Números complejos
Álgebra 9°

Germán Avendaño Ramírez *

Nombre: ______________________________Curso: ________ Fecha: ____________

CANTIDADES IMAGINARIAS

Actividad 1

1. Halle un número real x que cumpla:

   a) $x + 5 = 8$
   b) $9 - x = 12$
   c) $x^2 - 9 = 16$
   d) $x^2 - 36 = 0$
   e) $-81 + x = 0$
   f) $x^2 - 4 = 0$

2. Será posible hallar un número real x tal que cumpla que:

$$x^2 + 4 = 0$$

Al intentar solucionar la anterior ecuación, llegamos al siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 + 4 - 4 &= 0 - 4 \qquad \text{Restando 4} \\ x^2 &= -4 \\ \sqrt{x^2} &= \pm\sqrt{-4} \qquad \text{Extrayendo raíz} \\ x &= \pm\sqrt{-4} \end{aligned}$$

Como en los números reales no existe ningún valor que satisfaga la última ecuación, el proceso puede continuar de la siguiente manera:

-4 se puede expresar como el producto de dos cantidades, así:

$-4 = (4)\cdot(-1)$, luego

$$\begin{aligned} &x = \pm\sqrt{-4} \qquad \text{se puede reemplazar por:} \\ &x = \pm\sqrt{(4)(-1)} \\ &x = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} \qquad \text{Por propiedad de la radicación} \\ &x = \pm 2\sqrt{-1} \\ &x = \pm 2i \qquad \text{ya que } \sqrt{-1} = i \end{aligned}$$

Se ha introducido luego la unidad imaginaria $\sqrt{-1} = i$. Los números que se representan de la forma bi reciben el nombre de *cantidades imaginarias* y nacen de la necesidad de dar soluciones a las ecuaciones de la forma $x^2 + a = 0$

En la expresión bi, b representa el valor de las cantidades imaginarias, mientras que i es la *unidad imaginaria* cuyo valor es: $\sqrt{-1}$

Operaciones con cantidades imaginarias

Actividad 2

Analice el siguiente ejemplo y luego realice los ejercicios propuestos

EJEMPLO: Hallar el resultado de: $\sqrt{-16} + 3\sqrt{-25} - 2\sqrt{-49}$

Solución: Para tal fin escriba primero las cantidades en la forma bi:

$$\begin{aligned} \sqrt{-16} &= \sqrt{16(-1)} \\ &= \sqrt{16}\sqrt{-1} \\ &= 4i \end{aligned}$$

*Lic. Mat. U.D., M.Sc. U.N.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{-25} &= 3\sqrt{25(-1)} \\ &= 3\sqrt{25}\sqrt{-1} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot i \\ &= 15i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-49} &= 2\sqrt{49(-1)} \\ &= 2\sqrt{49}\sqrt{-1} \\ &= 2(7)i \\ &= 14i \end{aligned}$$

Luego reemplace y efectúe la operación así:

$$\sqrt{-16} + 3\sqrt{-25} - 2\sqrt{-49} = 4i + 15i - 14i = 5i$$

En el cuaderno resuelva:

1. $15\sqrt{-100} + \frac{2}{3}\sqrt{-25} - \frac{4}{7}\sqrt{-49}$
2. $\frac{4}{3}\sqrt{-81} - 5\sqrt{-36} - \frac{9}{2}\sqrt{-16}$
3. $0,7\sqrt{-25} + 2,4\sqrt{-100} - 0,6\sqrt{-36} + 8,4\sqrt{-81}$
4. $\frac{2}{7}\sqrt{-100} + \frac{1}{5}\sqrt{-121} - \frac{9}{5}\sqrt{-25} + \frac{3}{7}\sqrt{-9}$

Actividad 3

1. Por definición toda cantidad diferente de 0, elevada a la potencia cero ¿cuánto vale?; es decir $a^0 =$?
2. ¿Qué sucederá si elevas i a la cero?
3. ¿Cuánto será i elevado a la uno? Es decir, cuánto vale $i^1 =$?
4. ¿Cuánto valdrá i^3? Descomponga $i^3 = i^2 \cdot i$. Reemplace los valores.
5. ¿Cuánto valdrá i^4?
6. Complete la siguiente tabla

i^0		i^1		i^2		i^3	
i^4		i^5		i^6		i^7	
i^8		i^9		i^{10}		i^{11}	
i^{12}		i^{13}		i^{14}		i^{15}	

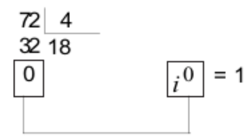
Conclusiones

La unidad imaginaria tiene cuatro potencias básicas:

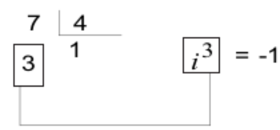
$$i^0 = 1; \qquad i^1 = i; \qquad i^2 = -1; \qquad i^3 = -i$$

Cualquier otro valor será la repetición de uno de los anteriores valores. Para hallar el valor basta dividir la potencia dada entre 4 y determinar el residuo para compararlo con los exponentes básicos.

Ejemplo: El valor de i^{72} es 1 puesto que:



El valor de i^7 es -1 puesto que:



Multiplicación y potenciación de cantidades imaginarias

Analizo los siguientes ejemplos y obtengo conclusiones sobre la multiplicación y potenciación de cantidades imaginarias

Ejemplo 1: Desarrollar $\sqrt{-25} \cdot 2\sqrt{-49} \cdot 3\sqrt{-\frac{25}{9}}$

Solución: Se escribe cada factor en la forma bi así:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$$

$$2\sqrt{-49} = 2\sqrt{49(-1)} = 2\sqrt{49}\sqrt{-1} = 2(7)i = 14i$$

$$3\sqrt{-\frac{25}{9}} = 3\sqrt{\frac{25}{9}(-1)} = 3\sqrt{\frac{25}{9}}\sqrt{-1} = 3(\frac{5}{3})i = 5i$$

Luego $\sqrt{-25} \cdot 2\sqrt{-49} \cdot 3\sqrt{-\frac{25}{9}} = 5i \cdot 2i \cdot 5i = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot i^3 = 50(-i) = -50i$,
ya que $i^3 = -i$

Ejemplo 2: Efectuar $(3i^4)^5$

Solución: Aplicando la propiedad de la potencia de un producto se tiene que:

$$\begin{aligned}(3i^4)^5 &= 3^5 \cdot (i^4)^5 \\ &= 3^5 \cdot i^{20} \\ &= 3^5 \cdot 1 \qquad \text{(puesto que } i^{20} = 1) \\ &= 243\end{aligned}$$

Ejercicios:

Resuelvo en mi cuaderno los siguientes ejercicios:

1. $\frac{2}{3}\sqrt{-49} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{-36}$
2. $\frac{5\sqrt{-81}}{2\sqrt{9}}$
3. $\frac{3\sqrt{-144}}{2\sqrt{81}}$
4. $\dfrac{\frac{4}{3}\sqrt{-125} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{-49}}{\frac{2}{7}}\sqrt{-49}$
5. $(\frac{1}{4}\sqrt{-49})^6$