CONJUNTOS

National Council of
Teachers
of Mathematics

1

Temas
Colección de
matemáticas

1

Conjuntos

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

National Council of
Teachers
of Mathematics
U. S. A.

Editorial Trillas
México 1971

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 1. Sets

Primera edición en inglés, 1964
Tercera reimpresión en inglés, 1965

Primera edición en español, 1967
Reimpresiones, 1969, 1970 y abril 1971
Cuarta reimpresión, octubre 1971

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para sus alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, trasmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son:

Cuaderno 1. *Conjuntos*
Cuaderno 2. *Números enteros*
Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5. *Números y sus factores*
Cuaderno 6. *Números racionales*
Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo *(Proposiciones numéricas)* que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican al final de este prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

EDWIN F. BECKENBACH
HELEN CURRAN
WALTER FLEMING
GERALDINE GREEN
LOLA MAY
MARLENE SCHROEDER
MARGARET F. WILLERDING
WILLIAM WOOTON
LENORE JOHN, *Coordinadora*

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican al final de este prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

EDWIN F. BECKENBACH
HELEN CURRAN
WALTER FLEMING
GERALDINE GREEN
LOLA MAY
MARLENE SCHROEDER
MARGARET F. WILLERDING
WILLIAM WOOTON
LENORE JOHN, *Coordinadora*

Conjuntos

Cuaderno 1

PRINCIPIOS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

Importancia de los conceptos de la teoría de conjuntos en la matemática de la enseñanza elemental

Hay muchas respuestas para la reiterada pregunta: ¿por qué son importantes los conjuntos en la matemática? La respuesta depende, en parte, de la persona que conteste. Aquí reduciremos la pregunta a estos términos: ¿por qué son importantes los conjuntos en la matemática de la enseñanza elemental? Debido a que estamos interesados, ante todo, en la importancia de los conceptos de la teoría de los conjuntos y cómo están relacionados éstos con las primeras experiencias de los niños en la matemática, y también en la aplicación que los maestros de nivel elemental puedan dar en sus actividades a la teoría de conjuntos.

En cierta forma la introducción de la teoría de conjuntos en la enseñanza elemental no constituye un nuevo planteamiento de la educación matemática. Los conjuntos se han usado durante muchos años al enseñar a los niños a contar y resolver preguntas que implican la noción de cantidad. Es muy común usar, por ejemplo, una colección de cubos, una hilera de sillas, un conjunto de platos y otros objetos, para ofrecerles representaciones concretas y formarles la idea de número. Conviene observar que el uso de conjuntos de objetos concretos es de valor para comprender el concepto de número. En este sentido, los conjuntos tendrán siempre importancia en la enseñanza elemental.

Sobran razones para confiar en que la enseñanza de los conceptos de la teoría de los conjuntos y su terminología para niños pequeños redunde en un mayor aprovechamiento para la comprensión del concepto de número; porque los niños siempre han esperado adquirir ese concepto como parte de su educación general. Examinemos algunas de ellas:

1. Actualmente se cree que el concepto de número entero puede ser adquirido de modo más claro por medio de la teoría de los conjuntos. Éstos

siempre han desempeñado un papel fundamental para desarrollar en los niños la noción de la naturaleza de número. En muchos casos, sin embargo, no se ha establecido claramente la relación entre el uso de los conjuntos y la palabra "número". Frecuentemente sólo el contacto sensorial nos informa de los conjuntos, de lo que resulta una experiencia débilmente relacionada con el concepto de número, en sentido plenamente abstracto.

2. Porque las ideas geométricas, así como las aritméticas pueden ser formuladas clara y concisamente en función de los conjuntos. Es preferible que desde sus primeros años los niños se den cuenta de la posibilidad del uso de conjuntos de un tipo (de puntos, por ejemplo) para tratar con otro tipo de conjuntos (de números, por ejemplo). Una vez conocida la relación entre los conceptos de la teoría de los conjuntos, su terminología y el concepto de número, puede aplicarse directamente a las primeras experiencias mediante conjuntos de puntos, que servirán como un puente entre las ideas de número y las ideas geométricas.

3. Si los conceptos de conjuntos se adquieren desde los primeros años escolares, constituyen un sólido fundamento de los conceptos matemáticos más avanzados que los niños encontrarán en los años superiores de la escuela.

Las nociones de conjuntos que los niños necesitan en sus primeros años son sencillas y escasas. Además el simbolismo y la terminología necesarios para tratarlas se exponen de un modo fácil y accesible a los niños. Examinemos algunas de estas nociones, así como los términos y símbolos usados en este cuaderno al hablar de conjuntos.

Conjuntos

¿Qué es un conjunto? En vez de tratar de definir esta noción fundamental, lleguemos a un acuerdo acerca de lo que es un conjunto citando algunos ejemplos:

a) Un rebaño de reses es un conjunto (de reses).
b) Una manada de leones es un conjunto (de leones).
c) Una bandada de codornices es un conjunto (de codornices).
d) Un ejército es un conjunto (de soldados).
e) Un césped es un conjunto (de plantitas herbáceas).
f) Una vajilla es un conjunto (de piezas de loza).

En resumen, un conjunto es una colección de una clase particular. Las cosas (cualesquiera que sean) que constituyen un conjunto dado se llaman *miembros* o *elementos* del conjunto. Por ejemplo, los miembros de cierta bandada de codornices, los miembros de cierta manada de búfalos, son cada una de las codornices de la bandada y cada uno de los búfalos de la manada, y los miembros de una vajilla determinada son cada uno de los platos, copas, salseras, etcétera, de esa vajilla. Un conjunto, desde el punto de vista matemático, es una *colección* bien definida.

Pero esto no significa que la palabra "conjunto" haya sido definida, sino que una colección específica ha sido descrita tan claramente que el número de sus miembros es inequívoco para todo interesado.

Algunos ejemplos de colecciones bien definidas son los siguientes:

a) El conjunto cuyos miembros son las letras del alfabeto.
b) El conjunto cuyos miembros son los meses del calendario.
c) El conjunto cuyos miembros son todos los canales de televisión comercial de la ciudad de México.

En cada uno de estos casos no surgen dudas acerca de si un miembro pertenece o no a un conjunto particular.

Considérese, por ejemplo, una clase de alumnos de segundo grado del grupo *C* de la Escuela Reforma. El enunciado "niños del grupo *C* del segundo grado de la Escuela Reforma es un conjunto", ¿define claramente la colección que constituye a ese conjunto?

La única manera de contestar correctamente esta pregunta es ver si la descripción es clara o no y si queda convenientemente definida de modo que cualquier cosa dada puede identificarse como miembro, o no, de la colección. ¿Se incluye al profesor en el conjunto? Como el enunciado especifica "alumnos del segundo grado" nos indica que el profesor no es miembro del conjunto. Juan Rodríguez, alumno también del grupo *C* del segundo grado, pero que hoy está enfermo, encamado en su casa y que asistirá a clases después, ¿puede considerarse como miembro de este conjunto? Formulada así esta descripción, resulta inadecuada para permitirnos dar una respuesta clara de sí o no. Puede considerarse a Juan Rodríguez miembro de su "clase" tomada en el sentido de "aquellos inscritos en ella", pero, por otro lado, el sentido podría ser: "aquellos que están en clase en estos momentos". En este último caso, ¿podemos incluir en el conjunto a María Sánchez, alumna del segundo grado, quien en esos momentos visita el grupo *C* para entregar una nota al profesor, pero que realmente es alumna de la profesora Martínez, titular del grupo *A* de la misma escuela? Esto basta para ilustrar que la colección considerada no está claramente descrita y no puede ser clasificada como bien definida.

Será provechoso que los maestros empleen descripciones de este tipo para imbuir en los alumnos la necesidad de tener cuidado al especificar la colección que integra al conjunto.

La mayoría de las colecciones usadas en los primeros grados son bien definidas. Por ejemplo, colecciones específicas de cubos o colecciones específicas de símbolos escritos en tableros, pizarrones o en hojas. Con este tipo de colecciones habrá pocas dudas acerca de cuáles son los elementos que contiene, y cuáles no.

Simbolismo

A continuación tenemos un ejemplo de un método por medio del cual puede describirse un conjunto:

$$A = \{\text{María, Juana, Beatriz}\}$$

que se lee "el conjunto cuyos miembros son María, Juana y Beatriz". Se usarán letras mayúsculas, generalmente, para simbolizar conjuntos. Las llaves* { } (algunas veces llamadas paréntesis de llave) se usan también cuando se describen conjuntos, y los símbolos o nombres que están encerrados entre llaves, se entiende que son los miembros o elementos de los conjuntos. Cuando se escribe una lista de los miembros de un conjunto y se encierran éstos entre llaves, se separan con comas.

También es correcto, en lugar de una lista de miembros, escribir entre llaves una frase descriptiva de los miembros del conjunto. Por ejemplo, si queremos considerar a los profesores de la Facultad de Ciencias como los miembros de un conjunto, podemos usar C para simbolizar el conjunto y evitar así repetir la especificación de los miembros cada vez que necesitemos referirnos a este conjunto. Por tanto, el conjunto anterior, que simbolizamos con la letra C, puede ser representado por

$$C = \{\text{profesores de la Facultad de Ciencias}\}$$

que se lee "el conjunto cuyos miembros son (todos) los profesores de la Facultad de Ciencias". Si deseamos escribir la lista de los miembros de este conjunto, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$C = \{\text{profesor Díaz, profra. Hernández, profra. Pérez, } \ldots, \text{ profra. León}\},$$

* Este símbolo y todos los que se usan en este cuaderno se encuentran en la lista de la página 57. Consúltese siempre que se tenga alguna duda sobre cómo leer un símbolo.

que se lee "el conjunto cuyos miembros son el profesor Díaz, la profesora Hernández, la profesora Pérez, ..., la profesora León". (Aquí los tres puntos ..., significan que hay otras personas en el conjunto de profesores, pero debido a que la lista es larga empleamos esta forma para indicar de modo claro el sentido, en vez de nombrar a todos los profesores.) Entonces, se entiende mediante los tres puntos que el nombre de cada profesor está incluido sin necesidad de que figure en la lista.

Hay algunos conjuntos que no tienen miembros. Al conjunto que no contenga miembros se le llamará *conjunto vacío*, o *conjunto nulo*, que generalmente se simboliza por la letra $\emptyset$ del alfabeto escandinavo. Entonces leemos el símbolo $\emptyset$ como "el conjunto vacío" o "el conjunto nulo". Podemos también usar el símbolo { } para representar el conjunto vacío. El conjunto cuyos miembros son las mujeres de 1 000 años de edad que viven actualmente, es un ejemplo del conjunto vacío o conjunto nulo. Si usamos la letra T para simbolizar este conjunto, podemos escribir

$$T = \emptyset \qquad \text{o} \qquad T = \{\ \}.$$

El símbolo $\in$ se usa para abreviar "es miembro de" o "es elemento de". Si E denota el conjunto de los números pares, la expresión "$2 \in E$" significa "2 es miembro de E".

Para representar los elementos o miembros de un conjunto, se usan como símbolos las letras minúsculas del alfabeto, por ejemplo: a, b, c, x, y, z. La expresión

$$a \in A$$

se debe leer "a es miembro, o elemento, del conjunto A", o simplemente: "a es miembro de A".

La línea inclinada / frecuentemente se usa en matemática como un *símbolo de negación*. El símbolo $\notin$ se lee "no es miembro (elemento) de". Por ejemplo, si la profesora Jiménez no enseña en la Facultad de Ciencias y si C simboliza el conjunto de profesores de la Facultad de Ciencias, entonces podemos escribir

$$\text{profesora Jiménez} \notin C,$$

lo cual se lee "la profesora Jiménez no es miembro (elemento) del conjunto C".

Grupo de ejercicios 1

1. Especificar los miembros de cada uno de los siguientes conjuntos.

   a) El conjunto de Estados de la República, litorales del Golfo de México.
   b) El conjunto de los seis primeros meses del año.
   c) El conjunto de satélites naturales de la Tierra.
   d) El conjunto de presidentes de América latina que sean mujeres en 1967.
   e) El conjunto de los Grandes Lagos.
   f) El conjunto de las cinco primeras letras del alfabeto español.

2. Seleccione de entre las tres posibilidades la descripción más adecuada para cada uno de los conjuntos de la siguiente lista.

a) $J = \{\text{junio, julio}\}$
1. El conjunto de dos meses calurosos.
2. El conjunto cuyos elementos son dos meses consecutivos.
3. El conjunto cuyos elementos son dos meses consecutivos, de suerte que sus nombres empiecen con la letra J.

b) $L = \{x, y, z\}$
1. El conjunto de las tres últimas letras del alfabeto.
2. El conjunto de tres consonantes del alfabeto.
3. El conjunto de tres letras del alfabeto.

c) $P = \{\text{Mercurio, Venus, Tierra, Marte}\}$.
1. El conjunto de los 4 últimos planetas descubiertos del sistema solar.
2. Los 4 planetas más próximos al Sol.
3. Cuatro de los planetas que integran el sistema solar.

3. Dados
$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d\}, \\ B &= \{e, f, g, h\}, \\ C &= \{a, e, i, o, u\}. \end{aligned}$$

En los siguientes espacios blancos escriba el símbolo correcto $\in$ o $\notin$

a)	a ——— A	*d)*	b ——— A	*g)*	f ——— A
b)	a ——— B	*e)*	b ——— B	*h)*	f ——— B
c)	a ——— C	*f)*	b ——— C	*i)*	f ——— C

Igualdad de conjuntos

Dados $A = \{a, b, c, d\}$
y $B = \{c, d, a, b\}$,

observamos que cada uno de estos conjuntos contiene exactamente los mismos elementos, aunque no están escritos en el mismo orden. Esta relación puede ser indicada por el símbolo de igualdad = (que se lee "igual" o "es igual a"). Entonces, podemos decir que

$$A = B$$

porque el conjunto A y el conjunto B contienen exactamente los mismos elementos.

Es muy conveniente observar que no se tiene en cuenta el orden en el que se enlistan los miembros de cada conjunto.

Por tanto:

$$\{a, b, c, d\} = \{c, d, a, b\} = \{a, c, b, d\}.$$

En resumen, decir que dos conjuntos son iguales equivale a decir que realmente no se tienen dos conjuntos, sino que sólo se tiene uno. Podemos enunciar de un modo más formal la definición de la siguiente manera:

> *Si* A *simboliza un conjunto y* B *simboliza un conjunto, entonces para los conjuntos* A *y* B *la proposición*
>
> $$A = B$$
>
> *significa que* A *y* B *simbolizan el mismo conjunto.*

Cuando leemos proposiciones que contienen conjuntos ligados mediante el signo de igualdad, es útil interpretar dicho signo en términos de *identidad*. Entonces, la siguiente proposición simbólica

$$C = \{\text{maestros de la Facultad de Ciencias}\}$$

debe ser interpretada como una afirmación con la cual indicamos nuestro acuerdo en usar dos símbolos diferentes (o un símbolo y un grupo de símbolos) para representar un mismo conjunto de gente.

Subconjuntos

Cualquier parte de un conjunto puede interpretarse como conjunto. Por ejemplo, los miembros del conjunto de niños de un grupo, en un momento dado, pueden tomarse para formar otros dos conjuntos: el conjunto de niños del grupo y el conjunto de niñas del mismo grupo. A estos conjuntos resultantes se les llama subconjuntos del conjunto de niños del grupo. La relación relativa a "subconjuntos" puede indicarse mediante el símbolo de inclusión $\subseteq$, que debe leerse "es subconjunto de". Por tanto, el enunciado

$$\{\text{Germán, Elena}\} \subseteq \{\text{Germán, Elena, María}\}$$

debe leerse "el conjunto cuyos miembros son Germán y Elena, es un subconjunto del conjunto, cuyos miembros son Germán, Elena y María". De manera más formal, tenemos la siguiente definición:

Para dos conjuntos A *y* B *la proposición*

$$A \subseteq B$$

significa que todos los miembros de A *son miembros de* B.

Como otro ejemplo consideraremos

$$\{\text{Juan}\} \subseteq \{\text{Juan, José, Tomás}\}$$

lo que debe leerse "el conjunto cuyo único miembro es Juan es un subconjunto del conjunto, cuyos miembros son Juan, José, Tomás". Esto asegura que estamos considerando un subconjunto de {Juan, José, Tomás} cuyo único miembro es Juan.

Un conjunto dado puede tener varios subconjuntos. ¿Cuántos? Tal vez podamos determinarlo, considerando unos cuantos casos específicos. Examinemos nuevamente el conjunto

$$\{\text{Juan}\}.$$

A primera vista, el único conjunto A que cumple con las condiciones de la definición anterior, tal que

$$A \subseteq \{\text{Juan}\}$$

parece ser el mismo {Juan}. Ciertamente, según nuestra definición, cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo, porque contiene como miembros a todos los miembros del mismo. Consideremos, además, el conjunto que no contiene elementos, { }. ¿Sería tal conjunto un subconjunto de {Juan}? De acuerdo con nuestra definición el enunciado siguiente:

A es un subconjunto de B

significa que todo miembro de A es miembro de B. Esto implica que si A no es un subconjunto de B debe contener, por lo menos, un miembro que no es miembro de B. Pero el conjunto nulo no contiene tales miembros. Entonces el conjunto {Juan}, que contiene un solo elemento, tiene dos subconjuntos {Juan} y $\emptyset$.

Intencionalmente decimos *el* conjunto vacío, porque de acuerdo con la definición de igualdad de conjuntos, todos los conjuntos vacíos son iguales.

En seguida consideremos el conjunto {Juan, José}, que contiene dos miembros. Sus subconjuntos son

$\emptyset$,
{Juan},
{José},
{Juan, José}.

Por tanto, un conjunto que contiene dos miembros, tiene cuatro subconjuntos.

De manera similar, el conjunto {Juan, José, Tomás} tiene ocho subconjuntos

$\emptyset$,	{Juan, José},
{Juan},	{Juan, Tomás},
{José},	{José, Tomás},
{Tomás},	{Juan, José, Tomás}.

Si se hace con cuidado una lista de los subconjuntos del conjunto {Juan, José, Tomás, Roberto} se encontrará que tiene dieciséis subconjuntos, y el conjunto {Juan, José, Tomás, Roberto, Rafael} tiene treinta y dos subconjuntos. Entonces, tenemos el siguiente cuadro:

CUADRO 1 *

Número de miembros de un conjunto	*Número de subconjuntos*
1	2, ó 2^1
2	$4 = 2 \times 2$, ó 2^2
3	$8 = 2 \times 2 \times 2$, ó 2^3
4	$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, ó 2^4
5	$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, ó 2^5

* Los numerales que aparecen en el cuadro como índices superiores (a la derecha de los numerales) se les llama *exponentes*. El uso de los exponentes es una forma conveniente para indicar cuántas veces aparece un número como factor. Entonces 2^1 indica que 2 aparece como factor una vez. De manera similar, 2^2 indica que 2 aparece como factor dos veces.

Aunque aquí no demostraremos la deducción de esta fórmula, los ejemplos anteriores nos llevan a la conclusión de que si un conjunto tiene n miembros, entonces el número de sus subconjuntos es 2^n. En otras palabras, tantos subconjuntos como el producto de n factores, cada uno de los cuales es 2. Por lo cual un conjunto que contiene diez miembros tiene exactamente 2^{10} ó 1 024 subconjuntos; y un conjunto que contenga veinte miembros, tiene 2^{20} ó 1 048 576 subconjuntos.

Subconjuntos propios

Si A y B simbolizan dos conjuntos tales que A es un subconjunto de B, y B tiene por lo menos un miembro que no es miembro de A, entonces se dice que A es un *subconjunto propio* de B (o que está propiamente incluido en B) y simbólicamente se escribe

$$A \subset B.$$

La proposición

$$\{\text{Germán, Elena}\} \subset \{\text{Germán, Elena, María}\}$$

asegura que el conjunto {Germán, Elena} es un subconjunto del conjunto {Germán, Elena, María}; y que el último conjunto tiene cuando menos un miembro (en este caso María) que no es miembro del primer conjunto.

Enunciemos formalmente esta definición:

Para los conjuntos A *y* B *la proposición*

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$$

significa que A $\subseteq$ B, *y que* B *tiene por lo menos un miembro que no es miembro de* A.

Por lo cual, el ejemplo que vimos {Germán, Elena} $\subset$ {Germán, Elena, María} es una proposición que indica que {Germán, Elena} es un subconjunto propio de {Germán, Elena, María}. De todas maneras es cierto que {Germán, Elena} es un subconjunto de {Germán, Elena, María} y es aceptable escribir

{Germán, Elena} $\subseteq$ {Germán, Elena, María}.

También es aceptable escribir la siguiente proposición como verdadera:

{Germán, Elena, María} $\subseteq$ {Germán, Elena, María} pero *no* es cierto que

$$\{\text{Germán, Elena, María}\} \subset \{\text{Germán, Elena, María}\},$$

puesto que el conjunto simbolizado en el miembro derecho de la proposición no contiene ningún miembro que no sea miembro del conjunto simbolizado en el miembro izquierdo de la proposición.

La única diferencia entre el concepto de subconjunto y el de subconjunto propio consiste en que un conjunto es un subconjunto de sí mismo, pero no es un subconjunto propio de sí mismo.

Grupo de ejercicios 2

1. Haga una lista de los subconjuntos del conjunto {barco, carro, avión, tren}.

2. Si $C = $ {Veracruz, Matamoros, Jalapa, Laredo, Ciudad Juárez, Tampico, Córdoba, Piedras Negras}.

Determine los miembros de los siguientes subconjuntos del conjunto C:

a) Ciudades de Veracruz
b) Ciudades fronterizas con los Estados Unidos
c) Ciudades que son capitales de Estado.

3. Dados $G = $ {Lidia, María, Susana, Ana, Carolina}
$A = $ {Lidia, María, Susana, Ana}
$B = $ {Lidia, María, Ana, Susana}
$C = $ {Lidia, María}

para obtener una proposición verdadera ¿en cuáles de los espacios podemos insertar el símbolo $\subseteq$ y en cuáles podemos insertar el símbolo $\subset$?

a) A———G *c)* C———B
b) A———B *d)* C———G

Conjuntos universales

Es muy útil, cuando se piensa y se habla acerca de conjuntos, saber que los miembros de un conjunto dado pertenecen a alguna "población" determinada. Por ejemplo, si deseamos hablar de conjuntos de alumnos, es útil tener como referencia una población general de alumnos, de la cual consideramos a sus miembros como posibles y elegibles miembros de nuestro conjunto. Quizá fijemos nuestra atención en los alumnos de una escuela particular determinada, o quizá consideremos todos los alumnos del segundo año de esa escuela, o todos los alumnos de escuela elemental de México.

Si especificamos un conjunto particular de alumnos al que nos limitamos para encontrar miembros para otros conjuntos que intervengan en la discusión o en el problema que se esté tratando, entonces ese conjunto específico se llama *conjunto universal,* o simplemente el *universo* de nuestra discusión o problema; entonces en una discusión particular cualquiera que implique conjuntos, todo conjunto de esta discusión es un subconjunto del conjunto universal.

El conjunto universal se simboliza generalmente con la letra U mayúscula.

Diagramas de Venn

Hay una manera esquemática de representar los conceptos de la teoría de los conjuntos usando lo que llamamos *Diagramas de Venn* o de *Euler.* Uno de estos diagramas está representado en la figura 1. En general, se usa cualquier región cerrada del plano para representar al conjunto universal * entendiendo que la región interior a la línea fronteriza representa al conjunto U. Para representar otros conjuntos en una discusión (cada uno de

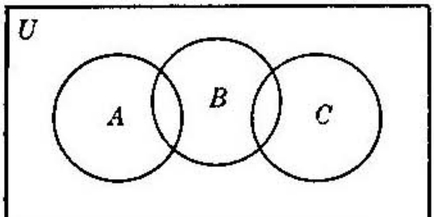


FIGURA 1

los cuales es un subconjunto de U), se usan regiones cerradas del plano, más pequeñas (hemos usado círculos en la figura 1), entendiendo que la región interior de cada una de estas figuras cerradas más pequeñas abarca todos los miembros del conjunto que está representando. Los miembros del conjunto pueden estar, o no, simbolizados en el interior de la figura.

* En los diagramas de Venn se usa generalmente un rectángulo para representar al conjunto univeral. [N. del T.]

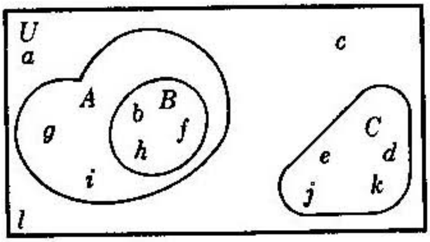


FIGURA 2

La figura 2 muestra un diagrama de Venn que emplea letras del alfabeto para simbolizar cada uno de los miembros. Esta vez hemos usado curvas cerradas, que no son círculos, para simbolizar los conjuntos que estamos considerando. De este modo la figura 2 constituye una descripción gráfica de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}, \\ A &= \{b, f, g, h, i\}, \\ B &= \{b, h, f\}, \\ C &= \{d, e, j, k\}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$A \subset U, \quad B \subset U, \quad C \subset U, \quad \text{y} \quad B \subset A,$$

según puede verificarse en la figura 2, y también en la descripción simbólica de los conjuntos, cuyos elementos se ven arriba agrupados entre llaves.

CARDINALIDAD Y EL PROCESO DE CONTAR

Correspondencia biunívoca *

¿Cuántos miembros pertenecen a un conjunto? Esta importante pregunta puede contestarse resumiendo una noción primitiva: el apareamiento de los miembros de dos conjuntos. Si los elementos de dos conjuntos pueden aparearse de manera tal que a cada elemento de cada conjunto se le asocie uno y sólo un elemento del otro conjunto, entonces se dice que los elementos de ambos conjuntos están en *correspondencia biunívoca*.

* Aunque en algunos casos se acostumbra traducir la frase *one-to-one correspondence*, como correspondencia uno a uno, es más usado el término correspondencia biunívoca. [N. del T.]

La figura 3 nos muestra dos conjuntos en los que se ha establecido una correspondencia biunívoca entre sus miembros. Por supuesto, existen otras formas de asociar los elementos de los conjuntos para establecer una correspondencia biunívoca, además de la que se muestra aquí:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{María}, & \text{Juan}, & \text{Tomás}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{\text{Rodolfo}, & \text{Nerón}, & \text{Fido}\} \end{array}$$

FIGURA 3

La figura 4 muestra otras dos formas; desde luego hay otras más. Importa observar que no se tiene muy en cuenta la manera de establecer la correspondencia, lo que interesa es que cada miembro de cada conjunto se aparee con uno y sólo un miembro del otro conjunto. La existencia de una correspondencia biunívoca entre conjuntos no tiene nada que ver con la forma en que se establece la correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \{\text{María}, & \text{Juan}, & \text{Tomás}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{\text{Fido}, & \text{Rodolfo}, & \text{Nerón}\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{\text{María}, & \text{Juan}, & \text{Tomás}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{\text{Nerón}, & \text{Fido}, & \text{Rodolfo}\} \end{array}$$

FIGURA 4

Las correspondencias biunívocas pueden establecerse indicando claramente, por medio de una figura, cómo se asocian los elementos de un conjunto con los del otro; o especificando con sencillez cómo puede llevarse al cabo teóricamente tal asociación. En nuestro ejemplo mostramos una forma específica de establecer la asociación (apareamiento), pero en este caso los conjuntos contienen muy pocos miembros y, en consecuencia, es fácil mostrar la correspondencia por medio de una figura. Si hubiéramos tenido que mostrar una correspondencia biunívoca (suponiendo que existe alguna) entre el conjunto de gente que se encuentra en un estadio y el conjunto de asientos del mismo, tendríamos que especificar de manera precisa cómo podría lograrse esto; una forma sería, procediendo a que todas las personas tomaran asiento, y entonces, observar que cada una de las personas estuvieran sentadas en un asiento, y que no quedara ninguno desocupado.

Conjuntos equivalentes

En este punto de nuestra discusión, conviene investigar las formas que hemos desarrollado hasta aquí, para comparar o relacionar un conjunto con otro. Por ejemplo, sabemos que la igualdad de conjuntos implica *identidad.* Esto es, si dos conjuntos son iguales, tienen entonces los mismos miembros, y recíprocamente. También hemos comparado conjuntos, considerando *subconjuntos* y *subconjuntos propios,* donde todos los elementos de un conjunto son elementos de otro; pero, en este caso, no existe necesariamente la igualdad. Además de las relaciones de igualdad y subconjunto, podemos definir ahora una nueva relación entre conjuntos, basada en el concepto de correspondencia biunívoca.

> *El enunciado que dice que dos conjuntos son equivalentes, significa que entre los elementos de los dos conjuntos puede establecerse correspondencia biunívoca.*

La relación de equivalencia entre conjuntos no es la misma que la relación de igualdad, debido a que si varios conjuntos son equivalentes no necesariamente tienen que ser el mismo conjunto; en otras palabras, no subsiste entre ellos una relación de igualdad. Aunque la igualdad de conjuntos implica, obviamente, una equivalencia, puesto que cualquier conjunto puede ponerse en correspondencia biunívoca consigo mismo.

El símbolo $\sim$ (léase "es equivalente a") se usa en matemática para simbolizar equivalencia.
Entonces si:

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{l, m, n\},$$

y

$$C = \{x, y, z\},$$

podemos indicar su equivalencia escribiendo proposiciones tales como $A \sim B$, $A \sim C$, y $B \sim C$. Conviene insistir de nuevo en que si A es equivalente a B, no debe concluirse necesariamente que a, b, y c, simbolizan el mismo tipo de objetos que los que simbolizan l, m, y n.

En realidad, la verdadera ventaja de la relación de equivalencia depende del siguiente hecho: no importa qué tipo de elementos contienen los conjuntos A y B. En otras palabras, el concepto de equivalencia es relativo al hecho de que podamos aparear los elementos de dos conjuntos, de tal manera que se establezca una correspondencia biunívoca entre ellos.

Probablemente la noción de correspondencia biunívoca fue una de las primeras ideas matemáticas del hombre. El uso de marcas tales como ||||| señaladas en las paredes de las cavernas para simbolizar, por ejemplo, los miembros de un conjunto de búfalos habidos en una cacería, es una aplicación de este principio. Puede dudarse acerca de si existía, o no, un nombre para estos conjuntos de marcas, pero las marcas en sí servían muy bien para contestar la pregunta: "¿cuántos búfalos mataste?" Por otra parte, tales marcas podían ser comparadas con otros conjuntos similares de marcas para determinar, entre los miembros de un grupo de cazadores, quién había tenido más éxito en la cacería. Las preguntas acerca de qué tantos elementos tiene de más o de menos un conjunto respecto de otro, puede resolverse apareando los elementos de los dos conjuntos, y observando que no queden elementos sin aparear en alguno de los conjuntos, cuando los elementos del otro se agotan. Por ejemplo, si comparamos los conjuntos A y B en los cuales:

$$\begin{array}{l} A = \{a,\ b,\ c\} \\ \quad\;\;\ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \\ B = \{x,\ y,\ z,\ w\}, \end{array}$$

es evidente que no son equivalentes y podemos expresar esta falta de equivalencia en alguna de las dos formas siguientes: diciendo que el conjunto B contiene más elementos que A o bien, que A contiene menos elementos que B.

Conjuntos ordenados

Las propiedades de los conjuntos en las que hemos estado interesados hasta ahora, se han centrado alrededor de la noción de miembro o elemento de un conjunto. Esto es, solamente hemos estado interesados en hablar acerca de si un objeto dado pertenece, o no, a un conjunto dado. Si un conjunto dado tiene, o no, miembros en común con otro y si hay, o no, equivalencia entre dos conjuntos dados. En cada una de estas consideraciones hemos observado que no se toma en cuenta el orden en que se consideran los elementos de los conjuntos que se han empleado.

Ahora, es conveniente considerar algunos conjuntos, en los que el *orden* en qué están dispuestos los elementos es de mucha importancia. "¿Qué es orden?" Contestar esta pregunta en sentido puramente matemático es asunto ciertamente dificultoso si se contesta a partir de consideraciones abstractas nada más. Sin embargo, ya que en la mayoría de nosotros hay una noción intuitiva con respecto al concepto de *anterior,* que probablemente, es mejor apoyarse, casi totalmente en esta noción intuitiva al discutir el concepto de orden. Ordenar cosas es, en esencia, arreglarlas de alguna manera no ambigua, de modo que podamos decir de cada elemento, cuál le precede. Este arreglo se hace comparando cada par de objetos de la lista que se trata de acomodar y decidir cuál de los dos debe estar antes que el otro. La palabra *antes* puede ser reemplazada con otras palabras o frases, por ejemplo: "anterior a", "menor que", "a la izquierda de" o "abajo de". Esencialmente, el orden en un conjunto es una relación entre los elementos del mismo, que debe especificarse de manera clara, de modo que se pueda determinar si cada elemento tiene relación determinada con cualquier otro elemento, o no, cuando cada objeto ha sido acomodado de tal manera que esté en relación adecuada con todos los otros objetos, entonces se puede decir que los que los objetos han sido ordenados.

Considérese el siguiente conjunto de letras del alfabeto:

$$A = \{\text{“}x\text{”}, \text{“}b\text{”}, \text{“}m\text{”}, \text{“}n\text{”}, \text{“}k\text{”}\}.$$

Aquí, las comillas indican que los miembros son los símbolos mismos y que no se están usando como nombres para otros objetos inespecificados. Hay un orden arbitrario en que se dan las letras del alfabeto, y es:

$$\text{“}a\text{”}, \text{“}b\text{”}, \text{“}c\text{”}, \text{“}d\text{”}, \text{“}e\text{”}, \text{“}f\text{”}, \text{“}g\text{”}, \text{“}h\text{”}, \ldots, \text{“}x\text{”}, \text{“}y\text{”}, \text{“}z\text{”};$$

en él, "a" está primero (o es anterior en el alfabeto) que "b"; "b" está antes que "c" y así sucesivamente. Si pedimos ahora que los elementos del conjunto A estén ordenados, esto es, que (leyendo de izquierda a derecha en las llaves), los símbolos se presenten en su relación adecuada con respecto a cada uno de los otros, de acuerdo con el criterio del orden dado anteriormente, tenemos

$$A_{\text{ordenado}} = \{\text{“}b\text{”}, \text{“}k\text{”}, \text{“}m\text{”}, \text{“}n\text{”}, \text{“}x\text{”}\},$$

donde usamos A_{ordenado} para simbolizar el conjunto cuyos elementos son los mismos del conjunto A, pero considerados en un orden específico, tomado en cuenta de izquierda a derecha. A_{ordenado} es un ejemplo de un *conjunto ordenado.*

Conjuntos estándar y cardinalidad

Ahora, establezcamos algunos conjuntos de símbolos ordenados empezando con el conjunto {"1"} (léase "el conjunto cuyo elemento es el numeral 1") y, continuando de este modo, tenemos

$$\{\text{“1”}, \text{“2”}\},$$
$$\{\text{“1”}, \text{“2”}, \text{“3”}\},$$
$$\{\text{“1”}, \text{“2”}, \text{“3”}, \text{“4”}\}.$$

Si continuamos esta cadena de conjuntos para incluir los símbolos "5", "6", "7", "8", "9", y si introducimos el símbolo "0" junto con algunos convenios sobre cómo pueden combinarse estos símbolos para formar de una manera sistemática nuevos símbolos, podemos imaginar una cadena sin fin de conjuntos como el descrito. Por otra parte se puede observar que

$$\{\text{"1"}\} \subset \{\text{"1"}, \text{"2"}\} \subset \{\text{"1"}, \text{"2"}, \text{"3"}\} \subset \ldots$$

(los tres puntos indican que la secuencia se extiende indefinidamente siguiendo el mismo modelo). Por medio de una comparación de uno cualquiera de estos conjuntos con otro, podemos determinar cuál se encuentra antes de cuál en esta sucesión sin fin de subconjuntos propios. Estos conjuntos de símbolos son llamados *conjuntos estándar*, y cada miembro de uno cualquiera de ellos es un *numeral*. En pocas palabras, los numerales se leen "uno", "dos", "tres", y así sucesivamente.

Ahora tenemos ya todos los conceptos necesarios para establecer una forma clara de responder a la pregunta: ¿cuántos miembros pertenecen al conjunto A? Considérense los siguientes conjuntos: $\{a\}$, $\{x\}$, $\{o\}$, y {Jesús}. Cada uno de estos conjuntos es equivalente a cualquier otro de ellos. Esto es, los elementos de dos cualesquiera de estos conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca. Ahora consideremos todos los conjuntos equivalentes a uno cualquiera de estos, por ejemplo, digamos a $\{a\}$. Entre estos conjuntos está el conjunto estándar {"1"}. Todos estos conjuntos tienen una propiedad común, es decir, su equivalencia con el conjunto estándar {"1"}, y esta propiedad es independiente de la naturaleza de los elementos que contienen estos conjuntos. Esta propiedad común es lo que llamamos *número uno.* De manera similar, la propiedad común de todos los conjuntos que son equivalentes al conjunto estándar {"1", "2"} es lo que llamamos *número dos.*

Para representarlo se asigna al número el último numeral que figura en el conjunto estándar para ese número, y entonces se dice que el conjunto contiene ese número de elementos. Por lo que el conjunto estándar para todos los conjuntos equivalentes al conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ es {"1", "2", "3", "4"}, y puesto que "4" es el último miembro (de la derecha) del conjunto estándar se dice que A tiene cuatro miembros y que cuatro es el número del conjunto A.

Si A es cualquier conjunto, el símbolo

$$n(A)$$

(léase "el número del conjunto A") simboliza el número de ("cuantos") elementos que pertenecen al conjunto. Por ejemplo si

$$A = \{a, b, c\},$$

y

$$B = \{a, b, c, d, e, f\},$$

entonces

$$n(A) = 3 \quad \text{y} \quad n(B) = 6.$$

Algunas veces se llama al número de un conjunto la *cardinalidad* de ese conjunto y, en consecuencia, en cualquier conjunto A, $n(A)$ se llama *número cardinal*. Al conjunto vacío $\emptyset$, se le asigna la cardinalidad cero, y

$$n(\emptyset) = 0.$$

Números y numerales

Analizando cómo se ha desarrollado en este cuaderno el concepto de número, podemos concluir que el número es una abstracción. Obsérvese que puede distinguirse entre un número y su nombre. Los numerales, que son los elementos de nuestros conjuntos estándar, son las *representaciones de los números*. Es tan necesario distinguir en esta ocasión entre el número 4 por ejemplo, y el numeral "4", como lo es distinguir entre el niño Juan y su nombre "Juan".

En el transcurso de una discusión ordinaria frecuentemente hay una ligera dificultad ocasionada por la diferencia entre un objeto y su nombre. Generalmente sabemos a qué se refiere la persona con la que discutimos o el escritor que redactó lo que leemos, pues el sentido se deduce del contexto. En escritos sobre asuntos en que esta distinción no es obvia, por ejemplo, al escribir una oración como: "¿cuántas letras tiene «el alfabeto español»?", en la que se están considerando las palabras como tales (en este caso "el alfabeto español"), se acostumbra usar comillas redondas o angulares para esclarecer el significado. Entonces en nuestra sencilla oración se trata de preguntar únicamente por el número de letras que hay en las palabras "el alfabeto español" y no por la totalidad de caracteres de que está compuesto el abecedario de la lengua española. (La respuesta a esta pregunta es 17 letras: e-l-a-l-f-a-b-e-t-o-e-s-p-a-ñ-o-l.)

En matemática, al presentarse situaciones semejantes, se manejan de una manera similar; por ejemplo, las comillas se emplean comúnmente para indicar el hecho de que se están considerando los numerales en vez de los números que ellos representan. Sin embargo, esto no siempre ocurre cuando el sentido es evidente según el contexto.

Números cardinales y su orden

Ya explicado qué se entiende por número cardinal, podemos ahora hablar con más libertad sobre conjuntos cuyos elementos son números cardinales. Por ejemplo, podemos escribir

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

para simbolizar el conjunto cuyos elementos son los números cardinales (o simplemente números) 1, 2, 3, 4. Obsérvese que este conjunto no es el mismo que el conjunto estándar

$$B = \{\text{"1"}, \text{"2"}, \text{"3"}, \text{"4"}\}$$

porque en el primer caso los elementos del conjunto son números, y en el segundo son numerales. Sin embargo, estos conjuntos tienen la misma cardinalidad y podemos escribir

$$n(A) = n(B),$$

lo que significa que "$n(A)$" y "$n(B)$" son expresiones diferentes para el mismo número, en este caso, el número 4. Los elementos en $\{1, 2, 3, 4\}$ están dados en una secuencia ordenada.

Podemos ordenar números cardinales por medio de conjuntos estándar. Dados A y B que son dos conjuntos estándar cualesquiera, entonces, si $A \subset B$ pero $B \not\subset A$, definimos $n(A) < n(B)$. (Léase. "El número cardinal de A *es menor que* el número cardinal de B".) Por ejemplo, considérense los números 3 y 5. Puesto que $\{\text{"1"}, \text{"2"}, \text{"3"}\} \subset \{\text{"1"}, \text{"2"}, \text{"3"}, \text{"4"}, \text{"5"}\}$, por nuestra definición tenemos que $3 < 5$. (Léase "tres es menor que cinco".) Cuando los elementos de un conjunto de números cardinales se arreglan de tal manera que el conjunto estándar al que corresponde cada uno de los números cardinales, contiene como un subconjunto propio el conjunto estándar de cada número cardinal que le precede (de este modo su conjunto estándar es un subconjunto propio del conjunto estándar de cada número cardinal que le sigue), entonces el conjunto ha sido ordenado. Los elementos del conjunto de números cardinales

$$\{7, 3, 6, 2\}$$

puede ordenarse de la siguiente manera $2 < 3 < 6 < 7$, observando que

$$\{\text{“1”}, \text{“2”}\} \subset \{\text{“1”}, \text{“2”}, \text{“3”}\} \subset \{\text{“1”}, \text{“2”}, \text{“3”}, \text{“4”}, \text{“5”}, \text{“6”}\} \subset \{\text{“1”}, \text{“2”}, \text{“3”}, \text{“4”}, \text{“5”}, \text{“6”}, \text{“7”}\}.$$

Puesto que $\emptyset \subset A$ para todo conjunto estándar A, $0 < n(A)$ para todo conjunto A no vacío. Esto es, 0 es el menor de los números cardinales.

Los números cardinales y el proceso de contar

Hemos visto que los números cardinales sirven muy bien en algunos ejemplos para decirnos cuántos elementos contiene un conjunto. Además, los números cardinales están ordenados. Como consecuencia de estas dos propiedades, dichos números pueden usarse para contar objetos y para ordenar de una manera arbitraria los elementos de cualquier otro conjunto.

Supóngase que vamos a determinar el número de canicas que hay en un costal. Podemos hacerlo metiendo la mano al costal, sacando una canica cada vez y poniéndola en correspondencia (apareándola) con uno de nuestros conjuntos estándar en una secuencia ordenada La figura 5 muestra una representación esquemática de este proceso. Cuando la última canica se ha asociado con su conjunto estándar, podemos examinar el último elemento de la derecha de este conjunto y determinar el número cardinal de dicho conjunto estándar. Este será el número de canicas que contiene el costal.

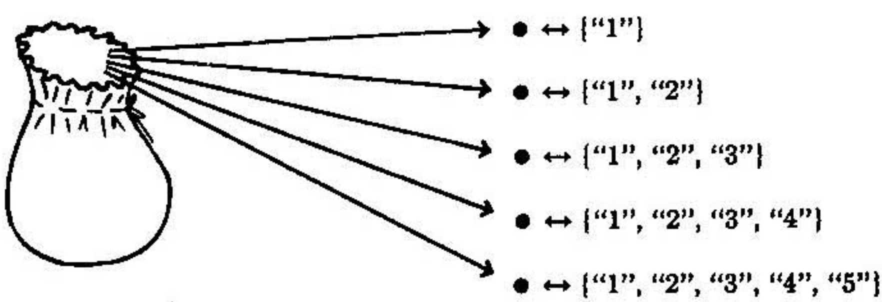


FIGURA 5

El proceso de asociar sucesivamente objetos con conjuntos estándar (y en consecuencia con números cardinales) es llamado *proceso de contar*. Obsérvese que la cuenta de canicas es independiente de las canicas en sí mismas. Porque si se vuelven las canicas al costal, y se repite el proceso, cada canica no necesita ponerse en correspondencia con el mismo conjunto estándar al que correspondía en el apareamiento original. El orden en el que las canicas se sacan del costal no tiene efecto en la cuenta y bajo cualquier arreglo de las canicas, la cardinalidad del último conjunto estándar empleado en la cuenta, siempre será la misma. Si este no fuera el caso, no podríamos hablar de *el* número cardinal de un conjunto.

El proceso de contar descrito aquí tiene otra característica útil. Si queremos, tan pronto como hayamos apareado cada canica con un conjunto estándar podemos observar cuál es el número cardinal del conjunto estándar que corresponde a cada canica; y marcando esta canica con el nombre del mismo número cardinal, entonces podemos acomodar las canicas como sigue:

e identificar cada una de éstas en particular por el número cardinal al que está asociada.

Cuando se emplean números cardinales para distinguir elementos individuales de un conjunto en algún orden, entonces los elementos o números están siendo usados en lo que se llama sentido *ordinal*. De hecho, frecuentemente encontramos el término *número ordinal* aplicado a números que se usan en este sentido. Aunque puede hacerse una distinción lógica entre el conjunto de los números ordinales y el conjunto de los números cardinales; es preferible para nosotros emplear un punto de vista menos sofisticado y dejar que el término "ordinal" se refiera al uso y no a lo que implica la naturaleza esencial de los números.

El uso de los números como cardinales puede, generalmente, aunque no siempre, identificarse por la presencia de las palabras "primero", "segundo", "tercero", "vigésimo segundo", y otras semejantes, como opuestos a "uno", "dos", "tres" y "veintidós". Además se tienen símbolos para los números que se usan en sentido ordinal, que se emplean frecuentemente (aunque no siempre) en la forma: 7º, 32º, 51º. Tal vez las excepciones más comunes en estas consideraciones se presentan en fechas, como cuando hablamos acerca del año 1901. Éste identifica la posición del año en el cual estamos interesados con respecto a una secuencia de años y es un uso ordinal del número 1901.

Algunas veces los numerales se usan en una forma tal, que no se relacionan con números cardinales ni con números ordinales. Un número telefónico es un ejemplo familiar; también lo es el número asignado a un miembro de un equipo de futbol.

Conjuntos finitos e infinitos

El conjunto de los números cardinales no tiene fin. Dado cualquier conjunto estándar, siempre es posible formar otro con mayor cardinalidad, agregando simplemente un numeral a la derecha del último numeral en el conjunto estándar dado.

Cualquier conjunto no vacío A, cuyos elementos puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los de un conjunto estándar, se dice que es un *conjunto finito.* Esto significa que los elementos de A pueden contarse de acuerdo con el procedimiento desarrollado en la sección precedente y que tal cuenta termina con un conjunto estándar. Por ejemplo, el conjunto de Estados en los Estados Unidos Mexicanos en 1963, es un conjunto finito, porque los elementos de este conjunto pueden contarse con el proceso que termina cuando lleguemos al conjunto estándar cuya cardinalidad es veintinueve. El conjunto vacío se considera también como un conjunto finito.

Cualquier otro conjunto que no cumpla con esta definición, se dice que es un *conjunto infinito.* El conjunto de los números cardinales, por tanto, es un conjunto infinito.

No puede esperarse, con razón, que las propiedades de los conjuntos infinitos se discutan en el nivel de la enseñanza elemental. Probablemente los niños pueden apreciar la noción intuitiva de que no hay un número cardinal que sea mayor que todos, o que los elementos del conjunto de los números cardinales puede arreglarse en una secuencia sin fin; pero esto es poco para la comprensión de la palabra "infinito" como tal. Desde luego, el uso de la frase "un número infinito" puede, efectivamente, evocar en la mente de los niños, la noción errónea de algún número muy grande, pero absolutamente específico que sea mayor que cualquier número cardinal; aunque es verdad que en matemáticas superiores se asigna una cardinalidad al conjunto de los números cardinales, esta cardinalidad no es un número en el sentido en que lo hemos discutido.

A primera vista, si tenemos que $A \subset B$, entonces parece natural que A tenga menos elementos que B. Considérese, sin embargo, el conjunto de los números cardinales.

$$C = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

en el cual los tres puntos indican que estos elementos continúan sin fin. Además, considérese el conjunto de los números cardinales pares,

$$D = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}.$$

Acomodando estos conjuntos como sigue

$$\begin{array}{l} C = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \\ \quad\ \ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \\ D = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}, \end{array}$$

vemos que sus elementos están en correspondencia biunívoca. Desde luego, podemos especificar una regla (aparear el número cardinal n con el número cardinal $2n$) por medio de la cual esta correspondencia puede hacerse explícita. Por tanto, de nuestra definición de equivalencia,

$$C \sim D.$$

Pero, claramente D es un subconjunto propio de C, así, por ejemplo, no contiene el número cardinal 1. Entonces es posible que un conjunto infinito pueda ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio del mismo conjunto. Empleando conjuntos finitos esto es imposible.

El eje numérico

Un modelo usual para apreciar el conjunto de los números cardinales es el eje numérico. Generalmente los niños tienen una gran apreciación intuitiva para aquellas propiedades de las líneas rectas que usamos al hablar acerca de números. Entre estas nociones intuitivas están: *a*) que cada punto en una línea recta tiene una posición; *b*) que hay algo semejante como una "distancia" entre dos puntos cualesquiera en una recta, y *c*) que es posible comparar la "distancia" entre dos puntos cualesquiera, con la distancia entre otros dos puntos.

Será significativo para el estudiante construir de una línea recta un modelo geométrico para los números cardinales. Podemos empezar por dibujar una representación de una parte de una línea recta en cualquier superficie plana y para completar o reforzar la representación, se fijan puntas de flecha en cada extremo de la porción de la recta,

$$\longleftrightarrow$$

para simbolizar que el dibujo no termina, sino que la recta se extiende indefinidamente en ambos sentidos. Después identifiquemos algunos puntos específicos en el dibujo de la recta, marcando cualquier punto conveniente (llamémosle P) y un segundo punto, diferente del primero (llamémosle Q). A partir de estos puntos marquemos, por cualquier método, una serie de puntos (de la cual P y Q son dos puntos consecutivos de la serie), teniendo en cuenta que el espacio entre dichos puntos sea el mismo a lo largo de la recta. Por ejemplo, algunos métodos para poder hacer esto, consistirían en el uso de un compás, o mediante un par de marcas hechas en la orilla de una hoja de papel. O empleando algún otro método semejante (figura 6) para marcar espacios iguales. Obsérvese que la localización de los puntos P y Q no es de consecuencia, y una vez que los hayamos escogido, podemos marcar otros puntos sobre la línea en ambos sentidos.

Cuando se ha terminado la identificación de puntos, podemos obtener algo parecido a la figura 7. Hasta este momento tenemos el dibujo de una parte, de lo que concebimos como una recta que se extiende indefinidamente en ambos sentidos y sobre la cual, por medio de marcas repetidas, de distancia constante, hemos identificado algunos puntos específicos. El dibujo que tenemos no es una parte de la recta misma, ni las marcas que hemos hecho para distinguir puntos son los puntos mismos. En el sentido en que estamos pensando aquí acerca de los puntos y las rectas, son simplemente conceptos o ideas, los cuales representamos por medio de lápiz y

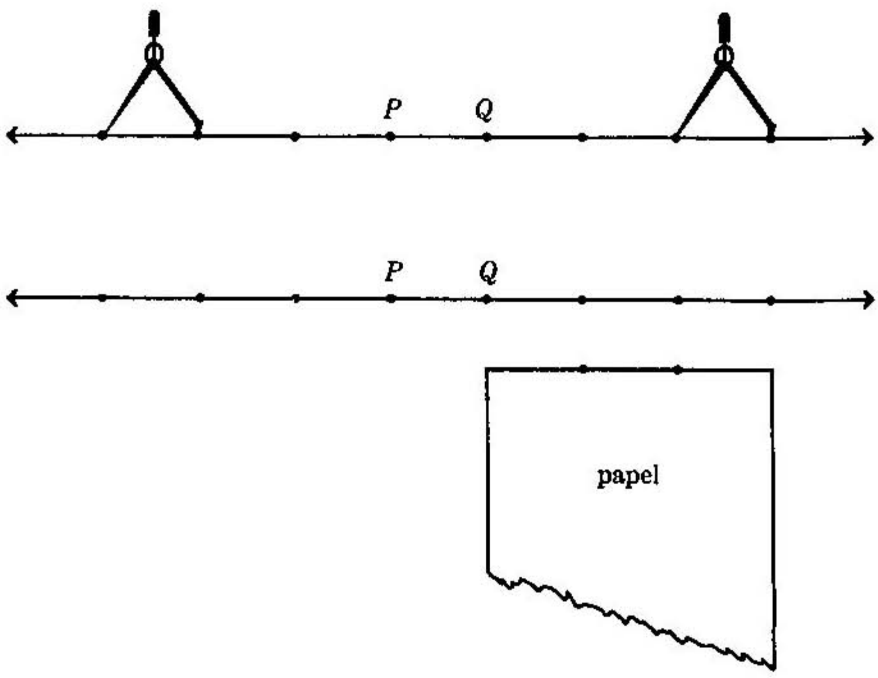


FIGURA 6

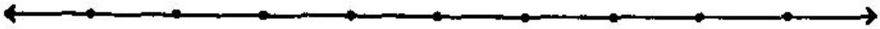


FIGURA 7

papel o pizarrón y gis. Nuestros dibujos tienen propiedades que no comparten las cosas que ellos representan; por ejemplo, los dibujos pueden verse. Más aún, para que puedan ser vistos tienen que tener dimensiones, y la única dimensión que sabemos que tiene la recta es su longitud, que es finita cuando se considera como una porción limitada entre dos puntos, e infinita cuando se considera completa, que se extiende indefinidamente. Nuestros puntos se conciben simplemente como localizaciones sin dimensión.

Nuestro dibujo por tanto es vívido y útil para los propósitos por los cuales debemos ponerlo. Después apreciemos el conjunto de números enteros en su totalidad y veamos cómo podemos hacer una conexión entre el conjunto de números y el conjunto de puntos que hemos identificado en la recta. La figura 8 muestra los dos conjuntos, uno sobre otro. Sabemos que

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

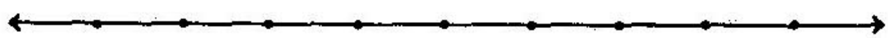


FIGURA 8

hay un número infinito de números en nuestro conjunto, y conceptualmente un número infinito de puntos *especificados* en la recta. Nuestro propósito es aparear los elementos de estos conjuntos. La cuestión ahora es cómo hacer este apareamiento. Después de todo, mientras que el conjunto de los números enteros tiene un comienzo (elemento menor), concebimos nuestra recta como extendida indefinidamente, en ambos sentidos; y por esto no existe un "comienzo" natural del conjunto de los puntos especificados. Escojamos entonces cualquiera de los puntos especificados de nuestra recta y concentremos la atención únicamente en aquellos puntos específicos mar-

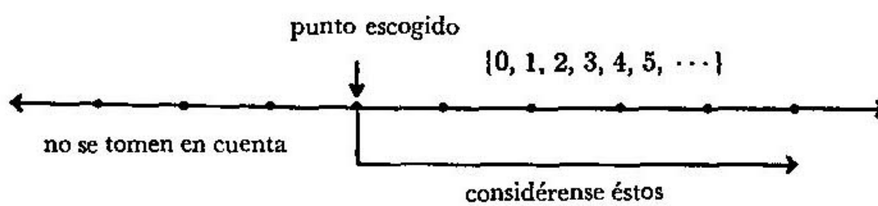


FIGURA 9

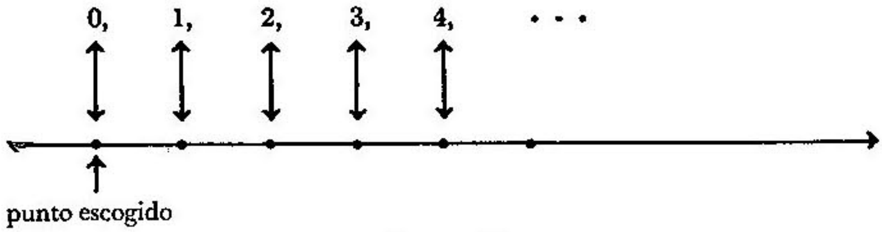


FIGURA 10

cados al lado derecho del punto escogido como se muestra en la figura 9. Ahora apareemos cada número del conjunto de los números cardinales con uno de nuestros puntos específicos, de la manera indicada en la figura 10. Obsérvese que estamos haciendo este apareamiento de una forma particular. El número 0 se asocia con el punto escogido (inicial), y cada número cardinal sucesivo se asigna, en orden, a un punto sucesivo. La figura 11

FIGURA 11

muestra gráficamente una parte del resultado obtenido, con cada punto específico marcado con el numeral para el número cardinal con el cual está apareado. Conceptualmente esta forma de marcar los puntos se extiende indefinidamente a la derecha, con cada número cardinal asociado, en orden, con un punto específico. La parte de la recta que está localizada a la izquierda del punto al que le corresponde el 0 (este punto es llamado el *origen* del eje numérico) no nos interesa ni nos concierne en este momento. Cuando el conjunto de números se extiende para incluir a los números negativos, esta parte de la recta puede ser usada de manera similar para apreciar los números negativos.

Si deseamos centrar nuestra atención en el esquema de un conjunto de números cardinales apareados con puntos a cierta distancia del origen, necesitamos dibujar solamente esa parte del eje numérico en la que estamos interesados. Por ejemplo, si queremos apreciar qué parte del eje numérico se asocia con el conjunto de números cardinales

$$\{265, 266, 267, 268, 269\},$$

nuestro esquema de la parte del eje numérico puede aparecer como se muestra en la figura 12, donde se entiende que el origen está localizado, 265 segmentos a lo largo del eje, hacia la izquierda.

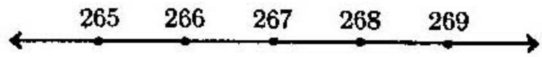


FIGURA 12

Hay cierto número de propósitos pedagógicos valiosos, para los que el eje numérico puede emplearse aunque en este momento sólo mostraremos uno de ellos.* El eje numérico proporciona un medio concreto para apreciar el orden en el conjunto de los números cardinales. De entre dos números cardinales cualesquiera, el punto en el eje numérico que corresponda al menor de los dos, estará localizado a la izquierda del punto al que le corresponde el mayor.

OPERACIONES CON LOS CONJUNTOS

Unión de conjuntos

Considérese el conjunto de niños de segundo grado presentes en el grupo A de la Escuela Reforma en un momento determinado. Si a este conjunto le llamamos nuestro conjunto universal U, entonces podemos hablar de un número de subconjuntos diferentes de U. Por ejemplo, hablaríamos acerca del conjunto de niños, del conjunto de niñas del conjunto de niños y niñas sentados en la primera fila, en la segunda, o en alguna otra, o del conjunto de niños y niñas cuyo primer apellido empiece con la letra "M". Hay varias maneras para especificar subconjuntos de nuestro universo. Usando esos subconjuntos podemos ilustrar cómo dos conjuntos, o más, pueden emplearse para identificar a otro subconjunto de U.

Supongamos que llamamos U a nuestro universo, como especificamos en el párrafo anterior, y dados:

$A = \{\text{niños}\}$, $C = \{\text{niños y niñas de las filas 1 y 2}\}$,
$B = \{\text{niñas}\}$, $D = \{\text{niños y niñas de las filas 3 y 4}\}$,

en donde se entiende que $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, y $D \subseteq U$.

(Léanse estos símbolos en palabras para asegurar que se conoce lo que significan.)

Si pedimos que los miembros del conjunto A de nuestro ejemplo se pongan de pie, todos los niños que estén presentes en la clase, deben ponerse de pie. De manera semejante podemos identificar a los miembros de

* Otros cuadernos de esta serie harán un mayor uso y tratarán con mayor frecuencia el concepto de eje numérico.

cada uno de los conjuntos B, C, D, con sólo pedir que sus miembros se pongan de pie. Seguramente que cuando pidamos que los miembros de los conjuntos C y D se pongan de pie, encontraremos tanto a niños como a niñas. Ahora supongamos que pedimos que se pongan de pie aquellos niños y niñas que son miembros del conjunto A o del conjunto C, o de ambos. Esta vez esperamos ver de pie a las niñas de las filas 1 y 2, y a todos los niños. Hemos usado los conjuntos A y C para formar un nuevo conjunto, llamado la *unión* de los conjuntos A y C. Formalizando el concepto, acerca del que estamos hablando aquí, tenemos la siguiente definición:

> *Si* A *y* B *son subconjuntos del universo, la unión de* A *y* B *simbolizada mediante* A ∪ B, *es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a* A *o a* B *o a ambos.*

(Obsérvese que el símbolo "∪" es diferente de la letra U usada para simbolizar el conjunto universal.)

El proceso de obtener la unión de dos conjuntos se llama *operación* de conjuntos, y puesto que se determina para aplicarse exactamente a dos conjuntos a la vez, se le llama *operación binaria.* Así como podemos ejecutar una operación binaria con los números 2 y 3 para obtener otro número (por ejemplo, $2 + 3 = 5$ ó $2 \times 3 = 6$), también podemos ejecutar una operación binaria con dos conjuntos para obtener otro conjunto. (El prefijo "bi" significa dos —compare su uso con "bicicleta", "bípedo", etc.) Aún más, puesto que la unión de dos subconjuntos cualesquiera de un universo dado, es ella misma un subconjunto de dicho universo, se dice entonces que el universo es *cerrado* con respecto a la formación de uniones.

Demos otro ejemplo de la unión de dos conjuntos, esta vez usando conjuntos cuyos miembros se identifican simplemente por las letras a, b, c, d, e, f, g, y h. Consideremos además que

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \\ A &= \{a, b, c\}, \\ B &= \{b, c, d\}, \\ C &= \{d, e, f, g, h\}, \\ D &= \{h\}. \end{aligned}$$

Comprobemos, ahora, que $A \cup B$ (léase "la unión de A y B" o también "A unión B") es $\{a, b, c, d\}$. Nótese que $A \cup B$ no debe escribirse $\{a, b, c, b, c, d\}$ puesto que no tiene caso repetir la expresión de un solo miembro varias veces. El conjunto $A \cup B$ tiene cuatro miembros, no seis. Regresando a los conjuntos considerados anteriormente, se verifica que:

$$A \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}.$$

Por tanto, como este conjunto contiene a todos los miembros de U, podemos escribir

$$A \cup C = U.$$

También

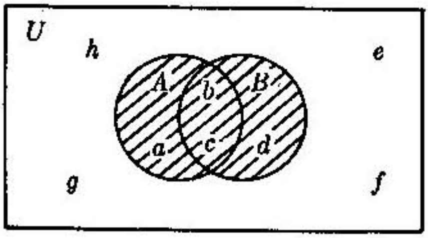
$$A \cup D = \{a, b, c, h\}$$

y

$$D \cup C = \{d, e, f, g, h\}.$$

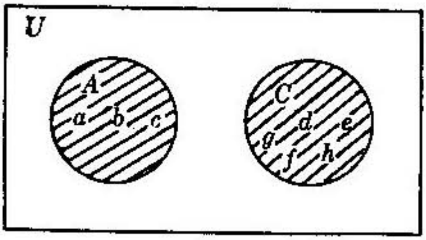
Este último conjunto es el mismo que el conjunto C; por tanto,

$$D \cup C = C.$$



$A \cup B = \{a, b, c, d\}$

FIGURA 13



$A \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

FIGURA 14

Los diagramas de Venn, estudiados en una de las secciones anteriores, nos ofrecen un método gráfico para apreciar la unión de conjuntos. Sombreando las regiones que se usan para representar los conjuntos, hacemos que la unión de dos de estos conjuntos resalte muy claramente. Las figuras 13 a 16 representan las uniones de los conjuntos mencionados anteriormente.

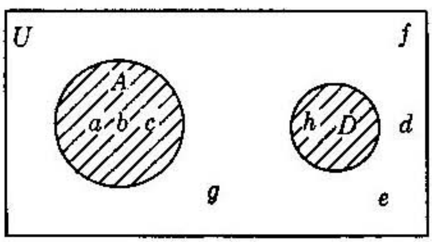
El último ejemplo (figura 16) ilustra otro hecho, que es el siguiente: si un conjunto es subconjunto de un segundo conjunto, entonces la unión de estos conjuntos es el segundo conjunto. Lo anterior se puede representar en símbolos de la siguiente manera:

$$\text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces } A \cup B = B.$$

En particular, la unión de cualquier conjunto con el conjunto universal, será el mismo conjunto universal, porque todo conjunto es subconjunto del conjunto universal. En símbolos para todo conjunto

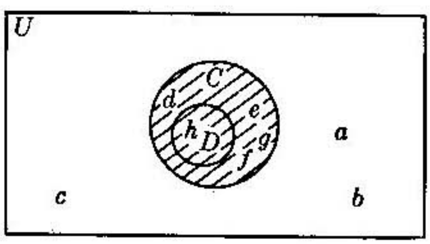
$$A \subseteq U,\ A \cup U = U.$$

Además, $\emptyset \cup A = A$ para todo conjunto A, puesto que $\emptyset \subseteq A$. La definición de la unión de dos conjuntos implica que el orden, en el que se consideran los miembros de un conjunto,



$A \cup D = \{a, b, c, h\}$

FIGURA 15



$D \cup C = \{d, e, f, g, h\}$
$D \cup C = C$

FIGURA 16

no interviene en el proceso de obtener la unión, al igual que el orden en el que se consideran los conjuntos mismos. Entonces, el enunciado

$$A \cup B = B \cup A$$

es verdadero para dos conjuntos cualesquiera A y B.

Cuando el orden en que tomamos dos cosas para ejecutar una operación no tiene efecto en el resultado, se dice que la operación es *conmutativa*. Por esto, el proceso de obtener la unión de dos conjuntos es una operación conmutativa.

Necesitamos otra definición para poder hablar sobre la unión de más de dos conjuntos. Por tanto, consideremos lo siguiente: para conjuntos cualesquiera A, B y C

$$A \cup B \cup C \text{ simboliza al conjunto } (A \cup B) \cup C.$$

Sustituyendo este simbolismo por palabras, podemos expresar esto de la siguiente manera: $A \cup B \cup C$ es el conjunto que se obtiene, primero con la unión de A y B (esto es lo que está indicado con el paréntesis) y después obteniendo la unión de este conjunto con C. De manera semejante, de acuerdo con lo anterior, podemos trabajar con más de tres conjuntos repitiendo la operación binaria, como en $A \cup B \cup C \cup D$. Como un ejemplo considérese:

$$\begin{aligned} U &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, \\ A &= \{2, 4\}, \\ B &= \{4, 6, 8\}, \\ C &= \{4, 8, 12\}. \end{aligned}$$

Formando primero $A \cup B$, tenemos:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2, 4\} \cup \{4, 6, 8\}, \\ &= \{2, 4, 6, 8\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= \{2, 4, 6, 8\} \cup \{4, 8, 12\}, \\ &= \{2, 4, 6, 8, 12\}. \end{aligned}$$

Este ejemplo puede usarse para señalar otra característica de la operación de obtener la unión de conjuntos. El conjunto $A \cup (B \cup C)$ ¿es el mismo que el conjunto $(A \cup B) \cup C$? [En $A \cup (B \cup C)$, el paréntesis indica que el conjunto $B \cup C$ se obtiene primero, y después se obtiene la unión de este conjunto con el conjunto A.] Si U, A, B y C se definen como en el caso anterior, tenemos entonces

$$\begin{aligned} B \cup C &= \{4, 6, 8\} \cup \{4, 8, 12\}, \\ &= \{4, 6, 8, 12\}. \end{aligned}$$

Si ahora formamos la unión de este conjunto con A, obtenemos:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= \{2, 4\} \cup \{4, 6, 8, 12\}, \\ &= \{2, 4, 6, 8, 12\}, \end{aligned}$$

el cual es exactamente el mismo conjunto que $(A \cup B) \cup C$. Desde luego que el hecho de haber obtenido resultados idénticos en este caso particular puede ser simplemente por casualidad. Entonces, ¿podemos esperar que para cualesquiera tres conjuntos A, B y C,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)?$$

La respuesta es sí, y esto puede ilustrarse por medio de diagramas de Venn en las figuras 17 a 20.

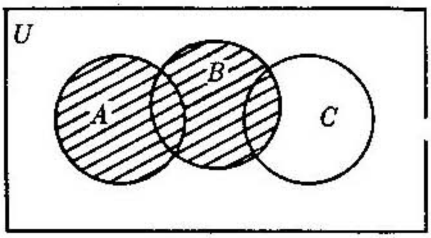


FIGURA 17

La figura 17 describe tres conjuntos A, B, C, en el universo U, y la región correspondiente a $A \cup B$ está rayada.

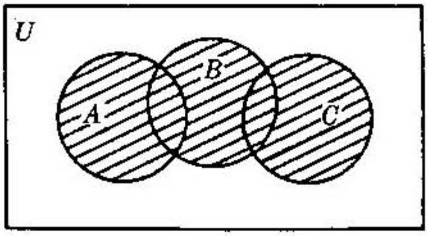


FIGURA 18

La figura 18 muestra los mismos conjuntos, pero con la región correspondiente a $(A \cup B) \cup C$ rayada.

Comparando las figuras 18 y 20 podemos ver que

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Esta propiedad de la operación para obtener la unión de conjuntos se llama *propiedad asociativa.* También podemos decir que la operación es *asociativa.*

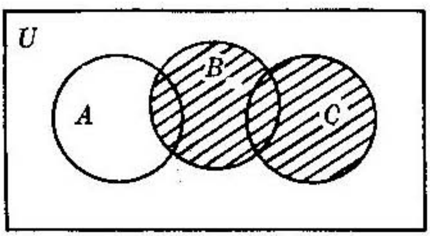


FIGURA 19

La figura 19 ilustra los mismos tres conjuntos, pero con la región correspondiente a $B \cup C$ rayada.

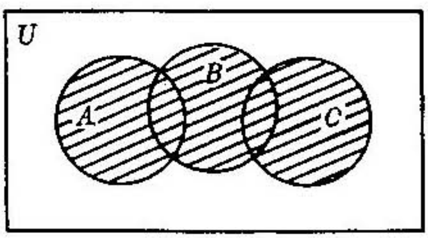
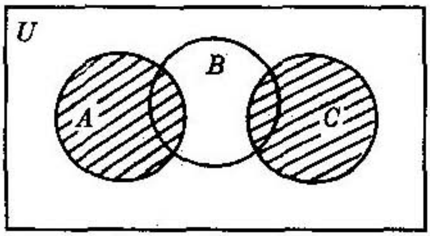


FIGURA 20

La figura 20 muestra los mismos tres conjuntos con la región correspondiente a $A \cup (B \cup C)$ rayada.

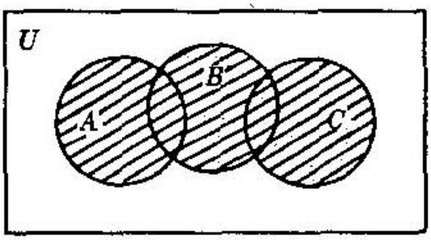
Lo cual significa, en realidad, que en $A \cup B \cup C$ no importa el orden en el cual se obtengan, ya sea primero $A \cup B$ o $B \cup C$.

Las figuras 21 y 22 van un paso más allá e ilustran que $(A \cup C) \cup B = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Comparando las figuras 18, 20 y 22 puede verse que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B$.



$A \cup C$

FIGURA 21



$(A \cup C) \cup B$

FIGURA 22

Grupo de ejercicios 3

1. Dados U = {Los Estados de la República Mexicana},
C = {Veracruz, Jalisco, Sonora},
O = {Nuevo León, Tamaulipas},
P = {Colima, Jalisco, Michoacán, Tamaulipas, Coahuila}.

Dé una lista de los miembros de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $C \cup O$
b) $C \cup P$
c) $O \cup P$

2. Dados U = {Los niños del 5º año de la Escuela Reforma},
S = {María, Elena, Ana, Juan, Roberto},
M = {Juan, Roberto, Ana, Jaime, Susana},
C = {Pedro, María, Felipe, Jaime, Nora, Ana},
W = {María, Ana, José, Nora}.

Dé una lista de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $S \cup M$
b) $C \cup W$
c) $(S \cup C) \cup W$
d) $C \cup (W \cup M)$

3. Dados $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$,
$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$,
$C = \{3, 6, 9, 12\}$,
$D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Dé una lista de los miembros de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $A \cup B$
b) $B \cup C$
c) $C \cup D$
d) $(A \cup C) \cup D$

Intersección de conjuntos

Una segunda operación con los conjuntos consiste en obtener la *intersección* de dos conjuntos. Iniciemos la discusión empleando los mismos conjuntos que usamos para ilustrar la forma en que opera la unión de dos conjuntos. Entonces

U = {Alumnos de 2º grado presentes en el grupo A de la Escuela Reforma},

en donde se entiende que nos estamos refiriendo al momento en el que la escuela se encuentra en horas de labor. También, como antes, tenemos

A = {niños},
B = {niñas}
C = {niños y niñas de las filas 1 y 2},
D = {niños y niñas de las filas 3 y 4}.

A, B, C, y D son subconjunto de U. Roguemos a los miembros que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto C que se pongan de pie; así veremos que se paran todos los niños de las filas 1 y 2. Por lo que hemos usado dos conjuntos, A y C, para formar un nuevo conjunto: el de aquellos elementos que pertenecen a *ambos* conjuntos A y C a la vez. En consecuencia, hemos realizado una operación binaria con los conjuntos A y C. Este es un ejemplo de lo que queremos expresar por la intersección de dos conjuntos. En general, tenemos la siguiente definición:

Si A *y* B *son subconjuntos de un universo, la intersección de* A *y* B, *simbolizada por* A∩B, *es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ambos* A *y* B *a la vez.*

El grupo simbólico $A \cap B$ se lee "la intersección de A y B", o también "A intersección B". Puesto que todos los miembros que pertenecen a ambos conjuntos A y B deben ser también miembros de U, entonces el universo es cerrado con respecto a la operación de obtener intersecciones de conjuntos. Además, ya que $A \cap B$ tiene exactamente los mismos elementos que $B \cap A$, es verdadero que, para dos conjuntos cualesquiera A y B,

$$A \cap B = B \cap A,$$

por lo que la operación de formar la intersección de dos conjuntos es conmutativa.

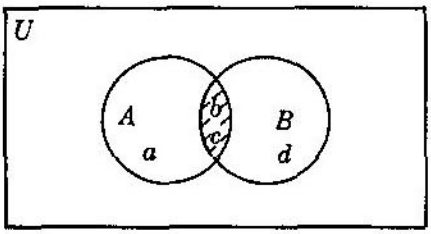
Nuevamente consideremos el ejemplo

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \\ A &= \{a, b, c\}, \\ B &= \{b, c, d\}, \\ C &= \{d, e, f, g, h\}, \\ D &= \{h\}. \end{aligned}$$

Puede comprobarse que

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{a, b, c\} \cap \{b, c, d\}, \\ &= \{b, c\}. \end{aligned}$$

(¿Son significativos estos símbolos? Lo que en efecto se quiere decir aquí, es que el conjunto de elementos que pertenecen a ambos conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a $\{a, b, c\}$ y $\{b, c, d\}$ a la vez; o sea el conjunto cuyos elementos son b y c; esto es $\{b, c\}$.) La figura 23 es



$A \cap B = \{b, c\}$

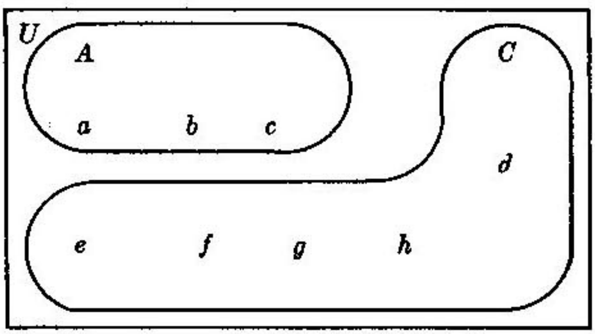
FIGURA 23

un diagrama de Venn que ilustra lo anterior, en donde $A \cap B$ es la región que se representa rayada.

Los conjuntos A y C de nuestro ejemplo, no tienen elementos comunes; por tanto, la intersección de los conjuntos A y C no tienen elementos, y por eso es el conjunto vacío. Esto puede escribirse así

$$A \cap C = \emptyset,$$

lo que ahora leeremos: "la intersección de A y C es el conjunto vacío". El diagrama de Venn de la figura 24, nos muestra esta situación. Cuando dos



$A \cap C = \emptyset$

FIGURA 24

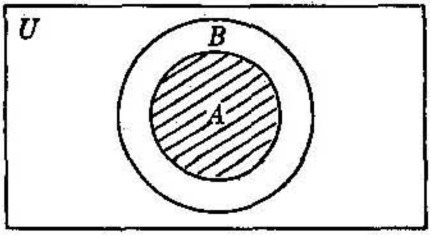
conjuntos no vacíos se caracterizan por no tener elementos comunes, se les llama conjuntos *disjuntos*. De una manera más formal:

> *Si* A *y* B *son conjuntos no vacíos se dice que* A *y* B *son disjuntos si, y sólo si* $A \cap B = \emptyset$.

Ahora estamos listos para analizar algunas intersecciones más interesantes. Un ligero análisis basta para convencernos de que si para dos conjuntos cualesquiera A y B se tiene $A \subseteq B$, entonces

$$A \cap B = A.$$

En palabras, si un primer conjunto es subconjunto de otro conjunto, entonces su intersección es el primer conjunto. La figura 25 es un diagrama de Venn que describe esta situación



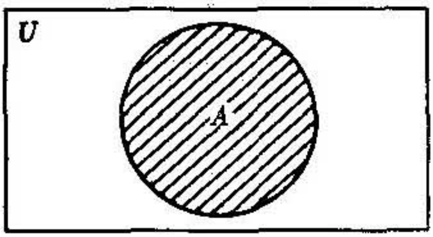
$A \cap B = A$

FIGURA 25

Puesto que todo conjunto, en cualquier ejemplo o problema, es un subconjunto del universo, se concluye que para todo conjunto A,

$$U \cap A = A.$$

Esto se muestra en el diagrama de Venn de la figura 26.



$U \cap A = A$

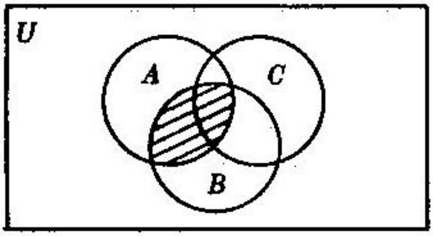
FIGURA 26

Aunque el proceso de obtener la intersección de dos conjuntos, así como el de obtener su unión, es una operación binaria, podemos extenderla a más de dos conjuntos, mediante la siguiente definición:

> *Para tres conjuntos cualesquiera* A, B *y* C, $A \cap B \cap C$ *simboliza al conjunto* $(A \cap B) \cap C$.

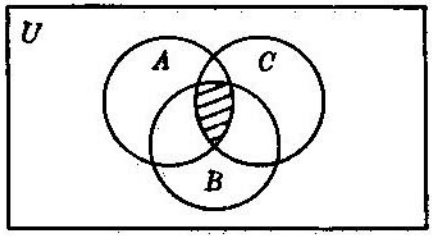
El paréntesis indica que $A \cap B$ se obtiene primero.

Consideremos ahora las figuras 27 y 28 que muestran $A \cap B$ primero y después $(A \cap B) \cap C$.



$A \cap B$

FIGURA 27



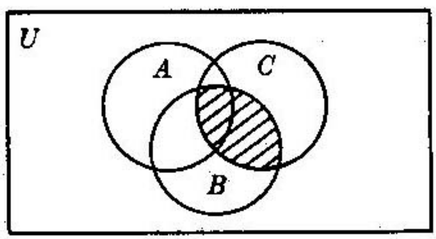
$(A \cap B) \cap C$

FIGURA 28

En las figuras 29 y 30, vemos primero $B \cap C$, y después $A \cap (B \cap C)$.

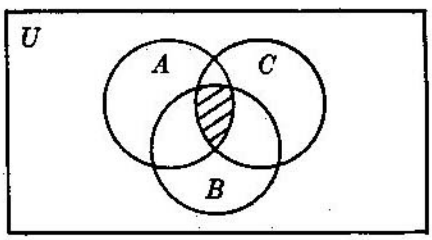
Cuando comparamos las figuras 28 y 30, es evidente que para tres conjuntos cualesquiera A, B y C,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$



$B \cap C$

FIGURA 29



$A \cap (B \cap C)$

FIGURA 30

En otras palabras, la operación de formar la intersección de conjuntos es *asociativa*. Esto no constituye una prueba de la asociatividad, pero la hace admisible.

Grupo de ejercicios 4

1. Dados $U = \{$Países de América$\}$,
   $B = \{$Bolivia, Salvador, Argentina, México, Estados Unidos$\}$,
   $C = \{$Argentina, Colombia, Uruguay, Bolivia$\}$,
   $D = \{$Salvador, Bolivia, Brasil$\}$,
   $E = \{$Panamá, Canadá, Paraguay$\}$.

Obtenga una lista de los miembros de cada uno de los siguientes conjuntos.

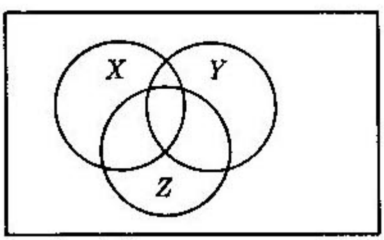
a) $B \cap C$ *d)* $(B \cap D) \cap C$
b) $C \cap D$ *e)* $D \cap (C \cap B)$
c) $C \cap E$ *f)* $(B \cap E) \cap C$

2. Dados $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 15\}$,
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$,
$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,
$C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$,
$D = \{4, 8, 12\}$.

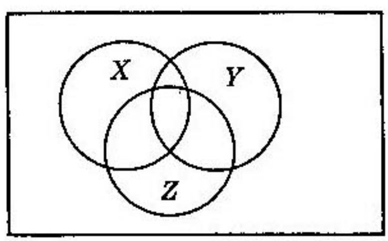
Obtenga una lista de cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $A \cap B$ *d)* $(A \cap C) \cap D$
b) $B \cap C$ *e)* $B \cap (C \cap D)$
c) $A \cap D$ *f)* $(A \cap D) \cap C$

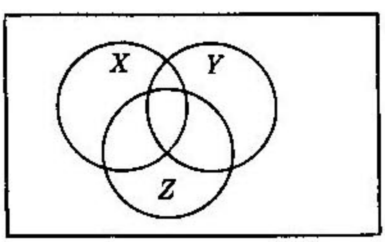
3. Mediante rayado, indique los siguientes conjuntos.

a)


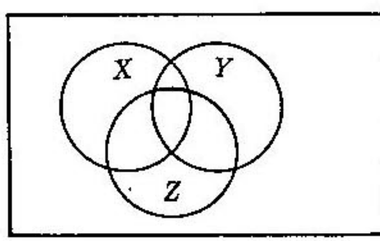
$X \cap Z$

c)


$Y \cap Z$

b)


$(X \cap Z) \cap Y$

d)


$X \cap (Y \cap Z)$

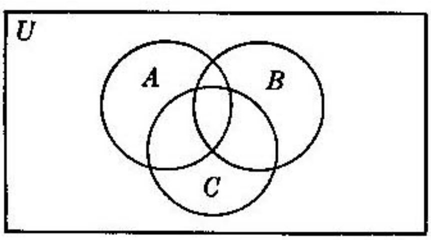
Combinación de operaciones con conjuntos

Cuando se combinan los procesos de obtención de uniones e intersecciones de conjuntos son de gran utilidad los diagramas de Venn para visualizar los resultados. Sólo consideraremos aquí algunos ejemplos; pero si se desea hacer algunos otros experimentos por cuenta propia, se encontrará que las combinaciones de estas operaciones ofrecen muchas posibilidades para la formación de conjuntos.

Primero consideraremos la proposición

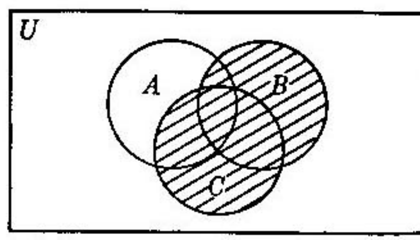
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

¿Es verdadero este enunciado? En las figuras 31 a 33 tenemos una secuencia de diagramas de Venn que muestran gráficamente $A \cap (B \cup C)$; la que se obtiene (fig. 31) primero mostrando A, B y C; segundo (fig. 32), $B \cup C$, y tercero (fig. 33) $A \cap (B \cup C)$.



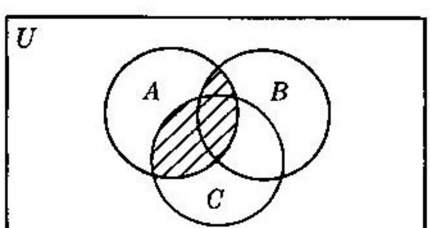
A, B, y C

FIGURA 31



$B \cup C$

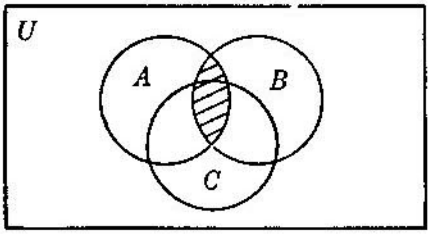
FIGURA 32



$A \cap (B \cup C)$

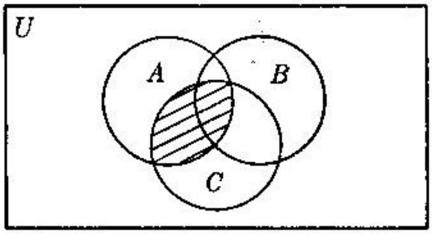
FIGURA 33

Comparemos, ahora, esta secuencia con la de las figuras 34 a 36, en las que figura 34 muestra $A \cap B$, la figura 35 muestra $A \cap C$ y la figura 36 muestra $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.



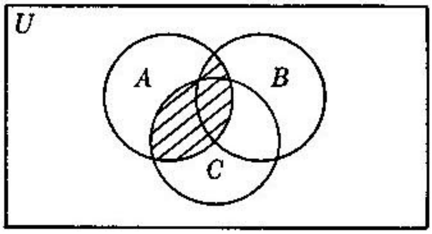
$A \cap B$

FIGURA 34



$A \cap C$

FIGURA 35



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

FIGURA 36

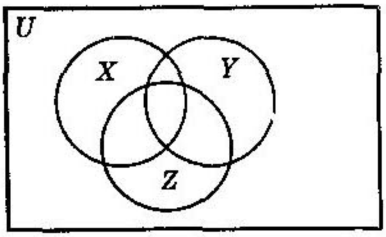
Claramente las figuras 33 y 36 muestran la misma región rayada y concluimos de esto que nuestro enunciado original es verdadero. La operación de obtener la unión e intersección de conjuntos tiene la propiedad de que para los conjuntos *A, B* y *C* la proposición

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

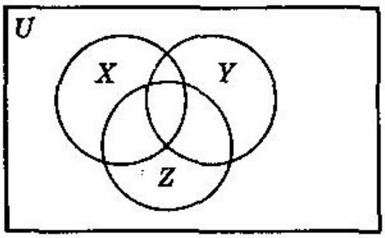
es verdadera. Esto se conoce como propiedad distributiva.

Grupo de ejercicios 5

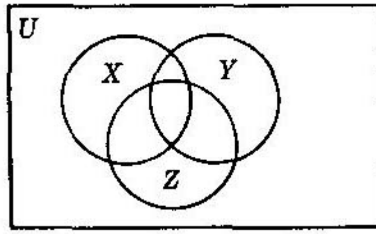
1. Forme una secuencia de diagramas de Venn para ilustrar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ es una proposición verdadera.
2. Mediante rayado, indique los siguientes conjuntos.

a) 

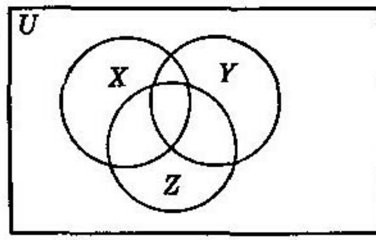
$X \cup (Y \cap Z)$

b) 

$X \cap (Y \cup Z)$

c) 

$(X \cap Y) \cap Z$

d) 

$(X \cup Z) \cap Y$

3. Dados $U =$ {maestros de escuela primaria},
$A =$ {maestros de escuela primaria que han viajado a Europa},
$B =$ {maestros de escuela primaria que han viajado a Estados Unidos}.

Describir en palabras cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $A \cup B$
b) $A \cap C$

4. Dados $U = \{80, 81, 82, 83, 84, \ldots, 100\}$,
$A = \{80, 85, 90, 95, 100\}$,
$B = \{80, 90, 100\}$,
$C = \{80, 82, 84, 86, 88, 90\}$,
$D = \{81, 83, 85, 87, 89\}$.

Obtenga una lista de los miembros de cada uno de los conjuntos:

a) $A \cup (B \cap C)$
b) $(A \cup B) \cap C$
c) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
d) $(A \cap C) \cap (C \cup D)$

Productos cartesianos

Como última operación con los conjuntos consideraremos otra operación binaria con la cual obtenemos un nuevo conjunto, operando con dos conjuntos; aunque esta operación produce un nuevo conjunto que no está en U. Pero antes de discutir esta operación es necesario establecer qué se entiende por un *par ordenado.*

Cuando se aparean objetos, el orden en que se toman para aparearlos puede —o no— ser importante. Por ejemplo, el orden en el que se apliquen la sal y la pimienta a la comida no tiene importancia, pero el orden en el que se coloca un zapato y un calcetín en el pie es de importancia. Cuando el orden *es* importante, los matemáticos usan el grupo simbólico (a, b) (léase "el par ordenado a, b") para simbolizar que a es apareado con b, pero además, que a se considera primero. Entonces, en el ejemplo anterior, podemos escribir (sal, pimienta) y (pimienta, sal) indistintamente; pero si queremos escribir (calcetín, zapato), esto significa algo muy diferente a (zapato, calcetín). Formalmente,

> *Un par ordenado* (a, b) *es un par de objetos en el cual el orden en el que se consideran los objetos debe ser primero* a, *y después* b.

El grupo de símbolos (a, b) no es notación de conjuntos, y un par ordenado no es un conjunto en el sentido en que hemos usado el término. (Es posible formular una definición para un par ordenado, exclusivamente en términos de conjuntos; sin embargo, no adoptaremos este punto de vista, y nuestros pares ordenados no se considerarán conjuntos como tales.) Las letras a y b usadas en (a, b) se llaman la *primera* y la *segunda componentes* (no "miembros") respectivamente, del par ordenado.

Definimos: dos pares ordenados son iguales si, y sólo si, dichos pares tienen las primeras componentes idénticas e idénticas las segundas componentes: $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$. Entonces,

$$(a, b) = (a, b), \text{ pero } (a, b) \neq (b, a) \text{ a no ser que } a = b.$$

Para que se comprenda con mayor claridad esta otra operación binaria con los conjuntos, considérese este ejemplo: "En una fuente de sodas se sirve pastel de chocolate y pastel de fresa con cualquiera de los siguientes helados: vainilla, chocolate, fresa o nuez; ¿cuántas combinaciones diferentes de pastel y helado podrán ofrecerse?" Las posibilidades son:

Pastel de chocolate y helado de vainilla,
pastel de chocolate y helado de chocolate,

pastel de chocolate y helado de fresa,
pastel de chocolate y helado de nuez,
pastel de fresa y helado de vainilla,
pastel de fresa y helado de chocolate,
pastel de fresa y helado de fresa,
pastel de fresa y helado de nuez.

En nuestra lista vemos que se tienen ocho posibilidades.

En nuestro ejemplo, el pastel de chocolate y el de fresa son los miembros de un conjunto, y los helados de diferentes sabores son miembros de otro conjunto. Las combinaciones de pastel y helado forman el conjunto de todos los posibles pares ordenados en los cuales la primera componente es un elemento del conjunto de pasteles, y la segunda, un elemento del conjunto de helados de diferentes sabores. Todas estas combinaciones forman un conjunto llamado *producto cartesiano** de los dos conjuntos.

Una manera conveniente de representar la formación de un producto cartesiano es mediante un *arreglo* o *red*. La figura 37 es un arreglo que representa los apareamientos del ejemplo anterior en el cual A es el conjunto de dos clases de pastel y B es el conjunto de cuatro tipos de helado. Cada par ordenado se forma de una clase de pastel y una clase de helado. En el arreglo se representa cada par ordenado mediante un punto.

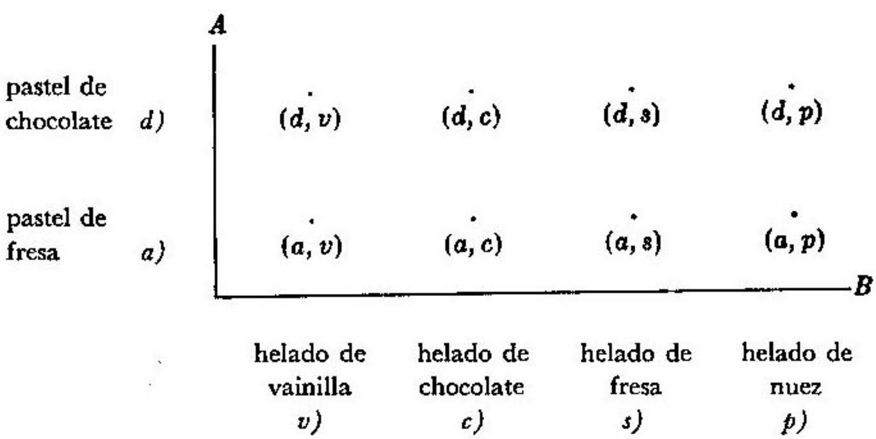


FIGURA 37

Definamos, ahora, el producto cartesiano.

* La palabra "cartesiano" se deriva del nombre del matemático francés René Descartes (1596-1650).

Si A *y* B *son conjuntos, entonces el conjunto* A $\times$ B *(léase:* "A *cruz* B"*), se llama el producto cartesiano de* A *y* B *y es el conjunto de todos los posibles pares ordenados, tales que la primera componente del par ordenado es un elemento de* A *y la segunda componente es un elemento de* B.

Obsérvese que, en primer lugar, estamos hablando sobre un conjunto cuyos elementos no son objetos simples, sino pares ordenados. Puesto que los miembros del conjunto universal en el que están incluidos A y B son objetos simples, y los miembros del conjunto $A \times B$ son pares ordenados, el conjunto $A \times B$ no es un subconjunto de U. Por consiguiente, la formación de productos cartesianos no es cerrada en U.

Considérese el conjunto universal

$$S = \{a, b, c, d\},$$

y dado

$$A = \{a, b\},$$

y

$$B = \{b, c, d\}.$$

Entonces, el producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto de todos los posibles pares ordenados cuyas primeras componentes son elementos de A y cuyos segundos componentes son elementos de B. Entonces,

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}.$$

Nótese que el par ordenado (b, b) es un miembro de $A \times B$. Anteriormente habíamos indicado que, en la notación de un conjunto, repetir varias veces un elemento en la lista, no era necesario. Esto es $\{b, b\} = \{b\}$. Sin embargo (b, b) es un par ordenado y no un conjunto, o sea un miembro legítimo de $A \times B$.

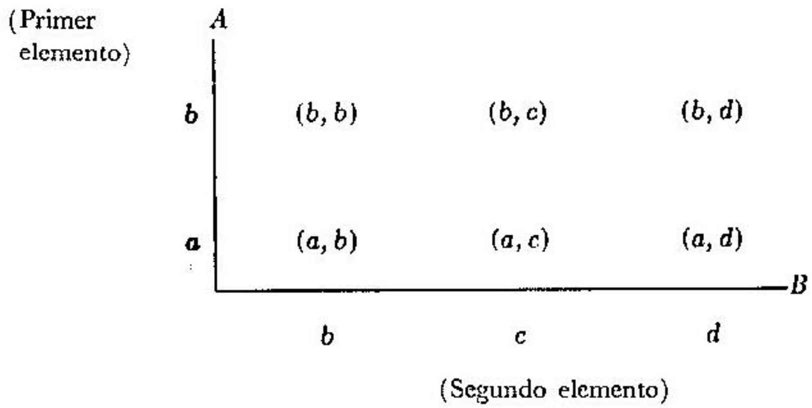
Continuando con nuestro ejemplo, observamos que

$$B \times A = \{(b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}.$$

Comparando los miembros de $A \times B$ y $B \times A$ vemos que no son los mismos, puesto que los pares ordenados (a, b) y (b, a), por ejemplo, son pares ordenados diferentes. Por lo que podemos concluir que, en general, la formación de productos cartesianos no es conmutativa.

La figura 38 es un arreglo que muestra la formación de $A \times B$ del ejemplo anterior. Observemos que el eje vertical está asociado con el conjunto A, y que las letras a y b, que aparecen a la izquierda del mismo eje, corresponden a las primeras componentes. De manera semejante, el eje horizontal se asocia con el conjunto B, y las letras b, c, d, que aparecen debajo del eje horizontal, corresponden a las segundas componentes. Es una elección arbitraria emplear el eje vertical para las primeras componentes y puede usarse al revés (como ocurre en realidad) cuando usamos coordenadas cartesianas para representar puntos en el plano.

Otra manera de representar la formación de un producto cartesiano es mediante *gráficas arborecentes.* La figura 39 es una gráfica arborecente que muestra la formación de $A \times B$ en el ejemplo anterior.



Orden de los elementos $A \times B$

FIGURA 38

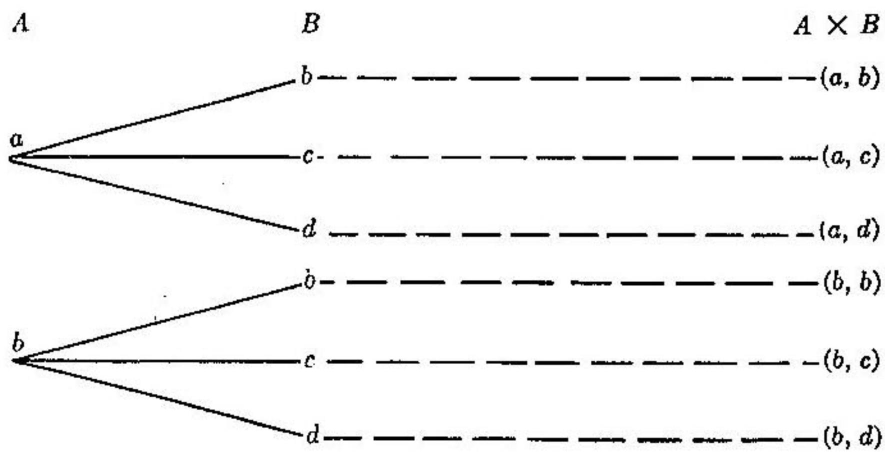


FIGURA 39

Grupo de ejercicios 6

1. Dados $U = \{$María, Nora, Carmen, Ana, Guillermo, Pedro, Felipe, Jaime$\}$,
$A = \{$María, Nora, Carmen, Ana$\}$,
$B = \{$Guillermo, Pedro, Felipe, Jaime$\}$.

   Construya un arreglo, o red, que muestre los apareamientos de posibles compañeros de juego de baraja, de modo que uno de los compañeros sea miembro del conjunto A y, el otro, miembro del conjunto B.

2. Dados $U = \{d, e, f, g, h\}$,
$A = \{d, e, f\}$,
$B = \{e, f, g, h\}$.

   Construya un arreglo o red que muestre la formación de $A \times B$.

3. Dados $U = \{w, x, y, z\}$,
$C = \{w, x\}$,
$D = \{x, y, z\}$.

   Constuya una gráfica arborecente que muestre la formación de $C \times D$.

SUMARIO

Nuestro propósito en este cuaderno ha sido discutir algunos conceptos elementales de la teoría de conjuntos y ver cómo pueden usarse para contribuir al esclarecimiento de la naturaleza del número. Sólo se han analizado algunos conceptos en el enorme campo de ricas y variadas ideas concernientes a la teoría de conjuntos y el número. Los conceptos que hemos introducido son fundamentales, y deben serle familiares al maestro de educación elemental para poder enseñar la matemática moderna.

Es nuestro deseo y esperanza que este pequeño cuaderno sea de utilidad para explicar algunas de las ideas básicas * que es preciso tratar en la discusión de la matemática moderna, en cuanto a conjuntos y números, y tal vez pueda servir como fundamento para estudios posteriores más profundos y detallados de estas ideas. Hay exposiciones más amplias y profundas que la presente. Esperamos el acogimiento decidido de los maestros para el estudio de estas exposiciones.

* Estas ideas se usarán en otros cuadernos de la serie, especialmente en el cuaderno 2: *Números enteros.*

SIMBOLOS USADOS EN EL CUADERNO 1

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
$\{\ \}$	*Llaves:* agrupar a los miembros de un conjunto
$A = \{$María, Juan$\}$	A es el conjunto cuyos miembros son María y Juan.
$\emptyset$	El conjunto que no tiene miembros, llamado el *conjunto vacío* o *conjunto nulo*. También se acostumbra escribir $\{\ \}$.
$\ldots$	Puntos suspensivos para indicar que en la lista se omiten algunos de los miembros del conjunto.*
$\in$	*Es un miembro de* **
$\notin$	*No es un miembro de* ***
$=$	*Igual, es igual a,* o *es el mismo que.* Para conjuntos: *Contiene exactamente los mismos miembros que.*
$\neq$	*No es igual a*
$\sim$	*Es equivalente a*
$<$	*Menor que*
$\nless$	*No es menor que*
$>$	*Mayor que*
$\ngtr$	*No es mayor que*
U	El conjunto universal o universo
$\subseteq$	*Es un subconjunto de*
$\subset$	*Es un subconjunto propio de*
$n(A)$	El número cardinal del conjunto A
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
(a, b)	El par ordenado: a, b
$A \times B$	El producto cartesiano de los conjuntos A y B, lo que se lee: A cruz B.

* Los puntos suspensivos deben emplearse sólo en caso que se sepa claramente cuáles son los miembros o elementos que se están omitiendo. [N. del T.]

** Este símbolo también se lee *es un elemento de* o *pertenece;* es más común usarlo como *pertenece.* [N. del T.]

*** *No es un elemento* o *no pertenece.* [N. del T.]

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1

1. *a)* {Tamaulipas, Veracruz, Tabasco, Campeche, Yucatán}
   b) {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio}
   c) {Luna}
   d) $\emptyset$ o { }
   e) {Michigan, Erie, Huron, Superior, Ontario}
   f) $\{a, b, c, d, e\}$

2. *a)* 3 *b)* 1 *c)* 2

3. *a)* $\in$ *d)* $\in$ *g)* $\notin$
   b) $\notin$ *e)* $\notin$ *h)* $\in$
   c) $\in$ *f)* $\notin$ *i)* $\notin$

Grupo de ejercicios 2

1. $\emptyset$ {carro, avión}
   {barco} {carro, tren}
   {carro} {avión, tren}
   {avión} {barco, carro, avión}
   {tren} {barco, carro, tren}
   {barco, carro} {carro, avión, tren}
   {barco, avión} {barco, avión, tren}
   {barco, tren} {barco, carro, avión, tren}

2. *a)* {Veracruz, Jalapa, Córdoba}
   b) {Matamoros, Ciudad Juárez, Laredo, Piedras Negras}
   c) {Jalapa}

3. El símbolo $\subset$ puede insertarse en *a, c, d*
   El símbolo $\subseteq$ puede insertarse en todos

Grupo de ejercicios 3

1. *a)* $C \cup O =$ {Veracruz, Jalisco, Sonora, Nuevo León, Tamaulipas}
   b) $C \cup P =$ {Veracruz, Jalisco, Sonora, Colima, Michoacán, Tamaulipas, Coahuila}

c) $O \cup P =$ {Nuevo León, Tamaulipas, Colima, Jalisco, Michoacán, Coahuila}

2. *a)* $S \cup M =$ {María, Elena, Ana, Juan, Roberto, Jaime, Susana}
   b) $C \cup W =$ {Pedro, María, Felipe, Jaime, Nora, Ana, Juan, Roberto, Susana}
   c) $(S \cup C) \cup W =$ {María, Elena, Ana, Juan, Roberto, Pedro, Felipe, Jaime, Nora, José}
   d) $C \cup (W \cup M) =$ {Pedro, María, Felipe, Jaime, Nora, Ana, José, Juan, Roberto, Susana}

3. *a)* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
   b) $B \cup C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$
   c) $C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12\}$
   d) $(A \cup C) \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$

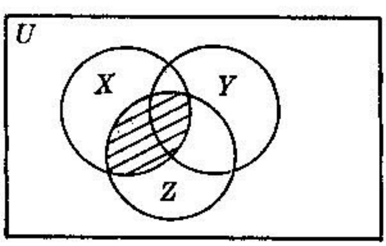
Grupo de ejercicios 4

1. *a)* $B \cap C =$ {Bolivia, Argentina}
   b) $C \cap D =$ {Bolivia}
   c) $C \cap E = \emptyset$ o $C \cap E = \{\ \}$
   d) $(B \cap D) \cap C =$ {Bolivia}
   e) $D \cap (C \cap B) =$ {Bolivia}
   f) $(B \cap E) \cap C = \emptyset$ o $(B \cap E) \cap C = \{\ \}$

2. *a)* $A \cap B = \emptyset$ o $A \cap B = \{\ \}$
   b) $B \cap C = \{3, 9, 15\}$
   c) $A \cap D = \{4, 8, 12\}$
   d) $(A \cap C) \cap D = \{12\}$
   e) $B \cap (C \cap D) = \emptyset$ o $B \cap (C \cap D) = \{\ \}$
   f) $(A \cap D) \cap C = \{12\}$

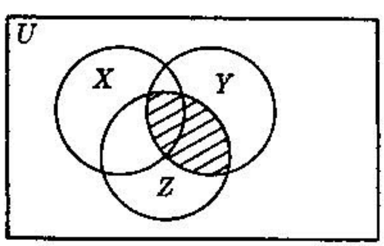
3.

a)

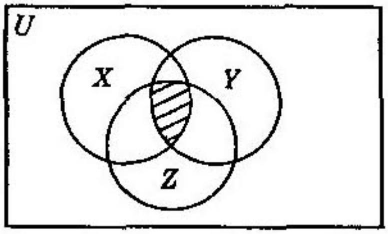


$X \cap Z$

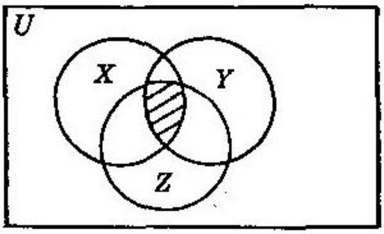
c)



$Y \cap Z$

b) 

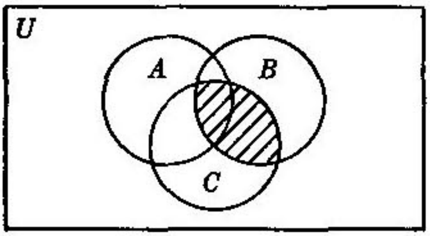
$(X \cap Z) \cap Y$

d) 

$X \cap (Y \cap Z)$

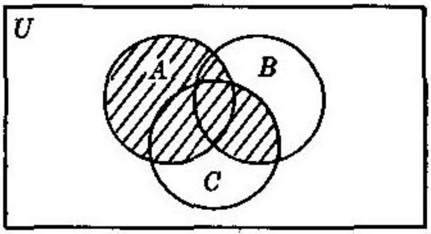
Grupo de ejercicios 5

1.



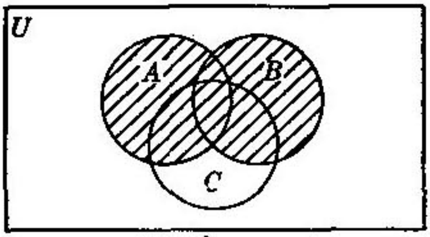
$B \cap C$

FIGURA 1



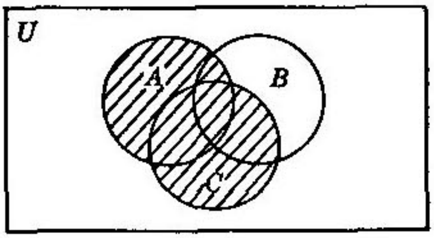
$A \cup (B \cap C)$

FIGURA 2



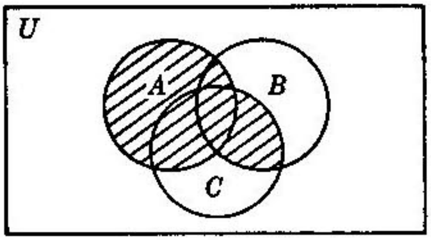
$A \cup B$

FIGURA 3



$A \cup C$

FIGURA 4



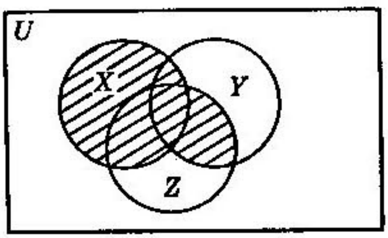
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

FIGURA 5

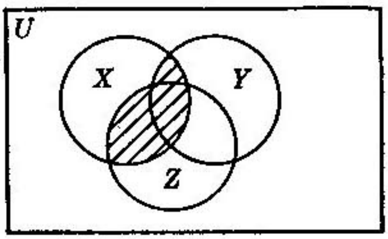
Las figuras 2 y 5 muestran que

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ es una proposición verdadera.

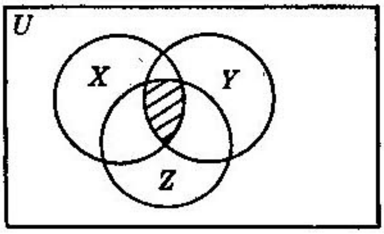
2.

a) 

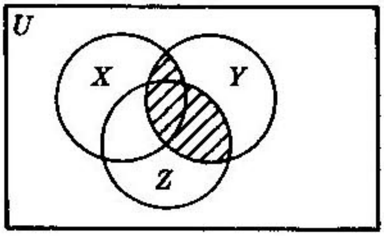
$X \cup (Y \cap Z)$

b) 

$X \cap (Y \cup Z)$

c) 

$(X \cap Y) \cap Z$

d) 

$(X \cup Z) \cap Y$

3. *a)* La unión de A y B es el conjunto de maestros de escuela primaria que han viajado a Europa o a los Estados Unidos o a ambas partes.

   b) La intersección de A y B es el conjunto de maestros de escuela primaria que han viajado tanto a Europa como a los Estados Unidos.

4. *a)* $A \cup (B \cap C) = \{80, 85, 90, 95, 100\}$

   b) $(A \cup B) \cap C = \{80, 90\}$

   c) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{80, 90, 100\}$

   d) $(A \cap C) \cap (C \cup D) = \{80, 90\}$

Grupo de ejercicios 6

1.

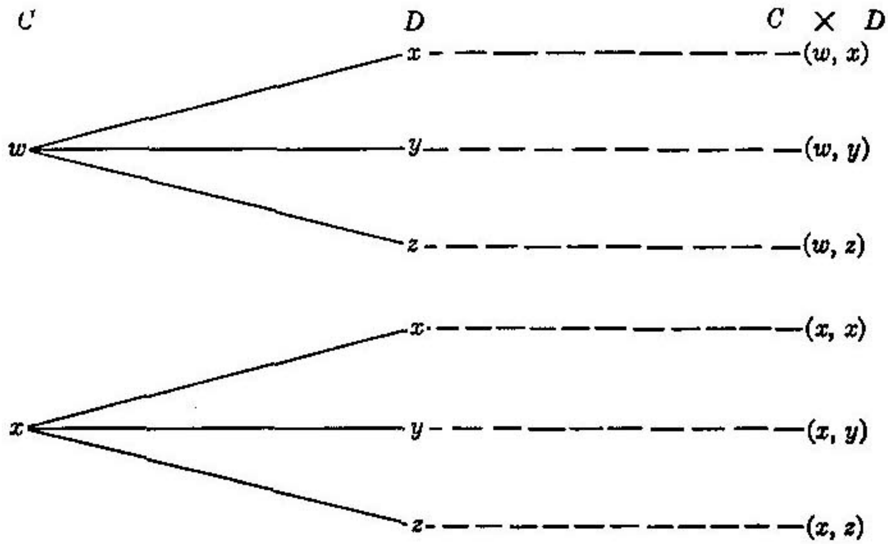
A					
María	(María, Guillermo)	(María, Pedro)	(María, Felipe)	(María, Jaime)	
Nora	(Nora, Guillermo)	(Nora, Pedro)	(Nora, Felipe)	(Nora, Jaime)	
Carmen	(Carmen, Guillermo)	(Carmen, Pedro)	(Carmen, Felipe)	(Carmen, Jaime)	
Ana	(Ana, Guillermo)	(Ana, Pedro)	(Ana, Felipe)	(Ana, Jaime)	
	Guillermo	Pedro	Felipe	Jaime	B

2.

d	(d, e)	(d, f)	(d, g)	(d, h)
e	(e, c)	(c, f)	(e, g)	(e, h)
f	(f, e)	(f, f)	(f, g)	(f, h)
	e	f	g	h

Orden de los elementos $A \times B$

3.



Esta obra terminó de imprimirse el día 29 de octubre de 1971, en los talleres de Offset Rebosán, S. A., Zacahuitzco 40, Col. Portales, México 13, D. F.

Se tiraron 4 000 ejemplares más sobrantes de reposición