

## Taller, Límites de funciones en Cálculo 11°



Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

Nombre:	Curso:	Fecha:
---------	--------	--------

## Introducción

Materiales: Regla, escuadra, calculadora, esferos o lápices de diferentes colores.

1. Grafica cada una de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números Reales:

a) 
$$y = f(x) = 2x + 1$$
 b)  $y = g(x) = x^2 - 4$  c)  $y = h(x) = x^3 - 2x$ 

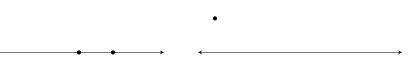
b) 
$$y = g(x) = x^2 - 4$$

$$c) y = h(x) = x^3 - 2x$$

2. En la siguiente recta numérica, escoge un par de unidades consecutivas y cada una divídelas en 10 partes iguales. Coloca el número correspondiente a cada división. ¿Cuáles serían los números si cada unidad es dividida en 100 partes iguales?



3. A continuación encontrarás dibujadas dos rectas. Traza perpendiculares por los puntos dibujados

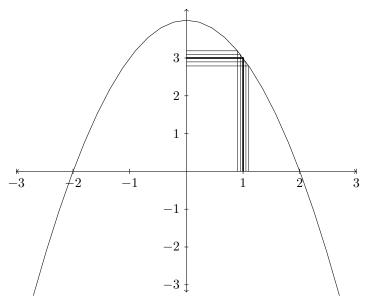


4. Consideremos la función definida mediante la expresión  $y = j(x) = 4 - x^2$ . Observemos los valores del recorrido (y) cuando los del dominio (x) están cerca de 1. Para ello:

a) Elaboramos una tabla de valores donde se observen los valores de "y" cuando los de "x" se están acercando a 1:

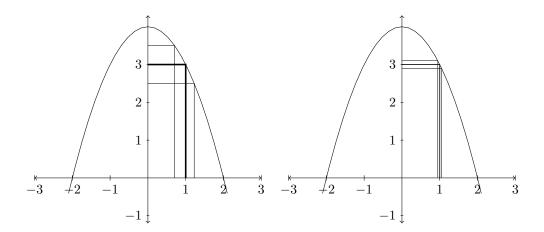
	Por la izquierda de 1				Por la derecha de 1			
	$\longrightarrow$				$\leftarrow$			
$\overline{x}$	0.97	0.98	0.99	1	1.01	1.02	1.03	
$\overline{y}$								

b) Construimos su gráfica conectando mediante segmentos de rectas, los elementos del Dominio próximos a 1, con su correspondiente elemento del recorrido:



- c) Hacia que valores se aproximan los de "y", cuando los de "x" se acercan a 1?
- d) Observemos que ocurre gráficamente. Para ello haz cuatro gráficas de la función. En cada una de ellas:
  - Dibuja en el eje "y", una de las siguientes vecindades del 3:  $V_1(3)$ ,  $V_{\frac{1}{2}}(3)$ ,  $V_{\frac{1}{4}}(3)$  y  $V_{\frac{1}{10}}(3)$ . (Vecindad  $V_{\frac{1}{2}}(3)$  significa que cerca de tres se construye una vecindad de radio  $\frac{1}{2}$ , es decir de radio 0.5; tenemos entonces el invervalo abierto (-2.5,3.5))
  - Escoge varios puntos de la vecindad (pueden ser dos, por encima y por debajo de 3). Levanta en cada uno de ellos una perpendicular que llegue hasta la gráfica. A continuación, traza desde aquí, otra perpendicular que llegue hasta el eje "x".
  - lacktriangle ¿Dentro de qué vecindad quedan los puntos de los extremos de los segmentos que llegan hasta el eje "x"?

- ¿Qué pasa cuando la vecindad es más pequeña?
- 5. De lo anterior, podemos darnos cuenta que no importa la vecindad de 3 que escojamos, que siempre tendremos una vecindad (del número 1) en el eje "x" dentro de la cual se encuentran los valores del dominio próximo a él, pero que cuanta más pequeña sea la vecindad escogida en el eje "y", más cercanos al número 1 estarán los valores de "x". Ver gráficos:



La situación anterior es descrita en matemáticas diciendo que el Límite de la función  $j(x) = 4 - x^2$ , cuando x esta próxima (o tiende) a 1, es igual a 3. También suele decirse que "j(x) tiende a 3, cuando x tiende a 1" y se escribe:

$$\lim_{x \to 1} j(x) = 3$$

En ocasiones se escribe  $j(x) \to 3$  cuando  $x \to 1$ 

6. A continuación te presentamos varias gráficas de funciones definidas en los números reales para que determines el valor hacia donde se acercan los de "y = f(x)" cuando "x" se aproxima al valor indicado, escribiendo el resultado con notación de límites:

