. Trácese una semirrecta y constrúyase a partir de ella un ángulo igual a 45° .
33. Enúnciese las propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos.
34. En la semirrecta AB se ha construido desde su punto de origen un segmento AC menor que el segmento AB . ¿Cuál de los tres puntos A , B y C se halla entre los otros dos? Arguméntese la respuesta.
35. ¿Qué es triángulo?
36. Denomínense los vértices y los lados del triángulo de la fig. 17.
37. ¿Qué segmentos son llamados iguales?
38. ¿Qué ángulos son llamados iguales?
39. ¿Qué significado tiene la expresión: el triángulo ABC es igual al triángulo $A_1B_1C_1$?
40. Enúnciese el primer criterio de la igualdad de los triángulos.
41. ¿Qué rectas se denominan paralelas?
42. Trácese una recta cualquiera. Tómese un punto que no se halle en esta recta. Trácese por este punto la recta paralela.
43. Enúnciese la propiedad fundamental de las paralelas.

§ 2. DE CÓMO SE ESTUDIAN EN LA GEOMETRÍA LAS PROPIEDADES DE LAS FIGURAS

Axiomas, teoremas y demostraciones. La validez de una afirmación sobre la propiedad de una u otra figura geométrica se establece por medio de un razonamiento. Este razonamiento se llama *demonstración*. La proposición que enuncia una propiedad de una figura geométrica se llama *teorema*. Veamos un ejemplo.

TEOREMA 2.1. *Si una recta a , que no pasa por ninguno de los vértices de un triángulo ABC , corta su lado AB , también corta uno, y sólo uno, de los otros lados, BC o AC .*

DEMOSTRACIÓN (fig. 20). La recta a divide el plano en dos semiplanos. Los puntos A y B se hallan en diferentes semiplanos ya que el segmento AB y la recta a se cortan. El

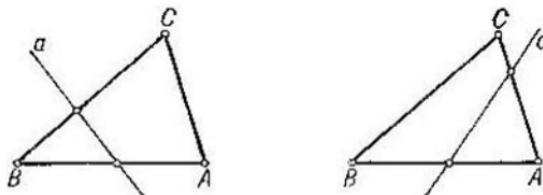


Fig. 20

punto C está en uno de estos semiplanos. Si el punto C está en el mismo semiplano que el punto A , el segmento AC y la recta a no se cortan mientras que el segmento BC corta esta recta (fig. 20, a la izquierda). Si el punto C está en el mismo semiplano que el punto B , el segmento AC corta la recta a y el segmento BC no la corta (fig. 20, a la derecha). En ambos casos la recta a corta uno de los segmentos AC o BC y sólo uno. Esta es toda la demostración.

Las propiedades fundamentales I—VI de las figuras elementales enunciadas en el párrafo anterior son propiedades de partida para la demostración de otras. Estas propiedades no se demuestran y se llaman *axiomas*.

Los axiomas definen implícitamente los conceptos geométricos *fundamentales*. Son los conceptos expresados con las palabras «punto», «recta», «pertener» (para puntos y rectas), «hallarse entre» (para puntos en una recta) y «medida» (longitud de segmentos y medida gradual de ángulos). Los

demás conceptos geométricos son derivados. Se definen explícitamente partiendo de los conceptos fundamentales. Tales son, por ejemplo, los conceptos de segmento, ángulo, triángulo, etc.

En la demostración de los teoremas se pueden emplear las propiedades fundamentales de las figuras elementales, o sea, los axiomas, así como las propiedades ya demostradas, es decir, los teoremas demostrados. No se puede emplear ninguna otra propiedad de las figuras aun cuando parezca evidente.

En la demostración de los teoremas se permite emplear el dibujo para la representación geométrica de todo cuanto expresamos con palabras. Las propiedades de las figuras que evidencia el dibujo no pueden ser utilizadas si no podemos argumentarlas basándonos en los axiomas y en los teoremas demostrados anteriormente. El enunciado de un teorema consta comúnmente de dos partes. La primera trata de lo que está dado. Esta parte se llama *hipótesis* del teorema. La otra trata de lo que debe ser demostrado. Esta parte se llama *tesis* del teorema.

En el § 1, además de las propiedades fundamentales indicadas con cifras romanas, se señalan otras propiedades: 1.1; 1.2; 1.3; 1.4 y 1.5. Estas propiedades han sido obtenidas mediante razonamientos a partir de las propiedades fundamentales, es decir, de los axiomas. Luego, estas propiedades son teoremas.

Posición de los ángulos construidos en un mismo semiplano.

TEOREMA 2.2. Si a partir de una semirrecta a se construyen en un mismo semiplano dos ángulos (ab) y (ac) , el rayo b pasará entre los lados del ángulo (ac) o el rayo c pasará entre los lados del ángulo (ab) .

La hipótesis del teorema consiste en que los ángulos (ab) y (ac) están construidos a partir de la semirrecta a en un mismo semiplano. La tesis del teorema consiste en que el rayo b pasa entre los lados del ángulo (ac) o que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab) .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Indiquemos por a_1 la semirrecta complementaria de a . Los ángulos (a_1b) y (a_1c) son diferentes. Luego, uno es menor que otro. Sea, por ejemplo, el ángulo (a_1b) menor que el ángulo (a_1c) . Tomémos en las semirrectas a , b y a_1 los puntos A , B y A_1 (fig. 21).

La recta que contiene el rayo c corta el lado A_1A del triángulo A_1AB . Por ello, según el teorema 2.1, corta el

lado A_1B o el lado AB . El punto de intersección se halla en el rayo c ya que los segmentos A_1B y AB y el rayo c se encuentran en un mismo semiplano respecto a la recta AA_1 . Es decir, el rayo c corta el segmento A_1B o el segmento AB .

Si el rayo c cortase el segmento A_1B , pasaría entre los lados del ángulo (a_1b) . Según el axioma III₄ de la medición de los ángulos, tendríamos $(a_1c) + (cb) = (a_1b)$ de modo que el ángulo (a_1c) sería menor que el ángulo (a_1b) . Pero esto es imposible ya que el ángulo (a_1b) es menor que el ángulo (a_1c) . Por lo tanto, el rayo c no corta el segmento A_1B y, por consiguiente, corta el segmento AB . Pero esto significa al mismo tiempo que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab) .

Queda demostrado el teorema.

Separación de los lados de un ángulo por una recta.
TEOREMA 2.3. Si el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab) , la recta que contiene el rayo c separa los lados del ángulos o sea, las semirrectas a y b se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo c .

La hipótesis del teorema consiste en que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab) . La tesis del teorema consiste en que los lados del ángulo (ab) se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo c .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Como quiera que el rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab) , corta un segmento AB

cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo (fig. 22). Puesto que el segmento AB corta la recta que contiene el rayo c , los puntos A y B están en diferentes semiplanos respecto a esta recta.

Según el teorema 1.3, la semirrecta a se halla en un semiplano respecto a la recta que contiene el rayo c ; a saber, en el semiplano en el que se halla el punto A . Según

el mismo teorema, la semirrecta b se halla en el semiplano al que pertenece el punto B . Puesto que los puntos A y B

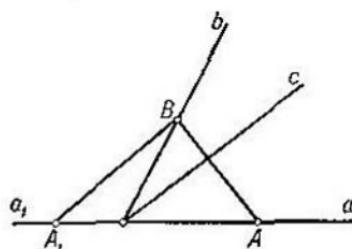


Fig. 21

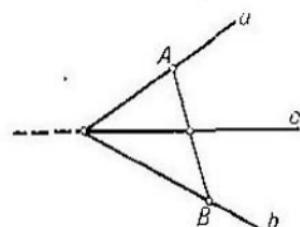


Fig. 22

se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo c , resulta que las semirrectas a y b se hallan en distintos semiplanos. Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es demostración geométrica?
2. ¿Qué es teorema?
3. Dese un ejemplo de teorema y de su demostración.
4. ¿Qué es axioma?
5. Enúnciese los axiomas de la pertenencia de los puntos y las rectas.
6. Enúnciese los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos.
7. Enúnciese los axiomas de la construcción de los segmentos y los ángulos.
8. Citense los conceptos geométricos fundamentales.
9. Dese ejemplos de conceptos geométricos derivados y dese su definición partiendo de los conceptos fundamentales.
10. ¿Qué propiedades de las figuras geométricas se permite emplear para demostrar un teorema?
11. ¿Cómo se emplea el dibujo en la demostración de un teorema?
12. ¿Cuáles son las dos partes que componen el enunciado de un teorema? ¿Cómo se denominan?
13. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre la posición de los ángulos construidos en un mismo semiplano (teorema 2.2).
14. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre la separación de los lados de un ángulo por una recta (teorema 2.3).
15. Demuéstrese los teoremas 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; y 1.5 del § 1.

Ejercicios

16. En el plano se tienen cuatro puntos A_1 , A_2 , A_3 y A_4 y una recta a que no pasa por ninguno de ellos. Los segmentos A_1A_2 y A_3A_4 cortan la recta a y el segmento A_2A_3 no la corta. ¿Corta el segmento A_1A_4 la recta a ? Arguméntese la respuesta.
17. En el plano se tienen cuatro puntos A , B , C y D . Demuéstrese que si los segmentos AB y CD se cortan, los puntos B y D se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AC .
18. Demuéstrese que si un rayo c pasa entre los lados de un ángulo (ab), corta cualquier segmento cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo (ab).
19. Tres puntos A , B y C se hallan en una misma recta. ¿Cuál de estos puntos se encuentra entre los otros dos, si $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm y $BC = 3$ cm? Arguméntese la respuesta.
20. ¿Pueden hallarse tres puntos A , B y C en una misma recta, si $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm y $AC = 7$ cm? Arguméntese la respuesta.
21. Tres puntos A , B y C se hallan en una misma recta. El segmento AB es igual a 4 cm y el segmento BC es igual a 3 cm. ¿A qué es igual el segmento AC si el punto B se halla entre A y C ? ¿A qué es igual el segmento AC , si el punto A se halla entre B y C ? Arguméntense las respuestas.

22. Cuatro puntos A , B , C y D se hallan en una misma recta. El punto B se halla entre A y C y el punto C entre B y D . Demuéstrese que el punto C se halla entre A y D . (Sugerencia. Las semirrectas CA y CD son complementarias. El punto B se halla en la semirrecta CA .)

§ 3. ANGULOS

Angulos adyacentes. Dos ángulos se llaman *adyacentes* si tienen un lado común y sus otros lados son semirrectas complementarias. Los ángulos (a_1b) y (a_2b) de la fig. 23 son adyacentes.

Sea C un punto en la recta AB situado entre los puntos A y B y sea D un punto que no se halla en la recta AB (fig. 24).

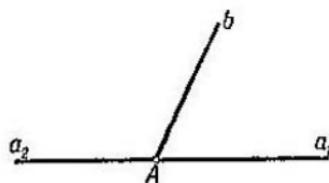


Fig. 23

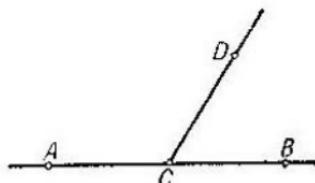


Fig. 24

Los ángulos BCD y ACD son entonces adyacentes. Tienen el lado CD común. Los lados CA y CB son semirrectas complementarias de la recta AB ya que los puntos A y B de estas semirrectas están separados por el punto de origen C .

TEOREMA 3.1. *La suma de ángulos adyacentes es igual a 180° .*

DEMOSTRACIÓN. Sean (a_1b) y (a_2b) los ángulos adyacentes dados (fig. 23). El rayo b pasa entre los lados a_1 y a_2 del ángulo llano. De aquí resulta, según el axioma III_4 , que la suma de los ángulos (a_1b) y (a_2b) es igual al ángulo llano, es decir, a 180° . Queda demostrado el teorema.

Del teorema 3.1 se deduce que *si dos ángulos son iguales, también son iguales sus ángulos adyacentes*.

Angulos verticales. Dos ángulos se llaman *verticales* si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de los lados del otro. Los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2) de la fig. 25 son ángulos verticales.

TEOREMA 3.2. *Los ángulos verticales son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (a_1b_1) y (a_2b_2) los ángulos verticales dados (fig. 25). El ángulo (a_1b_2) es adyacente del ángulo (a_1b_1) y del ángulo (a_2b_2) . De aquí deducimos, según el teorema 3.1, que cada uno de los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2)

complementa el ángulo $(a_1 b_2)$ hasta 180° , es decir, que los ángulos $(a_1 b_1)$ y $(a_2 b_2)$ son iguales. Queda demostrado el teorema.

Ángulo recto. Rectas perpendiculares. Un ángulo igual a 90° se llama *ángulo recto*. Del teorema 3.1 resulta que *el ángulo adyacente de un ángulo recto es un ángulo recto*.

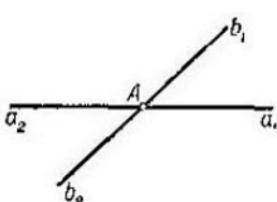


Fig. 25

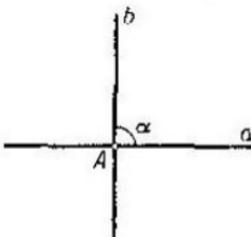


Fig. 26

Sean a y b dos rectas que se cortan (fig. 26). Las semirrectas de estas rectas forman cuatro ángulos. Sea α uno de estos ángulos. Cualquiera de los tres ángulos restantes será entonces adyacente del ángulo α o vertical del ángulo α . De aquí se deduce que si uno de los ángulos es recto, también son rectos los demás ángulos. En este caso decimos que las rectas se cortan en *ángulo recto* y las denominamos *perpendiculares*.

TEOREMA 3.3. *Por todo punto de una recta se puede trazar una recta perpendicular a ella y sólo una.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a la recta dada y sea A un punto en ella. Indiquemos por a_1 una de las semirrectas de la recta a con el punto de origen A (fig. 27).

Construyamos a partir de la semirrecta a_1 el ángulo $(a_1 b_1)$ igual a 90° . La recta que contiene el rayo b_1 será entonces perpendicular a la recta a .

Supongamos que, además de la recta construida, existe otra recta que también pasa por el punto A y es perpendicular a la recta a . Indiquemos por c_1 la semirrecta de esta recta que se halla en el mismo semiplano que el rayo b_1 .

Los ángulos $(a_1 b_1)$ y $(a_1 c_1)$, iguales cada uno a 90° , han sido construidos en un mismo semiplano a partir de la semi-

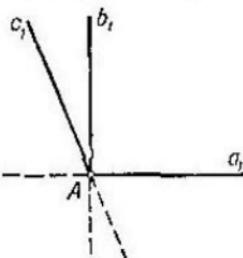


Fig. 27

rrecta a_1 . Pero según el axioma IV₂, a partir de la semirrecta a_1 se puede construir en el semiplano dado sólo un ángulo igual a 90° . Por ello, no puede existir otra recta que pase por el punto A y sea perpendicular a la recta a . Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué ángulos se llaman adyacentes?
2. ¿Por qué son adyacentes los ángulos DCA y DCB de la fig. 24?
3. Demuéstrese que la suma de ángulos adyacentes es igual a 180° .
4. Demuéstrese que si dos ángulos son iguales, sus ángulos adyacentes también son iguales.
5. ¿Qué ángulos se llaman verticales?
6. Demuéstrese que los ángulos verticales son iguales.
7. ¿Qué ángulo se llama recto?
8. Demuéstrese que también es recto el ángulo adyacente de un ángulo recto.
9. Demuéstrese que si en la intersección de dos rectas uno de los ángulos es recto, los tres restantes también lo son.
10. Demuéstrese que por todo punto de una recta se puede trazar una recta perpendicular a ésta.

Ejercicios

11. El ángulo (ab) es igual a 120° y el ángulo (ac) es igual a 150° . ¿A qué es igual el ángulo (bc) si los rayos b y c se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene el rayo a ? ¿A qué es igual el ángulo (bc) si los rayos b y c se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo a ?
12. ¿A qué son iguales los ángulos adyacentes si uno de ellos es dos veces mayor que el otro?
13. ¿A qué son iguales los ángulos adyacentes si uno de ellos es 30° mayor que el otro?
14. Los segmentos AB y CD se cortan en el punto O . Demuéstrese que los ángulos AOC y BOD son verticales.
15. Uno de los ángulos formados por la intersección de dos rectas es igual a 60° . Hállese los demás ángulos.

§ 4. IGUALDAD DE LOS TRIÁNGULOS

Segundo criterio de la igualdad de los triángulos. El axioma V ofrece el primer criterio de la igualdad de los triángulos. El segundo criterio se enuncia en el teorema siguiente:

TEOREMA 4.1. Si los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son tales que $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ y $\angle B = \angle B_1$, los triángulos son iguales. O sea, también $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ y $\angle C = \angle C_1$ (fig. 28).

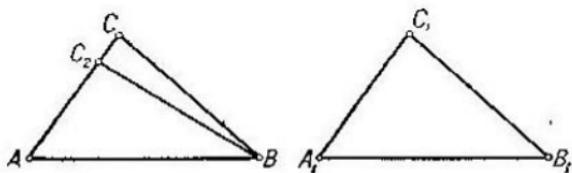


Fig. 28

DEMOSTRACION. Si en estos triángulos $AC = A_1C_1$, son iguales en virtud del primer criterio de la igualdad (axioma V). Supongamos que $AC \neq A_1C_1$. Entonces nos encontramos con que $AC > A_1C_1$ o que $AC < A_1C_1$. Supongamos, para concretar, que $AC > A_1C_1$.

Construyamos en la semirrecta AC el segmento AC_2 igual a A_1C_1 . Según el teorema 1.5, el punto C_2 se halla entre A y C . Los triángulos $A_1B_1C_1$ y ABC_2 son iguales debido al primer criterio de la igualdad ya que $AB = A_1B_1$ y $\angle A = \angle A_1$ por hipótesis del teorema y $AC_2 = A_1C_1$ por construcción. De la igualdad de estos triángulos resulta la igualdad de los ángulos $A_1B_1C_1$ y ABC_2 . Además el ángulo $A_1B_1C_1$ es igual al ángulo ABC por hipótesis del teorema.

El rayo BC_2 pasa entre los rayos BA y BC ya que corta el segmento AC . Por ello, el ángulo ABC_2 es menor que el ángulo ABC . Hemos llegado a una contradicción, pues estos ángulos son iguales. Queda demostrado el teorema.

Triángulo isósceles. Un triángulo se llama *isósceles* si tiene dos lados iguales. Estos lados iguales se llaman *laterales* y el tercer lado se llama *base* del triángulo (fig. 29).

TEOREMA 4.2. En un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales. O sea, si $AC = BC$ en el triángulo ABC , se tiene $\angle A = \angle B$.

DEMOSTRACION El triángulo CAB es igual al triángulo CBA según el primer criterio de la igualdad de los triángulos. Efectivamente, se tiene $CA = CB$, $CB = CA$ y $\angle C = \angle C$.

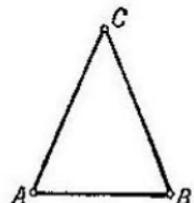


Fig. 29

De la igualdad de los triángulos resulta que $\angle A = \angle B$. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 4.3. Si en un triángulo ABC se tiene $\angle A = \angle B$, el triángulo es isósceles. A saber: $AC = BC$.

DEMOSTRACIÓN. El triángulo ABC es igual al triángulo BAC por el segundo criterio de la igualdad de los triángulos. Efectivamente, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$ y $\angle A = \angle B$. De la igualdad de los triángulos resulta que $AC = BC$. Queda demostrado el teorema.

El teorema 4.3 es el *recíproco* del teorema 4.2. La tesis del teorema 4.2 es la hipótesis del teorema 4.3 mientras que

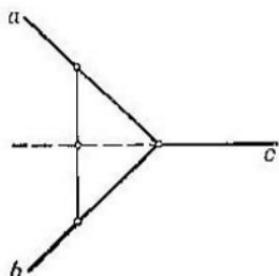


Fig. 30

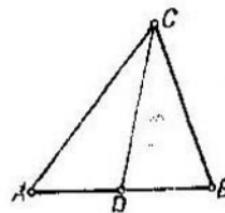


Fig. 31

la hipótesis del teorema 4.2 es la tesis del teorema 4.3. No todo teorema tiene recíproco, es decir, si el teorema es verdadero, el teorema recíproco puede no serlo.

Aclaremos esto con el ejemplo del teorema 2.3. Su teorema recíproco sería el siguiente: si el rayo c parte del vértice de un ángulo (ab) y la recta que lo contiene separa los lados del ángulo, el rayo c pasa entre los lados del ángulo. Esta afirmación no es válida. Fíjense en la fig. 30. La recta que contiene el rayo c separa los lados del ángulo (ab) y, sin embargo, el rayo c no pasa entre los lados del ángulo ya que no corta ningún segmento cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo. El rayo complementario del rayo c pasa entre los lados del ángulo (ab) .

Mediana, bisectriz y altura. Sea ABC un triángulo y sea D un punto de la recta AB (fig. 31). El segmento CD se llama *mediana* del triángulo relativa al lado AB si el punto D es el punto medio del segmento AB , es decir, si $AD = BD$. El segmento CD se llama *bisectriz* del triángulo si la semirecta CD pasa entre los lados CA y CB del triángulo y divide

el ángulo C por la mitad, o sea, si $\angle ACD = \angle BCD$. El segmento CD se llama *altura* del triángulo si las rectas AB y CD son perpendiculares.

TEOREMA 4.4. En el triángulo isósceles la mediana relativa a la base es bisectriz y altura.

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo isósceles de base AB (fig. 32). Sea CD la mediana relativa a la base. Los triángulos CAD y CBD son iguales según el primer criterio de la igualdad de los triángulos. Sus lados AC y BC son iguales por ser el triángulo ABC isósceles. Los ángulos CAD y CBD son iguales por el teorema 4.2. Los lados AD y BD son iguales porque D es el punto medio del segmento AB . De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos: $\angle ACD = \angle BCD$ y $\angle ADC = \angle BDC$.

Por ser iguales los ángulos ACD y BCD , resulta que CD es bisectriz. Como los ángulos ADC y BDC son adyacentes o iguales, resultan rectos y, por ello, CD es altura del triángulo. Queda demostrado el teorema.

Tercer criterio de la igualdad de los triángulos. El tercer criterio de la igualdad de los triángulos se enuncia en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.5. Si los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son tales que $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ y $BC = B_1C_1$, los triángulos son iguales. A saber, también $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ y $\angle C = \angle C_1$.

DEMOSTRACIÓN (fig. 33). Si es $\angle A = \angle A_1$ o $\angle B = \angle B_1$, los triángulos son iguales según el primer criterio

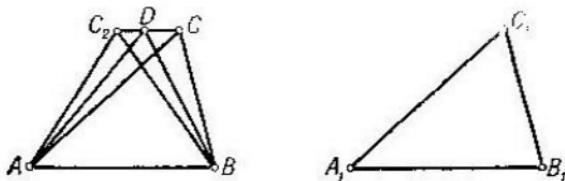


Fig. 33

de la igualdad de los triángulos. Supongamos que en los triángulos se tiene $\angle A \neq \angle A_1$ y $\angle B \neq \angle B_1$. Construyamos a partir de la semirrecta AB en el semiplano en el que se

encuentra el punto C un ángulo igual al $\angle A_1$ y construyamos en su lado el segmento AC_2 igual a A_1C_1 .

Los triángulos $A_1B_1C_1$ y ABC_2 son iguales según el primer criterio. Tienen $AB = A_1B_1$ por la hipótesis del teorema y $A_1C_1 = AC_2$ y $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC_2$ por construcción. De la igualdad de los triángulos resulta que $BC_2 = B_1C_1$.

Los triángulos CC_2A y CC_2B son isósceles y tienen CC_2 como base común. En ellos $AC = AC_2$ ya que $AC = A_1C_1$ y que $A_1C_1 = AC_2$; además, $BC = BC_2$ ya que $BC = B_1C_1$ y que $B_1C_1 = BC_2$.

Sea D el punto medio del segmento CC_2 . El punto D no se halla en la recta AB porque el segmento CC_2 no corta esta recta. De aquí se deduce que las rectas AD y BD son diferentes.

En virtud del teorema 4.4, las rectas AD y BD son perpendiculares a la recta CC_2 . Sin embargo, según el teorema 3.3, por el punto D se puede trazar solamente una recta perpendicular a la recta CC_2 . Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué segmentos se llaman iguales?
2. ¿Qué ángulos se llaman iguales?
3. ¿Qué es triángulo?
4. ¿Qué significa la frase: el triángulo ABC es igual al triángulo PQR ?
5. Enúnciese el primer criterio de la igualdad de los triángulos.
6. Enúnciese y demuéstrese el segundo criterio de la igualdad de los triángulos.
7. ¿Qué triángulo se llama isósceles? ¿Qué lados del triángulo isósceles se llaman laterales? ¿Qué lado se llama base?
8. Demuéstrese que en el triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales.
9. Demuéstrese que un triángulo con dos ángulos iguales es isósceles.
10. ¿Qué es el teorema recíproco? Dese un ejemplo. ¿Existe el recíproco de cualquier teorema?
11. Demuéstrese que en el triángulo equilátero todos los ángulos son iguales.
12. Demuéstrese que un triángulo de ángulos iguales es equilátero.
13. ¿Qué son mediana, bisectriz y altura del triángulo?
14. Demuéstrese que en el triángulo isósceles la mediana relativa a la base es bisectriz y altura.
15. Demuéstrese el tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

Ejercicios

16. Demuéstrese que si el rayo c , que parte del vértice de un ángulo (ab), pasa entre sus lados, el ángulo (ac) es menor que el ángulo (ab).
17. Muéstrese con un ejemplo que dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tales que $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ y $\angle A = \angle A_1$ pueden no ser iguales.
18. Demuéstrese que en el triángulo isósceles la bisectriz relativa a la base es mediana y altura.
19. Demuéstrese que en el triángulo isósceles las medianas relativas a los laterales son iguales y las bisectrices relativas a los laterales son iguales.
20. Demuéstrese que los puntos medios de los lados del triángulo isósceles son vértices de otro triángulo isósceles.
21. Demuéstrese que si el triángulo ABC es igual al triángulo BCA , es equilátero.

§ 5. RELACIONES ENTRE LOS ANGULOS Y LOS LADOS DEL TRIANGULO

Relaciones entre los ángulos del triángulo. TEOREMA 5.1. *La suma de dos ángulos cualesquiera del triángulo es menor que 180° .*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 34). Demostremos que la suma de los ángulos de los vértices A y C es menor que 180° . Indiquemos por O el punto medio del lado AC . Construyamos en la prolongación del segmento BO el segmento OD igual a OB . Los triángulos AOD y COB son iguales. Tienen iguales los ángulos de vértice O , por ser éstos verticales, y $AO = OC$ y $OD = OB$ por construcción. De la igualdad de estos triángulos se deduce que $\angle OCB = \angle OAD$.

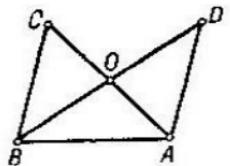


Fig. 34

El ángulo BAD es igual a la suma de los ángulos BAO y DAO ya que el rayo AO corta el segmento BD cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo BAD . Puesto que $\angle OAD = \angle OCB$, el ángulo BAD es igual a la suma de los ángulos de vértices A y C del triángulo ABC . El ángulo BAD no es llano porque el punto D no se halla en la recta AB . Por ello, el ángulo BAD es menor que 180° . Es decir, la suma de los ángulos A y C del triángulo ABC es igual al ángulo BAD menor que 180° . Queda demostrado el teorema.

Se llama *agudo* todo ángulo menor que el recto, o sea, menor que 90° . Todo ángulo mayor que 90° pero menor que 180° se llama *obtuso*.

Del teorema 5.1 se deduce que *en cualquier triángulo hay dos ángulos agudos*. En efecto, si fuera agudo sólo un ángulo, la suma de los otros dos ángulos sería no menor que 180° a despecho del teorema 5.1.

En un triángulo ABC se llama *ángulo exterior* de vértice A al que es adyacente del ángulo de este mismo vértice en el triángulo. Para no confundir el ángulo de vértice A del triángulo con el ángulo exterior de mismo vértice, el primero se denomina *interior*.

TEOREMA 5.2. *Todo ángulo exterior del triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente de éste.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado. Demostremos que el ángulo exterior de vértice A es mayor que el ángulo interior B . Según el teorema 5.1, la suma de los ángulos interiores A y B es menor que 180° , o sea, $\angle A + \angle B < 180^\circ$. De aquí resulta que el $\angle B$ es menor que $180^\circ - \angle A$. Pero, según la propiedad de los ángulos adyacentes, $180^\circ - \angle A$ es la medida gradual del ángulo exterior de vértice A . Queda demostrado el teorema.

Relación entre los ángulos del triángulo y sus lados opuestos.

TEOREMA 5.3. *Si $AB > BC$ en un triángulo ABC , el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$. Recíprocamente, si el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$, se tiene $AB > BC$. En otras palabras, al lado mayor de un triángulo se opone el ángulo mayor y a mayor ángulo se opone mayor lado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $AB > BC$ en el triángulo ABC (fig. 35). Consideremos en la semirrecta BA el segmento BC_1 igual a BC . El punto C_1 se halla entre A y B . La semirrecta CC_1 pasa entre CA y CB , pues corta el segmento AB . Por ello, el ángulo BCC_1 es menor que el ángulo BCA , o sea, menor que el ángulo C del triángulo ABC .

Los ángulos BCC_1 y BC_1C son iguales por ser ángulos de la base del triángulo isósceles CBC_1 . El $\angle BC_1C$ es el ángulo exterior de vértice C_1 del triángulo AC_1C y, por esto, es mayor que el ángulo A . Así, el $\angle C$ del $\triangle ABC$ es mayor que el $\angle A$ de este triángulo. Queda demostrada la 1^a afirmación del teorema.

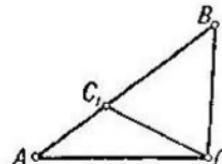


Fig. 35

Demoselmos ahora que si $\angle C$ es mayor que $\angle A$, se tiene $AB > BC$. Supongamos que la afirmación no es válida. Entonces, $AB = BC$ o $AB < BC$. En el primer caso el triángulo ABC es isósceles y, por consiguiente, los ángulos A y C de su base son iguales. Pero esto contradice a la hipótesis de que el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$. Ahora bien, si es $AB < BC$, resulta según lo demostrado que el $\angle A$ es mayor que el $\angle C$, lo que también contradice a la hipótesis. Por lo tanto, si el $\angle C$ es mayor que el $\angle A$, se tiene $AB > BC$. Queda demostrado el teorema.

Relaciones entre los lados del triángulo. **TEOREMA 5.4.** *En todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 36). Demoselmos que $AB < AC + CB$. Consideremos en la semirrecta AC el segmento AD igual a $AC + CB$. El punto C estará entonces entre A y D y $CD = CB$. Los ángulos B y D del triángulo BCD son iguales por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

El ángulo ABD es mayor que el ángulo CBD ya que la semirrecta BC pasa entre BA y BD . Por consiguiente, el ángulo ABD es mayor

que el ángulo ADB . Empleando el teorema 5.3, deducimos que $AD > AB$, es decir, que $AC + BC > AB$. Queda demostrado el teorema.

Desigualdad triangular. Si los puntos A y B son diferentes, la longitud del segmento AB se llama *distancia* entre estos puntos. Si los puntos A y B coinciden, la distancia entre ellos se considera igual a cero.

La desigualdad triangular es la propiedad de las distancias entre tres puntos que enuncia el teorema siguiente.

TEOREMA 5.5. *Si A , B y C son tres puntos, no necesariamente distintos, la distancia AB no es mayor que la suma de las distancias $AC + CB$.*

DEMOSTRACIÓN. Distingamos cuatro casos: 1) los tres puntos A , B y C son diferentes y no se hallan en una misma recta; 2) todos los puntos son diferentes pero se hallan en una misma recta; 3) dos puntos coinciden y 4) todos los puntos coinciden.

En el primer caso la afirmación resulta del teorema 5.4.

Consideremos el segundo caso. Aceptemos, pues, que los puntos A , B y C son diferentes pero se hallan en una misma recta. Uno de estos puntos estará entre los otros dos. Si C se halla entre A y B tenemos $AB = AC + CB$ por la propiedad de la medición de los segmentos. Si A se halla entre B y C , tenemos $AB + AC = BC$. Si B se halla entre A y C , tenemos $AB + BC = AC$. Vemos que cualquiera que sea la posición de los puntos A , B y C la distancia AB no es mayor que $AC + CB$.

Consideremos el tercer caso: dos de los tres puntos coinciden. Si coinciden los puntos A y B , se tiene $AB = 0$. Si coinciden A y C , se tiene $AB = CB$. Si coinciden B y C , se tiene $AB = AC$. Vemos que en cualquier caso de coincidencia de dos puntos, AB no es mayor que $AC + CB$.

En el cuarto caso, en el que los tres puntos coinciden, todas las distancias AB , BC y AC son iguales a cero y, por consiguiente, AB no es mayor que $AC + CB$.

En resumen, para cualesquiera tres puntos A , B y C la distancia AB no es mayor que la suma de las distancias $AC + CB$. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 5.5. se deduce que cualesquiera que sean los $n + 2$ puntos A , C_1 , C_2 , ..., C_n , B , nunca es AB mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_nB$. En efecto, según el teorema 5.5., AB no es mayor que $AC_1 + C_1B$. Según este mismo teorema, C_1B no es mayor que $C_1C_2 + C_2B$. Por ello, AB no es mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2B$. Ahora bien, C_2B no es mayor que $C_2C_3 + C_3B$. Por consiguiente, AB no es mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3B$. Y así sucesivamente. En definitiva se obtiene que AB no es mayor que $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_nB$.

Se llama *quebrada* la figura que consta de los puntos A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n con los segmentos A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$ uniendo los puntos consecutivos. Los puntos A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n se llaman *vértices* de la quebrada y los segmentos A_1A_2 , A_2A_3 , ... se llaman *lados* de la quebrada. Los puntos A_1 y A_n se llaman *extremos* de la quebrada. Se llama *longitud* de la quebrada la suma de las longitudes de sus lados. En la fig. 37 se representa una quebrada de vértices A_1 , A_2 , ..., A_n .

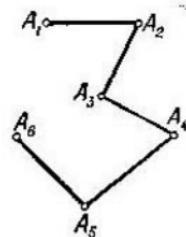


Fig. 37

La longitud de la quebrada no es menor que la longitud del segmento que une sus extremos.

Efectivamente, sea $A_1A_2A_3 \dots A_n$ la quebrada dada. Entonces, según hemos demostrado, la longitud del segmento A_1A_n no es mayor que la suma de las longitudes de los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, es decir, que la longitud de la quebrada.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué son los ángulos del triángulo ABC ?
2. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 5.1 (fig. 34):
 - 1) ¿Por qué son verticales los ángulos COB y AOD ?
 - 2) ¿Por qué es el ángulo BAD igual a la suma de los ángulos CAB y CAD ?
 - 3) ¿Por qué es el ángulo BAD menor que 180° ?
 - 4) ¿Qué ángulo se llama agudo? ¿Qué ángulo se llama obtuso?
 - 5) Demuéstrese que cualquier triángulo tiene dos ángulos agudos.
 - 6) ¿Qué es el ángulo exterior de vértice A del triángulo ABC ?
 - 7) Demuéstrese que el ángulo exterior de todo triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
7. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 5.3 (fig. 35):
 - 1) ¿Por qué se halla entre A y B el punto C_1 ?
 - 2) ¿Por qué es BC_1C ángulo exterior de vértice C_1 del triángulo ACC_1 ?
 - 3) ¿Por qué es el ángulo BCC_1 menor que el ángulo BCA ?
 8. Demuéstrese que en todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero.
 9. ¿Qué es la distancia entre los puntos A y B ?
 10. ¿En qué consiste la desigualdad triangular? Demuéstrese la desigualdad triangular.
 11. ¿Qué es quebrada? Demuéstrese que la longitud de la quebrada no es menor que la distancia entre sus extremos.

Ejercicios

12. ¿Existe un triángulo de dos ángulos rectos?
13. Demuéstrese que en cualquier triángulo hay dos ángulos exteriores obtusos.
14. Demuéstrese que dos rectas perpendiculares a una tercera no se cortan.
15. En el lado AB del triángulo ABC se ha tomado un punto D . Demuéstrese que el segmento CD es menor, por lo menos, que uno de los lados AC o BC .
16. Demuéstrese que cualquier segmento cuyos extremos se hallan en los lados de un triángulo no es mayor que el lado mayor del triángulo.
17. ¿Puede tener el triángulo ABC los lados $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$ y $AC = 18 \text{ cm}$? Arguméntese la respuesta.
18. Demuéstrese que siendo $AB = BC + AC$, los tres puntos A , B y C se hallan en una misma recta.

19. Considérese la fig. 34. En ella BO es la mediana del triángulo ABC relativa al lado AC . Demuéstrese que la mediana BO es menor que la semisuma de los lados BA y BC .

20. Demuéstrese que si los vértices de una quebrada no se hallan en una recta, la longitud de la quebrada es mayor que la longitud del segmento que une sus extremos.

21. Demuéstrese que la distancia entre dos vértices cualesquiera de una quebrada cerrada no es mayor que la mitad de su longitud.

§ 6. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Angulos y lados del triángulo rectángulo. Se llama triángulo rectángulo aquel que tiene un ángulo recto. Puesto que todo triángulo tiene dos ángulos agudos, *en un triángulo rectángulo sólo un ángulo es recto*. Los otros dos son agudos.

Los lados del triángulo rectángulo tienen denominaciones especiales. A saber, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*. Los otros dos lados se llaman *catetos*. Los ángulos opuestos a los catetos son agudos.

Ya que en cualquier triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado (teorema 5.3), *en el triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos*. Puesto que en cualquier triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero, *en el triángulo rectángulo la suma de los catetos es mayor que la hipotenusa*.

Igualdad de los triángulos rectángulos. Para los triángulos rectángulos, además de los criterios de la igualdad que conocemos, existen otros. Estos criterios de la igualdad de los triángulos rectángulos están en el teorema siguiente:

TEOREMA 6.1. *Los triángulos rectángulos ABC y $A_1B_1C_1$ de ángulos rectos C y C_1 son iguales si se cumple una de las condiciones siguientes:*

- 1) $BC = B_1C_1$ y $\angle A = \angle A_1$;
- 2) $AB = A_1B_1$ y $BC = B_1C_1$;
- 3) $AB = A_1B_1$ y $\angle A = \angle A_1$.

DEMOSTRACIÓN (fig. 38). Consideremos primero el caso en que se cumpla la condición 1) o la condición 2). Si se tiene $AC = A_1C_1$, los triángulos son iguales debido al primer criterio de la igualdad de los triángulos en el caso en que se cumpla la condición 1) y debido al tercer criterio de la igualdad de los triángulos en el caso en que se cumpla la condición 2).

Supongamos que $AC \neq A_1C_1$. Sea, por ejemplo, $A_1C_1 < AC$. Consideremos en la semirrecta CA el segmento CA_2

igual a C_1A_1 (fig. 38, a la izquierda). El punto A_2 estará entre A y C . Los triángulos $A_1B_1C_1$ y A_2BC son iguales en virtud del primer criterio de la igualdad. Tienen los ángulos C_1 y C rectos, $BC = B_1C_1$ por hipótesis y $A_1C_1 = A_2C$ por construcción. De la igualdad de los triángulos se deduce que $\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$ y $BA_2 = B_1A_1$.

En caso de que se cumpla la condición 1), la igualdad de los ángulos BA_2C y $B_1A_1C_1$ es imposible. En efecto, el ángulo $B_1A_1C_1$ es igual al ángulo BAC . Por consiguiente, en el triángulo ABA_2 resultan iguales el ángulo exterior de vértice A_2 y el ángulo interior de vértice A . Pero esto contradice el teorema sobre el ángulo exterior del triángulo.

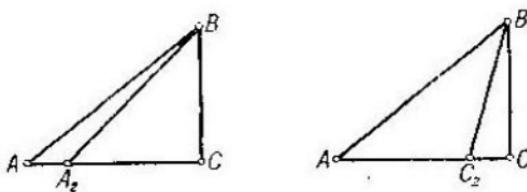


Fig. 38

En caso de que se cumpla la condición 2), la igualdad de los lados BA_2 y B_1A_1 es imposible. En efecto, tenemos $B_1A_1 = BA$. O sea, el triángulo ABA_2 es isósceles. Su ángulo de vértice A_2 es obtuso por ser el adyacente de un ángulo agudo del triángulo rectángulo BCA_2 . Por lo tanto, el ángulo A es también obtuso. Pero esto es imposible.

Resumiendo, si se cumple cualquiera de las condiciones 1) o 2), debe tener lugar la igualdad $AC = A_1C_1$. En este caso, como hemos demostrado ya, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales.

Supongamos ahora que para los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se cumple la condición 3). Demostremos que los triángulos son iguales.

Si se tiene $AC = A_1C_1$, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales debido al primer criterio ya que $AB = A_1B_1$ y $\angle A = \angle A_1$.

Aceptemos que $AC \neq A_1C_1$. Sea, por ejemplo, $AC > A_1C_1$. Tomemos en la semirrecta AC el segmento AC_2 igual a A_1C_1 (fig. 38, a la derecha). Los triángulos ABC_2 y $A_1B_1C_1$ son iguales por el primer criterio de la igualdad de los triángulos. De la igualdad de los triángulos ABC_2

y $A_1B_1C_1$ se deduce que el ángulo AC_2B es recto. Por consiguiente, el ángulo CC_2B es recto, pues es el adyacente del ángulo AC_2B . O sea, el triángulo CBC_2 tiene dos ángulos rectos. Pero esto es imposible.

Resumiendo, si se cumple la condición 3), tiene lugar la igualdad $AC = A_1C_1$. En este caso, como hemos demostrado ya, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales.

Queda demostrado el teorema.

Perpendicular y oblicua. Sean a una recta, B un punto que no le pertenece y A un punto de la recta a . El segmento BA se llama *perpendicular trazada por el punto B a la recta a* , si las rectas a y AB son perpendiculares (fig. 39). El punto A se llama *pie de la perpendicular*.

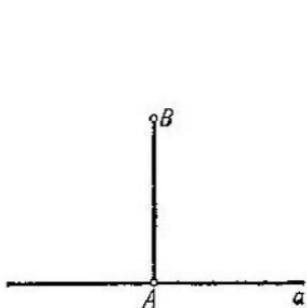


Fig. 39

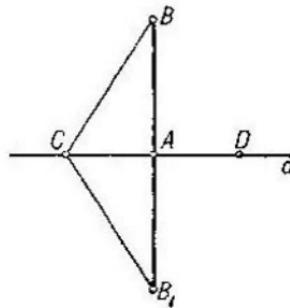


Fig. 40

TEOREMA 6.2. *Por todo punto exterior a la recta dada se puede trazar una perpendicular a esta recta y sólo una.*

DEMOSTRACION. Sea a la recta dada y sea B un punto que no se halla en esta recta (fig. 40). Tomemos en la recta a dos puntos cualesquiera C y D . Si la recta BC es perpendicular a la recta a , el segmento BC es precisamente la perpendicular trazada por el punto B a la recta a .

Supongamos que BC no es perpendicular a la recta a . La recta a divide el plano en dos semiplanos. El punto B pertenece a uno de ellos. Construyamos en el otro semiplano, a partir de la semirrecta CD , un ángulo igual a BCD y consideremos en su lado el segmento CB_1 igual al segmento CB .

Los puntos B y B_1 se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta a y, por esto, el segmento BB_1 corta esta recta en un punto A . Los triángulos CAB y CAB_1 son iguales por el primer criterio de la igualdad de los triángulos.

Tienen el lado AC común y, además, $\angle BCA = \angle B_1CA$ y $CB = CB_1$ por construcción. De aquí se deduce que son iguales los ángulos de vértice A de estos triángulos. Pero como estos ángulos son adyacentes, resultan rectos. O sea, la recta BA es perpendicular a la recta a , es decir, el segmento BA es la perpendicular trazada por el punto B a la recta a .

Aceptemos ahora que por el punto B se pueden trazar dos perpendiculares BA y BA_1 a la recta a . Entonces el triángulo BAA_1 tendrá dos ángulos rectos: el $\angle A$ y el $\angle A_1$.

Pero esto es imposible. Luego, por el punto B se puede trazar una perpendicular a la recta a y sólo una. Queda demostrado el teorema.

Sea BA la perpendicular trazada por el punto B a la recta a y sea C un punto cualquiera de la recta a diferente de A . El segmento BC se llama *oblicua* trazada por el punto B a la recta a (fig. 41). El punto C se llama *pie* de la oblicua. El segmento AC se llama *proyección*

de la oblicua. Observando el triángulo rectángulo BAC de ángulo recto A , vemos que *la oblicua es mayor que la perpendicular*. En este triángulo la oblicua es la hipotenusa y la perpendicular, un cateto.

Se llama *distancia* entre el punto B y la recta a , que no pasa por el punto B , la longitud de la perpendicular trazada a la recta a por el punto B . Puesto que la perpendicular es menor que cualquier oblicua trazada por el mismo punto, *la distancia entre el punto B y la recta a no es mayor que la distancia entre el punto B y cualquier punto de la recta a* .

Preguntas de repaso.

1. ¿Qué se llama triángulo rectángulo?
2. Demuéstrese que el triángulo rectángulo tiene un solo ángulo recto.
3. ¿Qué lado del triángulo rectángulo se llama hipotenusa? ¿Qué lados se llaman catetos?
4. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
5. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo la suma de los catetos es mayor que la hipotenusa.

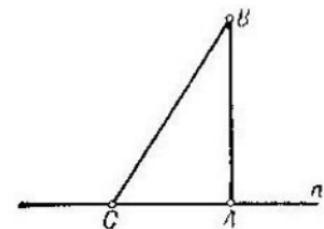


Fig. 41

6. Enunciense los criterios primero, segundo y tercero de la igualdad de los triángulos.
7. Enúnciense y demuéstrese los criterios especiales de la igualdad de los triángulos rectángulos.
8. ¿Qué es perpendicular?
9. Demuéstrese que por todo punto exterior a una recta se puede trazar una perpendicular a esta recta y sólo una.
10. ¿Qué es oblicua? ¿Qué es la proyección de una oblicua?
11. Demuéstrese que la perpendicular es menor que cualquier oblicua trazada por el mismo punto.
12. ¿Qué es distancia entre un punto B y una recta a que no pasa por el punto B ? Demuéstrese que la distancia entre un punto B y una recta a no es mayor que la distancia entre el punto B y cualquier punto de la recta a .

Ejercicios

13. Demuéstrese que las oblicuas iguales, trazadas a una recta dada por un mismo punto, tienen proyecciones iguales. Y recíprocamente, que si son iguales las proyecciones de las oblicuas, también son iguales las oblicuas.
14. Demuéstrese que la altura del triángulo isósceles relativa a la base es mediana y bisectriz.
15. ¿Cómo trazar por el vértice A de un triángulo ABC una recta que corte el lado BC de manera que sean iguales las distancias entre esta recta y los vértices B y C ?
16. Demuéstrese que dos bisectrices del triángulo se cortan en un punto equidistante de todos los lados del triángulo.
17. Demuéstrese que las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto.
18. Por el punto B se ha trazado a la recta a la oblicua BC . Demuéstrese que por el punto B se puede trazar otra oblicua BD de la misma longitud que BC .
19. Demuéstrese que por un punto no se pueden trazar tres oblicuas de igual longitud a una misma recta.
20. Por el punto B se han trazado a la recta a la perpendicular BA y dos oblicuas BC y BD . El punto D se halla entre A y C . Demuéstrese que el ángulo BDC es obtuso.
21. Demuéstrese que de dos oblicuas trazadas por un mismo punto a una recta es mayor aquella que tiene mayor proyección. Y recíprocamente, que la oblicua mayor posee mayor proyección.

§ 7. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

En qué consisten los problemas de construcción. En los problemas de construcción se trata de construir una figura geométrica con instrumentos de dibujo dados. Estos instrumentos son en la mayoría de los casos la regla y el compás. La solución del problema consiste no tanto en la construcción de la figura como en explicar el modo de realizarla

y en efectuar la demostración correspondiente. El problema se considera resuelto si se ha señalado el método de construcción de la figura y se ha demostrado que realizando las construcciones indicadas se obtiene efectivamente la figura con las propiedades pedidas.

La regla como instrumento de construcciones geométricas permite trazar una recta cualquiera, una recta cualquiera que pasa por un punto y la recta que pasa por dos puntos. Con la regla no se puede realizar ninguna otra operación. En particular, no se puede construir segmentos aun cuando la regla esté graduada, no pueden usarse simultáneamente ambos bordes de la regla, etc.

El compás como instrumento de construcciones geométricas permite describir desde un centro la circunferencia de radio dado. En particular, el compás permite construir el segmento en una recta dada y a partir de un punto dado.

Consideremos los problemas elementales de construcción.

Construcción del triángulo de lados dados. PROBLEMA 7.1. *Constrúyase el triángulo de lados dados a , b y c* (fig. 42, a la izquierda).

SOLUCIÓN. Tracemos con la regla una recta y marquemos en ella un punto B cualquiera (fig. 42, a la derecha). Tracemos con el compás una circunferencia de centro B y de

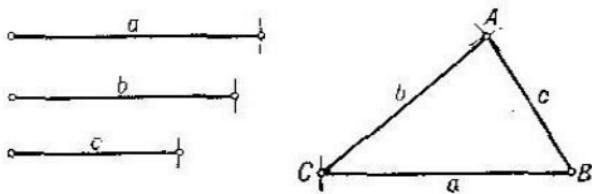


Fig. 42

radio a . Sea C su punto de intersección con la recta. Tracemos ahora una circunferencia de centro B y de radio c y otra de centro C y de radio b . Sea A el punto de intersección de estas circunferencias. Los lados del triángulo ABC son a , b y c .

El problema 7.1 no siempre tiene solución. Según el teorema 5.4, los segmentos a , b y c deben satisfacer las condiciones $a + b > c$, $b + c > a$ y $c + a > b$.

Construcción del ángulo igual a uno dado. PROBLEMA 7.2.
Constrúyase a partir de una semirrecta y en el semiplano indicado el ángulo igual al ángulo dado.

SOLUCIÓN. Tracemos una circunferencia cualquiera de centro en el vértice A del ángulo dado (fig. 43, a la izquierda). Sean B y C los puntos de intersección de la circunferencia y de los lados del ángulo. Tracemos una circunferencia de radio AB y de centro en el punto O , o sea, en el punto de origen de la semirrecta dada. Indiquemos por B_1 (fig. 43,

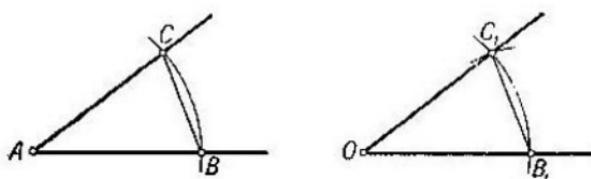


Fig. 43

a la derecha) el punto de intersección de esta circunferencia y de la semirrecta dada. Tracemos la circunferencia de centro B_1 y de radio BC . El punto C_1 de intersección de las circunferencias trazadas en el semiplano dado se halla en el lado del ángulo pedido. Para demostrarlo basta observar que los triángulos ABC y OB_1C_1 son iguales por ser triángulos de lados respectivamente iguales. Los ángulos A y O son ángulos correspondientes de estos triángulos.

División del ángulo por la mitad. PROBLEMA 7.3. *Dividase por la mitad el ángulo dado.*

SOLUCIÓN. Considerando el vértice A del ángulo dado como centro, tracemos una circunferencia de radio cualquiera (fig. 44). Sean B y C los puntos de su intersección con los lados del ángulo. Tracemos circunferencias del mismo radio y de centro en los puntos B y C . Sea D el punto de intersección de las mismas diferentes de A . La semirrecta AD divide el ángulo A por la mitad. Esto resulta de la igualdad de los triángulos ABD y ACD en los que los ángulos DAB y DAC son correspondientes.

División del segmento por la mitad. PROBLEMA 7.4. *Dividase por la mitad el segmento dado.*

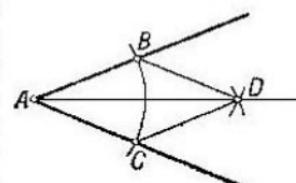


Fig. 44

SOLUCIÓN. Sea AB el segmento dado (fig. 45). Tracemos dos circunferencias de radio AB y de centro en los puntos A y B . Sean C y C_1 los puntos de intersección de estas circunferencias. Se hallan en semiplanos diferentes respecto a la recta AB .

El segmento CC_1 corta la recta AB en un punto O . Este es precisamente el punto medio del segmento AB .

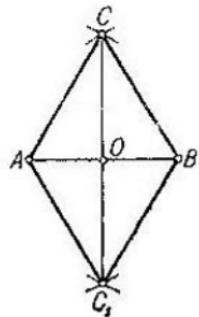


Fig. 45

Efectivamente, los triángulos CAC_1 y CBC_1 son iguales en virtud del tercer criterio de la igualdad de los triángulos. De aquí resulta la igualdad de los ángulos ACO y BCO . Entonces, los triángulos ACO y BCO son iguales por el primer criterio. Los lados AO y BO son lados correspondientes de estos triángulos y, por consiguiente,

son iguales. O sea, O es el punto medio del segmento AB .

Construcción de la perpendicular. PROBLEMA 7.5. Trácese por el punto O la perpendicular a la recta a .

SOLUCIÓN. Se pueden presentar dos casos:

- 1) el punto O se halla en la recta a ;
- 2) el punto O no se halla en la recta a .

Consideraremos el primer caso (fig. 46, a la izquierda).

Tracemos una circunferencia de radio cualquiera y de centro O . Corta la recta en dos puntos A y B . Tracemos dos circunferencias de radio AB y con centros en los puntos A y B . Sea C el punto de intersección de las mismas. La recta pedida pasa por los puntos O y C . La perpendicularidad de las rectas OC y AB resulta de la igualdad de los ángulos de vértice O en los triángulos ACO y BCO . Estos triángulos son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

Consideraremos el segundo caso (fig. 46, a la derecha). Tracemos una circunferencia de radio cualquiera que tiene su centro en O y que corta la recta a . Sean A y B sus puntos de intersección con la recta a . Tracemos dos circunferencias de centro en los puntos A y B y del mismo radio. Sea O_1 el punto de intersección de las mismas distinto de O . La recta pedida pasa por los puntos O y O_1 . Proponemos al lector argumentar esta construcción.

Lugar geométrico de puntos. Uno de los métodos de solución de problemas de construcción es el método de lugares geométricos. Se llama *lugar geométrico* de puntos una figura

formada por todos los puntos del plano que poseen una propiedad determinada. Por ejemplo, la *circunferencia* es,

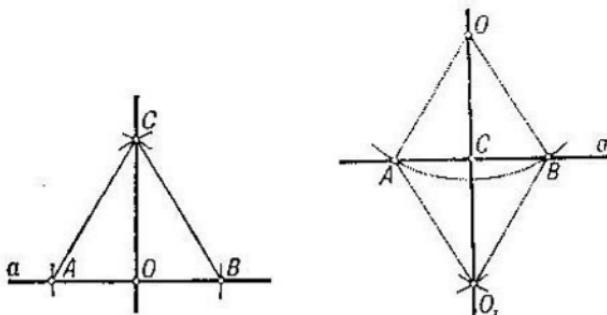


Fig. 46

por definición, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado. Este punto se llama *centro* de la circunferencia y la distancia entre los puntos de la circunferencia y el centro se llama *radio* de la circunferencia. Un importante lugar geométrico de puntos se enuncia en el teorema siguiente:

TEOREMA 7.6. *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos A y B es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio O (fig. 47).*

DEMOSTRACION. De la igualdad de los triángulos AOC y BOC resulta que todo punto C de dicha recta equidista de los puntos A y B . En estos triángulos los ángulos de vértice O son rectos, el lado OC es común y $AO = OB$ ya que O es el punto medio del segmento AB . Probemos ahora que todo punto D del plano equidistante de los puntos A y B se halla en la recta OC .

Supongamos que el punto D no se halla en la recta OC . Los puntos A y B se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta OC . Supongamos, para concretar, que el punto D se halla en el mismo semiplano que el punto B (como en la fig. 47). Entonces, el segmento AD corta la recta OC en un punto E . Según hemos demostrado, $AE = BE$. Por hipótesis, $AD = BD$. De aquí resulta que en el triángulo BDE se tiene $DB = BE + ED$. Pero esto

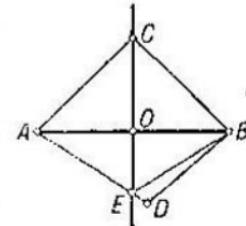


Fig. 47

es imposible porque la suma de dos lados es mayor que el tercero.

Método de Lugares geométricos. La esencia del método de lugares geométricos aplicado a la resolución de problemas de construcción consiste en lo siguiente. Supongamos que al resolver un problema de construcción tengamos que construir un punto X que cumpla dos condiciones: la condición 1) y la condición 2). El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición 1) es una figura F_1 y el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición 2) es una figura F_2 . El punto pedido X pertenece a F_1 y a F_2 , o sea, es el punto de intersección de estas figuras. Si nuestros lugares geométricos son simples, es decir, están formados por rectas y circunferencias, podemos construirlos y de este modo hallar el punto pedido X . Veamos un ejemplo.

Se llama circunferencia *circunscrita* a un triángulo a la que pasa por cada uno de sus vértices.

PROBLEMA 7.7. *Constrúyase la circunferencia que circunscribe el triángulo dado ABC .*

SOLUCIÓN (fig. 48). El centro O de la circunferencia pedida equidista de los tres vértices A , B y C . Podemos también decir que el centro O satisface dos condiciones: 1) el centro de la circunferencia equidista de los vértices A y C ; 2) el centro de la circunferencia equidista de los vértices B y C . El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la primera condición es la perpendicular al lado AC que pasa por su punto medio D . El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la segunda condición es la perpendicular al segmento BC trazada

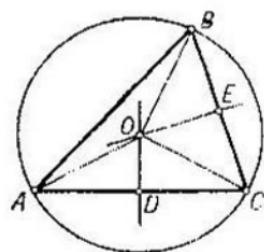


Fig. 48

por su punto medio E . Por lo tanto, el centro O de la circunferencia circunscrita se halla en la intersección de estas perpendiculares.

De aquí se desprende un importante corolario. Puesto que el centro O de la circunferencia circunscrita se halla a igual distancia de los puntos A y B , resulta, según el teorema 7.6, que está en la perpendicular al segmento AB trazada por su punto medio. Esto implica que *las tres rectas, que pasan por los puntos medios de los lados del triángulo y que*

son perpendiculares a estos lados, se cortan en un punto que es el centro de la circunferencia circunscrita.

La aplicación del método de lugares geométricos no siempre resulta tan sencilla como en el problema 7.7. Consideremos un ejemplo más complejo.

PROBLEMA 7.8. *Sean dados una recta a , un punto A de la misma y un punto B que no se halla en la recta a (fig. 49). Indíquese en la recta a un punto X tal que $AX + XB$ sea igual a un segmento dado m .*

SOLUCIÓN. Las dos condiciones que debe satisfacer el punto X pueden ser representadas así: 1) el punto X se halla en la recta a ; 2) $AX + XB = m$.

El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la primera condición es la propia recta a . Pero el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la segunda condición es bastante complejo. No se reduce a rectas y circunferencias. Es decir, no basta con determinar la posición del punto X mediante dos condiciones, sino que es preciso también que cada una de ellas defina un lugar geométrico simple formado por rectas y circunferencias. Saber formular estas condiciones es lo esencial en la solución del problema.

Veamos como determinar estas condiciones en nuestro problema. Supongamos que el problema ha sido resuelto. Tomemos en la semirrecta AX el segmento AC igual a m . Entonces $XC = XB$, o sea, el punto X equidista de los puntos B y C . Podemos enunciar ahora las dos condiciones que determinan la posición del punto X así: 1) el punto X se halla en el segmento AC ; 2) el punto X equidista de los puntos B y C . El primer lugar geométrico es el segmento AC y el segundo lugar geométrico es la recta perpendicular al segmento BC trazada por su punto medio E . El punto X está en la intersección de estos lugares geométricos.

Preguntas de repaso

1. ¿Cómo construir el triángulo dados sus tres lados? ¿En qué caso es insoluble el problema, es decir, no existe el triángulo de los lados dados?

2. ¿Cómo construir a partir de una semirrecta y en el semiplano indicado un ángulo igual al ángulo dado?

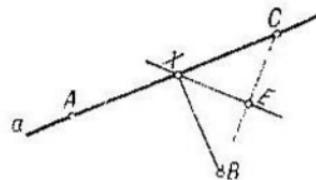


Fig. 49

3. ¿Cómo dividir por la mitad el ángulo?
4. ¿Cómo dividir por la mitad el segmento?
5. ¿Cómo trazar una perpendicular por un punto a una recta?
6. ¿Qué es lugar geométrico de puntos?
7. ¿Qué representa el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos?
8. ¿En qué consiste la solución de los problemas de construcción por el método de lugares geométricos? Darse ejemplos de problemas de construcción que se resuelven por el método de lugares geométricos.

Ejercicios

9. Constrúyase el segmento igual a la suma (a la diferencia) de dos segmentos.
10. Constrúyase el ángulo igual a la diferencia de dos ángulos.
11. Constrúyase el segmento igual a $\frac{1}{4}$ del segmento dado.
12. Constrúyase el ángulo igual a $\frac{1}{4}$ del ángulo dado.
13. Constrúyase el triángulo ABC a tenor con las condiciones siguientes:
 - 1) dados el ángulo A y los lados AB y AC ;
 - 2) dados el ángulo A y los lados AB y BC ;
 - 3) dados los ángulos A y B y el lado AB .
14. Constrúyase el triángulo dados sus lados AB y BC y la mediana relativa a uno de los lados AB o AC .
15. Constrúyase el triángulo dados sus lados AB y BC y la altura trazada desde el vértice A .
16. Constrúyase el punto que se halla a igual distancia de los puntos A y B y a una distancia dada del punto C .
17. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas secantes consta de las bisectrices de los ángulos formados por estas rectas.
18. Sea ABC un triángulo. Constrúyanse todos los puntos equidistantes de las rectas AB , BC y AC .
19. Constrúyase el punto que se halla a igual distancia de dos rectas y a una distancia determinada de un punto.

§ 8. RECTAS PARALELAS

Criterios de paralelismo de rectas. TEOREMA 8.1. Si la recta c es paralela a las rectas a y b , las rectas a y b son paralelas.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las rectas a y b no son paralelas. Entonces se cortan en un punto C . O sea, por el punto C pasan dos rectas paralelas a la recta c . Pero esto es imposible en virtud del axioma VI. Según este axioma, por un punto que no se halla en la recta dada se puede

trazar a lo sumo una recta paralela. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 8.1 se deduce que *si una recta corta una de las dos rectas paralelas, también corta la otra*.

Sean AB y CD dos rectas. Sea AC otra recta que corta las rectas AB y CD (fig. 50). La recta AC se llama *secante* de las rectas AB y CD . Los ángulos formados por las rectas AB y CD y la secante AC tienen nombres especiales. Si los puntos B y D se hallan en un mismo semiplano respecto

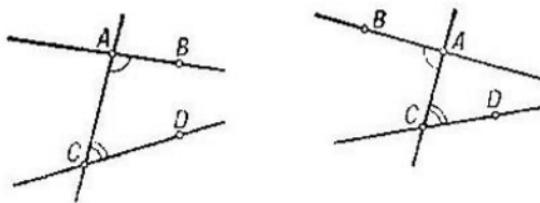


Fig. 50

a la recta AC , los ángulos BAC y DCA se denominan *correspondientes internos* (fig. 50, a la izquierda). Si los puntos B y D están en diferentes semiplanos respecto a la recta AC , los ángulos BAC y DCA se llaman *alternos internos* (fig. 50, a la derecha).

La secante AC forma con las rectas AB y CD dos pares de ángulos correspondientes internos y dos pares de ángulos alternos internos. De la propiedad de los ángulos adyacentes se deduce que al ser iguales los ángulos alternos internos de un par, los ángulos alternos internos del otro par también son iguales y la suma de los ángulos correspondientes internos de cada uno de los pares es igual a 180° . Recíprocamente, si la suma de un par de ángulos correspondientes internos es igual a 180° , la suma del otro par de ángulos correspondientes internos es también igual a 180° y los ángulos alternos internos de cada uno de los pares son iguales.

TEOREMA 8.2. *Sean a y b dos rectas y c una secante de las mismas. Si las rectas a y b son paralelas, los ángulos alternos internos son iguales y la suma de los ángulos correspondientes internos es igual a 180° . Recíprocamente, si los ángulos alternos internos son iguales o los ángulos correspondientes internos suman 180° , las rectas a y b son paralelas.*

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por la segunda afirmación del teorema. Supongamos que las rectas a y b no son parale-

las, o sea, que se cortan en un punto C (fig. 51). Consideremos el triángulo ABC . Según el teorema 5.1, la suma de los ángulos A y B de este triángulo es menor que 180° . Pero estos ángulos son correspondientes internos y la suma de los mismos es igual a 180° por hipótesis. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la segunda afirmación del teorema.

Demoselmos la primera afirmación del teorema. Sean, pues, a y b rectas paralelas. Tracemos por el punto A una recta a_1 , de modo que la suma de los ángulos correspondientes internos que forma la secante c con las rectas a_1

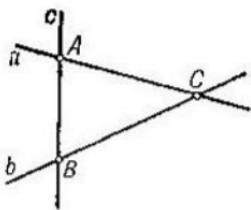


Fig. 51

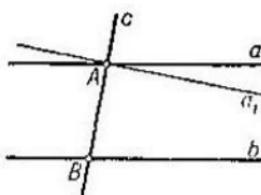


Fig. 52

y b sea igual a 180° (fig. 52). Entonces, según hemos demostrado, la recta a_1 será paralela a b . Pero por el punto A pasa sólo una recta paralela a b . Luego, las rectas a y a_1 coinciden. Es decir, la suma de los ángulos correspondientes internos formados por la secante c y las paralelas a y b es igual a 180° y, por consiguiente, los ángulos alternos son iguales. Queda demostrado completamente el teorema.

Del teorema 8.2 resulta que *dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas. Si una recta es perpendicular a una de las rectas paralelas, también es perpendicular a la otra.*

Suma de los ángulos del triángulo. TEOREMA 8.3.

La suma de los ángulos del triángulo es igual a 180° .

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 53). Marquemos el punto medio O del lado BC del triángulo. Construyamos en la semirrecta complementaria a la semirrecta OA el segmento OD igual al segmento OA . Los triángulos BOD y COA son iguales, ya que los ángulos de vértice O son iguales por ser verticales y, además, $OB = OC$ y $OA = OD$ por construcción. De la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo DBO es igual al ángulo ACO .

Para las rectas AC y BD y la secante BC son alternos internos los ángulos DBO y ACO . En efecto, los puntos A

y D se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta BC ya que el segmento AD corta la recta BC (en el punto O). Según el teorema 8.2, la igualdad de los ángulos alternos internos DBO y ACO implica que las rectas AC y BD son paralelas.

Para las rectas AC y BD y la secante AB son correspondientes internos los ángulos DBA y CAB . Efectivamente, los puntos C y D se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AB ; a saber, en el semiplano al que pertenece el punto O . Puesto que las rectas AC y BD son paralelas, los ángulos correspondientes internos CAB y DBA suman 180° .

El ángulo DBA es igual a la suma de los ángulos DBC y ABC ya que el rayo BC corta el segmento AD cuyos extremos están en los lados del ángulo ABD . Según hemos demostrado, el ángulo DBC es igual al ángulo ACB . Por consiguiente, la suma de los ángulos del triángulo ABC , o sea, la suma $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$, es igual a la suma de los ángulos correspondientes internos formados por las paralelas, es decir, es igual a 180° . Queda demostrado el teorema.

En el triángulo rectángulo un ángulo es recto y los otros dos son agudos. Del teorema 8.3 se deduce que *en el triángulo rectángulo los ángulos agudos se complementan hasta 90°* .

TEOREMA 8.4. *Todo ángulo exterior del triángulo es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes a él.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado. Según el teorema 8.3, se tiene $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. De aquí resulta que $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$. En el segundo miembro de esta igualdad figura la medida gradual del ángulo exterior de vértice C del \triangle . Queda demostrado el teorema.

Las paralelas como rectas equidistantes. **TEOREMA 8.5.** *Las rectas paralelas equidistan, o sea, todos los puntos de una recta están a una misma distancia de la otra recta.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y b dos rectas paralelas (fig. 54). Tomemos en la recta a dos puntos cualesquiera A y A_1 y tracemos por ellos las perpendiculares AB y A_1B_1 a la recta b . Las rectas AB y A_1B_1 son perpendiculares a la recta b y, por consiguiente, también son perpendiculares a la recta paralela a .

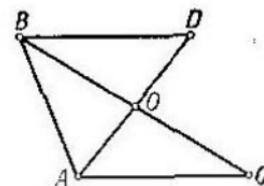


Fig. 53

Los ángulos BAA_1 y A_1BB_1 son correspondientes internos o alternos internos respecto a la secante A_1B . Puesto que ambos son agudos, la suma de los mismos es menor que 180° . Por ello, no pueden ser correspondientes internos de las paralelas. O sea, los ángulos BA_1A y A_1BB_1 son alternos internos de las paralelas y por esto son iguales.

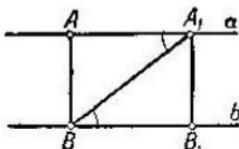


Fig. 54

Los triángulos rectángulos BAA_1 y A_1B_1B son iguales. Tienen la hipotenusa A_1B común y los ángulos agudos AA_1B y A_1BB_1 son iguales según lo demostrado.

De la igualdad de los triángulos deducimos que $AB = A_1B_1$, o sea, que son iguales las perpendiculares trazadas a la recta b por los puntos A y A_1 de la recta a . Queda demostrado el teorema.

PROBLEMA 8.6. Hállese el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a un mismo semiplano respecto a la recta a y que equidistan de esta recta.

SOLUCIÓN. Tomemos un punto cualquiera A del lugar geométrico y tracemos por él la recta a_1 , paralela a la recta a (fig. 55). Demostremos que esta recta abarca todos los puntos del lugar geométrico.

Sea B un punto cualquiera del lugar geométrico. Tracemos por el punto B la recta perpendicular a la recta a . Corta la recta a en un punto C y la recta a_1 , en un punto C_1 . Como el punto C no separa los puntos C_1 y B , de la igualdad $C_1C = BC$ se deduce que los puntos B y C coinciden, o sea, que el punto B se halla en la recta a_1 .

Por consiguiente, el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran en un mismo semiplano respecto a la recta a y que equidistan de esta recta es una recta paralela a la recta a .

PROBLEMA 8.7. Trácese por un punto B la recta paralela a la recta a .

SOLUCIÓN. Trazamos por el punto B la recta b perpendicular a la recta a (problema 7.5). Trazamos por el punto B la recta c perpendicular a b . La recta c es paralela a la recta a .

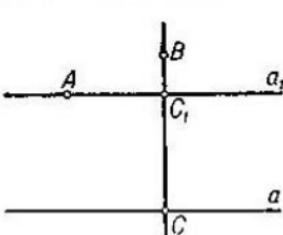


Fig. 55

Preguntas de repaso

1. ¿Qué rectas se llaman paralelas?
2. Enúnciese el axioma de las paralelas.
3. Demuéstrese el teorema 8.1: si la recta a es paralela a las rectas b y c , las rectas b y c son paralelas.
4. Demuéstrese que si una recta corta una de las dos rectas paralelas, también corta la otra.
5. ¿Qué ángulos se denominan correspondientes internos? ¿Qué ángulos se denominan alternos internos?
6. Sean ABC un triángulo, B_1 un punto en su lado AB y C_1 un punto en el lado AC . Señálense los ángulos correspondientes internos y alternos internos de las rectas AB y AC y la secante B_1C_1 .
7. Demuéstrese que si los ángulos alternos internos de un par son iguales, los ángulos alternos internos del otro par también son iguales y los ángulos correspondientes internos de cada uno de los pares suman 180° . Recíprocamente, si la suma de los ángulos correspondientes internos de uno de los pares es igual a 180° , los ángulos correspondientes internos del otro par también suman 180° y los ángulos alternos internos de cada uno de los pares son iguales.
8. Enúnciese y demuéstrese el teorema de los ángulos de dos paralelas y una secante.
9. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 8.3 sobre la suma de los ángulos del triángulo (fig. 53):
 - 1) ¿Por qué los ángulos CBD y BCA son internos alternos para las rectas AC y BD y la secante BC ?
 - 2) ¿Por qué los ángulos ABD y BAC son correspondientes internos para las rectas AC y BD y la secante AB ?
 - 3) ¿Por qué el ángulo ABD es igual a la suma de los ángulos ABC y DBC ?
10. Demuéstrese que el ángulo exterior del triángulo es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes a él.
11. ¿Cuánto suman los ángulos agudos del triángulo rectángulo?
12. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo equilátero?
13. Demuéstrese que las rectas paralelas equidistan.

Ejercicios

14. Sean a y b dos rectas paralelas. Demuéstrese que la recta b se halla en un semiplano respecto a la recta a .
15. ¿Qué es mayor: la base o el lateral del triángulo isósceles si el ángulo de su vértice es igual a 57° ?
16. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo si están en proporción de $1 : 2 : 3$?
17. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo rectángulo isósceles?
18. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo de ángulo agudo de 30° el cateto opuesto a este ángulo es igual a la mitad de la hipotenusa.
19. Sea ABC un triángulo. ¿Cómo trazar por el vértice A una recta de modo que los vértices B y C equidistan de la recta y ésta no corte el lado BC ?
20. Sea ABC un triángulo isósceles de base AB y de laterales AC y BC . Demuéstrese que es constante la suma de las distancias entre las rectas AC y BC y un punto X cualquiera de la base AB .

§ 9. CUADRILÁTEROS

Cuadriláteros convexos. Recibe el nombre de *cuadrilátero* una figura $ABCD$ formada por cuatro puntos A, B, C y D , que de tres en tres no se hallan en una misma recta, y por cuatro segmentos AB, BC, CD y DA que unen estos puntos (fig. 56). Los puntos A, B, C y D se llaman *vértices* del cuadrilátero y los segmentos AB, BC, CD y DA son sus *lados*.

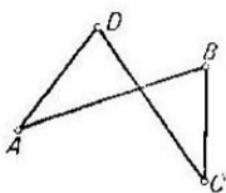


Fig. 56

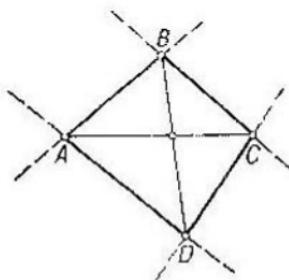


Fig. 57

Los vértices A y C y los vértices B y D se denominan vértices *opuestos*. Los lados AB y CD y los lados BC y AD se llaman lados *opuestos*.

Un cuadrilátero se llama *convexo* si se encuentra en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene cualquiera de sus lados (fig. 57). Los segmentos que unen los vértices opuestos del cuadrilátero se denominan *diagonales*.

TEOREMA 9.1. *Las diagonales del cuadrilátero convexo se cortan.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el cuadrilátero convexo dado (fig. 57). Los puntos B y C se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AD puesto que el cuadrilátero es convexo. Las semirrectas AC y AB están en un mismo semiplano respecto a la recta AD .

Según el teorema 2.2, el rayo AC pasa entre los lados del ángulo BAD o el rayo AB pasa entre los lados del ángulo CAD . Pero el rayo AB no puede pasar entre los lados del ángulo CAD ya que los puntos C y D se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AB . Por consiguiente, el rayo AC pasa entre los lados del ángulo BAD , o sea, el segmento BD corta la recta AC (según el teorema 2.3). Es decir, la diagonal BD corta la recta AC . Análogamente, con-

siderando los ángulos ABC y ABD , demostraremos que la diagonal AC corta la recta BD .

Puesto que la diagonal BD corta la recta AC , las rectas BD y AC se cortan. Pero las rectas AC y BD pueden tener sólo un punto de intersección. En la recta AC es un punto de la diagonal AC y en la recta BD es un punto de la diagonal BD ; o sea, las diagonales AC y BD se cortan. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.2. *La suma de los ángulos del cuadrilátero convexo es igual a 360° .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el cuadrilátero convexo dado (fig. 57). La semirrecta DB pasa entre las semirrectas DA y DC ya que corta el segmento AC . Por ello, el ángulo D del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos ADB y CDB . Idénticamente se demuestra que el ángulo B del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos ABD y CBD . De aquí resulta que la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos de dos triángulos BAD y BCD , o sea, es igual a 360° . Queda demostrado el teorema.

Paralelogramo. El *paralelogramo* es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos, es decir, se hallan en rectas paralelas (fig. 58).

El paralelogramo es un cuadrilátero convexo. En efecto, sea $ABCD$ el paralelogramo dado. Tomemos un lado cualquiera del paralelogramo, digamos AD . Como la recta BC es paralela a la recta AD , el segmento BC no corta la recta AD . Esto significa que los puntos B y C se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AD . En este mismo semiplano están los segmentos BC , AB y DC . Es decir, el paralelogramo se halla en un semiplano respecto a la recta que contiene su lado AD . Tomando otro lado cualquiera del paralelogramo, llegamos a la misma conclusión. Esto significa que el paralelogramo es un cuadrilátero convexo.

TEOREMA 9.3. *Los lados opuestos y los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el paralelogramo dado (fig. 59). Tracemos las diagonales AC y BD del paralelogramo. Se cortan en un punto O . Los ángulos BCA y DAC son alternos internos de las paralelas AD y BC y la secante AC

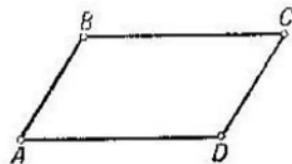


Fig. 58

ya que los puntos B y D se encuentran en diferentes semiplanos respecto a la recta AC (el segmento BD corta la recta AC). Por consiguiente, los ángulos BCA y DAC son iguales. Análogamente deducimos que los ángulos BAC y DCA también son iguales.

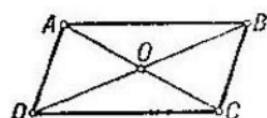


Fig. 59

Los triángulos ACB y CAD son iguales. Tienen el lado AC común y, según hemos demostrado, $\angle BCA = \angle DAC$ y $\angle BAC = \angle DCA$. De la igualdad de los triángulos resulta que $BC = AD$ y que $\angle ABC = \angle CDA$. Análogamente se demuestra que $AB = CD$ y que $\angle BAD = \angle DCB$. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.4. *Las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el paralelogramo dado y sea O el punto de intersección de sus diagonales (fig. 59). Los triángulos AOD y COB son iguales. Sus lados BC y AD son iguales por ser lados opuestos del paralelogramo. Los ángulos OBC y ODA son iguales por ser alternos internos de las paralelas BC y AD y la secante BD . Los ángulos OCB y OAD son iguales, pues son alternos internos de las paralelas BC y AD y la secante AC . De la igualdad de los triángulos resulta que $OB = OD$ y que $OA = OC$. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.5. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero convexo son paralelos e iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Si los lados opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el cuadrilátero convexo dado en el que los lados AD y BC son iguales (fig. 60). En ambos casos los triángulos ABD y CDB son iguales. En el caso de la primera parte del teorema son iguales por el primer criterio de la igualdad y en el caso de la segunda parte, por el tercer criterio.

De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos $\angle CBD = \angle ADB$ y $\angle ABD = \angle CDB$. Pero estos ángulos son alternos internos para las rectas BC y AD y para las

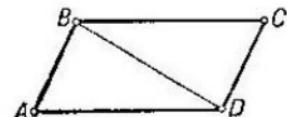


Fig. 60

rectas AB y CD . La igualdad de los ángulos alternos internos implica que la recta BC es paralela a la recta AD y que la recta CD es paralela a la recta AB ; o sea, el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. Queda demostrado el teorema.

Rectángulo. Rombo. Cuadrado. El rectángulo es un cuadrilátero en el que todos los ángulos son rectos (fig. 61).

TEOREMA 9.6. *Todo rectángulo es un paralelogramo. Las diagonales del rectángulo son iguales* (fig. 61).

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el rectángulo dado. Las rectas AD y BC son paralelas, pues son perpendiculares a la recta AB . Las rectas AB y CD son perpendiculares a la recta AD y, por esto, son también paralelas. Por consiguiente, el rectángulo es un paralelogramo.

La segunda afirmación del teorema resulta de la igualdad de los triángulos rectángulos BAD y CDA . Tienen los ángulos BAD y CDA rectos, el cateto AD común y los catetos AB y DC iguales, pues son lados opuestos del paralelogramo. De la igualdad de los triángulos resulta que sus hipotenusas son iguales. Pero las hipotenusas son las diagonales del rectángulo. Queda demostrado el teorema.

El rombo es un paralelogramo con todos los lados iguales (fig. 62).

TEOREMA 9.7. *Las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto. Las diagonales del rombo son bisectrices de sus ángulos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el rombo dado (fig. 62) y sea O el punto de intersección de sus diagonales. Los triángulos

AOB y COB son iguales. Tienen el lado OB común, $AB = CB$ por definición de rombo y $OA = OC$ por el teorema 9.4. De la igualdad de los triángulos resulta que $\angle AOB = \angle COB$ y que $\angle ABO = \angle CBO$.

Ya que los ángulos AOB y COB son iguales y adyacentes, son rectos. Queda demostrada la primera afirmación.

Puesto que el rayo BD pasa entre los lados del ángulo ABC y que los ángulos ABO y CBO son iguales, BD es la bisectriz del ángulo ABC . Queda demostrada la segunda afirmación.

El cuadrado es un rectángulo con todos los lados iguales.

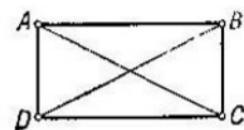


Fig. 61

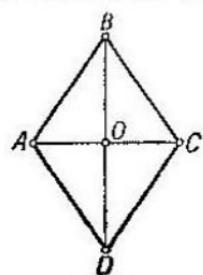


Fig. 62

El cuadrado es también un rombo y, por ello, posee las propiedades de rectángulo y de rombo.

Trapecio. **TEOREMA 9.8.** *Supongamos que tres rectas paralelas a , b y c cortan las rectas d y d_1 en los puntos A , B y C y en los puntos A_1 , B_1 y C_1 , respectivamente (fig. 63).*

Si el punto B se halla entre A y C , el punto B_1 se encuentra entre A_1 y C_1 . Si $AB = BC$, también $A_1B_1 = B_1C_1$.

DEMOSTRACIÓN Los puntos A y C se encuentran en diferentes semiplanos respecto a la recta b ya que el segmento AC corta la recta b (en el punto B). Los puntos A y A_1 se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta b , pues están en una recta paralela. Análogamente, los puntos C y C_1 se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta b . Por consiguiente, los puntos A_1 y C_1 se encuentran en diferentes semiplanos respecto a esta recta de modo que el segmento A_1C_1 corta la recta b . Pero el único punto común de las rectas A_1C_1 y b es el punto B_1 . Es decir, el punto B_1 se halla

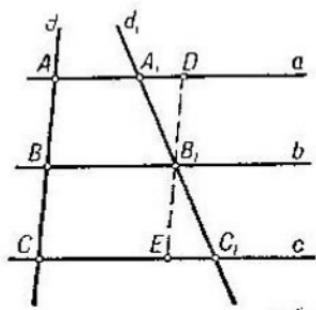


Fig. 63

entre A_1 y C_1 . Queda demostrada la primera afirmación.

Demosmos la segunda afirmación. Tracemos por el punto B_1 la recta paralela a la recta d . Corta las rectas a y c en los puntos D y E . Los triángulos B_1A_1D y B_1C_1E son iguales. En efecto, tienen $B_1D = B_1E$ porque $B_1D = AB$ y $B_1E = BC$. Los ángulos DA_1B_1 y EC_1B_1 son iguales y los ángulos A_1DB_1 y C_1EB_1 también son iguales, pues son alternos internos para las rectas paralelas a y c . De la igualdad de los triángulos se deduce que $A_1B_1 = B_1C_1$. Queda demostrado completamente el teorema.

PROBLEMA. *Divídase el segmento AB en n partes iguales.*

SOLUCIÓN. Tracemos por el punto A una semirrecta a cualquiera diferente de AB . Construyamos en la semirrecta a los segmentos iguales AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$. Tracemos por los puntos A_n y B la recta b . Las rectas que son paralelas a b y que pasan por los puntos A_1 , A_2 , ..., ..., A_{n-1} cortan el segmento AB en los puntos B_1 , B_2 , ..., ..., B_{n-1} que dividen el segmento AB en n segmentos iguales (teorema 9.8).

El *trapecio* es un cuadrilátero convexo que tiene paralelos sólo dos lados opuestos. Estos lados paralelos se llaman *bases* del trapecio. Los otros dos lados se denominan *laterales*. Un trapecio de laterales iguales se llama *isósceles*. El segmento que une los puntos medios de los laterales se denomina *base media* del trapecio.

TEOREMA 9.9. *La base media del trapecio es paralela a las bases y es igual a la semisuma de las mismas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCD$ el trapecio dado de bases AD y BC (fig. 64). Sea PQ la base media del trapecio. Tracemos por el punto P la recta paralela a las bases. Según el teorema 9.8, cortará el segmento CD en el punto medio. O sea, es precisamente la base media del trapecio que, por consiguiente, es paralela a las bases. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Tracemos por el punto Q la recta EF paralela al lateral AB . Los puntos A y B se hallan a un mismo lado de la recta EF . Los puntos C y D están a diferentes lados de esta recta. Supongamos, para concretar, que el punto C se encuentra al mismo lado que los puntos A y B . Los puntos C y E están a un mismo lado de la recta AB . Por esto, B no se halla entre C y E . Es decir, C se halla entre B y E .

De la igualdad de los triángulos CEQ y DFQ se deduce que $CE = DF$. Por la propiedad del paralelogramo, se tiene $PQ = BE = BC + CE$ y $PQ = AF = AD - FD$. Sumando miembro por miembro las igualdades obtenidas, encontramos que $2PQ = AD + BC$. Queda demostrado el teorema.

Punto de intersección de las medianas del triángulo. Se llama *línea media* del triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados.

TEOREMA 9.10. *La línea media del triángulo ABC que une los puntos medios de los lados AB y AC es paralela al lado BC y es igual a la mitad de este lado* (fig. 65).

DEMOSTRACIÓN. Sea B_1C_1 la línea media del triángulo. Tracemos por el punto B_1 la recta paralela a BC . Según el teorema 9.8, cortará el segmento AC en el punto medio, o sea, contendrá la línea media B_1C_1 . Queda demostrada la primera afirmación.

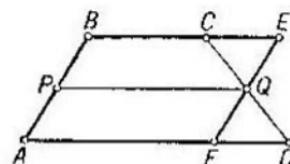


Fig. 64

Tracemos por el punto C la recta paralela a AB . Cortará la recta B_1C_1 , en un punto E . Los triángulos AC_1B_1 y CC_1E serán iguales. De la igualdad de estos triángulos

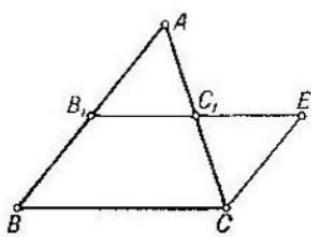


Fig. 65

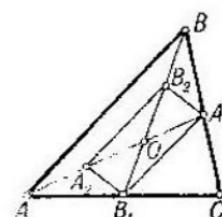


Fig. 66

resulta que $B_1C_1 = C_1E$ y que $BC = B_1E = B_1C_1 + C_1E = 2B_1C_1$, o sea, que B_1C_1 es igual a la mitad de BC . Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 9.11. *Las tres medianas del triángulo se cortan en un punto. Este punto divide cada mediana en dos segmentos que están en razón 2 : 1 contando desde el vértice.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 66). Tracemos sus medianas AA_1 y BB_1 . Demostremos primero que las dos medianas AA_1 y BB_1 se cortan. Los puntos C y B_1 se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta AA_1 . Los puntos C y B están en distintos semiplanos. Por consiguiente, los puntos B y B_1 se encuentran en distintos semiplanos. O sea, la mediana BB_1 corta la recta AA_1 . Análogamente deducimos que la mediana AA_1 corta la recta BB_1 . Puesto que las rectas AA_1 y BB_1 se cortan en un punto único, éste pertenece a la mediana AA_1 y a la mediana BB_1 , es decir, las medianas se cortan.

Tracemos la línea media A_1B_1 del triángulo ABC y la línea media A_2B_2 del triángulo AOB . Ambas son paralelas al lado AB e iguales a la mitad de este lado. De aquí resulta que el cuadrilátero $A_1B_1A_2B_2$ es un paralelogramo. Según la propiedad del paralelogramo, se tiene $B_1O = OB_2$; además $OB_2 = B_2B$ por construcción. Es decir, la mediana A_1A divide la mediana B_1B en dos segmentos que están en razón 2 : 1 contando desde el vértice B . La mediana trazada por el punto C divide la mediana BB_1 en la misma proporción. Por consiguiente, también pasa por el punto O . Queda demostrado el teorema.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué cuadrilátero se llama convexo?
2. Demuéstrese que las diagonales del cuadrilátero convexo se cortan.
3. Demuéstrese que la suma de los ángulos del cuadrilátero convexo es igual a 360° .
4. ¿Qué es paralelogramo?
5. Demuéstrese que el paralelogramo es un cuadrilátero convexo.
6. Demuéstrese que los lados opuestos y los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.
7. Demuéstrese que la suma de dos ángulos no opuestos cualesquiera del paralelogramo es igual a 180° .
8. Demuéstrese que las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.
9. ¿Qué es rectángulo?
10. Demuéstrese que todo rectángulo es un paralelogramo y que las diagonales del rectángulo son iguales.
11. Demuéstrese que un paralelogramo con diagonales iguales es un rectángulo.
12. ¿Qué es rombo?
13. Demuéstrese que las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto. Demuéstrese que las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos respectivos.
14. ¿Qué es cuadrado? Enúnciese las propiedades del cuadrado.
15. ¿Qué cuadrilátero se denomina trapecio?
16. Demuéstrese que la base media del trapecio es igual a la semisuma de sus bases.
17. Demuéstrese que la linea media del triángulo es igual a la mitad del lado correspondiente.
18. Demuéstrese que las tres medianas del triángulo se cortan en un punto.

Ejercicios

19. Demuéstrese que el cuadrilátero es convexo si sus diagonales se cortan.
20. ¿Pueden ser obtusos todos los ángulos del cuadrilátero convexo?
21. Demuéstrese que el cuadrilátero convexo es un paralelogramo si sus diagonales se cortan en el punto medio de ambas.
22. Demuéstrese que el cuadrilátero convexo es un paralelogramo si sus ángulos opuestos son iguales.
23. Demuéstrese que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo cualquiera son vértices de un paralelogramo.
24. Hállese el punto que dé la suma menor de distancias entre él y los vértices de un cuadrilátero convexo.
25. Demuéstrese que el cuadrilátero convexo es un rectángulo si todos sus ángulos son iguales.
26. En el paralelogramo se ha trazado la bisectriz de uno de sus ángulos. ¿En qué segmentos divide el lado mayor del paralelogramo, si sus lados miden 5 cm y 6 cm?

27. Hállese los ángulos del rombo si una de sus diagonales es igual a su lado.

28. Demuéstrese que el paralelogramo es un rombo si sus diagonales se cortan en ángulo recto.

29. Demuéstrese que los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos del paralelogramo son vértices de un cuadrado.

30. Demuéstrese que los puntos medios de los lados del rectángulo son vértices de un rombo y que los puntos medios de los lados del rombo son vértices de un rectángulo.

31. Demuéstrese que la recta que une los puntos medios de las diagonales del trapecio es paralela a las bases.

32. Un triángulo está en un semiplano respecto a una recta. Demuéstrese que la distancia entre esta recta y el punto de intersección de las medianas del triángulo es media aritmética de las distancias entre los vértices y esta recta.

33. Constrúyase el trapecio dados sus lados.

34. Demuéstrese que las tres rectas que pasan por los vértices del triángulo y son perpendiculares a los lados opuestos se cortan en un punto. (Sugerencia. Considerese el triángulo cuyos lados pasan por los vértices del triángulo y son paralelos a los lados opuestos).

§ 10. MOVIMIENTOS.

IGUALDAD DE FIGURAS

Concepto del movimiento. Sean F y F_1 dos figuras. Diremos que entre los puntos de estas figuras se ha establecido una *correspondencia biunívoca* si los puntos de las figuras se han unido en pares (X, X_1) de modo que todo punto X de la figura F y todo punto X_1 de la figura F_1 pertenezca a un par y sólo a uno. Los puntos X y X_1 de las figuras se denominan *puntos correspondientes*. Por lo tanto, para todo punto X de la figura F existe un punto correspondiente determinado X_1 de la figura F_1 y viceversa.

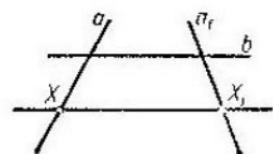


Fig. 67

En lugar de correspondencia biúnica entre los puntos de las figuras F y F_1 podemos hablar de la *aplicación biúnica* de la figura F sobre la figura F_1 . Veamos un ejemplo.

Supongamos que la figura F es la recta a y que la figura F_1 es la recta a_1 . Supongamos, además, que b es una recta que corta las rectas a y a_1 (fig. 67). Una recta cualquiera paralela a b corta la recta a en un punto X y la recta a_1 en un punto X_1 . Unamos cada dos puntos de este tipo en un par (X, X_1) . Esta unión de puntos en pares es una correspondencia biúnica entre las rectas a y a_1 .

Una aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo se llama *movimiento* si conserva las distancias. Esto significa que siendo X e Y dos puntos cualesquiera y X_1 e Y_1 sus puntos correspondientes, se tiene $XY = X_1Y_1$.

Propiedades del movimiento. **TEOREMA 10.1** *Si, por efecto de un movimiento, tres puntos A , B y C que se hallan en una recta se transforman en los puntos A_1 , B_1 y C_1 , éstos se hallarán en una recta. Si el punto B está entre A y C , el punto B_1 estará entre A_1 y C_1 .*

DEMOSTRACIÓN. Si los puntos A_1 , B_1 y C_1 no se hallan en una recta, son vértices de un triángulo. Por ello, se tiene $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. Por definición del movimiento, de aquí resulta que $AC < AB + BC$. Sin embargo, debido a la propiedad de la medición de los segmentos, se tiene $AC = AB + BC$. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Probemos ahora que el punto B_1 está entre A_1 y C_1 . Supongamos que A_1 se halla entre B_1 y C_1 . Entonces será $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ y, por consiguiente, tendremos $AB + AC = BC$. Pero esto quedará en contradicción con la igualdad $AB + BC = AC$. O sea, el punto A_1 no puede estar entre B_1 y C_1 . Análogamente se demuestra que el punto C_1 no puede hallarse entre A_1 y B_1 . Puesto que uno de los tres puntos A_1 , B_1 y C_1 se encuentra entre los otros dos, este punto puede ser únicamente B_1 . Queda demostrado completamente el teorema.

Consideremos un movimiento, es decir, una aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo que conserva las distancias. Sea F una figura cualquiera de este plano. Cuando el punto X recorre la figura F , el punto correspondiente X_1 recorre una figura F_1 . Diremos que la figura F_1 se obtiene de la figura F mediante un movimiento. Diremos también que por efecto de este movimiento la figura F se transforma en F_1 . Toda figura F_1 que se obtiene de la figura F mediante un movimiento se llama *igual* a F .

Del teorema 10.1 se deduce que *todo movimiento transforma las rectas en rectas, las semirrectas en semirrectas y los segmentos en segmentos*.

Sean AB y AC dos semirrectas que parten de un punto común A y que no se hallan en una misma recta. Por efecto del movimiento, estas semirrectas se transforman en unas semirrectas A_1B_1 y A_1C_1 . Puesto que todo movimiento conserva las distancias, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son

iguales por el tercer criterio de la igualdad. La igualdad de los triángulos implica la igualdad de los ángulos BAC y $B_1A_1C_1$. Por consiguiente, los movimientos no alteran los ángulos entre las semirrectas.

Simetria respecto a la recta. Sean a una recta y X un punto cualquiera del plano (fig. 68). Tracemos por el punto X

la recta b perpendicular a la recta a . Cortará la recta a en el punto A . Construyamos ahora el punto X_1 ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto X se halla en la recta a , el punto X_1 coincide con X . Si X no se halla en la recta a , el punto X_1 se encuentra en el otro semiplano respecto a la recta a , pertenece a la recta b y la distancia AX_1 es igual a la distancia AX . El punto X_1 se llama *simétrico* del punto X respecto

a la recta a . El punto X es el simétrico del punto X_1 respecto a la recta a . La aplicación del plano sobre sí mismo, que a todo punto X le pone en correspondencia el punto X_1 simétrico respecto a la recta a , se llama *transformación de simetría o reflexión especular* respecto a la recta a .

TEOREMA 10.2. *La reflexión especular respecto a la recta es un movimiento.*

DEMOSTRACION. Sean X e Y dos puntos cualesquiera y sean X_1 e Y_1 los puntos correspondientes suyos, simétricos de éstos respecto a la recta a . La afirmación del teorema consiste en que $X_1Y_1 = XY$. Consideremos el caso en que los puntos X e Y no se hallan en la recta a ni en una perpendicular a la recta a (fig. 69).

Los triángulos rectángulos ABX y ABX_1 son iguales pues tienen el cateto común AB y los catetos XA y X_1A son iguales por definición de la simetría. De aquí resulta que $XB = X_1B$ y que $\angle XBA = \angle X_1BA$. Entonces, resultan iguales los triángulos XYB y X_1Y_1B . Tienen $XB = X_1B$, $YB = Y_1B$ y $\angle YBX = \angle Y_1BX_1$. La igualdad de estos triángulos implica que $X_1Y_1 = XY$.

La igualdad $X_1Y_1 = XY$ se obtiene también en los casos en que uno o ambos puntos se hallan en la recta a o en una perpendicular a la recta a . Recomendamos al lector que de-

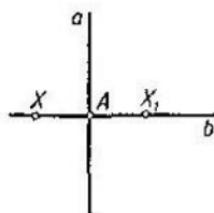


Fig. 68

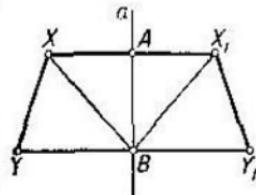


Fig. 69

muestre esto a título de ejercicio. Queda demostrado el teorema.

Si la reflexión specular respecto a la recta a transforma la figura F en sí misma, esta figura se denomina *simétrica* y la recta a se llama *eje de simetría* de la figura. La bisectriz

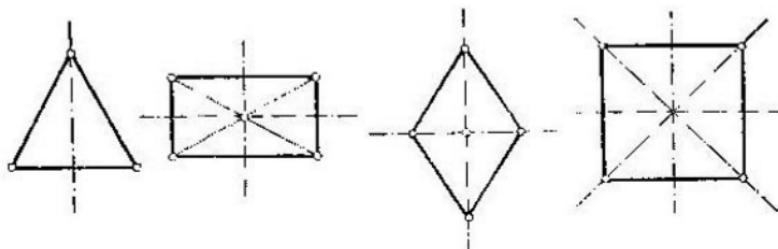


Fig. 70

del ángulo correspondiente al vértice del triángulo isósceles es su eje de simetría. Las diagonales del rombo son sus ejes de simetría. Las rectas que pasan por el punto de intersección de las diagonales del rectángulo paralelamente a sus lados, son ejes de simetría. Las diagonales del cuadrado y las rectas que pasan por el punto de intersección de las diagonales paralelamente a los lados, son ejes de simetría (fig. 70).

Simetría respecto al punto. Sea O un punto del plano y sea X un punto cualquiera (fig. 71). Construyamos el punto X_1 ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto X coincide con O , el punto X_1 es el punto O . Si el punto X no coincide con O , el punto X_1 pertenece a la semirrecta complementaria de la semirrecta OX siendo la distancia OX_1 igual a OX . El punto X_1 obtenido de esta forma se llama *simétrico* respecto al punto O . La transformación del plano sobre sí mismo, que a todo punto X pone en correspondencia el punto X_1 según la regla señalada, se denomina *transformación de simetría respecto al punto O* .

TEOREMA 10.3. *Toda transformación de simetría respecto a un punto es un movimiento.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X e Y dos puntos cualesquiera y sean X_1 e Y_1 los puntos que les corresponden en virtud

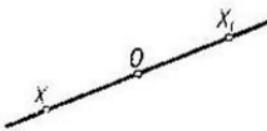


Fig. 71

de la simetría respecto al punto O . El teorema afirma que $X_1Y_1 = XY$. Consideremos el caso en que los puntos X e Y no coinciden con el punto O y no se hallan en una misma recta que pasa por el punto O (fig. 72).

Los triángulos XOY y X_1OY_1 son iguales. Sus ángulos de vértice O son iguales, pues son verticales, y $X_1O = XO$ e $Y_1O = YO$ por definición de la simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que $X_1Y_1 = XY$.

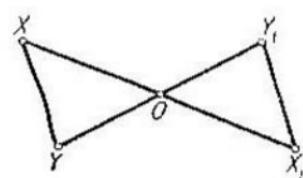


Fig. 72

El mismo resultado $X_1Y_1 = XY$ se obtiene para las demás posiciones de los puntos X e Y respecto al punto O . Recomendamos al lector que demuestre, a título de ejercicio, esto último. Queda demostrado el teorema.

Si la simetría respecto al punto O transforma la figura F en sí misma, se dice que la figura es *simétrica central*. El punto O se denomina *centro de simetría*. El paralelogramo es una figura simétrica central. Su centro de simetría es el punto de intersección de las diagonales.

Traslación paralela. Recibe el nombre de *traslación paralela* el movimiento en el que los puntos se desplazan a una misma distancia según rectas paralelas.

TEOREMA 10.4. *Cualesquiera que sean los puntos A_1 y A_2 , existe una traslación paralela única que transforma el punto A_1 en A_2 .*

DEMOSTRACIÓN. (fig. 73). Tomemos un punto A que no se halla en la recta A_1A_2 e indiquemos por O_1 y O_2 los puntos medios de los segmentos A_1A y A_2A . Sea X un punto cualquiera del plano. Construyamos el punto X_1 simétrico de éste respecto al punto O_1 y después el punto X_2 simétrico de X_1 respecto al punto O_2 . La transformación del plano que hace corresponder el punto X_2 al punto X es un movimiento ya que la simetría respecto al punto O_1 y la simetría respecto al punto O_2 conservan las distancias.

Puesto que el segmento O_1O_2 es la línea media del triángulo X_1X_2X , las rectas XX_2 y O_1O_2 son paralelas y el segmento XX_2 es igual al doble del segmento O_1O_2 . Por consiguiente, en virtud de este movimiento los puntos se desplazan según paralelas a la recta O_1O_2 a una distancia igual a $2(O_1O_2)$, es decir, ésta es una traslación paralela. Esta traslación paralela transforma el punto A_1 en el punto A_2 .

Demostremos la unicidad de la traslación paralela (fig. 74). Sea X un punto cualquiera del plano. Tracemos por el punto X la recta paralela a la recta A_1A_2 y construyamos en ésta los segmentos XX_1 y XX_2 iguales al segmento A_1A_2 . Los puntos X_1 y X_2 se diferencian en que están a distintos lados de la recta A_1X . Supongamos, para concretar, que el punto X_1 y el punto A_2 están a un mismo lado de la recta A_1X .

El punto X_2 no puede corresponder al punto X en una traslación paralela que transforme el punto A_1 en A_2 . En efecto, la recta A_1X debe transformarse en la recta A_2X_2 .

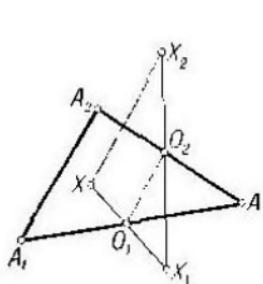


Fig. 73

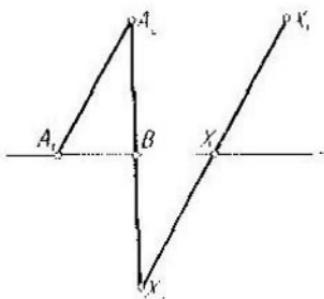


Fig. 74

El punto B en el que se cortan el segmento A_2X_2 y la recta A_1X debe desplazarse por la recta paralela a A_1A_2 . Por consiguiente, el punto B debe permanecer fijo. Pero esto es imposible ya que debe desplazarse a una distancia igual a A_1A_2 . Es decir, en la traslación paralela considerada, al punto X puede corresponder sólo el punto X_1 . Luego, el punto X_1 correspondiente al punto X se determina únicamente y ello prueba la unicidad de la traslación paralela. Queda demostrado el teorema.

Rotación. Se llama *rotación* de ángulo φ respecto al punto O el movimiento en el que el punto O permanece fijo y todo rayo que parte del punto O gira en ángulo φ , o sea, forma ángulo φ con el rayo que le corresponde.

TEOREMA 10.5. *Si en el movimiento permanece fijo sólo un punto, este movimiento es una rotación.*

DEMOSTRACIÓN (fig. 75). Sea O el punto fijo. Tracemos desde él dos rayos a_1 y b_1 . Se transformarán en el movimiento en los rayos a_2 y b_2 . Los ángulos (a_1b_1) y (a_2b_2) serán iguales pues corresponderán en el movimiento. Tracemos la bisectriz

c_1 del ángulo $(a_1 b_1)$, la bisectriz c_2 del ángulo $(a_2 b_2)$ y la bisectriz del ángulo $(c_1 c_2)$. Complementemos la última hasta obtener una recta que llamaremos s .

Puesto que las bisectrices c_1 y c_2 son simétricas respecto a la recta s y que los ángulos $(a_1 b_1)$ y $(a_2 b_2)$ son iguales, éstos también son simétricos respecto a la recta s . Pueden darse dos casos de esta simetría: los rayos correspondientes

son a_1 y a_2 , b_1 y b_2 o los rayos correspondientes son a_1 y b_2 , b_1 y a_2 . Afirmando que el primer caso es imposible.

Tracemos por un punto D , diferente de O , de la recta s una recta que corte los rayos a_1 y b_1 . Sean A_1 y B_1 los puntos de intersección. La recta simétrica de ésta respecto a s corta los rayos a_2 y b_2 en unos puntos A_2 y B_2 . En el primer caso de simetría respecto a la recta s , el punto A_1 se transforma en A_2 ; y el punto B_1 en B_2 . Puesto que el punto O se transforma en sí mismo, se tiene $OA_1 = OA_2$ y $OB_1 = OB_2$. Por lo tanto, en el primer caso los puntos A_1 y A_2 y los puntos B_1 y B_2 son correspondientes en el movimiento de que trata el teorema.

Como quiera que todo movimiento conserva las distancias entre los puntos y el orden de posición de puntos en la recta, en el primer caso cualquier punto X de la recta $A_1 B_1$ se transformará en un mismo punto, tanto en el movimiento considerado como en la simetría respecto a la recta s . En particular, el punto D permanecerá fijo. Pero esto es imposible ya que en el movimiento considerado permanece fijo sólo el punto O . Por consiguiente, el primer caso es imposible.

Queda el segundo caso. En éste, las rectas que corresponden en la simetría respecto a la recta s son las rectas a_1 y b_2 y las rectas b_1 y a_2 . Los ángulos $(a_1 a_2)$ y $(b_1 b_2)$ corresponden en la simetría y, por consiguiente, son iguales. Queda demostrado el teorema.

De este teorema resulta que *dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a dos rectas secantes, equivalen a una rotación*.

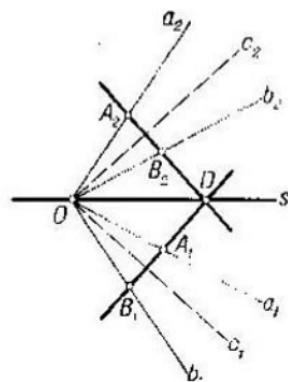


Fig. 75

En efecto, el movimiento, que se obtiene como resultado de las reflexiones especulares respecto a las dos rectas secantes, deja fijo sólo un punto, el punto de intersección de las rectas. Pero según el teorema 10.5, este movimiento es una rotación.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es movimiento? ¿Qué figuras se llaman iguales?
2. Demuéstrese el teorema 10.1: Si, por efecto de un movimiento, tres puntos A , B y C que se hallan en una recta se transforman en los puntos A_1 , B_1 y C_1 , éstos se hallarán en una recta. Si el punto B está entre A y C , el punto B_1 estará entre A_1 y C_1 .
3. Demuéstrese que todo movimiento transforma rectas en rectas, rectas secantes en rectas secantes y rectas paralelas en rectas paralelas.
4. ¿Qué es simetría respecto a la recta?
5. Demuéstrese que toda simetría respecto a la recta es un movimiento.
6. Demuéstrese que las líneas punteadas de la fig. 70 son ejes de simetría de las figuras representadas en ella.
7. ¿Qué es simetría respecto al punto?
8. Demuéstrese que toda simetría respecto al punto es un movimiento.
9. Demuéstrese que el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo es su centro de simetría.
10. ¿Qué es rotación?
11. ¿Qué es traslación paralela?

Ejercicios

12. Demuéstrese que si dos puntos A y B permanecen fijos en el movimiento, todos los puntos de la recta AB permanecen fijos.
13. Demuéstrese que si tres puntos no pertenecientes a una recta permanecen fijos, todos los puntos permanecen fijos.
14. Demuéstrese que para hacer coincidir dos cualesquiera segmentos iguales basta a lo sumo dos reflexiones especulares.
15. Demuéstrese que para hacer coincidir dos cualesquiera triángulos iguales basta a lo sumo tres reflexiones especulares.
16. Demuéstrese que para obtener cualquier movimiento basta a lo sumo tres reflexiones especulares.
17. Demuéstrese que si a y b son ejes de simetría de una figura, la recta simétrica de a respecto a la recta b es también eje de simetría.
18. Demuéstrese que es isósceles todo triángulo que tenga un eje de simetría.
19. Demuéstrese que el triángulo no puede tener centro de simetría.
20. Demuéstrese que si A y B son centros de simetría de una figura, el punto A_1 simétrico de A respecto a B es también centro de simetría. Por lo tanto, la figura tiene infinitos centros de simetría.
21. Demuéstrese que -dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a dos rectas paralelas, equivalen a una traslación paralela.

22. Demuéstrese que dos simetrías, realizadas sucesivamente respecto a dos puntos A y B , equivalen a una traslación paralela.

23. Sea dada una recta y dos puntos A y B que no están en la misma. Hállese un punto C de la recta para el cual la suma de sus distancias hasta los puntos A y B sea mínima. Considerense dos casos: 1) los puntos A y B se encuentran en distintos semiplanos respecto a la recta y 2) los puntos A y B se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta.

§ 11. CIRCUNFERENCIA

Propiedades elementales de la circunferencia. La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto. Este último se llama *centro* de la circunferencia y la distancia entre el centro y los puntos de la circunferencia se denomina *radio* de la circunferencia. También se llama *radio* el segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos. El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*. Toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia se denomina *diámetro*.

TEOREMA 11.1. *Todo diámetro de la circunferencia es eje de simetría. El centro de la circunferencia es centro de simetría.*

DEMOSTRACIÓN. Sea a el diámetro de la circunferencia y sea X un punto cualquiera de la misma (fig. 76). Construyamos el punto X_1 simétrico del punto X respecto al diámetro a . Los triángulos rectángulos OAX y OAX_1 son iguales.

Tienen el cateto OA común y los catetos AX y AX_1 son iguales por definición de la simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que $OX_1 = OX$. Pero esto significa que el punto X_1 se halla en la circunferencia. O sea, la simetría respecto al diámetro transforma la circunferencia en sí misma, es decir, el diámetro es eje de simetría de la circunferencia.

Construyamos ahora el punto X_2 simétrico del punto X respecto al centro O de la circunferencia (fig. 76). Según la definición de la simetría respecto al punto, se tiene $OX_2 = OX$, o sea, el punto X_2 se halla en la circunferencia. Por consiguiente, el centro de la circunferencia es centro de la simetría.

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 11.2. *El diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad.*

DEMOSTRACIÓN. Sea AB la cuerda dada y sea C su punto medio (fig. 77). Tracemos el diámetro que pasa por el punto C . Los triángulos OCA y OCB son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Tienen iguales los lados OA y OB que son radios, el lado OC es común y $AC = CB$ porque C es el punto medio del segmento AB . La igualdad de estos triángulos implica que sus ángulos de vértice C , iguales y adyacentes, son rectos. Por lo tanto, el diámetro OC es perpendicular a la cuerda AB y la divide por la mitad. No existe otro diámetro perpendicular a la cuerda AB ya que desde el punto O se puede trazar sólo una recta perpendicular a la recta AB . Queda demostrado el teorema.

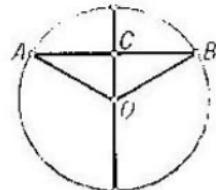


Fig. 77

TEOREMA 11.3. *Ninguna cuerda es mayor que el diámetro. Es igual al diámetro si ella misma es diámetro.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la cuerda AB no es diámetro (fig. 77). Entonces, del triángulo AOB se tiene $AB < AO + OB$. Como AO y BO son radios, AB es menor que el diámetro. Queda demostrado el teorema.

La recta que pasa por un punto A de la circunferencia se llama *tangente* si es perpendicular al radio que va al punto A (fig. 78). El punto A se llama *punto de tangencia*.

TEOREMA 11.4. *Toda tangente tiene sólo un punto común con la circunferencia, el punto de tangencia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B otro punto cualquiera de la tangente diferente del punto de tangencia A (fig. 78). Por su propiedad respectiva de perpendicular y de oblicua $OB > OA$, o sea, la distancia entre el punto B y el centro es mayor que el radio. Por consiguiente, el punto B no pertenece a la circunferencia. Queda demostrado el teorema.

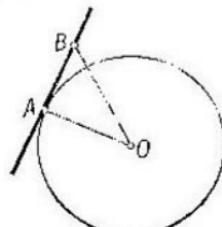


Fig. 78

Ángulos centrales. Sean A y B dos puntos de la circunferencia (fig. 79). Tracemos la recta que pasa por estos puntos. Divide el plano en dos semiplanos. Llamaremos *arcos de circunferencia* a las partes de la misma que se hallan en estos semiplanos. Si AB

es un diámetro los arcos de circunferencia se denominan *semicircunferencias*.

Si la cuerda AB no es diámetro, diferenciaremos los arcos de circunferencia del modo siguiente. El centro de la circunferencia se encuentra en uno de los semiplanos en que la recta AB divide el plano. El arco que se halla en este mismo semiplano será llamado *arco mayor que la semicircunferencia*. El otro arco será llamado *arco menor que la semicircunferencia*. Los radios que van a los puntos del arco menor que la semicircunferencia cortan la cuerda AB y los radios que van a los puntos del arco mayor que la circunferencia no cortan la cuerda AB .

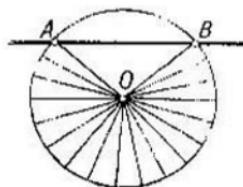


Fig. 79

Llamaremos *ángulo central* correspondiente al arco de circunferencia dado la figura formada por rayos que parten del centro de la circunferencia y que cortan este arco. En la fig. 79 puede verse los rayos de un ángulo central mayor que la semicircunferencia.

Definamos la *medida en grados* de los ángulos centrales. Si el arco correspondiente \widehat{AB} es menor que la semicircunferencia, la medida del ángulo central es idéntica a la medida corriente del ángulo formado por las semirrectas OA

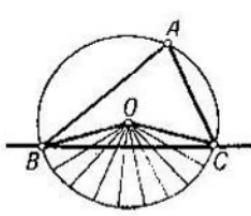


Fig. 80

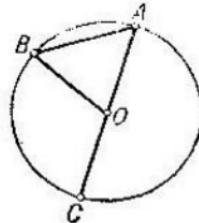


Fig. 81

y OB . Si el arco es igual a la semicircunferencia, o sea, si AB es diámetro, tomamos la medida angular igual a 180° . Finalmente, si el arco es mayor que la semicircunferencia, tomamos la medida angular igual a $360^\circ - \alpha^\circ$, donde α° es la medida en grados del otro ángulo, o sea, del que es menor que la semicircunferencia.

Ángulos inscritos. Un ángulo se denomina *inscrito* en la circunferencia, si su vértice A se halla en la circunferencia y sus lados cortan la circunferencia en unos puntos B y C distintos de A (fig. 80). La recta BC divide la circunferencia en dos arcos. El ángulo central, correspondiente a aquel arco que no contiene el punto A , se llama *ángulo central correspondiente* al ángulo inscrito dado. En la fig. 80 el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito está marcado por los rayos que parten del punto O .

TEOREMA 11.5. *Todo ángulo inscrito en la circunferencia es mitad del ángulo central correspondiente.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que uno de los lados del ángulo inscrito es un diámetro (fig. 81). En este caso el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito A es igual al ángulo BOC . El triángulo AOB es

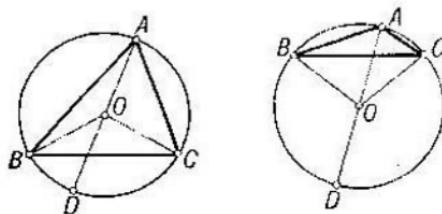


Fig. 82

isosceles de laterales OA y OB . Sus ángulos A y B son iguales. El ángulo exterior de vértice O de este triángulo es igual a la suma de los ángulos A y B . De aquí resulta que el ángulo BAC es mitad del ángulo central correspondiente.

Supongamos ahora que ninguno de los lados del ángulo inscrito es un diámetro. Tracemos el diámetro que pasa por el vértice A del ángulo inscrito. Diferenciaremos dos casos: 1) el diámetro OA separa los lados del ángulo A (fig. 82) y 2) el diámetro no separa los lados del ángulo A .

Consideremos el primer caso. Según hemos demostrado, $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$ y $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$. Si el ángulo central correspondiente al ángulo A es menor que la semicircunferencia (fig. 82, a la izquierda), de aquí resulta que $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$. Por consiguiente, el ángulo BAC es mitad del ángulo central correspondiente.

Si el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito A es mayor que la semicircunferencia (fig. 82, a la derecha), se tiene $\angle BOD = 180^\circ - \angle AOB$ y $\angle COD = 180^\circ - \angle AOC$. De aquí deducimos que $\angle BAC = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC)$, o sea, que el ángulo BAC es mitad del ángulo central correspondiente.

Análogamente se analiza el segundo caso en que el diámetro AO no separa los lados del ángulo A . Queda demostrado el teorema.

Del teorema 11.5 resulta que son iguales los ángulos inscritos cuyos lados pasan por unos puntos A y B de la circun-

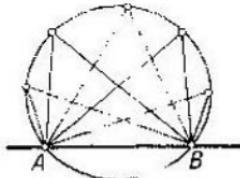


Fig. 83

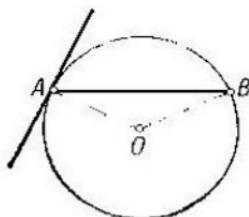


Fig. 84

ferencia y cuyos vértices se hallan en uno de los arcos determinados por la recta AB (fig. 83). En particular, los ángulos que descansan en un diámetro son rectos.

Sea AB una cuerda de circunferencia (fig. 84). Tracemos por el punto A la tangente a la circunferencia. El punto A divide la tangente en dos semirrectas llamadas semitangentes. Se llaman correspondientes el ángulo entre la semitangente y la cuerda y el ángulo central que corresponde a aquel de los arcos \widehat{AB} que se encuentra en el mismo semiplano respecto a la recta AB que la semitangente tomada.

TEOREMA 11.6. *El ángulo entre la cuerda y la semitangente trazada por un punto extremo de la primera es mitad del ángulo central correspondiente.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos primero aquel ángulo entre la semitangente y la cuerda que corresponda al ángulo central menor (fig. 84). En este caso, el ángulo entre la semitangente y la cuerda es igual a $90^\circ - \angle OAB$. Pero como el ángulo OAB es igual a $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB)$, resulta que el ángulo que nos interesa es igual a $\frac{1}{2}\angle AOB$, o sea, es mitad del

ángulo central correspondiente. El ángulo entre la cuerda y la otra semitangente es el adyacente de éste y, por ello, es igual a $180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$, o sea, precisamente a la mitad del ángulo central correspondiente. Queda demostrado el teorema.

Circunferencias inscrita y circunscrita. Diremos que el punto X se halla *dentro* del triángulo ABC (fig. 85) si está al mismo lado de la recta BC que el punto A , al mismo lado de la recta AC que el punto B y al mismo lado de la recta AB que el punto C . Se llama circunferencia *inscrita* en el triángulo la que tiene su centro dentro del triángulo y es tangente a sus lados.

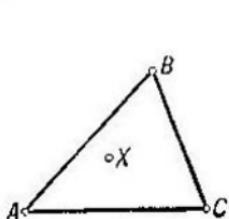


Fig. 85

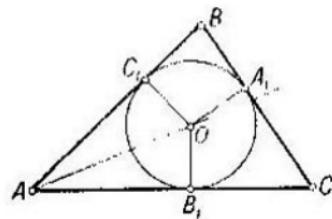


Fig. 86

Demostremos que *el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo se halla en el cruce de sus bisectrices* (fig. 86).

Sea O el centro de la circunferencia inscrita. Como quiera que el punto O está dentro del triángulo, la semirrecta AO se halla en el mismo semiplano respecto a la recta AC que la semirrecta AB y en el mismo semiplano respecto a la recta AB que la semirrecta AC . Por lo tanto, la semirrecta AO pasa entre las semirrectas AB y AC .

Sean C_1 y B_1 los puntos de tangencia de la circunferencia y de los lados AC y AB del triángulo. Los triángulos rectángulos AOC_1 y AOB_1 son iguales. Tienen la hipotenusa AO común y los catetos OC_1 y OB_1 iguales en tanto que radios. De aquí se deduce la igualdad de los ángulos OAC_1 y OAB_1 . Pero esto significa que el centro de la circunferencia se halla en la bisectriz del triángulo trazada desde el vértice A . Análogamente demostraremos que el centro de la circunferencia está en las otras dos bisectrices del triángulo.

Queda demostrada la afirmación.

Demostremos ahora que *en todo triángulo se puede inscribir una circunferencia*.

Tracemos dos bisectrices del triángulo (fig. 87). Se cortan en un punto O . (La demostración de que las bisectrices se cortan es idéntica a la demostración de que las medianas se cortan.) Tracemos por el punto O las perpendiculares OA_1 , OB_1 y OC_1 a las rectas AB , AC y BC . Los triángulos rectángulos AOB_1 y AOC_1 son iguales. Tienen la hipotenusa AO común y los ángulos OAB_1 y OAC_1 iguales pues AO es bisectriz. Por consiguiente, $OB_1 = OC_1$. Análogamente se demuestra que $OC_1 = OA_1$. La circunferencia de centro O

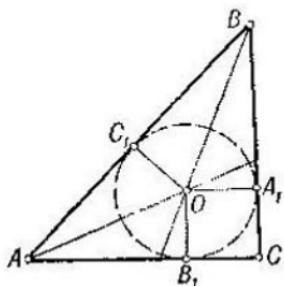


Fig. 87

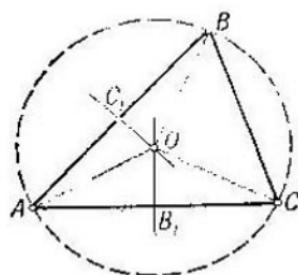


Fig. 88

y de radio OA_1 es tangente a los lados del triángulo en los puntos A_1 , B_1 y C_1 , o sea, es circunferencia inscrita. Queda demostrada la afirmación.

Se llama circunferencia *circunscrita* al triángulo la que pasa por cada uno de los vértices del triángulo.

Demostremos que *en torno a cualquier triángulo se puede circunscribir una circunferencia*.

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 88). Tracemos por los puntos medios de los lados AB y AC del triángulo las rectas perpendiculares a éstos. Dichas rectas se cortarán en un punto O . Efectivamente, de lo contrario serían paralelas. Pero en este caso, las rectas AB y AC , en tanto que perpendiculares a dos paralelas, también resultarían paralelas, cosa imposible puesto que se cortan (en el punto A).

De la igualdad de los triángulos rectángulos AOB_1 y COB_1 se tiene $OA = OC$. De la igualdad de los triángulos rectángulos AOC_1 y BOC_1 resulta $OA = OB$. Por ello, la circunferencia de centro O y de radio OA pasa por los tres vértices del triángulo ABC , o sea, es circunferencia circunscrita. Queda demostrada la afirmación.

- PROBLEMA. Dada una circunferencia de centro O , constrúyanse las tangentes que pasan por un punto A exterior a la circunferencia.

SOLUCIÓN (fig. 89). Construyamos la circunferencia que tiene el segmento OA como diámetro. Sean B y C los puntos de intersección de esta circunferencia y de la dada. Las rectas AB y AC son tangentes a la circunferencia dada, pues los ángulos OBA y OCA son rectos (teorema 11.5).

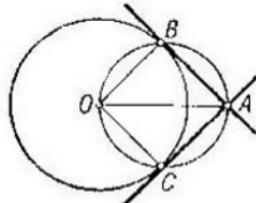


Fig. 89

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es circunferencia y qué son centro, radio, cuerda y diámetro de la circunferencia?
2. Demuéstrese que el diámetro es eje de simetría de la circunferencia y que el centro es centro de simetría.
3. Demuéstrese que el diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad.
4. Demuéstrese que ninguna cuerda es mayor que el diámetro y que la cuerda es igual al diámetro sólo en el caso en que ella misma sea diámetro.
5. ¿Qué es arco de circunferencia? ¿Qué arco se denomina arco menor que la semicircunferencia? ¿Qué arco se denomina arco mayor que la semicircunferencia?
6. ¿Qué es ángulo central correspondiente a un arco de circunferencia?
7. ¿Cómo se determina la medida en grados del ángulo central?
8. ¿Qué es ángulo inscrito en la circunferencia? ¿Qué ángulo central se llama correspondiente al ángulo inscrito?
9. Demuéstrese el teorema: el ángulo inscrito en la circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.
10. Demuéstrese que el ángulo entre la cuerda y la semitangente en un punto extremo de la primera se mide por la mitad del ángulo central correspondiente.
11. ¿Qué significa la expresión: el punto se halla dentro del triángulo? ¿Qué circunferencia se denomina inscrita en el triángulo?
12. Demuéstrese que en todo triángulo se puede inscribir una circunferencia y que el centro de la circunferencia inscrita se halla en el cruce de las bisectrices.
13. ¿Qué circunferencia se denomina circunscrita al triángulo? Demuéstrese que cualquiera que sea el triángulo se le puede circunscribir una circunferencia, y sólo una.

Ejercicios

14. Demuéstrese que si la recta tiene un punto común con la circunferencia y no es tangente a la circunferencia en este punto, tiene un punto común más con la circunferencia.

15. Demuéstrese que la recta no puede cortar la circunferencia en tres puntos.

16. Trácese una circunferencia de radio dado tangente a los lados de un ángulo.

17. Hállese la circunferencia de radio dado tangente a dos circunferencias. ¿Cuál es el número máximo de soluciones de este problema?

18. Hállese el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto A a las rectas que pasan por el punto B .

19. Hállese el lugar geométrico de los vértices de los triángulos de base AB y de ángulo dado de vértice C .

20. Constrúyase el triángulo ABC a partir de su lado AB , su ángulo C y la altura relativa a la base AB .

21. Hállese el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que pasan por un mismo punto.

22. Sea ABC un triángulo. Constrúyanse las circunferencias tangentes a las tres rectas AB , AC y BC . ¿Cuántas son estas circunferencias?

23. Dos circunferencias se cortan en los puntos A y B . Por el punto B se traza una recta cortando las circunferencias en los puntos X e Y . Demuéstrese que el ángulo XAY no depende de la recta que se tome.

24. Se dice que el cuadrilátero convexo está inscrito en la circunferencia si sus vértices se hallan en la misma. Demuéstrese que la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito es igual a 180° .

25. Demuéstrese que son iguales los segmentos AB y AC de dos tangentes trazadas a la circunferencia por un mismo punto (fig. 89).

26. El cuadrilátero convexo se denomina circunscrito a la circunferencia si sus lados son tangentes a la misma. Demuéstrese que en el cuadrilátero circunscrito las sumas de sus lados opuestos son las mismas. (Sugerencia. Empléese la propiedad de los segmentos de las tangentes a la circunferencia trazadas por un mismo punto. Véase el ejercicio 25.)

27. Demuéstrese que la distancia entre dos cualesquiera puntos interiores del triángulo no es mayor que el lado mayor del triángulo.

§ 12. SEMEJANZA DE LOS TRIÁNGULOS

Criterio principal de la semejanza de los triángulos. Dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se llaman *semejantes* si

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

En una palabra, los triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. La semejanza de los triángulos se indica por el símbolo \sim . En nuestro caso, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

TEOREMA 12.1. Si en dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene $\angle A = \angle A_1$ y $\angle B = \angle B_1$, los triángulos son semejantes.

DEMOSTRACION. Puesto que la suma de los ángulos del triángulo es igual a dos rectos, la igualdad de los ángulos A y A_1 y de los ángulos B y B_1 implica la igualdad de los ángulos C y C_1 . Demostremos que los lados de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son proporcionales.

Supongamos, para puntualizar, que $AB \leq A_1B_1$. Tomemos en la semirrecta AB el segmento AB_2 igual al A_1B_1 (fig. 90, a la izquierda). Tracemos por el punto B_2 la recta

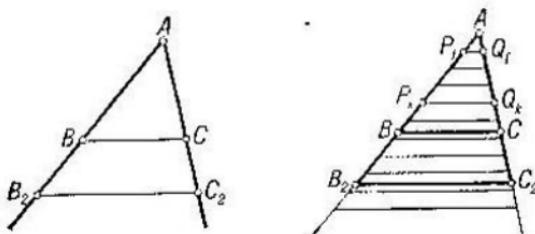


Fig. 90

paralela a BC . Corta la semirrecta AC en un punto C_2 . Según la propiedad de los ángulos de las paralelas BC y B_2C_2 con la secante BB_2 , los ángulos ABC y AB_2C_2 son iguales. El triángulo AB_2C_2 es igual al triángulo $A_1B_1C_1$ pues $\angle B_2AC_2 = \angle B_1A_1C_1$ por hipótesis del teorema siendo, además, $AB_2 = A_1B_1$ y $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$ por construcción. De la igualdad de estos triángulos resulta que $AC_2 = A_1C_1$.

Tomemos un segmento pequeño AP_1 en la semirrecta AB de modo que las dos razones $\frac{AB}{AP_1}$ y $\frac{AB_2}{AP_1}$ no sean números enteros (fig. 90, a la derecha). Consideremos en la semirrecta AB los puntos $P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ de manera que $AP_n = k \cdot AP_1$. Sea n el entero de la división de AB por AP_1 y sea m el entero de la división de AB_2 por AP_1 . El punto B está entonces entre los puntos P_n y P_{n+1} y el punto B_2 entre P_m y P_{m+1} . Por ello,

$$n \cdot AP_1 < AB < (n + 1) \cdot AP_1,$$

$$m \cdot AP_1 < AB_2 < (m + 1) \cdot AP_1.$$

De aquí resulta que

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AB}{AB_2} < \frac{n+1}{m}. \quad (1)$$

Tracemos por los puntos P_1, P_2, P_3, \dots las rectas paralelas a BC . Estas rectas, según el teorema 9.8, cortan la semirrecta AC en unos puntos Q_1, Q_2, Q_3, \dots siendo los segmentos $AQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots$ iguales. El punto C se halla entre los puntos Q_n y Q_{n+1} y el punto C_2 entre los puntos Q_m y Q_{m+1} . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n \cdot AQ_1 &< AC < (n+1) \cdot AQ_1, \\ m \cdot AQ_1 &< AC_2 < (m+1) \cdot AQ_1. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m}. \quad (2)$$

Las desigualdades (1) y (2) permiten ver que las razones $\frac{AB}{AB_2}$ y $\frac{AC}{AC_2}$ difieren no más que en $\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1}$. Puesto que $AB \leq A_1B_1$, resulta que $n \leq m$. Por eso,

$$\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{m+n+1}{m(m+1)} \leq \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m},$$

o sea, las razones $\frac{AB}{AB_2}$ y $\frac{AC}{AC_2}$ difieren no más que en $\frac{2}{m}$.

Si tomamos el segmento AP_1 suficientemente pequeño, el número m será tan grande como se quiera y $\frac{2}{m}$ será tan pequeño como se quiera. Es decir, las razones $\frac{AB}{AB_2}$ y $\frac{AC}{AC_2}$ difieren *todo lo poco que se quiera*. Pero esto puede darse sólo si son iguales. O sea,

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}.$$

Puesto que $AB_2 = A_1B_1$ y $AC_2 = A_1C_1$, se tiene

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Análogamente se demuestra que

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Queda demostrado el teorema.

Otros criterios de la semejanza de los triángulos.
TEOREMA 12.2. Si en los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene $\angle A = \angle A_1$ y

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \quad (3)$$

los triángulos son semejantes.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el triángulo $A_2B_2C_2$ que tenga $A_2B_2 = A_1B_1$, $\angle A_2 = \angle A$ y $\angle B_2 = \angle B$. Los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$ son semejantes, según el teorema 12.1. Por consiguiente,

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AC}{A_2C_2}. \quad (4)$$

Puesto que $A_2B_2 = A_1B_1$, de las igualdades (3) y (4) resulta que $A_2C_2 = A_1C_1$.

Ahora podemos afirmar que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son iguales. Tienen $A_1B_1 = A_2B_2$ por construcción, $A_1C_1 = A_2C_2$ según hemos demostrado y $\angle A_1 = \angle A_2$ debido a la igualdad de los ángulos A y A_1 y a la semejanza de los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$.

Ya que los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$ son semejantes y que los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_1B_1C_1$ son iguales, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 12.3. Si en los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

los triángulos son semejantes.

DEMOSTRACIÓN. Construyamos el triángulo $A_2B_2C_2$ que tenga $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$ y $\angle A_2 = \angle A$. Según el teorema 12.2, los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$ son semejantes. Por consiguiente,

$$\frac{AC}{A_2C_2} = \frac{BC}{B_2C_2}. \quad (6)$$

Como quiera que $A_2C_2 = A_1C_1$, de las igualdades (5) y (6) resulta que $B_2C_2 = B_1C_1$. Ahora deducimos la igualdad de los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_1B_1C_1$ empleando el tercer criterio de la igualdad. Puesto que el triángulo ABC es semejante al triángulo $A_2B_2C_2$ y que el triángulo $A_2B_2C_2$ es igual al triángulo $A_1B_1C_1$, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes. Queda demostrado el teorema.

Segmentos proporcionales en el triángulo. TEOREMA 12.4.
En todo triángulo rectángulo la altura trazada desde el vértice del ángulo recto es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Cada uno de los catetos es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo rectángulo de ángulo recto C (fig. 91) y sea CD la altura trazada desde el vértice C . Los ángulos CAD y BCD son iguales porque cada

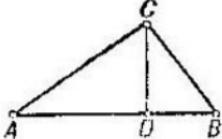


Fig. 91

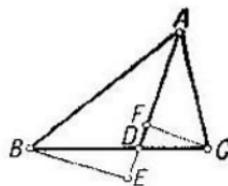


Fig. 92

uno de ellos complementa el ángulo ABC hasta 90° . Los triángulos rectángulos CAD y BCD son semejantes, según el teorema 12.1. De la semejanza de los triángulos se deduce que

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}.$$

De aquí $(CD)^2 = AD \cdot BD$, o sea, $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

De la semejanza de los triángulos BCD y BAC se deduce que

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD},$$

de donde $(CB)^2 = AB \cdot BD$, o sea, $CB = \sqrt{AB \cdot BD}$. Queda demostrada la segunda afirmación del teorema.

TEOREMA 12.5. *La bisectriz AD del triángulo ABC divide el lado BC en segmentos proporcionales a los lados AB y AC , o sea,*

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo dado (fig. 92) y sea AD la bisectriz relativa al lado BC . Tracemos las perpendiculares BE y CF a la recta AD . Los triángulos

BED y *CFD* son semejantes. Sus ángulos *E* y *F* son rectos y sus ángulos de vértice *D* son iguales por ser verticales.

Los triángulos *BAE* y *CAF* también son semejantes. Sus ángulos *E* y *F* son rectos y sus ángulos de vértice *A* son iguales, porque *AD* es bisectriz.

De la semejanza de los triángulos *BED* y *CFD* resulta la proporción

$$\frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD} .$$

De la semejanza de los triángulos *BAE* y *CAF* resulta la proporción

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} .$$

Comparando las proporciones obtenidas, encontramos

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} .$$

Queda demostrado el teorema.

Proporcionalidad de los segmentos de cuerdas y secantes.

TEOREMA 12.6. *Los productos de los segmentos de cuerdas secantes coinciden. A saber, si las cuerdas *AB* y *CD* se cortan en el punto *S*, se tiene*

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

DEMOSTRACIÓN (fig. 93). Tracemos la recta *BD*. Los puntos *A* y *C* se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta *BD*; a saber, en el semiplano donde está el punto *S*. Por ello, ambos puntos *A* y *C* pertenecen a uno de los dos arcos en los que la recta *BD* divide la circunferencia. Pero esto significa que los ángulos inscritos *DCB* y *DAB* son iguales. Análogamente deducimos la igualdad de los ángulos *ABC* y *ADC*. Los triángulos *ASD* y *CSB* son entonces semejantes por el teorema 12.1. De la semejanza de estos triángulos resulta la proporción

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS} ,$$

es decir,

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 12.7. *El producto de los segmentos de la secante es igual al cuadrado de la tangente. O sea, si por un punto *S**

se trazan una secante de la circunferencia y una tangente, siendo A y B los puntos de intersección de la circunferencia con la secante y C el punto de tangencia con la tangente, se tiene

$$AS \cdot BS = (CS)^2.$$

DEMOSTRACIÓN (fig. 94). Puesto que la circunferencia se halla a un lado de la tangente, el punto S no separa los puntos A y B . Supongamos, para concretar, que el punto B está entre A y S como aparece en la figura.

Los triángulos SAC y SCB son semejantes. Tienen el ángulo S común y los ángulos CAB y BCS iguales, pues

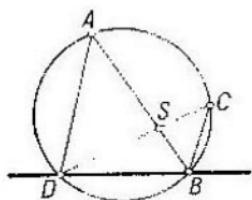


Fig. 93

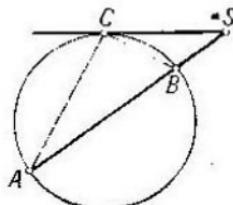


Fig. 94

se miden por la mitad de un mismo ángulo central. De la semejanza de los triángulos resulta la proporción

$$\frac{CS}{AS} = \frac{SB}{CS},$$

de donde $AS \cdot BS = (CS)^2$. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 12.7 se deduce que *son iguales los productos de los segmentos de las secantes trazadas por un mismo punto*.

Intersección de la recta con la circunferencia. TEOREMA 12.7. *Sean dadas una circunferencia de radio R y de centro O y una recta a que pasa a una distancia h del centro de la circunferencia. Entonces, la recta no corta la circunferencia si $h > R$, es tangente a la circunferencia si $h = R$ y corta la circunferencia en dos puntos si $h < R$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $h > R$, la distancia de todo punto de la recta hasta el centro de la circunferencia es superior a R . Por consiguiente, estos puntos no pueden pertenecer a la circunferencia, o sea, la recta y la circunferencia no se cortan.

Si $h = R$, el pie de la perpendicular trazada a la recta desde el centro de la circunferencia se halla en la circunferencia. En este punto la recta es tangente a la circunferencia por definición misma de la tangente.

Consideremos el caso $h < R$ (fig. 95). Tracemos la recta OA perpendicular a la recta a . Construyamos en la recta a , a partir del punto A , los segmentos AD_1 y AD_2 iguales a $\sqrt{R^2 - h^2}$. En este caso, $OD_1 = OD_2$. Tracemos la circunferencia de centro O y de radio $OD_1 = OD_2$. Esta circunferencia corta la recta a en los puntos D_1 y D_2 .

Calculemos el radio de la circunferencia construida. Indiquemoslo por x . Según el teorema 12.6, tenemos $AB \cdot AC = AD_1 \cdot AD_2 = R^2 - h^2$. Puesto que $OA = h$, se tiene $AB = x - h$ y $AC = x + h$. Por esto,

$$(x - h)(x + h) = x^2 - h^2 = R^2 - h^2,$$

o sea,

$$x = R.$$

Por consiguiente, la circunferencia construida coincide con la dada, es decir, la circunferencia dada corta la recta a en dos puntos D_1 y D_2 .

La recta a no puede tener otros puntos de intersección con la circunferencia que no sean D_1 y D_2 . En efecto, si existiese un punto tal, indiquemoslo por P_1 , el punto P_2 simétrico suyo respecto al diámetro BC también estaría en la circunferencia. Según el teorema 12.6, tendríamos $AP_1 \cdot AP_2 = AD_1 \cdot AD_2$. Puesto que $AD_1 = AD_2$ y $AP_1 = AP_2$, resultaría $AP_1 = AD_1$. Pero esto significaría que el punto P_1 coincide con D_1 o con D_2 . Queda demostrado el teorema.

Dos problemas de construcción. PROBLEMA. Dados tres segmentos a , b y c constrúyase el segmento

$$x = \frac{bc}{a}.$$

SOLUCIÓN. Tracemos por un punto cualquiera O dos semirrectas p y q no pertenecientes a una misma recta (fig. 96). Tomemos en la semirrecta p los segmentos $OA = a$ y $OB = b$ y en la semirrecta q el segmento $OC = c$. Unamos con una recta los puntos A y C y tracemos por el punto B la recta paralela a la recta AC . Corta la semirrecta q en

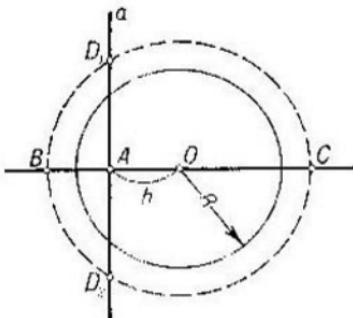


Fig. 95

un punto D . De la semejanza de los triángulos OAC y OB resulta que

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}.$$

De aquí

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}.$$

PROBLEMA. Dados dos segmentos a y b constrúyase el segmento

$$x = \sqrt{ab}.$$

SOLUCIÓN. Tomemos en una recta cualquiera p un punto C y, partiendo de él, construyamos los segmentos $CA = a$ y $CB = b$ en direcciones opuestas de la recta p (fig. 97).

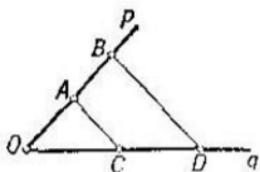


Fig. 96

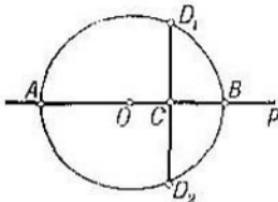


Fig. 97

Construyamos una circunferencia considerando el segmento AB como diámetro. La perpendicular al segmento AB que pasa por el punto C corta la circunferencia en dos puntos D_1 y D_2 . El segmento CD_1 es igual a \sqrt{ab} , pues $CD_1 = CD_2$ y $CD_1 \cdot CD_2 = AC \cdot BC = ab$.

Semejanza de las figuras. Homotecia. Se llama *transformación de semejanza* toda aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo en la que, cualesquiera que sean los puntos X e Y y sus puntos correspondientes X_1 e Y_1 , la razón $\frac{XY}{X_1Y_1}$ permanece constante, o sea, no depende de los puntos escogidos X y Y . Esta razón se denomina *coeficiente de semejanza*.

Sea F una figura cualquiera. Cuando el punto X describe la figura F , el punto correspondiente X_1 describe una figura F_1 . Las figuras F y F_1 se llaman *semejantes*.

Sea O un punto cualquiera del plano. Pongamos en correspondencia a todo punto X del plano el punto X_1 de acuerdo con la regla siguiente: si el punto X coincide con O ,

el punto X_1 es el punto O ; si X es diferente de O , el punto X_1 se halla en la semirrecta OX a una distancia $k \cdot OX$ del punto O , es decir, $OX_1 = k \cdot OX$. La aplicación del plano sobre sí mismo que hace corresponder de esta forma el punto X_1 al punto X se llama *homotecia*. El punto O se denomina *centro de homotecia* y el número k , *coeficiente de homotecia*.

TEOREMA 12.9. *La homotecia es una transformación de semejanza.*

DEMOSTRACION. Sean X y Y dos puntos cualesquiera del plano que no se hallan en una recta con el punto O (fig. 98). Los triángulos OXY y OX_1Y_1 son semejantes ya que tienen el ángulo O común y

$$\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k.$$

La semejanza de los triángulos implica que la razón $\frac{X_1Y_1}{XY}$ es igual a k , o sea, que no depende de los puntos escogidos X e Y . Al mismo resultado llegamos en el caso en que los puntos O , X e Y se hallan sobre una recta. Proponemos al lector demostrar ésto. Queda demostrado el teorema.

Igual que en el § 10 para los movimientos, se obtienen las propiedades siguientes de las transformaciones de semejanza.

1. *Toda transformación de semejanza aplica rectas en rectas, semirrectas en semirrectas y segmentos en segmentos.*

2. *Toda transformación de semejanza conserva los ángulos entre semirrectas.*

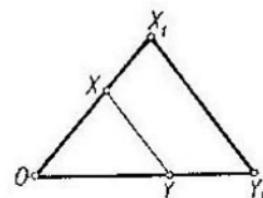


Fig. 98

Preguntas de repaso

1. ¿Qué son triángulos semejantes?
2. ¿En qué consiste el criterio principal de la semejanza de los triángulos? Demuéstrese este criterio.
3. Demuéstrese que los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes si $\angle A = \angle A_1$, y

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

4. Demuéstrese que dos triángulos son semejantes si los lados de un triángulo son proporcionales a los lados del otro.
5. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre los segmentos proporcionales en el triángulo rectángulo.
6. Demuéstrese el teorema: el pie de la bisectriz divide el lado del triángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.
7. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre el producto de los segmentos de cuerdas secantes.
8. Demuéstrese que el producto de los segmentos de la secante es igual al cuadrado de la tangente.
9. Sea dada una circunferencia de radio R y de centro O y sea S un punto cuya distancia hasta el centro O es menor que R . Demuéstrese que toda recta que pasa por el punto S corta la circunferencia en dos puntos.
10. ¿Qué es transformación de semejanza? ¿Qué figuras se denominan semejantes? Demuéstrese que la figura semejante a una circunferencia es una circunferencia.
11. ¿Qué es homotecia? ¿Qué son centro y coeficiente de homotecia?
12. Demuéstrese que toda homotecia es una transformación de semejanza.

Ejercicios

13. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo ABC que es semejante al triángulo BCA ?
14. Demuéstrese que son semejantes dos triángulos isósceles que tienen iguales los ángulos del vértice.
15. El ángulo del vértice del triángulo isósceles es igual a 36° . Demuéstrese que la bisectriz que pasa por uno de los vértices de la base forma un triángulo semejante al dado.
16. El pie de la bisectriz trazada desde el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo divide la hipotenusa en razón $m : n$. Demuéstrese que el pie de la altura trazada desde el mismo vértice divide la hipotenusa en razón $m^2 : n^2$.
17. La bisectriz del ángulo exterior de vértice C del triángulo ABC corta la recta AB en un punto D . Demuéstrese que

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

18. Demuéstrese que es una circunferencia el lugar geométrico de los puntos C para los cuales la razón de sus distancias a dos puntos fijos A y B es constante y diferente de la unidad. (*Sugerencia.* Las bisectrices de los ángulos interior y exterior de vértice C del triángulo ABC son perpendiculares. Cortan la recta AB siempre en los mismos puntos como quiera que se tome el punto C .)

19. Constrúyase el segmento

$$x = \frac{abc}{de},$$

donde a, b, c, d y e son segmentos dados.

20. Constrúyase el segmento $\sqrt{a^2 - b^2}$, donde a y b son segmentos dados, siendo $a > b$.

21. Demuéstrese geométricamente la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

22. El punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero convexo las divide en segmentos de productos iguales. Demuéstrese que el cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia.

23. Hállese el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la razón de sus distancias a dos rectas secantes dadas.

24. Constrúyase el triángulo de perímetro determinado que sea semejante al triángulo dado.

25. Dados los segmentos

$$a = \frac{x+y}{2} \text{ y } b = \sqrt{xy}$$

y siendo $a > b$, constrúyanse los segmentos x e y .

26. Inscríbase un cuadrado en el triángulo ABC de modo que un lado del cuadrado se halle en el lado AB y los demás vértices del cuadrado estén en los lados AC y BC .

27. Constrúyase la circunferencia que pase por un punto y que sea tangente a dos rectas secantes.

§ 13. TEOREMA DE PITÁGORAS Y SUS APLICACIONES

Teorema de Pitágoras. TEOREMA 13.1. *En el triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ABC el triángulo rectángulo de vértice recto C (fig. 99). Tracemos desde el vértice C la altura CD . Demostremos, ante todo, que el pie D de la altura se halla entre los puntos A y B .

Efectivamente, supongamos que el punto B se halla entre A y D . Los ángulos ABC y DBC son entonces adyacentes y agudos. Pero esto es imposible. Análogamente deducimos que tampoco el punto A puede hallarse entre B y D . Por consiguiente, el punto D está entre A y B .

Según el teorema 12.4, tenemos ahora

$$AC^2 = AD \cdot AB \quad y \quad BC^2 = BD \cdot AB.$$

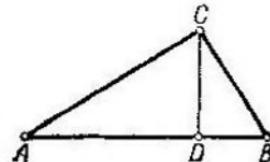


Fig. 99

Sumando estas igualdades miembro por miembro, encontramos

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB).$$

Puesto que el punto D se halla entre A y B , tenemos $AD + DB = AB$. Por esto,

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Queda demostrado el teorema.

El teorema 13.1 lleva el nombre del famoso matemático griego Pitágoras (VI siglo antes de nuestra era).

Relaciones en el triángulo oblicuángulo. Todo triángulo que no sea rectángulo se llama *oblicuángulo*.

TEOREMA 13.2. En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro.

DEMOSTRACION. Sea ABC un triángulo de vértice obtuso C (fig. 100). Tracemos desde el vértice A la altura AD . Demostremos primero que el punto C se halla entre

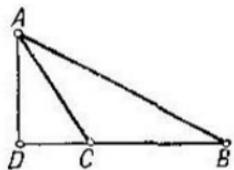


Fig. 100

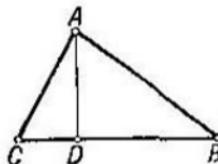


Fig. 101

B y D . Efectivamente, si el punto C no separa los puntos B y D , el ángulo C del triángulo rectángulo ADC es obtuso. Pero esto es imposible. O sea, el punto C separa los puntos B y D , esto es, se halla entre ellos.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ADB y ADC , obtenemos

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \text{y}$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Restando estas igualdades miembro por miembro, tendremos

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2.$$

Puesto que el punto C se halla entre B y D , se tiene $BD = BC + DC$. Tomando en la igualdad obtenida ($BC +$

$+ DC)^2$ en lugar de BD^2 y simplificando, encontramos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 13.3. *En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de estos lados por la proyección del otro.*

DEMOSTRACION. Sea ABC un triángulo de ángulo agudo C (fig. 101). Tracemos desde el vértice A la altura AD . Notemos, ante todo, que el punto C no separa los puntos B y D . Efectivamente, en el caso contrario sería agudo el ángulo exterior de vértice C en el triángulo rectángulo ADC de ángulo recto D . Pero esto es imposible. Es decir, el punto D se halla entre C y B o el punto B se halla entre C y D . Supongamos, para concretar, que el punto D se halla entre C y B como aparece en la figura.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos ADC y ADB , obtenemos

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad \text{y}$$

$$AC^2 = CD^2 + AD^2.$$

Restando estas igualdades miembro por miembro, tendremos

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2.$$

Puesto que el punto D se halla entre B y C , se tiene $BC = BD + CD$, o sea, $BD = BC - CD$. Tomando en la igualdad obtenida $(BC - CD)^2$ en lugar de BD^2 , encontraremos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AD.$$

Si el punto B se halla entre C y D , la demostración es análoga. Queda demostrado el teorema.

Relación entre las diagonales y los lados del paralelogramo.

TEOREMA 13.4. *En todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.*

DEMOSTRACION. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean AC y BD sus diagonales. Si el paralelogramo es un rectángulo (fig. 102, a la izquierda), tenemos por el teorema de Pitágoras

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \quad \text{y}$$

$$BD^2 = BC^2 + DC^2.$$

Sumando estas igualdades miembro por miembro y observando que $DC = AB$, obtenemos

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Supongamos ahora que el paralelogramo no es un rectángulo (fig. 102, a la derecha). Tracemos desde los vértices

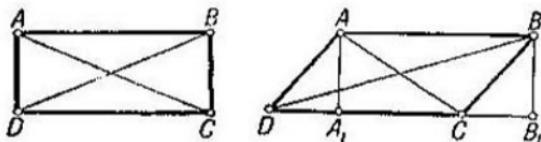


Fig. 102

A y B las perpendiculares AA_1 y BB_1 a la recta CD . De la igualdad de los triángulos ADA_1 y BCB_1 resulta $DA_1 = CB_1$.

Los ángulos ADC y BCD se complementan hasta 180° , pues son correspondientes internos para las paralelas AD y BC . Por ello, si uno de estos ángulos es agudo, el otro es obtuso. Supongamos, para concretar, que el ángulo ADC es agudo y que el ángulo BCD es obtuso como representa la figura.

Aplicando el teorema 13.2 al triángulo BCD y el teorema 13.3 al triángulo ADC , obtenemos

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot DC \cdot CB_1 \quad \text{y}$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot DC \cdot DA_1.$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades y observando que $CB_1 = DA_1$ y que $AB = CD$, obtenemos

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Queda demostrado el teorema.

Del teorema 13.4 resulta que *la diagonal del cuadrado es igual a su lado multiplicado por $\sqrt{2}$* . Efectivamente, si a es el lado del cuadrado y b su diagonal, según el teorema 13.4, tenemos $2 \cdot b^2 = 4 \cdot a^2$. De aquí resulta que $b = a\sqrt{2}$.

Existencia del triángulo de lados dados. Como sabemos la suma de dos lados del triángulo es mayor que su tercer lado. Surge la pregunta natural: ¿pueden ser lados de un triángulo tres números arbitrarios si la suma de dos cualesquier

ra de estos números es mayor que el tercero? El teorema que sigue da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

TEOREMA 13.5. *Cualesquiera que sean tres números a , b y c , siempre que la suma de dos de estos números sea mayor que el tercero, existe un triángulo de lados iguales a a , b , y c .*

DEMOSTRACION. Consideremos los números a , b y c en orden de crecimiento. Supongamos, para puntualizar, que $a \leq b \leq c$. Pongamos

$$a_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Se tiene $a_1 > 0$ ya que $c \geq b$. El número a_1 es menor que a . En efecto,

$$a - a_1 = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - (c - a)^2}{2c}.$$

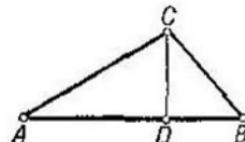


Fig. 103

Puesto que $a + b > c$, se tiene $b > c - a > 0$. Por ello, $b^2 > (c - a)^2$. Es decir, $a > a_1$.

Construyamos el triángulo ABC del modo siguiente. Tomemos un segmento AB igual a c (fig. 103). Construyamos en la semirrecta AB desde el punto B el segmento BD igual a a_1 . Tracemos por el punto D la perpendicular DC igual a $\sqrt{a^2 - a_1^2}$. Se afirma que los lados del triángulo ABC son a , b y c .

Efectivamente, el lado AB es igual a c . Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ADC , obtenemos

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = a_1^2 + (\sqrt{a^2 - a_1^2})^2 = a^2,$$

o sea, $BC = a$. Aplicando el teorema 13.3 al triángulo ABC , obtenemos

$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ca_1 = b^2,$$

o sea, $AC = b$. Queda demostrado el teorema.

Posición recíproca de dos circunferencias. El teorema 13.5 permite explicar con plenitud el problema sobre la posición recíproca de dos circunferencias en dependencia de sus radios y la distancia entre los centros. En concreto, demostraremos el teorema siguiente.

TEOREMA 13.6. *Sean dadas dos circunferencias distintas de centros O_1 y O_2 y de radios R_1 y R_2 , siendo $R_1 \leq R_2$, y sea d la distancia entre los centros. Entonces:*

1. *Las circunferencias no se cortan, o sea, no tienen puntos comunes, si*

$$R_1 + R_2 < d \quad \text{o} \quad R_2 - R_1 > d.$$

2. Las circunferencias tienen un punto común en el que son tangentes, es decir, tienen una tangente común, si

$$R_1 + R_2 = d \quad \text{o} \quad R_2 - R_1 = d.$$

3. Las circunferencias se cortan en dos puntos si

$$R_1 + R_2 > d \quad \text{y} \quad R_2 - R_1 < d.$$

DEMOSTRACION. Comencemos por la primera afirmación del teorema. Supongamos que las circunferencias se cortan, es decir, que tienen un punto común A . Si los puntos

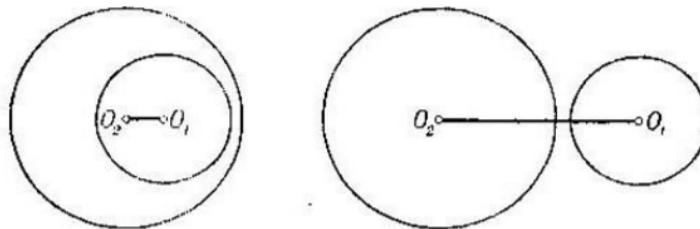


Fig. 104

O_1 , O_2 y A no se hallan en una recta, se tiene $O_1A + O_2A > O_1O_2$, o sea, $R_1 + R_2 > d$. Pero esto contradice la condición $R_1 + R_2 < d$.

Supongamos que los puntos O_1 , O_2 y A se hallan en una recta. Entonces, si el punto A está entre O_1 y O_2 , se tiene $O_1A + AO_2 = O_1O_2$, o sea, $R_1 + R_2 = d$. Pero esto contradice la condición $R_1 + R_2 < d$. Si el punto O_1 se encuentra entre A y O_2 , se tiene $O_1A + O_1O_2 = AO_2$, es decir, $R_1 + d = R_2$, de donde $R_2 - R_1 = d$. Pero esto contradice la condición $R_2 - R_1 > d$. En fin, si el punto O_2 aparece entre A y O_1 , se tiene $O_2A + O_2O_1 = AO_1$, o sea, $R_2 + d = R_1$. Pero esto es imposible ya que $R_1 \leq R_2$. Por consiguiente, en el caso considerado las circunferencias no pueden tener punto común alguno, o sea, las circunferencias no se cortan (fig. 104).

Demoselmos la segunda afirmación del teorema. En este caso, al igual que en el anterior, deducimos que las circunferencias no pueden tener un punto común A que no pertenezca a la recta O_1O_2 . Pero tienen un punto común A situado en la recta O_1O_2 , con la particularidad de que habrá dos variantes de posición de las circunferencias según sea $R_2 - R_1 = d$ (fig. 105, a la izquierda) o $R_1 + R_2 = d$

(fig. 105, a la derecha). En el punto común A las circunferencias tienen una tangente común perpendicular a la recta O_1O_2 .

Demostremos, finalmente, la tercera afirmación del teorema. Observemos, ante todo, que se puede construir un

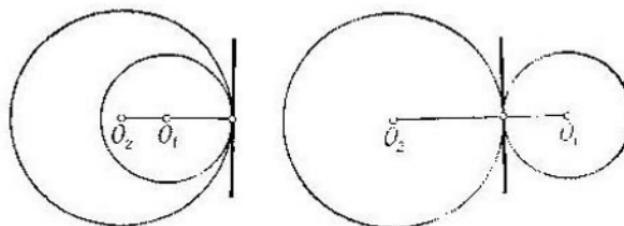


Fig. 105

triángulo de lados R_1 , R_2 y d . En efecto, tenemos $R_1 + R_2 > d$; además, $R_1 + d > R_2$ porque $R_2 - R_1 < d$ y, en fin, $R_2 + d > R_1$ porque $R_2 \geq R_1$. Podemos construir este triángulo aplicando el método expuesto en la demostración del teorema 13.5. Tomemos el segmento O_1O_2 como el lado d y construyamos el tercer vértice A_1 de modo que sea $O_1A_1 = R_1$ y $O_2A_1 = R_2$. Construido el punto A_1 , tomemos su reflexión especular respecto a la recta O_1O_2 . Obtendremos un punto A_2 .

Los puntos A_1 y A_2 se encuentran en las circunferencias dadas ya que $O_1A_1 = R_1$ y $O_2A_1 = R_2$ por construcción y $O_1A_1 = O_1A_2$ y $O_2A_1 = O_2A_2$ debido a la simetría. Por eso, los puntos A_1 y A_2 son puntos de intersección de las circunferencias dadas (fig. 106).

Demostremos que las circunferencias no tienen más puntos de intersección que A_1 y A_2 . Supongamos que existe un tercer punto de intersección A . Los triángulos $O_1O_2A_1$ y O_1O_2A serán entonces iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Supongamos, para concretar, que el punto A se halla en el mismo semiplano respecto a la recta O_1O_2 que el punto A_1 . De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos O_2O_1A y $O_2O_1A_1$ y, por consiguiente, la coincidencia de las semirrectas O_1A y

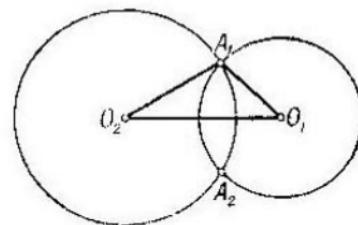


Fig. Fig. 106

O_1A_1 . Basándonos en la igualdad de los segmentos $O_1A = O_1A_1 = R_1$, deducimos la coincidencia de los puntos A y A_1 . Queda demostrado el teorema.

Algunos problemas. PROBLEMA. Sea ABC un triángulo. Exprénsese a través de sus lados la mediana, la bisectriz y la altura trazadas desde el vértice C .

SOLUCIÓN. Comencemos por la mediana del triángulo (fig. 107). Sea O el pie de la mediana. Construyamos el punto D simétrico de C respecto al punto O , o sea, $OD = OC$.

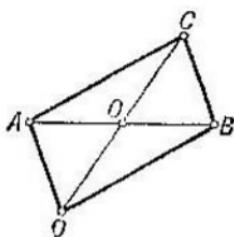


Fig. 107

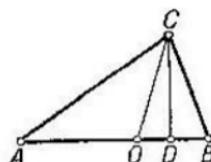


Fig. 108

Aplicando el teorema 13.4 al paralelogramo $ABCD$, obtenemos

$$AB^2 + (2 \cdot OC)^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot BC^2.$$

De aquí determinamos la mediana OC .

Hallaremos la bisectriz CO (fig. 108). Según el teorema 12.5, el punto O —el pie de la bisectriz— divide el lado AB en segmentos proporcionales a los lados AC y BC . Esto permite determinar AO y OB siempre que se conozcan AB , AC y BC . Supongamos que AO y OB han sido determinados ya. Aplicando los teoremas 13.2 ó 13.3 a los triángulos ABC y AOC , obtenemos

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 \pm 2 \cdot AB \cdot AD \quad \text{y} \\ OC^2 &= AC^2 + AO^2 \pm 2 \cdot AO \cdot AD. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera igualdad por AO y la segunda por AB y restándolas miembro por miembro, obtenemos una ecuación con una sola incógnita, la bisectriz OC . Precisamente de esta ecuación se determina la bisectriz.

Hallaremos la altura CD (fig. 108). Determinemos, ante todo, el segmento AD basándonos en los teoremas 13.2 ó 13.3. Después encontramos del triángulo rectángulo ADC la altura CD .

PROBLEMA. Sean a y b unos segmentos. Constrúyanse los segmentos $\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\sqrt{a^2 - b^2}$ siendo $a > b$ en el segundo caso.

SOLUCION. Tracemos una recta cualquiera y tomemos en ella el segmento AC igual a b (fig. 109). Tracemos por el punto C la recta perpendicular g . Tomemos en la recta g desde el punto C el segmento CB_1 igual al segmento a . Según el teorema de Pitágoras, tenemos

$$AB_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Para construir el segmento $\sqrt{a^2 - b^2}$, tracemos la circunferencia de centro A y de radio a . Corta la recta g en un punto B . Según el teorema de Pitágoras, tenemos

$$CB = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Preguntas de repaso

1. Enunciése y demuéstrelo el teorema de Pitágoras.
2. Enunciése y demuéstrese los teoremas sobre el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso o a un ángulo agudo en el triángulo oblicuángulo.
3. Demuéstrese que la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.
4. Demuéstrese que si tres segmentos a , b y c satisfacen las desigualdades

$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{y} \quad b + c > a,$$

existe un triángulo de lados a , b y c .

5. ¿Cuál es la posición recíproca de dos circunferencias que tengan los radios R_1 y R_2 , siendo $R_1 \leq R_2$, y la distancia entre los centros igual a d ? Enunciése y demuéstrese el teorema correspondiente.

6. Sean a y b unos segmentos. Constrúyanse los segmentos $\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\sqrt{a^2 - b^2}$ siendo $a > b$ en el segundo caso.

Ejercicios

7. ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos iguales a 1 cm?
8. ¿Cuánto mide la altura del triángulo equilátero de lados iguales a 1 cm?
9. Háganse los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo equilátero de lados iguales a 1 cm.
10. Demuéstrese que si en el triángulo ABC tiene lugar la desigualdad $AB^2 < AC^2 + CB^2$, el ángulo C es agudo. En cambio, si $AB^2 > AC^2 + CB^2$, el ángulo C es obtuso.
11. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la suma de los cuadrados de sus distancias hasta

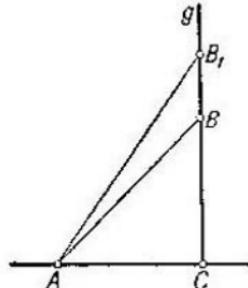


Fig. 109

dos puntos fijos A y B , es una circunferencia de centro en el punto medio del segmento AB .

12. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la diferencia de los cuadrados de sus distancias hasta dos puntos fijos A y B , es una recta perpendicular a la AB .

13. Demuéstrese que de dos cuerdas de la circunferencia, la mayor es la más próxima al centro.

14. Hállese la expresión para las medianas del triángulo conociéndose sus lados.

15. Sean ABC un triángulo y D el pie de la bisectriz trazada desde el vértice C . Demuéstrese que

$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD.$$

16. Sean a , b y c los lados del triángulo. Demuéstrese que la altura h_a relativa al lado a se determina mediante la fórmula

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donde p es el semiperímetro del triángulo, o sea,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

17. Determinese la base del triángulo isósceles de 36° de ángulo en el vértice y de laterales iguales a 1 cm. (Sugerencia. Véase el ejercicio 15 del § 12.)

§ 14. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DEL ÁNGULO

Definición de las funciones trigonométricas. Tracemos una semicircunferencia de radio igual a la unidad (fig. 140).

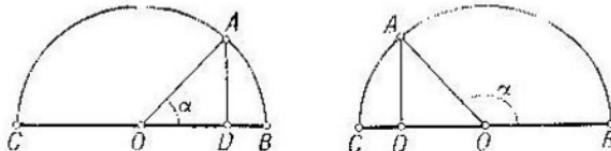


Fig. 140

Tomenos un punto cualquiera A de la semicircunferencia e indiquemos por α el ángulo AOB . Tracemos desde el punto A la perpendicular AD al diámetro BC . Se llama *seno* del ángulo α la longitud del segmento AD . El seno del ángulo α se designa así: $\operatorname{sen} \alpha$. Por definición, se acepta que $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$ y que $\operatorname{sen} 180^\circ = 0$.

Definamos ahora el concepto del *coseno* del ángulo. El coseno del ángulo α se designa así: $\cos \alpha$. Si el ángulo α es agudo, el $\cos \alpha$ es igual a la longitud del segmento OD (fig. 110, a la izquierda). Si el ángulo α es obtuso, el $\cos \alpha$ es un número negativo cuyo valor absoluto es igual a la longitud del segmento OD (fig. 110, a la derecha). Por definición, aceptamos que $\cos 0^\circ = 1$, que $\cos 90^\circ = 0$ y que $\cos 180^\circ = -1$.

Se llama *tangente* del ángulo α la razón del $\operatorname{sen} \alpha$ y del $\cos \alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

La tangente del ángulo α no está definida si $\alpha = 90^\circ$.

Las funciones $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ se llaman *funciones trigonométricas del ángulo α* .

TEOREMA 14.1. *Cualquiera que sea α se tiene*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

DEMOSTRACION. Para $\alpha = 0^\circ$, 90° ó 180° la afirmación del teorema se comprueba introduciendo los valores correspondientes del seno y del coseno.

Si el ángulo α es agudo, la afirmación resulta del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ODA (fig. 110, a la izquierda). Si el ángulo α es obtuso, la afirmación también resulta del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ODA (fig. 110, a la derecha).

Fórmulas de reducción. Se llaman *fórmulas de reducción* las que establecen la relación entre las funciones trigonométricas de los ángulos α , $90^\circ - \alpha$ y $180^\circ - \alpha$.

TEOREMA 14.2. *Si el ángulo α es agudo, se tiene*

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

DEMOSTRACION (fig. 111). Sean el ángulo AOB igual a α y el ángulo A_1OB igual a $90^\circ - \alpha$. Los triángulos rectángulos ODA y A_1D_1O son iguales, pues sus hipotenusas son iguales en tanto que radios y los ángulos AOD y OA_1D_1 son iguales a α . De la igualdad de estos triángulos resulta

que $A_1D_1 = OD$ y que $OD_1 = AD$, o sea, que

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{y} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

La tercera fórmula se obtiene dividiendo miembro por miembro la primera fórmula por la segunda. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 14.3. *Cualquiera que sea α se tiene*

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{y} \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

DEMOSTRACION. Para $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$ ó 180° la afirmación del teorema se comprueba introduciendo en las fórmulas

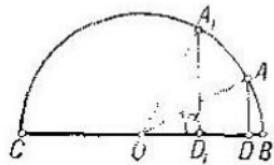


Fig. 111

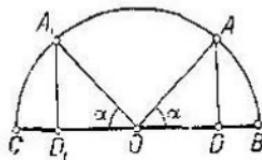


Fig. 112

los valores correspondientes del seno y del coseno. Consideremos el caso general.

Sean el ángulo AOB igual a α y el ángulo A_1OB igual a $180^\circ - \alpha$ (fig. 112). La igualdad de los triángulos OAD y OA_1D_1 implica que $AD = A_1D_1$, o sea, que $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Si α es distinto de 90° , uno de los ángulos α ó $180^\circ - \alpha$ es agudo y el otro es obtuso. Por esto, el $\cos \alpha$ y el $\cos(180^\circ - \alpha)$ llevan signos opuestos. Como quiera que $OD = OD_1$, resulta que $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Queda demostrado el teorema.

Relaciones entre los lados y los ángulos en el triángulo rectángulo. **TEOREMA 14.4.** *En el triángulo rectángulo ABC de ángulo recto C se tiene*

$$BC = AB \cdot \sin A, \quad AC = AB \cdot \cos A \\ \text{y} \quad BC = AC \cdot \operatorname{tg} A.$$

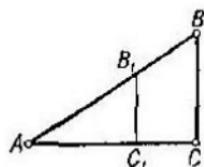


Fig. 113

DEMOSTRACION (fig. 113). Tomemos en la semirrecta AB el segmento AB_1 igual a la unidad y tracemos desde el punto B_1 la perpendicular a la recta AC . Según la definición del seno y del coseno, tendremos $\sin A = B_1C_1$ y $\cos A = AC_1$. Los triángulos AB_1C_1 y ABC son semejantes, pues tienen el ángulo A común y los

ángulos C y C_1 rectos. Esto implica que

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{1}; \quad \frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{1} \quad \text{y} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1}.$$

Introduciendo aquí $B_1C_1 = \sin A$ y $AC_1 = \cos A$, obtenemos

$$BC = AB \cdot \sin A, \quad AC = AB \cdot \cos A \quad \text{y} \quad BC = AC \cdot \operatorname{tg} A.$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 14.5.

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1,$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

DEMOSTRACION. Construyamos el triángulo rectángulo ABC de ángulo recto C y de ángulo A igual a 45° (fig. 114).

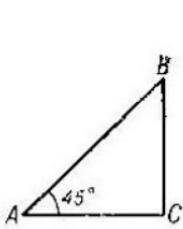


Fig. 114

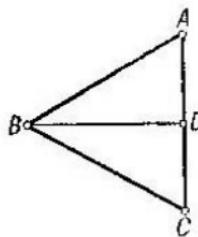


Fig. 115

El ángulo B de este triángulo también es igual a 45° . Por consiguiente, el triángulo resulta isósceles: $AC = BC$. Aplicándole el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2 \cdot BC^2 = 2 \cdot AC^2.$$

De aquí resulta que $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y que $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por consiguiente, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Construyamos ahora el triángulo equilátero ABC (fig. 115). Todos sus ángulos son iguales. Por lo tanto, cada uno de ellos vale 60° . Tracemos la mediana BD del triángulo. Es bisectriz y altura. Por esto, en el triángulo ABD el ángulo ADB es recto y el ángulo ABD es igual a 30° . Puesto que $AD = \frac{AC}{2}$, tenemos $\sin 30^\circ =$

$-\frac{1}{2}$. Aplicando el teorema 14.4, encontramos que $\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Después obtenemos que $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Las fórmulas de reducción permiten determinar los valores del seno, del coseno y de la tangente para los ángulos de 60° , 120° , 135° y 150° expresándolos en términos del seno, del coseno y de la tangente de los ángulos de 30° y de 45° .

Para los senos, cosenos y tangentes de los ángulos agudos existen tablas especiales. Estas tablas permiten hallar, a partir del ángulo dado, el seno, el coseno y la tangente correspondientes y, recíprocamente, dados el seno, el coseno o la tangente hallar el ángulo correspondiente.

El teorema 14.4 permite hallar con esas tablas todos los elementos del triángulo rectángulo, es decir, sus lados y ángulos, en caso de conocerse dos catetos, la hipotenusa y un cateto, un ángulo agudo y un cateto o un ángulo agudo y la hipotenusa.

Teorema del coseno. **TEOREMA 14.6.** *Cualquiera que sea el triángulo ABC se tiene*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

DEMOSTRACION. Si el ángulo C es igual a 90° , la afirmación del teorema se desprende del teorema de Pitágoras ya que $\cos 90^\circ = 0$.

Sea C un ángulo agudo (fig. 101). Segundo el teorema 13.3, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Aplicando el teorema 14.4 al triángulo ACD , encontramos $CD = AC \cdot \cos C$. Por esto,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Sea ahora C un ángulo obtuso (fig. 100). Segundo el teorema 13.2, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Aplicando el teorema 14.4 al triángulo ADC , encontramos $CD = AC \cdot \cos(\angle ACD)$. Pero el ángulo ACD complementa hasta 180° el ángulo C del triángulo ABC . Por esto, en virtud del teorema 14.3, tenemos $\cos(\angle ACD) = -\cos C$ y, por consiguiente, $AC \cdot \cos C = -CD$. Es decir, también en el

caso de ángulo obtuso resulta

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Queda demostrado el teorema.

Teorema de los senos. TEOREMA 14.7. *Cualquiera que sea el triángulo ABC se tiene*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{BC} = \frac{\operatorname{sen} B}{AC} = \frac{\operatorname{sen} C}{AB} .$$

DEMOSTRACION. Consideremos la circunferencia que circunscribe el triángulo ABC. Sea B_1 el punto de la circunferencia diametralmente opuesto al punto B de la circunferencia (fig. 116).

Si los puntos A y B_1 están a un lado de la recta BC (fig. 116, a la izquierda), los ángulos BB_1C y BAC son

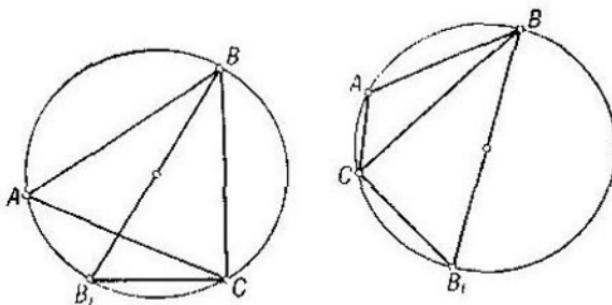


Fig. 116

iguales por ser ángulos inscritos correspondientes a un mismo arco. Si los puntos A y B_1 se encuentran a distintos lados de la recta BC (fig. 116, a la derecha), estos ángulos se complementan hasta 180° , pues corresponden a arcos complementarios. En ambos casos se tiene $\operatorname{sen} B_1 = \operatorname{sen} A$. Por consiguiente, $BC = 2R \operatorname{sen} A$.

Análogamente se demuestra que $AB = 2R \operatorname{sen} C$ y que $AC = 2R \operatorname{sen} B$. Comparando las tres fórmulas obtenidas, deducimos que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{BC} = \frac{\operatorname{sen} B}{AC} = \frac{\operatorname{sen} C}{AB} = \frac{1}{2R} .$$

Queda demostrado el teorema.

El teorema del coseno y el teorema de los senos permiten determinar todos los elementos del triángulo —o sea, sus

ángulos y sus lados— si se conocen tres elementos que determinan unívocamente el triángulo. Estos elementos pueden ser: tres lados del triángulo; dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos; un lado y dos ángulos.

Preguntas de repaso y ejercicios

- Dese la definición de las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.
- Demuéstrese el teorema: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- Demuéstrense las fórmulas de reducción: $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ y $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.
- Demuéstrese que en el triángulo rectángulo ABC de ángulo recto C se tiene

$$BC = AB \cdot \operatorname{sen} A, AC = AB \cdot \cos A \text{ y } BC = AC \cdot \operatorname{tg} A.$$

- Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1,$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Hállense las funciones trigonométricas para los ángulos de 60° , 120° , 135° y 150° .
- Enúnciese y demuéstrese el teorema del coseno.
- Enúnciese y demuéstrese el teorema de los senos.
- ¿Cuáles son los tres elementos del triángulo que lo determinan unívocamente?
- Hállense el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, si uno de sus lados es igual a 1 cm y el ángulo opuesto a este lado es de 30° .

§ 15. POLÍGONOS

Polígonos convexos. Un *polígono* $A_1A_2\dots A_n$ es una figura formada por los puntos A_1, A_2, \dots, A_n y por los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ que los unen (fig. 117). Los puntos A_1, A_2, \dots, A_n se llaman *vértices* del polígono y los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ se denominan *lados* del mismo. Dos vértices se llaman *contiguos* si quedan unidos por un lado del polígono. Para todo vértice existen dos vértices contiguos.

Cada una de las rectas $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ divide el plano en dos semiplanos. El polígono $A_1A_2 \dots A_n$ se denomina *convexo* si está situado en un semiplano respecto

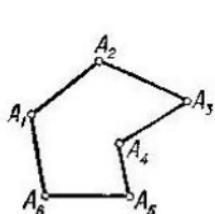


Fig. 117

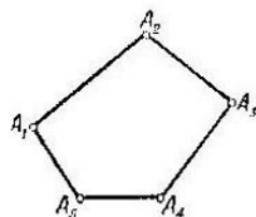


Fig. 118

a cada una de estas rectas con la particularidad de que toda recta A_pA_{p+1} no tiene más puntos comunes con el polígono que los puntos del segmento A_pA_{p+1} (fig. 118).

TEOREMA 15.1. *Si los extremos de la quebrada $B_1B_2 \dots B_n$ se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta b , la quebrada corta la recta b .*

DEMOSTRACION. Desplazándonos a lo largo de la quebrada desde el vértice B_1 hacia B_n , encontraremos dos vértices contiguos que se encuentran en distintos semiplanos respecto a la recta b . El lado de la quebrada que une estos vértices corta la recta b . Por consiguiente, la quebrada corta la recta b . Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 15.2. *Si una recta tiene tres puntos comunes con un polígono convexo, contiene uno de sus lados.*

DEMOSTRACION. Sean A, B y C tres puntos de una recta a que pertenecen a un polígono. Supongamos, para concretar, que el punto B se halla entre A y C .

El punto B pertenece a uno de los lados del polígono. Afirmando que este lado pertenece a la recta a . Efectivamente, en el caso contrario la recta que contiene este lado separaría los puntos A y C . Pero esto contradice la hipótesis de que el polígono es convexo. Queda demostrado el teorema.

Suma de los ángulos del polígono convexo. Se llama *diagonal* del polígono todo segmento que une dos vértices no contiguos. En la fig. 119 la línea punteada representa una diagonal.

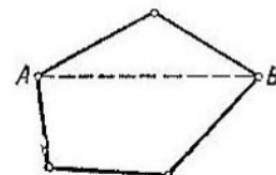


Fig. 119

TEOREMA 15.3. *La diagonal A_1A_p divide el polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$ en dos polígonos convexos $A_1A_2 \dots A_p$ y $A_pA_{p+1} \dots A_nA_1$. Estos polígonos están en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_p . La semirrecta A_1A_p pasa entre las semirrectas A_1A_2 y A_1A_n .*

DEMOSTRACION. Según el teorema 15.2, la recta A_1A_p no tiene más puntos comunes con el polígono que los puntos A_1 y A_p . En virtud del teorema 15.4, la quebrada $A_1A_2 \dots \dots A_p$ está a un lado de la recta A_1A_p . Puesto que el polígono inicial se encuentra a un lado de cada una de las rectas A_1A_2 , A_2A_3 , ..., el polígono $A_1A_2 \dots A_p$ posee la misma propiedad. Por consiguiente, el polígono $A_1A_2 \dots \dots A_p$ es convexo. Análogamente se demuestra que es convexo el polígono $A_pA_{p+1} \dots A_nA_1$.

Demostremos las demás afirmaciones del teorema. La semirrecta A_1A_p se encuentra en el mismo semiplano respecto a la recta A_1A_n que la semirrecta A_1A_2 y en el mismo semiplano respecto a la recta A_1A_2 que la semirrecta A_1A_n . Esto significa que la semirrecta A_1A_p pasa entre las semirrectas A_1A_2 y A_1A_n . Es decir, la semirrecta A_1A_p las separa.

Por consiguiente, los puntos A_2 y A_n se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_p . Pero esto significa que los polígonos $A_1A_2 \dots A_p$ y $A_pA_{p+1} \dots A_nA_1$ están en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_p . Queda demostrado el teorema.

Sea A un vértice del polígono convexo y sean B y C sus vértices contiguos. Se llama *ángulo interno* de vértice A del polígono el ángulo comprendido entre las semirrectas AB y AC . El ángulo adyacente al ángulo interno se denomina *ángulo externo* del polígono.

TEOREMA 15.4. *La suma de los ángulos internos del polígono convexo es igual a $(n - 2) 180^\circ$, donde n es el número de lados o de vértices del polígono.*

La suma de los ángulos externos del polígono convexo no depende de n y es igual a 360° .

DEMOSTRACION. Todo triángulo es convexo y entra en el teorema ya que $(3 - 2) 180^\circ = 180^\circ$. Apliquemos para la demostración del teorema el método de inducción matemática. Supongamos que el teorema es válido para todos los polígonos con un número de lados menor que n . Demostremos que es cierto para todo polígono de n lados.

Sea Q un polígono de n lados. Unamos sus dos vértices no contiguos A y B mediante la diagonal AB . En virtud del teorema 15.3, obtendremos dos polígonos Q_1 y Q_2 de n_1 y de n_2 lados, respectivamente, siendo $n_1 < n$, $n_2 < n$ y $n_1 + n_2 = n + 2$. Puesto que la diagonal AB pasa entre los lados contiguos de vértice común A , el ángulo interno de vértice A en el polígono Q resulta igual a la suma de los ángulos internos de vértice A en los polígonos Q_1 y Q_2 . Análogamente, el ángulo de vértice B en el polígono Q es igual a la suma de los ángulos de vértice B en los polígonos Q_1 y Q_2 . De aquí resulta que la suma de los ángulos del polígono Q es igual a $(n_1 - 2) 180^\circ + (n_2 - 2) 180^\circ = (n - 2) 180^\circ$. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Puesto que todo ángulo externo del polígono es adyacente al ángulo interno correspondiente y puesto que la suma de los ángulos adyacentes es igual a 180° , resulta que la suma de los ángulos externos del polígono es igual a $180^\circ n - (n - 2) 180^\circ$, es decir, es igual a 360° . Queda demostrado el teorema.

Polígono complementado. Quebrada convexa. Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono convexo. Cada una de las rectas A_1A_2 , A_2A_3 , ..., A_nA_1 divide el plano en dos semiplanos. Marquemos aquellos semiplanos que contienen el polígono. Diremos que el punto X se halla *en el interior* del polígono si pertenece a todos los semiplanos marcados y no pertenece al polígono.

Frecuentemente, se denomina polígono la figura formada, además de los lados y los vértices, también por los puntos del plano que se hallan en el interior del polígono. El polígono comprendido en este sentido será llamado *polígono complementado*. El propio polígono constituye la frontera del polígono complementado. En la fig. 120 se ha sombreado el polígono complementado.

Sean P_1 y P_2 dos polígonos convexos y sean P'_1 y P'_2 los polígonos complementados correspondientes. Diremos que el polígono P_1 se encuentra *en el interior* del polígono P_2 si todo punto del polígono complementado P'_1 pertenece al polígono complementado P'_2 . Se llama *perímetro* del polígono la suma de las longitudes de sus lados.

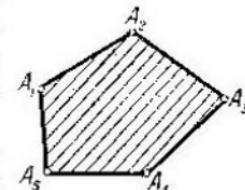


Fig. 120

TEOREMA 15.5. Si un polígono convexo P_1 pertenece al interior de un polígono convexo P_2 , el perímetro de P_1 no es mayor que el perímetro de P_2 . Si el polígono P_1 no coincide con P_2 , su perímetro es menor que el perímetro de P_2 .

DEMOSTRACION. Tracemos una recta a que contenga uno de los lados del polígono P_1 (fig. 121). El polígono P_1 está a un lado de esta recta. El polígono P_2 está a un lado de la recta a o existen puntos del polígono P_2 que se hallan a

distintos lados de la recta a . En el segundo caso la recta a corta el polígono P_2 en dos puntos A y B . Efectivamente, sean C y D dos puntos del polígono P_2 que se encuentran a distintos lados de la recta a . Los puntos C y D dividen el polígono P_2 en dos quebradas. En virtud del teorema 15.1, cada una de éstas corta la recta a .

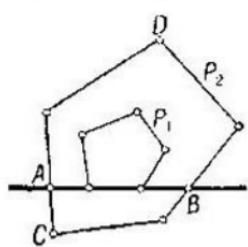


Fig. 121

La recta a divide el polígono P_2 en dos polígonos. Sea Q_2 aquel que está res-

pecto a la recta a en el mismo semiplano que el polígono P_1 . El polígono Q_2 contiene en su interior el polígono P_1 y su perímetro es menor que el perímetro del polígono P_2 . Efectivamente, para pasar del polígono P_2 al polígono Q_2 debemos sustituir la quebrada por el segmento AB que une sus extremos.

Realizando semejante construcción con cada uno de los lados del polígono P_1 , obtenemos finalmente del polígono P_2 el polígono P_1 . De aquí resulta que si el polígono P_1 no coincide con P_2 , su perímetro es menor que el perímetro de P_2 .

Queda demostrado el teorema.

La quebrada $\gamma: A_1A_2 \dots A_n$ se llama *convexa* si es convexo el polígono $P: A_1A_2 \dots A_n$. Una quebrada $\gamma': A_1A'_2A'_3 \dots A_n$ se llama *abarcante* de la quebrada convexa γ si ambas quebradas están situadas en un mismo semiplano respecto a la recta A_1A_n y la quebrada γ' no contiene puntos interiores del polígono P (fig. 122).

TEOREMA 15.6. La longitud de toda quebrada γ' que abarca la quebrada convexa γ no es menor que la longitud de γ . Si las quebradas no coinciden, γ' es de mayor longitud.

DEMOSTRACION (fig. 123). Tracemos la recta a por uno de los lados de la quebrada γ . Desplazándonos a lo largo de la quebrada γ' de su punto inicial A a su punto final B ,

marquemos los puntos primero y último de la quebrada γ' pertenecientes a la recta a . Sean éstos los puntos C y D . Sustituyamos la parte CD de la quebrada γ' por el segmento rectilíneo CD . La quebrada así obtenida también abarca la quebrada γ y su longitud no es mayor que la de γ' ; además, su longitud es desde luego menor si la quebrada γ' posee puntos situados a diferentes lados de la recta a . Realizando esta operación tantas veces como lados posee la quebrada γ , obtendremos finalmente la quebrada γ . De aquí resulta

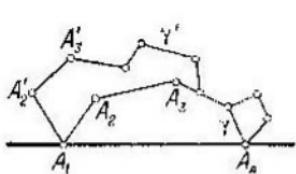


Fig. 122

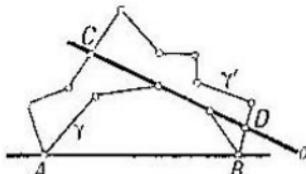


Fig. 123

que la longitud de la quebrada γ' no es menor que la de γ . Si la quebrada γ' no coincide con γ , su longitud será mayor.

Queda demostrado el teorema.

Polígonos regulares. El polígono convexo se denomina *regular* si sus lados son iguales y sus ángulos son iguales. Puesto que la suma de los ángulos externos de todo polígono convexo es igual a 360° y puesto que la suma de sus ángulos internos es igual a $(n - 2) 180^\circ$, resulta que los ángulos externos del polígono regular de n lados son iguales a $\frac{360^\circ}{n}$ y sus ángulos internos son iguales a $\frac{(n - 2) 180^\circ}{n}$.

Son iguales los polígonos regulares de n lados cuyos lados son iguales. O sea, los polígonos coinciden por efecto de un movimiento.

Sean $P_1: A_1A_2 \dots A_n$ y $P_2: B_1B_2 \dots B_n$ dos polígonos regulares de n lados. Hagamos coincidir, por efecto de un movimiento, los segmentos B_1B_2 y A_1A_2 de modo que el polígono P_2 quede al mismo lado de la recta A_1A_2 que el polígono P_1 . Este movimiento puede ser realizado, por ejemplo, de la manera siguiente.

Primero hacemos coincidir el punto B_1 con el punto A_1 , mediante una reflexión specular respecto a la perpendicular trazada por el punto medio del segmento A_1B_1 . El punto B_2 se transforma entonces en un punto B'_2 . Ahora hacemos coin-

cidir el punto B'_2 con A_2 valiéndonos de una reflexión especular respecto a la perpendicular trazada por el punto medio del segmento $A_2B'_2$. Si resulta que los polígonos P_2 y P_1 están en diferentes semiplanos respecto a la recta A_1A_2 , aplicamos, además, una reflexión especular respecto a esta recta.

Afirmamos que después de hacer coincidir de esta forma los lados B_1B_2 y A_1A_2 los polígonos P_1 y P_2 quedan superpuestos. Efectivamente, como quiera que los ángulos $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$ son iguales, las semirrectas A_2A_3 y B_2B_3 coinciden. Puesto que los segmentos A_2A_3 y B_2B_3 son iguales, coinciden los puntos B_3 y A_3 . Ambos polígonos están en un mismo semiplano respecto a la recta A_2A_3 ; a saber, en el semiplano al que pertenece el vértice común A_1 de ambos. A continuación, deducimos de la misma forma que coinciden los vértices B_4 y A_4 , los vértices B_5 y A_5 , etc., o sea, que los polígonos P_1 y P_2 quedan superpuestos.

TEOREMA 15.7. *Las perpendiculares trazadas por los puntos medios de los lados del polígono regular y las bisectrices de los ángulos internos del polígono regular son ejes de simetría del mismo (fig. 124).*

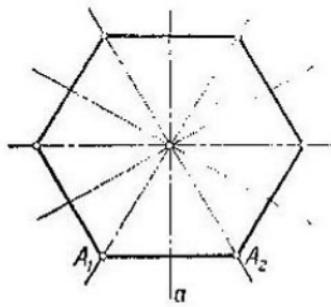


Fig. 124

DEMOSTRACION. Sea a la perpendicular trazada por el punto medio del lado A_1A_2 del polígono regular $P: A_1A_2 \dots \dots , A_n$. La simetría respecto a la recta a transforma el polígono P en el polígono $P': A_2A_1A_3A'_4 \dots A'_n$. Ambos polígonos P y P' se encuentran a un lado de la recta A_1A_2 . Repitiendo el razonamiento anterior, veremos que A'_3 coincide con A_3 ,

que A'_4 coincide con A_4 , etc. Pero esto significa que la simetría respecto a la recta a transforma el polígono P en sí mismo, o sea, que la recta a es eje de simetría. En el caso de las bisectrices de los ángulos la demostración es análoga.

Queda demostrado el teorema.

Polígonos inscritos y circunscritos. El polígono convexo se llama *inscrito* en una circunferencia si sus vértices se hallan en ella. El polígono convexo se denomina *circunscrito* a una circunferencia si sus lados son tangentes a ella.

TEOREMA 15.8. *Todo polígono regular está inscrito en una circunferencia y circunscrito a una circunferencia.*

DEMOSTRACION. Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono regular. Tracemos la circunferencia k que pasa por los puntos A_1, A_2 y A_3 (fig. 125). Su centro O está en la perpendicular a trazada por el punto medio del segmento A_2A_3 . La recta a es eje de simetría del polígono y eje de simetría de la circunferencia k . Por consiguiente, el vértice A_4 , simétrico del vértice A_1 respecto a la recta a , pertenece a la circunferencia k . Tomando ahora los puntos A_2, A_3 y A_4 , demostraremos de la misma forma que A_5 se encuentra en la circunferencia que pasa por estos puntos, o sea, en la circunferencia k . Y así sucesivamente. Como resultado obtenemos que todos los puntos A_1, A_2, \dots, A_n se hallan en la circunferencia k , es decir, que dicha circunferencia es la circunscrita al polígono.

Todos los triángulos isósceles $A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, \dots$ son iguales, pues sus bases $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ son iguales y sus laterales coinciden en tanto que radios. Por consiguiente, son iguales las alturas de estos triángulos trazadas desde el vértice O . La circunferencia de centro O y de radio igual a estas alturas es tangente a todos los lados del polígono, o sea, es la circunferencia inscrita. Queda demostrado el teorema.

Polígonos semejantes. De acuerdo con la definición general de la semejanza de las figuras, dos polígonos son *semejantes* si uno puede ser aplicado en el otro mediante una transformación de semejanza.

TEOREMA 15.9. *Son semejantes los polígonos regulares de un mismo número de lados.*

DEMOSTRACION. Sean $P: A_1A_2 \dots A_n$ y $Q: B_1B_2 \dots B_n$ dos polígonos regulares. Indiquemos la razón de sus lados por $k = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$. Sometamos el polígono Q a una transformación de homotecia respecto al centro de la circunferencia circunscrita siendo k el coeficiente de homotecia. Obtenremos entonces el polígono regular $Q': B'_1B'_2 \dots B'_n$ con

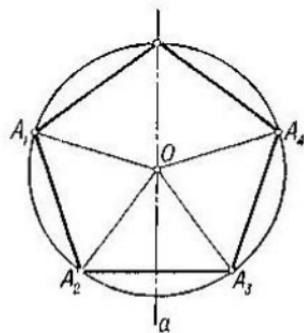


Fig. 125

los mismos lados que el polígono P . El polígono Q' es igual al polígono P , es decir, se superpone con este por efecto de un movimiento. Una homotecia y un movimiento realizados sucesivamente dan una transformación de semejanza. Por

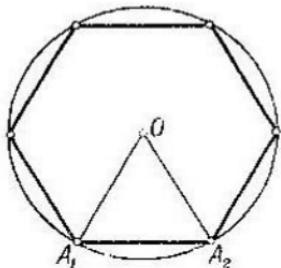


Fig. 126

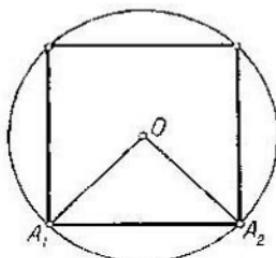


Fig. 127

consiguiente, el polígono Q se aplica en P mediante una transformación de semejanza. Esto significa que los polígonos P y Q son semejantes. Queda demostrado el teorema.

Determinemos los lados de algunos polígonos regulares en dependencia del radio R de la circunferencia circunscrita.

Comencemos por el hexágono (fig. 126). Sus ángulos internos son de 120° . Por esto, en el triángulo A_1OA_2 los ángulos de vértice A_1 y A_2 son iguales a 60° , o sea, el triángulo es equilátero. De aquí deducimos que *el lado del hexágono regular es igual al radio R de la circunferencia circunscrita*.

En el caso del cuadrilátero regular los ángulos internos son de 90° , o sea, el cuadrilátero es un cuadrado (fig. 127). En el triángulo A_1OA_2 los ángulos A_1 y A_2 son de 45° y el ángulo O es recto. Por eso,

$$A_1A_2 = \frac{OA_1}{\cos 45^\circ} = R\sqrt{2}.$$

En el caso del triángulo regular, los ángulos A_1 y A_2 del triángulo A_1OA_2 son de 30° (fig. 128). Tracemos desde O la perpendicular al lado A_1A_2 . Tendremos

$$A_1A_2 = 2 \cdot A_1B = 2 \cdot OA_1 \cdot \cos 30^\circ = R\sqrt{3}.$$

Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es polígono? ¿Qué polígono se llama convexo?
2. Demuéstrese que si los extremos de la quebrada $B_1B_2 \dots B_n$ están en distintos semiplanos respecto a la recta b , la quebrada corta esta recta.
3. Demuéstrese que si una recta tiene tres puntos comunes con un polígono convexo, contiene uno de sus lados.
4. Demuéstrese que toda diagonal de un polígono convexo lo divide en dos polígonos convexos situados a distintos lados de esta diagonal.
5. Demuéstrese que la suma de los ángulos internos del polígono convexo de n lados es igual a $(n - 2) 180^\circ$ y que la suma de sus ángulos externos es igual a 360° .
6. ¿Qué es polígono complementado?
7. Enúnciese y demuéstrese el teorema de la relación entre los perímetros de dos polígonos convexos si uno está contenido en el otro.
8. ¿Puede colocarse el triángulo regular de lado de 4 cm en el interior del cuadrado de lado de 3 cm?
9. Enúnciese y demuéstrese el teorema de la relación entre las longitudes de una quebrada convexa y de una quebrada que la abarca.
10. Demuéstrese que los polígonos regulares de n lados son iguales si sus lados son iguales.
11. ¿Cuáles son los ejes de simetría del polígono regular? Enúnciese y demuéstrese el teorema correspondiente.
12. Demuéstrese que todo polígono regular está inscrito en una circunferencia y circunscrito a una circunferencia.
13. Demuéstrese que los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.
14. Demuéstrese que los perímetros de los polígonos regulares de igual número de lados son uno al otro como los radios de las circunferencias inscritas o como los radios de las circunferencias circunscritas.
15. ¿Cuánto miden los lados del hexágono, el cuadrilátero y el triángulo regulares si el radio de la circunferencia circunscrita es R ?
16. Establezcase la relación entre el radio de la circunferencia y los lados de los polígonos regulares de igual número de lados inscrito y circunscrito a la misma.
17. Exprésese el lado del octágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita.
18. Exprésese el lado del decágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita. (Sugerencia. Véase el ejercicio 17 del § 13.)
19. Exprésese el lado del pentágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita.

§ 16. ÁREAS DE FIGURAS

Concepto del área. El problema de la determinación del área de las figuras se remonta a la antigüedad. Surgió en relación con la actividad práctica del hombre.

Imaginemos dos parcelas de terreno: una cuadrada y otra de forma arbitraria (fig. 129). Supongamos que ambas han

sido sembradas de trigo empleándose para la primera m kg de grano y n kg para la segunda. Lo natural es considerar que la segunda parcela es $\frac{n}{m}$ veces mayor que la primera.

Llamaremos área de la segunda parcela el número que indica cuántas veces es mayor que la primera. La primera parcela es la unidad de medición. De esta definición del área se obtienen las siguientes propiedades de la misma.

Primero, puesto que para sembrar toda parcela se necesita una cantidad determinada de grano, resulta que *toda parcela posee un área determinada*.

Segundo, para sembrar dos parcelas iguales se necesita la misma cantidad de grano y, por eso, *las parcelas iguales tienen igual área*.

Tercero, si dividimos la parcela en dos partes, la cantidad de grano necesaria para sembrar toda la parcela constará de las cantidades de grano necesarias para sembrar cada una de sus partes. Por ello, *el área de toda la parcela es igual a la suma de las áreas de sus partes*.

Ateniéndonos a esta definición, para hallar el área de una parcela es necesario realizar la siembra. Pero, en la práctica el problema debe ser resuelto precisamente en sentido inverso. Se exige conocer la cantidad de trigo necesaria para la siembra antes de realizar ésta. Si conociésemos el área de la parcela, podríamos determinar esta cantidad de trigo multiplicando el área por la cantidad de trigo necesaria para la siembra de una unidad de área. ¿Cómo determinar, pues, el área de la parcela?

Ahora demostraremos que *las tres propiedades señaladas del área la determinan completamente* y encontraremos las fórmulas que permiten calcular el área de las figuras simples.

Una figura se llama *simple* si puede ser dividida en triángulos. En particular, son figuras simples, por ejemplo, el paralelogramo, el trapecio y el polígono regular.

Área del rectángulo. Determinemos primero el área del rectángulo. En la fig. 130 representamos un cuadrado como

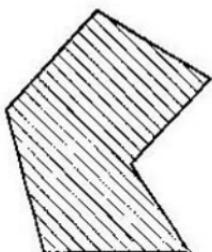
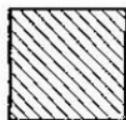


Fig. 129

unidad de medida y un rectángulo cuya área debe ser medida.

Dividamos los lados del cuadrado en N partes iguales y tracemos por los puntos de división rectas paralelas a sus lados. El cuadrado quedará dividido en N^2 cuadrados pequeños. En la figura, el lado del cuadrado ha sido dividido en 5 partes. El número de los cuadrados pequeños es de $5 \times 5 = 25$.

Determinemos el área del cuadrado pequeño. Por la propiedad del área, el cuadrado grande tiene un área igual a la

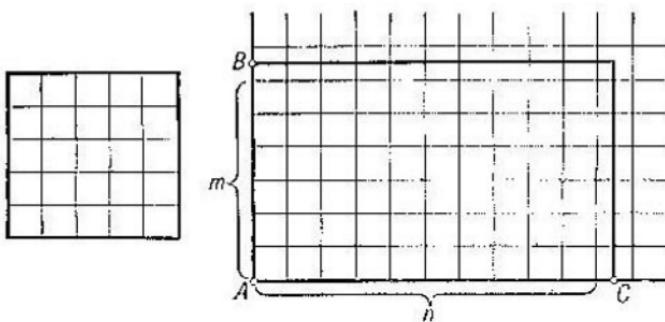


Fig. 130

suma de las áreas de los cuadrados pequeños. Puesto que el área del cuadrado grande es igual a la unidad y que el número de cuadrados pequeños es igual a N^2 , el área del cuadrado pequeño es igual a $\frac{1}{N^2}$. Indiquemos por q el lado del cuadrado pequeño. Entonces, $q = \frac{1}{N}$ y, por consiguiente, el área del cuadrado pequeño es $\frac{1}{N^2} = q^2$.

Construyamos en las semirrectas AB y AC segmentos iguales a q , $2q$, $3q$, ... y tracemos por sus extremos rectas paralelas a los lados del rectángulo. Obtendremos una red de cuadrados de lado q que cubren el rectángulo. Determinemos el número de cuadrados contenidos en el rectángulo y el número de cuadrados que contienen el rectángulo.

Sean a y b los lados del rectángulo. Indiquemos mediante m el entero de la división de a por q y mediante n el entero de la división de b por q . Entonces, el número de cuadrados contenidos en el rectángulo será mn , mientras que el número

de cuadrados que contienen el rectángulo no será mayor que $(m + 1)(n + 1)$. De aquí resulta que el área S del rectángulo está comprendida entre $m n q^2$ y $(m + 1)(n + 1)q^2$, o sea, que

$$m n q^2 \leq S < (m + 1)(n + 1)q^2.$$

Demostremos ahora que el producto ab está comprendido entre estos mismos números. Efectivamente, se tiene $m q \leq a < (m + 1)q$ y $n q \leq b < (n + 1)q$. Por eso

$$m n q^2 \leq ab < (m + 1)(n + 1)q^2.$$

Puesto que ambos números, S y ab , están comprendidos entre los números $m n q^2$ y $(m + 1)(n + 1)q^2$, difieren a lo sumo en $(m + 1)(n + 1)q^2 - m n q^2$, o sea, difieren a lo sumo en $m q^2 + n q^2 + q^2$. Como $m q \leq a$ y $n q \leq b$, de aquí se deduce que S y ab difieren no más que en $a q + b q + q^2$. Tomando el número N suficientemente grande, el número $a q + b q + q^2$, igual a $\frac{a}{N} + \frac{b}{N} + \frac{1}{N^2}$, será tan pequeño como se quiera. Resulta que la diferencia entre los números S y ab es todo lo pequeña que se quiera. Pero esto puede darse sólo si son iguales.

Por consiguiente, el área del rectángulo de lados a y b es

$$S = ab.$$

Aquí a y b se miden con el lado del cuadrado que se ha tomado como unidad de medición del área.

Áreas de las figuras elementales. Determinemos el área del paralelogramo. Sea $ABCD$ un paralelogramo (fig. 131).

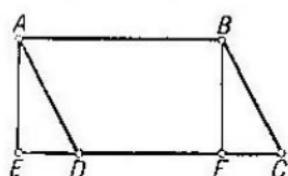


Fig. 131

Si no es un rectángulo, uno de sus ángulos A o B es agudo. Supongamos, para puntualizar, que es agudo el ángulo A como representa la figura. Tracemos desde el vértice A la perpendicular AE y la recta CD . El área del trapezio $ABCE$ es igual a la suma de las áreas del paralelogramo $ABCD$ y del triángulo ADE .

Tracemos desde el vértice B la perpendicular BF a la recta CD . El área del trapezio $ABCE$ es entonces igual a la suma de las áreas del rectángulo $ABFE$ y del triángulo BCF . Los triángulos rectángulos ADE y BCF son iguales y, por consiguiente, tienen áreas iguales. De aquí resulta

que el área del paralelogramo $ABCD$ es igual a la del rectángulo $ABFE$, o sea, es igual a $AB \cdot BF$. El segmento BF se denomina *altura* del paralelogramo correspondiente a los lados AB y CD .

Por consiguiente, el área del paralelogramo es igual al producto de su lado por la altura correspondiente.

Determinemos el área del triángulo. Sea ABC un triángulo (fig. 132). Complementemos este triángulo hasta obtener el paralelogramo $ABCD$ como se indica en la figura. El área del paralelogramo es igual a la suma de las áreas

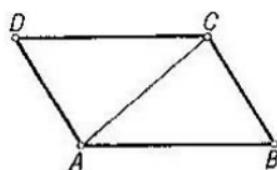


Fig. 132

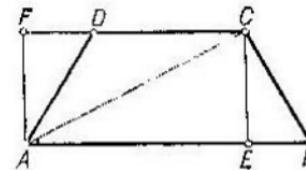


Fig. 133

de los triángulos ABC y CDA . Puesto que estos triángulos resultan iguales, el área del paralelogramo será igual al doble del área del triángulo ABC . La altura del paralelogramo correspondiente a su lado AB es igual a la altura del triángulo ABC relativa al lado AB .

De aquí se desprende que el área del triángulo es igual a la mitad del producto de su lado por la altura relativa.

Determinemos el área del trapecio. Sea $ABCD$ un trapecio (fig. 133). La diagonal AC del trapecio lo divide en dos triángulos ABC y CDA . Por lo tanto, el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de estos triángulos. El área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2} AB \cdot CE$ y el área del triángulo ACD es igual a $\frac{1}{2} DC \cdot AF$. Las alturas CE y AF de estos triángulos son iguales a la distancia entre las rectas paralelas AB y CD . Esta distancia se denomina *altura* del trapecio.

Por consiguiente, el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura.

Independencia entre el área de una figura simple y el modo de dividirla en triángulos. El área de una figura simple se determina sumando las áreas de los triángulos que la componen. Pero existen diversos modos de dividir una figura

simple en triángulos. Por ello, surge la siguiente pregunta: ¿depende el área de la figura del modo de dividirla en triángulos? Demostremos que *el área de toda figura simple no depende del modo de dividirla en triángulos*.

Demostremos, ante todo, que el área del triángulo no depende del lado ni de la altura correspondiente tomados para calcular el área. Sea ABC un triángulo (fig. 134). Trazemos sus alturas CC_1 y BB_1 . Los triángulos rectángulos AC_1C y AB_1B son semejantes, pues tienen el ángulo A común. De aquí se deduce que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} \text{ y } AC \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1.$$

Por consiguiente, al calcular el área del triángulo ABC se obtiene el mismo resultado tanto tomando el lado AC y la altura BB_1 como tomando el lado AB y la altura CC_1 .

Demostremos ahora que, al dividir un triángulo en triángulos menores, su área es igual a la suma de las áreas de los triángulos resultantes cualquiera que sea el modo de dividirlo. Consideremos primero el modo de división representado en la fig. 135. El triángulo ABC ha sido dividido en triángulos CAD_1 , CD_1D_2 , CD_2D_3 , ... Todos estos

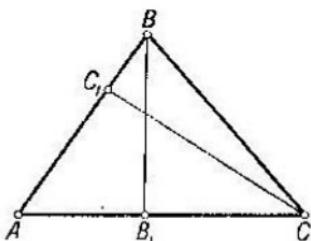


Fig. 134

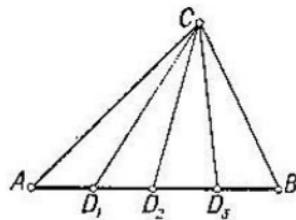


Fig. 135

triángulos tienen la misma altura h trazada desde el vértice común C . Es al mismo tiempo la altura del triángulo ABC .

La suma de las áreas de los triángulos, producto de la división, es

$$\frac{AD_1 \cdot h}{2} + \frac{D_1D_2 \cdot h}{2} + \frac{D_2D_3 \cdot h}{2} + \dots = \frac{(AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \dots) \cdot h}{2}.$$

Puesto que $AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \dots = AB$, la suma de las áreas de los triángulos de nuestra partición es igual a $\frac{AB \cdot h}{2}$, o sea, es igual al área del triángulo ABC .

Consideremos ahora una partición cualquiera del triángulo ABC en triángulos pequeños. Supongamos que dos cualesquier triángulos de esta partición no tienen puntos comunes, tienen un vértice común o tienen un lado común. Semejante partición está representada en la fig. 136.

En la fig. 137 se muestra un triángulo PQR de esta partición. El área del triángulo PQR se puede representar como la suma algebraica de las áreas de tres triángulos APQ , AQR y ARP . Estos triángulos se obtienen del triángulo PQR tomando el vértice A en lugar de uno de sus

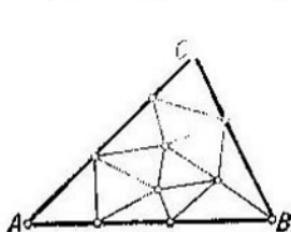


Fig. 136

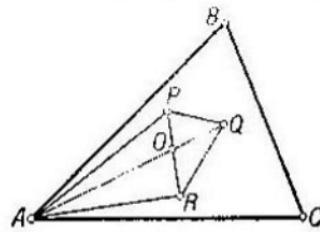


Fig. 137

vértices. El signo del área de los triángulos en esta suma se determina por la regla siguiente. Si el vértice sustituido por el vértice A está al mismo lado que el vértice A respecto a la recta que une los otros dos vértices, el área del triángulo lleva el signo «+»; en el caso contrario se toma el signo «-». Si al sustituir el vértice A , tres puntos aparecen en una recta, el sumando correspondiente se omite, es decir, su área se considera igual a cero.

Analicemos, por ejemplo, la posición del triángulo PQR representada en la fig. 137. Según lo demostrado,

$$S(PQR) = S(PQO) + S(QRO),$$

$$S(APQ) = S(APO) + S(PQO),$$

$$S(ARQ) = S(ARO) + S(QRO),$$

$$S(APR) = S(APO) + S(ARO).$$

De donde vemos que

$$S(PQR) = S(APQ) + S(ARQ) - S(APR).$$

Hemos comprobado la validez de nuestra afirmación —respecto a la posibilidad de representar el área del triángulo PQR como una suma algebraica de las áreas de los triángu-

los APQ , AQR y ARP — para una posición concreta del triángulo PQR . Podríamos haber considerado los demás casos y comprobar la certeza de nuestra afirmación.

Representando el área de cada uno de los triángulos de la partición como la suma algebraica de las áreas de triángulos de vértice A , sumemos las áreas de todos los triángulos de la partición. Obtendremos así la suma de las áreas de triángulos AXY , donde XY es un lado de un triángulo de la partición. Si el segmento XY está en el interior del triángulo ABC , el área del triángulo AXY aparecerá en nuestra suma dos veces, pues XY será un lado de dos triángulos de la partición. Como quiera que estos triángulos se encuentran a distintos lados de la recta XY , el área del triángulo AXY aparecerá una vez con el signo «+» y la segunda vez con el signo «-». Por consiguiente, estos sumandos se reducirán.

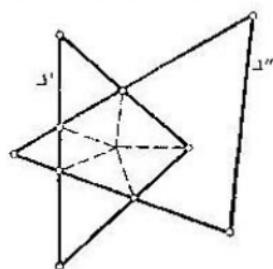


Fig. 138

Si el segmento XY se halla en el lado BC del triángulo ABC , el área del triángulo AXY aparecerá en nuestra suma sólo una vez y, además, llevando el signo «+». Finalmente, si el lado XY se halla en AB o en AC , el área de AXY será simplemente igual a cero. En resumen, la suma de las áreas de los triángulos de nuestra partición será igual a la suma de las áreas de aquellos triángulos AXY cuyos lados XY se encuentran en el lado BC del triángulo ABC . Pero hemos demostrado con anterioridad que esta suma es igual al área del triángulo ABC . Por consiguiente, el área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos de cualquier partición.

Supongamos ahora que una figura simple F ha sido dividida primero en triángulos Δ'_1 , Δ'_2 , Δ'_3 , ... y después en triángulos Δ''_1 , Δ''_2 , Δ''_3 , ... Demostremos que las sumas de las áreas de los triángulos de ambas particiones son iguales.

Los triángulos de ambas particiones, considerados conjuntamente, realizan una partición de la figura F en polígonos convexos; a saber: en triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos. Cada uno de estos polígonos es la parte común de un triángulo de la primera partición y de un triángulo de la segunda partición. En la figura 138 se muestra

un pentágono de este tipo. Dividamos estos polígonos en triángulos $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3'', \dots$ haciendo que dos triángulos cualesquiera de esta partición no tengan puntos comunes, tengan un vértice común o tengan un lado común.

Según hemos demostrado, el área de todo triángulo Δ_n' de la primera partición de la figura F es igual a la suma de las áreas de los triángulos Δ_n'' que lo componen. Igualmente, el área de todo triángulo Δ_n'' de la segunda partición es suma de áreas de triángulos Δ_n''' . Por esto, la suma de las áreas de los triángulos tanto de la primera como de la segunda partición de la figura F será igual a la suma de las áreas de los triángulos Δ_n''' . Es decir, en ambas particiones la suma de las áreas de los triángulos es la misma, o sea, el área de la figura F no depende del modo de dividirla en triángulos.

Áreas de las figuras semejantes. Sean F_1 y F_2 dos figuras simples semejantes. Veamos cuál es la razón entre las áreas de estas figuras. Puesto que las figuras son semejantes, existe una transformación de semejanza que aplica la figura F_1 en F_2 .

Dividamos la figura F_1 en los triángulos $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \dots$ La transformación de semejanza que aplica F_1 en F_2 transforma estos triángulos en los triángulos $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3'', \dots$ que constituyen una partición de la figura F_2 . El área de la figura F_1 es igual a la suma de las áreas de los triángulos $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \dots$ y el área de la figura F_2 es igual a la suma de las áreas de los triángulos $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3'', \dots$

Si el coeficiente de semejanza es k , las dimensiones del triángulo Δ_n'' son k veces mayores que las dimensiones correspondientes del triángulo Δ_n' . En particular, los lados y las alturas del triángulo Δ_n'' son k veces mayores que los lados y las alturas correspondientes del triángulo Δ_n' . De aquí resulta que $S(\Delta_n'') = k^2 S(\Delta_n')$. Sumando estas igualdades miembro por miembro, obtenemos

$$S(F_2) = k^2 S(F_1).$$

El coeficiente de semejanza k es igual a la razón de las dimensiones lineales correspondientes de las figuras F_2 y F_1 , o sea, $k = \frac{l_2}{l_1}$. Por esto

$$S(F_2) = \frac{l_2^2}{l_1^2} S(F_1) \quad \text{o} \quad \frac{S(F_2)}{S(F_1)} = \frac{l_2^2}{l_1^2}.$$

es decir, la razón de las áreas de las figuras semejantes es igual a la razón de los cuadrados de sus dimensiones lineales correspondientes.

Preguntas de repaso y ejercicios

1. Enúnciese las propiedades del área.
2. Demuéstrese que el área del rectángulo es igual a ab , donde a y b son los lados del rectángulo.
3. Demuéstrese que el área del paralelogramo es igual al producto de su lado por la altura correspondiente.
4. Demuéstrese que el área del triángulo es igual a la mitad del producto de su lado por la altura trazada desde el vértice opuesto.
5. Demuéstrese que el área del triángulo ABC es

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} A.$$

6. Demuéstrese que el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura del trapecio.
7. Demuéstrese que el área del polígono convexo circunscrito es igual al producto del semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita.
8. Demuéstrese que para toda partición del triángulo en triángulos pequeños la suma de las áreas de los triángulos de esta partición es igual al área del triángulo.
9. Demuéstrese que el área de una figura simple no depende del modo de dividirla en triángulos al calcular el área.
10. ¿Cuál es la razón de las áreas de figuras semejantes?

§ 17. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA. ÁREA DEL CÍRCULO

Longitud de la circunferencia. Sea P un polígono convexo inscrito en una circunferencia y sean A y B dos vértices consecutivos del mismo (fig. 139). Tomemos un punto C en el arco \widehat{AB} de la circunferencia e indiquemos por P_1 el polígono cuyos vértices son los vértices del polígono P más el punto C . El paso del polígono P al polígono P_1 está relacionado con la sustitución del lado AB por los lados AC y CB . Puesto que $AB < AC + CB$, el perímetro del polígono P_1 es mayor que el perímetro del polígono P .

Añadiendo al polígono vértices nuevos, aumentaremos su perímetro. Sin embargo, este aumento no es ilimitado. Es más, si tomamos un polígono circunscrito, los perímetros de todos los polígonos inscritos serán menores que el perímetro de este polígono circunscrito. En particular, el perí-

metro del cuadrado circunscrito a la circunferencia es igual a $8R$. Por esto, el perímetro de cualquier polígono inscrito no es mayor que $8R$.

Se llama *longitud de la circunferencia* el menor de los números mayores que el perímetro de cualquier polígono inscrito en ella.

Cualquiera que sea el número positivo a , se puede inscribir en la circunferencia un polígono convexo cuyo perímetro difiere de la longitud de la circunferencia en menos que a . Efectivamente, supongamos que esta afirmación no es válida. Entonces el perímetro de cualquier polígono inscrito en la circunferencia no es mayor que $l - a$. Por consiguiente, el número l no es el menor de los números mayores que el perímetro de cualquier polígono inscrito. El número $l - \frac{a}{2}$ es menor que l y,

a la vez, mayor que el perímetro de cualquier polígono inscrito. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la afirmación.

TEOREMA 17.1. La razón de las longitudes de dos circunferencias es igual a la razón de sus radios o sus diámetros.

DEMOSTRACION. Sean R_1 y R_2 los radios de las circunferencias y sean l_1 y l_2 sus longitudes. El teorema afirma que $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}$. Supongamos que la afirmación no es válida. Entonces $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$ o $\frac{R_2}{R_1} < \frac{l_2}{l_1}$. Supongamos, para puntualizar, que $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$. Indiquemos por k la razón $\frac{R_1}{R_2}$. Entonces $\frac{l_1}{l_2} > k$ y, por consiguiente, $l_1 > kl_2$.

Inscribamos en la primera circunferencia un polígono Q_1 de manera que su perímetro p_1 difiera de la longitud de la circunferencia en menos que $l_1 - l_2k$, o sea, que se tenga $l_1 - p_1 < l_1 - l_2k$. Entonces $p_1 > l_2k$.

Inscribamos en la segunda circunferencia el polígono Q_2 semejante a Q_1 .

Sea p_2 su perímetro. La razón de los perímetros de los polígonos Q_1 y Q_2 es igual a la razón de los radios de las circunferencias, esto es, $p_1 = kp_2$. Puesto que $p_1 > l_2k$,

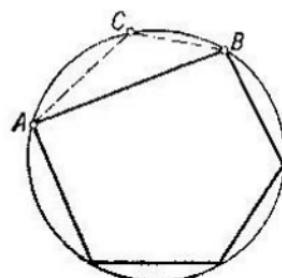


Fig. 139

y que $p_1 = kp_2$, resulta que $p_2 > l_2$. Pero esto contradice la definición del número l_2 que debe ser mayor que el perímetro de cualquier polígono inscrito en la segunda circunferencia. Por lo tanto, la razón de las longitudes de las circunferencias es igual a la razón de sus radios o diámetros:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Queda demostrado el teorema.

Del teorema 17.1. se deduce que

$$\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2},$$

o sea, que *la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro no depende de qué circunferencia se ha tomado*.



Fig. 140

Esta razón se designa por la letra griega π (se lee «pi»). El número π es irracional. Su valor aproximado es

$$\pi \approx 3,1416.$$

Por consiguiente, *la longitud de la circunferencia se determina según la fórmula*

$$l = 2\pi R.$$

Longitud del arco de circunferencia. Medida radial del ángulo. Llamaremos *longitud del arco* de circunferencia el menor de los números mayores que la longitud de cualquier quebrada convexa inscrita en este arco. En la fig. 140 se puede ver el arco \widehat{AB} de circunferencia y una quebrada convexa inscrita en éste. Para abreviar, en lugar de arco de circunferencia a menudo se dice simplemente arco.

Idénticamente al caso de la circunferencia, se demuestra que cualquiera que sea el número positivo a se puede inscribir en el arco de circunferencia una quebrada convexa cuya longitud difiera de la longitud del arco en menos que a .

TEOREMA 17.2. *La longitud l del arco de circunferencia se determina según la fórmula*

$$l = \frac{\pi R}{180} \alpha,$$

donde α es la medida en grados del ángulo central correspondiente.

DEMOSTRACION. Demostremos, ante todo, que si el punto C divide el arco \widehat{AB} en los arcos \widehat{AC} y \widehat{CB} , la longitud del arco \widehat{AB} es igual a la suma de las longitudes de los arcos \widehat{AC} y \widehat{CB} .

Tomemos un número pequeño positivo a . Inscribamos en los arcos \widehat{AB} , \widehat{AC} y \widehat{CB} las quebradas γ , γ_1 y γ_2 de modo que sus longitudes difieran de las longitudes de los arcos en menos que a . Complementemos los vértices de la quebrada γ con los vértices de las quebradas γ_1 y γ_2 y los vértices de las quebradas γ_1 y γ_2 con los vértices de la quebrada γ . Obtendremos así unas quebradas γ' , γ'_1 y γ'_2 inscritas en los arcos \widehat{AB} , \widehat{AC} y \widehat{CB} . Puesto que al agregar vértices nuevos a la quebrada su longitud aumenta, las longitudes de las quebradas γ' , γ'_1 y γ'_2 difieren de las longitudes de los arcos correspondientes también en menos que a .

Indiquemos por l , l_1 y l_2 las longitudes de los arcos γ y por s , s_1 y s_2 las longitudes de las quebradas. Las quebradas γ'_1 y γ'_2 son las partes en que el punto C divide la quebrada γ' . Por esto, la longitud de la quebrada γ' es igual a la suma de las longitudes de las quebradas γ'_1 y γ'_2 , o sea, $s = s_1 + s_2$. Puesto que $l - s < a$, $l_1 - s_1 < a$, $l_2 - s_2 < a$ y $s = s_1 + s_2$, resulta que l difiere de $l_1 + l_2$ en $2a$ como máximo. Como quiera que los números l y $l_1 + l_2$ están perfectamente determinados y el número a se puede tomar tan pequeño como se quiera, esto es posible sólo si $l = l_1 + l_2$. Queda demostrada la afirmación.

Probemos ahora que la longitud del arco \widehat{AB} (fig. 141) se determina según la fórmula

$$l = \frac{\pi R}{180} \alpha,$$

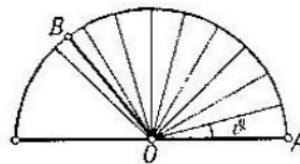


Fig. 141

donde α es la medida en grados del ángulo central correspondiente.

Sea N un número entero grande y sea θ el ángulo de $\frac{180^\circ}{N}$. Construyamos a partir de la semirrecta OA los ángulos iguales a θ , 2θ , 3θ , Sea n el entero de la división de α por θ , es decir,

$$n\theta \leqslant \alpha < (n+1)\theta$$

o

$$\frac{n \cdot 180}{N} \leqslant \alpha < \frac{(n+1) \cdot 180}{N}.$$

De aquí resulta que

$$\frac{n}{N} \pi R \leqslant \frac{\pi R}{180} \alpha < \frac{n+1}{N} \pi R.$$

Puesto que la longitud del arco de circunferencia es igual a la suma de las longitudes de sus partes, la longitud del arco correspondiente al ángulo θ es igual a $\frac{\pi R}{N}$. El arco \widehat{AB} no es menor que la suma de n arcos iguales a $\frac{\pi R}{N}$ pero es menor que la suma de $n+1$ arcos idénticos, o sea,

$$\frac{n}{N} \pi R \leqslant \widehat{AB} < \frac{n+1}{N} \pi R,$$

Vemos que ambos números —el número $\frac{\pi R \alpha}{180}$ y la longitud del arco \widehat{AB} — están comprendidos entre los números $\frac{\pi R n}{N}$ y $\frac{\pi R (n+1)}{N}$. De aquí se deduce que la longitud del arco \widehat{AB} difiere del número $\frac{\pi R \alpha}{180}$ a lo sumo en

$$\frac{\pi R}{N} (n+1) - \frac{\pi R}{N} n,$$

o sea, en $\frac{\pi R}{N}$ todo lo más. Puesto que N se puede tomar tan grande como se quiera, de aquí se desprende que la longitud del arco \widehat{AB} es igual a $\frac{\pi R \alpha}{180}$. Queda demostrado el teorema.

Se denomina *medida radial* del ángulo la razón entre la longitud del arco correspondiente y el radio de la circunferencia. De la fórmula obtenida para la longitud del arco

de circunferencia resulta que

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \alpha,$$

o sea, que la medida radial del ángulo se obtiene multiplicando su medida en grados por $\frac{\pi}{180}$. En particular, la medida radial del ángulo de 180° es igual a π y la medida radial del ángulo recto es $\frac{\pi}{2}$.

La unidad de la medida radial de los ángulos es el radián. El ángulo de un radián es el ángulo cuyo arco es igual al radio. La medida en grados del ángulo de un radián es igual a $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$.

Área del círculo y de sus partes. Se denomina *círculo* de centro O y de radio R la figura formada por todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia no mayor que R del punto O (fig. 142). La circunferencia de radio R y de centro O se denomina *circunferencia* del círculo.

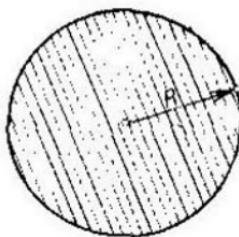


Fig. 142

El área del círculo es el menor de los números mayores que el área de cualquier polígono convexo inscrito en la circunferencia del círculo.

TEOREMA 17.3. El área del círculo es igual a la mitad del producto de la longitud de la circunferencia del círculo por el radio, o sea,

$$S = \pi R^2.$$

DEMOSTRACION. Tomemos un número positivo pequeño a . Inseríbamos en la circunferencia del círculo un polígono convexo P tal que sus lados sean menores que a (cm), que su perímetro difiera de la longitud de la circunferencia en menos que a (cm) y que el área del círculo difiera del área del polígono en menos que aR (cm^2). Con este fin, construyamos tres polígonos P_1 , P_2 y P_3 de modo que P_1 cumpla la primera condición, P_2 la segunda y P_3 la tercera. Ahora, agregando al polígono P_1 los vértices de los polígonos P_2 y P_3 , obtendremos el polígono P que cumple las tres condiciones.

El área del polígono P se obtiene sumando las áreas de todos los triángulos que tienen un vértice común en el centro

del círculo y cuyos lados opuestos a este vértice son los lados del polígono P (fig. 143). Consideremos el área de uno de estos triángulos OAB . Tenemos

$$S(OAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC.$$

Puesto que $OA > OC > OA - AC$, se tiene

$$\frac{1}{2} AB(R-a) < S(OAB) < \frac{1}{2} AB \cdot R.$$

Sumando las áreas de todos los triángulos, encontramos

$$\frac{1}{2} p(R-a) < S(P) < \frac{1}{2} pR,$$

donde p es el perímetro del polígono P y $S(P)$ es su área.

Introduciendo en el último miembro de esta desigualdad la longitud l de la circunferencia en lugar del perímetro

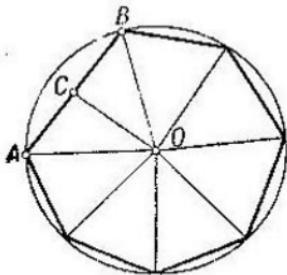


Fig. 143

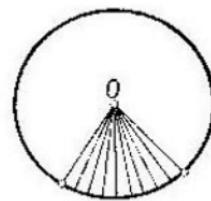


Fig. 144

p y en el primer miembro la magnitud $l - a$ en lugar del perímetro, con mayor razón podremos escribir que

$$\frac{1}{2} (l-a)(R-a) < S(P) < \frac{1}{2} lR,$$

o sea,

$$\frac{1}{2} lR - \frac{1}{2} (aR + al - a^2) < S(P) < \frac{1}{2} lR.$$

De esta desigualdad resulta que el área $S(P)$ del polígono difiere de $\frac{lR}{2}$ en menos que $\frac{aR + al - a^2}{2}$. Ya que, por la construcción, esta área difiere del área del círculo en menos que aR , se deduce que el área del círculo difiere de $\frac{lR}{2}$ en menos que $aR + \frac{aR + al - a^2}{2}$, o sea, difiere tan

poco como se quiera si a es suficientemente pequeño. Pero esto puede suceder sólo si el área del círculo es igual a $\frac{lR}{2}$.

Queda demostrado el teorema.

Se llama *sector de círculo* la parte del círculo perteneciente al interior del ángulo central correspondiente (fig. 144).

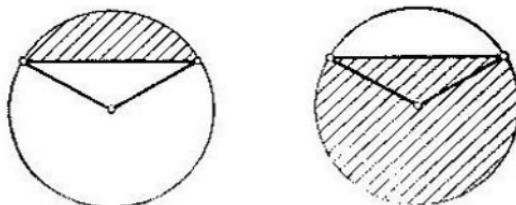


Fig. 144

El área del sector de círculo se determina según la fórmula

$$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{360},$$

donde R es el radio del círculo y α es la medida en grados del ángulo central correspondiente. Esta fórmula se demuestra igual que la fórmula de la longitud del arco de circunferencia.

Se denomina *segmento de círculo* la parte común del círculo y de un semiplano (fig. 145). El área del segmento, que no sea un semicírculo, se determina mediante la fórmula

$$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{360} \pm S_{\Delta},$$

donde S_{Δ} es el área del triángulo de vértices en el centro del círculo y en los extremos de los radios que limitan el sector correspondiente. El signo « $-$ » ha de tomarse si $\alpha < 180^\circ$ y el signo « $+$ » si $\alpha > 180^\circ$.

Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es longitud de la circunferencia?

2. Demuéstrese que cualquiera que sea el número positivo a , existe un polígono inscrito cuyo perímetro difiere de la longitud de la circunferencia en menos que a .

3. ¿Qué es longitud del arco de circunferencia?

4. Demuéstrese la fórmula de la longitud de la circunferencia: $l = 2\pi R$.

5. Demuéstrese que si el punto C divide el arco \widehat{AB} de la circunferencia en los arcos \widehat{AC} y \widehat{CB} , la longitud del arco \widehat{AB} es igual a la suma de las longitudes de los arcos \widehat{AC} y \widehat{CB} .
6. Dedúzcase la fórmula de la longitud del arco de circunferencia.
7. ¿Qué es medida radial del ángulo? ¿Cuál es la medida radial de los ángulos de 30° y de 45° ?
8. Dese la definición del área del círculo.
9. Demuéstrese que cualquiera que sea el número positivo a , existe un polígono convexo inscrito cuya área difiere del área del círculo en menos que a .
10. Demuéstrese que el área S del círculo se determina mediante la fórmula $S = \pi R^2$, donde R es el radio del círculo.
11. ¿Qué es sector de círculo? ¿Cuál es la fórmula del área del sector de círculo?
12. ¿Qué es segmento de círculo? ¿Cuál es la fórmula del área del sector de círculo?