Lógica

National Council of
Teachers
of Mathematics

trillas

TEMAS DE MATEMATICAS

12

12. LÓGICA

Este cuaderno es uno de los diez nuevos títulos que ha elaborado el National Council of Teachers of Mathematics, los que se suman a la serie de ocho ya aparecidos y reimpresos varias veces en la versión castellana.

Como cada uno de los ocho cuadernos mencionados, el presente, el doce en la colección, ha sido escrito para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Comprende la exposición del tema **Lógica**, básico en matemáticas. Este tema, como los que trata la serie, ahora de dieciocho, se halla entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje, transmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática, tratados en cada uno de estos cuadernos.

Es el deseo de los autores y del NCTM

Colección TEMAS DE MATEMATICAS

Traducción:
Federico Velasco Coba
Coordinador del Instituto
de Geofísica
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

Revisión técnica:
Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

12

Lógica

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

Editorial Trillas
México, 1972

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet number 12. Logic

Primera edición en español, 1970
Reimpresión, enero 1972
Segunda reimpresión, junio 1972

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prólogo

Este cuaderno es una de las diez nuevas unidades de una serie introducida en 1964 por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM). Como los ocho primeros cuadernos recibieron tan buena acogida (ya se han reimpreso varias veces), se pensó que una extensión de los temas tratados sería conveniente.

Como los primeros cuadernos (núms. 1 al 8), las nuevas unidades se han escrito pensando más bien en los profesores de escuelas primarias que en sus alumnos. Cada cuaderno presenta la exposición de un tema básico de las matemáticas. Los temas escogidos están entre aquellos con los que deben familiarizarse los profesores de primaria para poder tratar con verdadera comprensión las matemáticas que por lo común se enseñan en la escuela primaria. Los cuadernos presentan una introducción al tema que enfocan, no un tratamiento exhaustivo de él; el lector interesado puede estudiar estos temas con mayor profundidad en otras publicaciones.

Los temas se han escogido especialmente con el propósito de proporcionar material básico a los profesores que creen que las experiencias de aprendizaje que se proporcionan a los niños en sus primeros años escolares deben incluir una introducción sencilla a algunos de los *conceptos unificadores centrales de la matemática*. Muchos profesores se han encontrado con que su educación profesional no les preparó para la enseñanza de la aritmética de un modo acorde con este punto de vista. Los autores tienen la esperanza, al igual que la NCTM, de que esta serie de cuadernos pueda ayudar a los profesores, y ciertamente a todas aquellas personas interesadas en mejorar la enseñanza de las matemáticas.

Los primeros títulos son los siguientes:

Cuaderno 1: *Conjuntos*
Cuaderno 2: *Números enteros*
Cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4: *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5: *Números y sus factores*

Cuaderno 6: *Números racionales*
Cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8: *Proposiciones numéricas*

Los nuevos títulos son los siguientes:

Cuaderno 9: *El sistema de los enteros*
Cuaderno 10: *El sistema de los números racionales*
Cuaderno 11: *El sistema de los números reales*
Cuaderno 12: *Lógica*
Cuaderno 13: *Gráficas, relaciones y funciones*
Cuaderno 14: *Geometría informal*
Cuaderno 15: *Medida*
Cuaderno 16: *Recopilación, organización e interpretación de datos*
Cuaderno 17: *Sugerencias para la resolución de problemas*
Cuaderno 18: *Simetría, congruencia y semejanza*

Se sugiere que, de ordinario, los cuadernos se lean en el orden de los números que se les han asignado, pues, hasta cierto punto, se ha seguido un proceso en espiral para atacar los distintos temas.

Los nuevos folletos comenzaron a elaborarlos en 1966 los miembros escritores de un grupo de verano. Los autores expresan aquí su más sincero agradecimiento a las siguientes personas por haber leído parte de los manuscritos y por sus cambios de impresiones con los autores durante la preparación de los cuadernos: a Joseph M. Trotter, principal de la Escuela de San Luis Rey, y a Bonita Trotter, profesora de la Laurel School, ambos del Distrito Oceánico de la Union School; a John M. Hoffman, director de la Sección de Recursos Educativos de la Comunidad del Departamento de Educación del Condado de San Diego; y a James E. Inskeep, Jr., profesor de educación en el San Diego State College. Los autores se sienten en deuda especialmente con Alice C. Beckenbach por su amplia ayuda en la organización y edición del material para varios de los cuadernos. Expresan también su más profundo agradecimiento a Elaine Barth y su espléndido grupo de mecanógrafos por su excelente trabajo en la preparación del manuscrito.

El nuevo proyecto, emprendido para proseguir el trabajo del primero, lo inició y apadrinó el Comité de Publicaciones Suplementarias de la NCTM bajo la presidencia de William Wooton. La NCTM, que proporcionó apoyo financiero, hace ahora público su agradecimiento al grupo de autores de la presente extensión de la serie "Tema". A continuación damos sus nombres:

George Arbogast
Manuel P. Berri
Marguerite Brydegaard
Louis S. Cohen
Helen L. Curran
Patricia Davidson
Walter Fleming
Joseph Hashisaki
Lenore S. John
David Johnson
Robert H. Sorgenfrey
J. Dean Swift
William Wooton
Edwin F. Beckenbach, *Coordinador*

Indice general

Lógica

CUADERNO 12

INTRODUCCIÓN

La lógica en general, y la lógica simbólica en particular, es el estudio sistemático del proceso de razonamiento preciso. No es, sin embargo, un *sustituto* del razonamiento preciso; manipular símbolos, que es uno de los procedimientos de la lógica, no es la misma cosa que pensar. Lo que los métodos de la lógica pueden hacer por nosotros es clarificar nuestros tipos de pensamiento, guiarnos en la corrección de nuestros procesos de razonamiento y ayudarnos a evitar errores.

La finalidad de la lógica simbólica es la de reducir procedimientos verbales complicados en simples dispositivos de letras y símbolos. A *groso modo,* podemos comparar esto al uso de los numerales y los signos de la aritmética para ayudarnos a simplificar lo que de otro modo sería muy largo e incluiría enunciados verbales acerca de los números. Para probar las ventajas de los símbolos en aritmética bastará que el lector intente poner los conceptos numéricos expresados por $(3 + 4) + 5 = 12$ en palabras.

Exactamente lo mismo que los números son los elementos básicos de la aritmética, las proposiciones simples son los elementos de la lógica. Comenzamos nuestras experiencias aritméticas con un sencillo conjunto de números naturales, $\{1, 2, 3, \ldots\}$, y construimos estructuras más complicadas, como, por ejemplo, el sistema de los números racionales. Análogamente, comenzamos en lógica con las proposiciones simples, y usamos después éstas para formar proposiciones más complicadas. En la lógica aprendemos las reglas para la manipulación de las sentencias.

PROPOSICIONES

Proposiciones simples

Una proposición simple, llamada a menudo también una proposición atómica, es casi exactamente la misma cosa en lógica que en lenguaje común y corriente. Para asegurar una mayor precisión en la lógica, establecemos algunas restricciones que no se aplican en la gramática para que puedan considerarse aceptables en la lógica.

Examinemos primero algunas proposiciones simples del lenguaje ordinario y de las matemáticas.

V 1. Lincoln fue el decimosexto presidente de Estados Unidos.
2. $3 < 5$.
F 3. San Francisco es la capital de California.
4. $6 > 7$.
A 5. Él es profesor.
6. $x > 9$.
N 7. María está en el tercer grado.
8. El rey de Francia tiene el pelo rojo.

En general, una proposición simple es declarativa. Tiene un sujeto y un predicado. No tiene cláusulas componentes unidas por conjunciones como "y", "o", "si... entonces".

No vale la pena detenerse demasiado en la definición de simplicidad. Por una parte, hay proposiciones simples y proposiciones compuestas con igual significado: "los hombres buenos son generosos" y "si un hombre es bueno, entonces es generoso"; "María y Juan tienen seis años" y "María tiene seis años, y Juan tiene seis años", son ejemplos de ello. Por otra parte, a veces es muy difícil estar seguros de la simplicidad. La proposición "él es más alto de lo que ella era" tiene dos verbos; pero la conjunción "que" no está entre las de la lista de prohibidas ("y", "o", "si... entonces") y la proposición es análoga en su forma a "$5 > 3$".

Hay una restricción especial que queda ilustrada por el agrupamiento que hicimos en los ejemplos. Las primeras dos proposiciones son verdaderas (V). Enuncian hechos indiscutibles. Las segundas dos son falsas (F). Están en contradicción con hechos indiscutibles. Las dos siguientes son abiertas (A). Contienen un pronombre o una variable y dependen, para su verdad o falsedad, de qué es lo que sea lo que sustituya al pronombre o variable. Las últimas dos no tienen sentido (N) en la forma en que están. "María", siendo nombre propio, no es suficientemente claro. La proposición podría perfectamente ser cierta o falsa si se enunciase en un contexto; por ejemplo, si fuese parte de la contestación de una madre a la pregunta de otra mujer: "¿cuál es el grado que están cursando sus hijos ahora?". La proposición final es realmente una para la que no hay esperanzas, salvo que haya habido un cambio súbito en la política francesa entre el tiempo en que este libro fue escrito y el tiempo en que el lector lo está leyendo. El sujeto de la proposición no es que no esté claro, como el "María" de la proposición anterior, sino simplemente que no existe.

Vamos a exigir que todas las proposiciones simples usadas puedan clasificarse como verdaderas o falsas para todo reemplazo permisible de variables o pronombres (si es que hay alguno) que se haga. Esta exigencia pide que especifiquemos qué nombres pueden usarse para reemplazar los pronombres o variables; el conjunto de nombres se llama "conjunto de reemplazamientos". No debe contener términos no apropiados. "El presidente Johnson" no puede estar en el conjunto de reemplazamiento para x en la proposición 6. El subconjunto del conjunto de reemplazamiento que hace cierta una proposición se llama "conjunto de verdad" de la proposición. Por ejemplo, el conjunto de reemplazamiento para la proposición 6 podría ser el conjunto de los números enteros, y en tal caso el conjunto de verdad sería $\{10, 11, 12, \ldots\}$.

Aclaremos lo que se entiende por "capaz de clasificarse como verdadera o falsa". ¿Por qué no ser más directo y exigir que la proposición *sea* cierta o falsa después de cualquier reemplazamiento necesario? Hemos visto un ejemplo que ilustra la contestación: "María cursa el tercer grado." Ciertamente, es muy difícil clasificar casi cualquier proposición en español como cierta o falsa en sus propios méritos, sin ningún contexto. Tomemos, por ejemplo, la proposición 1. ¿Cómo respondería el lector a alguien que dijese: "falso; Lincoln es una ciudad de Inglaterra", o a uno que dijese: "¿quién es Lincoln?".

Una de las mayores fuentes de discrepancia entre las personas es precisamente que no tienen la misma clasificación sobre la verdad o falsedad de sus proposiciones simples. Toda la necesaria manipulación lógica del mundo no nos salvará si nuestros elementos básicos de construcción son defectuosos. En matemáticas, el contexto es usualmente más claro que en la conversación casual, pero debemos estar en guardia para asegurarnos de tal claridad incluso ahí. Proposiciones hechas pensando en los números naturales (el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$) se hacen falsas en términos de enteros (el conjunto $\{\ldots, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$) y viceversa. "El producto de dos números es mayor o igual que cualquiera de los factores" es un enunciado que será cierto en los números naturales, pero no en los enteros, ya que, por ejemplo, $0 \times 5 = 0$; y el producto resultante no es igual o mayor que 5. El enunciado "cuando un número se resta de otro, el resultado es un número" es cierto para los enteros; pero no es cierto para los números naturales, porque $1 - 5$ no tiene sentido en términos de los números naturales.

Por otra parte, tanto en matemáticas como en literatura tenemos proposiciones que son ciertas sólo porque decimos que lo son. En matemáticas estas proposiciones son *definiciones* y *axiomas*. En literatura son los supuestos fundamentales de una obra de ficción. Si el lector se encuentra ante una prueba de falso-verdadero la proposición "Huckleberry Finn era un amigo de Tom Sawyer", el lector la clasificará como verdadera porque Mark Twain así la concibió.

Así pues, sin meternos más a fondo en la cuestión, supongamos que tenemos un conjunto de proposiciones simples que reúnen las condiciones establecidas para la clasificación en verdaderas o falsas. Frecuentemente usaremos una letra mayúscula para representar una proposición. Por ejemplo, podemos reemplazar la proposición "Lincoln fue el decimosexto presidente de Estados Unidos" por la letra "L".

Proposiciones compuestas

Las proposiciones pueden construirse partiendo de otras proposiciones y, fundamentalmente, de proposiciones simples o atómicas, asociándolas con una lista convenida de conjunciones lógicas. Estas conjunciones son "y", "o", y "si. . . entonces"; usamos también "no", aunque hablando estrictamente no es una conjunción, ya que afecta sólo a una proposición. En lógica, estas conjunciones están provistas de un significado preciso de modo que el resultado será una proposición compuesta que podrá clasificarse en verdadera o falsa, según cuál sea la clasificación de sus componentes. Así pues, una vez dada la clasificación de nuestras proposiciones simples (atómicas), nunca perdemos la posibilidad de una clasificación definida, no importa cuán compleja sea la proposición estudiada.

NO

Comenzamos con "no", que abreviamos usando el símbolo $\neg$. "$\neg L$", por tanto, equivale a "Lincoln *no* fue el decimosexto presidente de Estados Unidos". Convenimos en que el uso de "no" o "$\neg$" actúa para invertir la clasificación de la proposición con la que se usa. Expresamos esto como "la negación de una proposición verdadera es una falsa, y la negación de una proposición falsa es verdadera". Nótese que la negación de una negación nos vuelve a traer sin cambio la clasificación primitiva. La proposición "no es cierto que Lincoln no fuera el decimosexto presidente de Estados Unidos" es igual que "$\neg\neg L$" y es un modo enredado de expresar exactamente lo mismo que L.

En español, "no" se coloca de un modo general inmediatamente antes del primer elemento verbal de la proposición; en matemáticas, es frecuente indicar la negación por el dibujo de una raya que cruza un símbolo. Partiendo de "$x = 3$" (lo que leemos "x es igual a 3") llegamos a "$x \neq 3$" (lo que se lee: "x no es igual a 3") al negar la primera.

Y

Consideramos a continuación la conjunción "y". Si ponemos "y" entre dos proposiciones simples, estamos afirmando las dos declaraciones que en ellas aparecen. Supongamos que G representa a "$x > 5$" y que E representa "x es par", con el conjunto de los números naturales como conjunto de reemplazamiento. Entonces la proposición "$x > 5$ y x es par", que representamos en breve por "$G \& E$", es cierta exactamente cuando G y E son simultáneamente ciertas, es decir, siempre que x denomine a un número que sea a la vez mayor que 5 y par. El conjunto de verdad de G es $\{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$, y el de E es $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$. El de $G \& E$ es $\{6, 8, 10, \ldots\}$, que consta de los números naturales pares mayores que 5. Aunque 7 está en el conjunto de verdad de G $(7 > 5)$, no está en el conjunto de verdad de $G \& E$ porque 7 no es par. Aunque 4 está en el conjunto de verdad de E (x es par), no está en el conjunto de verdad de $G \& E$ porque no es mayor que 5.

Para las proposiciones que contienen variables es útil con frecuencia un diagrama análogo al de Venn o Euler. (Véase el cuaderno 1: *Conjuntos.*) El lector recordará que un diagrama de Venn es un diagrama tal como el que aparece en la figura 1, en el que un conjunto de reemplazamiento, o

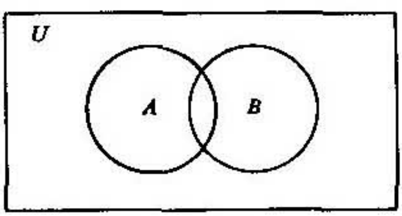
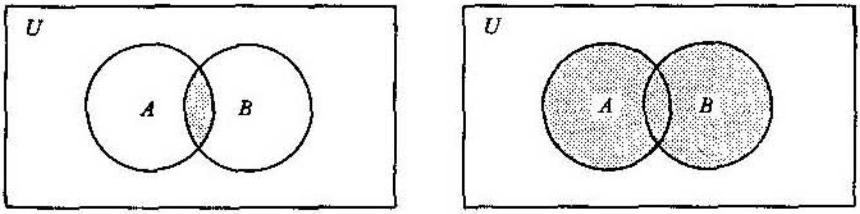


Diagrama de Venn

FIGURA 1

universal, U está representado por el interior de un rectángulo y donde uno o más subconjuntos están representados por los interiores de otras curvas cerradas simples, tales como los círculos que en la figura aparecen. Sombreando regiones apropiadas podemos representar la unión o intersección de subconjuntos, como se sugiere en la figura 2, en donde el diagrama de la izquierda representa el conjunto cuyos elementos son aquellos que están tanto en A como en B, mientras que el diagrama de la derecha representa el conjunto cuyos elementos son aquellos que están en A o en B o en ambos.

La clase de diagrama que deseamos usar es un poco diferente en apariencia, pero muy análoga en interpretación. Convengamos primero en re-



$A \cap B$ sombreado $\qquad$ $A \cup B$ sombreado

FIGURA 2

presentar el conjunto de reemplazamiento para una variable en una proposición simple por el interior de un rectángulo (fig. 3).

Conjunto de reemplazamiento
para
una proposición simple P

FIGURA 3

Como el conjunto de reemplazamiento para la proposición "$x > 5$" supusimos era el conjunto de todos los números naturales, $\{1, 2, 3, \ldots\}$, se considera que el interior del rectángulo para esta proposición contiene a

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Conjunto de reemplazamiento para x en "$x > 5$".

FIGURA 4

todos los elementos de este conjunto (fig. 4). A continuación, dibujando un segmento vertical a través del interior del rectángulo, podemos imaginar el conjunto de reemplazamiento separado en dos subconjuntos, uno de los cuales es el conjunto de verdad para $x > 5$, mientras que el otro es el subconjunto de los números naturales que no están en este conjunto de verdad. Convengamos en usar, en este caso, la región a la derecha para el conjunto de verdad, como se sugiere en la figura 5.

Proposición falsa	Proposición verdadera
1, 2, 3, 4, 5	6, 7, 8 9, 10, 11, . .

Conjunto de reemplazamiento para x en "$x > 5$".

FIGURA 5

También podríamos haber cruzado un segmento divisorio horizontalmente en el interior de un rectángulo diferente para dividir el conjunto de reemplazamiento en dos conjuntos, uno de los cuales es el conjunto de verdad para otra proposición. Para ilustrar esto, usemos la proposición "x es par" y convengamos en usar la región superior para el conjunto de verdad, según mostramos en la figura 6.

2, 4, 6, 8, . . .	Proposición verdadera
1, 3, 5, 7, . . .	Proposición falsa

Conjunto de reemplazamiento para x en "x es par"

FIGURA 6

Como los interiores de los dos rectángulos en las figuras 5 y 6 representan el mismo conjunto, $\{1, 2, 3, \ldots\}$, superpongamos uno sobre el otro para obtener el rectángulo que mostramos en la figura 7.

	"$x > 5$" falso	"$x > 5$" verdadero
"x es par" verdadero	2, 4	6, 8, 10, ...
"x es par" falso	1, 3, 5	7, 9, 11, ...

Conjunto de reemplazamiento para x en "$x > 5$ y x es par".

FIGURA 7

Podemos ahora describir los contenidos de las cuatro regiones en que este rectángulo ha quedado dividido en la forma que aparece en la figura 8. Podemos generalizar la idea de los diagramas rectangulares desarrollados usando "$x > 5$" y "x es par", y aplicarla a cualesquier dos proposiciones simples. Para hacer esto tendremos que representar las proposiciones de

"$x > 5$" es falso. "x es par" es verdadero.	"$x > 5$" es verdadero. "x es par" es verdadero.
"$x > 5$" es falso. "x es par" es falso.	"$x > 5$" es verdadero. "x es par" es falso.

FIGURA 8

alguna manera, así que convengamos en llamar a una de ellas P y a la otra Q. Entonces, la negación de P estará representada por $\neg P$ (léase "no P"), y la negación de Q por $\neg Q$ (léase "no Q"). Nótese que P y $\neg P$ nunca son ciertas para un mismo reemplazamiento de la variable. Así, "$x > 5$" y "$x \not> 5$" nunca son simultáneamente ciertas. En realidad, la verdad de una implica la falsedad de la otra. Cuando x es igual a 2, por ejemplo, $2 > 5$ es falsa, pero $2 \not> 5$ es verdadera; mientras que si x es igual a 7, $7 > 5$ es verdadera pero $7 \not> 5$ es falsa.

Usando los símbolos P, $\neg P$, Q y $\neg Q$, podemos representar los conjuntos de verdad de cada una de estas proposiciones por los rectángulos que se muestran en la figura 9.

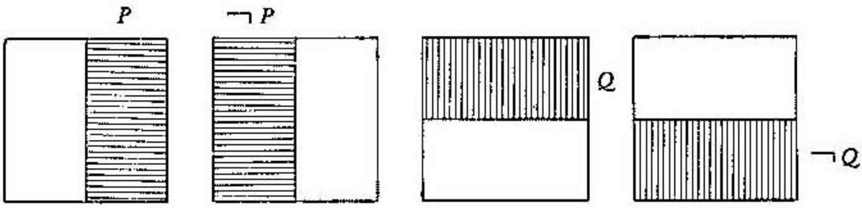
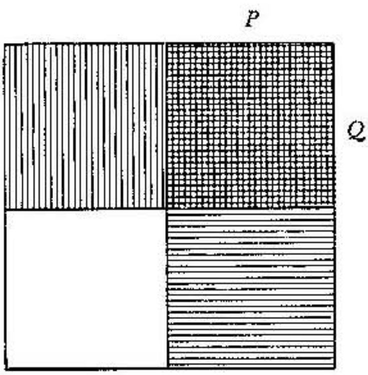


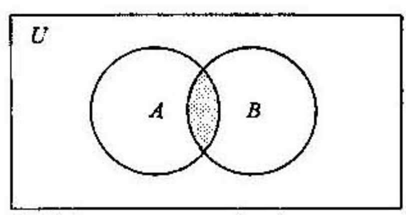
FIGURA 9

Entonces, cuando superponemos uno de estos rectángulos sobre el otro, los conjuntos de verdad de las proposiciones compuestas aparecen como regiones doblemente sombreadas. En la figura 10, el rectángulo para P, superpuesto sobre el rectángulo para Q, muestra el conjunto de verdad para la proposición compuesta $P \& Q$. El conjunto de verdad para $P \& Q$ es la *intersección* de los conjuntos de verdad para P y Q. Compárese esto con las áreas que se traslapan en un diagrama de Venn para la intersección de conjuntos A y B (fig. 11).



Proposición compuesta $P \& Q$ doblemente sombreada.

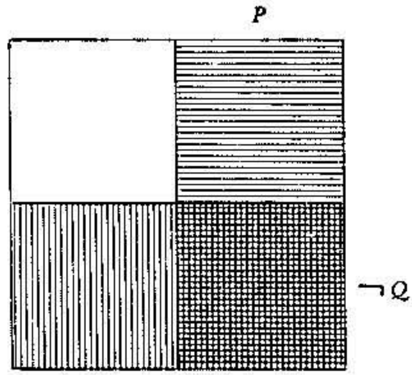
FIGURA 10



Proposición $A \cap B$

FIGURA 11

Un diagrama para el conjunto de verdad de una proposición compuesta de la forma $P \& \neg Q$ se muestra en la forma que aparece en la figura 12. Como un ejemplo específico de esta clase de proposición compuesta, consideremos de nuevo las proposiciones simples "$x > 5$" y "x es par", con el



Proposición compuesta P & $\neg Q$ doblemente sombreada

FIGURA 12

conjunto de los números naturales como conjunto de reemplazamiento. Hagamos que P desempeñe el papel de "$x > 5$"; si Q desempeña el papel de "x es par", entonces $\neg Q$ es la proposición "x *no* es par". Los diagramas para los conjuntos de verdad de P y $\neg Q$, tendrían el aspecto, antes de superponerlos uno sobre otro, que aparece en la figura 13.

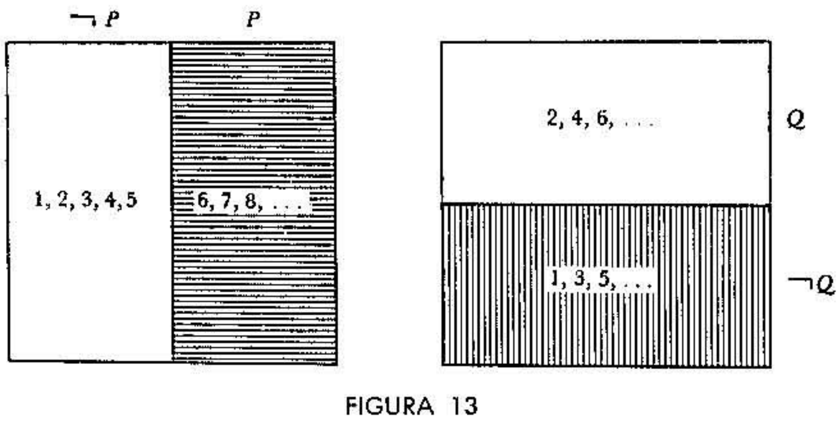
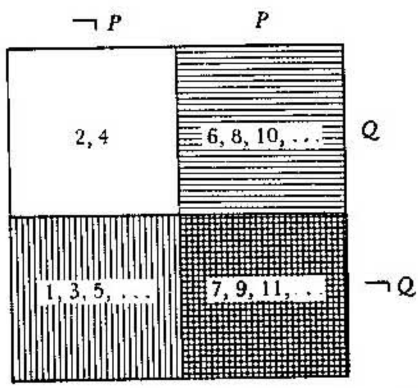


FIGURA 13

Si superponemos un rectángulo sobre el otro, producimos la figura 14. La región inferior derecha, que está doblemente sombreada, es el conjunto de verdad de P & $\neg Q$.



Proposición compuesta P & $\neg Q$ doblemente sombreada

FIGURA 14

En español hay muchas formas en que la conjunción que representamos abreviadamente por "&" puede parafrasearse. A veces escribimos "tanto P como Q". Incluso en ocasiones decimos "P pero Q" con el mismo significado lógico que "P y Q" aunque distinto estado de ánimo. Por ejemplo, si P representa a "está lloviendo" y Q "me marcho", la verdad es que expresamos un sentido de reluctancia o fastidio al decir "está lloviendo, pero me marcho". Este sentido no es aparente en "está lloviendo y me marcho", aunque, desde un punto de vista lógico, ambas expresan lo mismo.

Si las dos proposiciones simples que se combinan tienen el mismo sujeto, puede usarse una construcción relativa o incluso adjetival. Por ejemplo, podemos combinar "x es un número impar" y "x es un múltiplo de 5" en cualesquiera de las siguientes formas: "x es un número impar que es un múltiplo de 5", o "x es un múltiplo impar de 5".

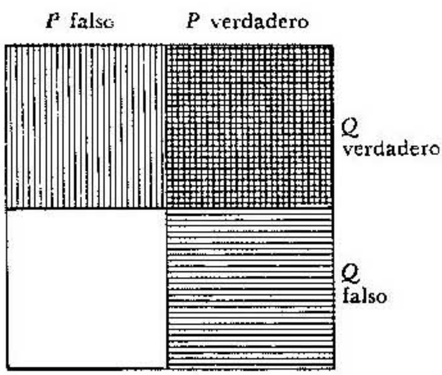
Nótese que $P \& Q$ y $Q \& P$ tienen la misma clasificación de verdad o falsedad. En el lenguaje común puede que exista un ligero cambio de sentido debido al mayor o menor énfasis. "Me voy, pero está lloviendo" y "está lloviendo, pero me voy" tienen una nota característica distinta; pero no hay ninguna diferencia en su verdad o falsedad.

Cuando dos expresiones lógicas coinciden siempre en su clasificación, independientemente de casos especiales de sustitución, las llamamos "lógicamente equivalentes". Así $P \& Q$ y $Q \& P$ son lógicamente equivalentes, como lo son también P y $\neg\neg P$.

o

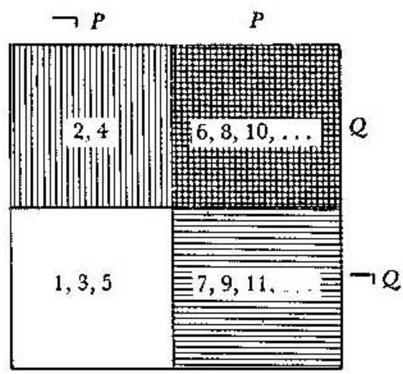
La conjunción "o" tiene en español dos significados. A uno de ellos se le llama el "o exclusivo" (o disyuntivo, propiamente dicho) y algunas veces se enuncia diciendo "o uno o el otro, pero no ambos". Al otro significado se le llama el "o inclusivo", (o distributivo propiamente hablando) y en los documentos legales se expresa a veces por "y/o". En matemáticas y en lógica *siempre* se usa el "o inclusivo". Los romanos tenían dos palabras diferentes para estos dos distintos significados: *aut* era el "o exclusivo" y *vel* era el "o inclusivo". En matemáticas, nuestra abreviatura para "o" es $\vee$, lo que nos recuerda al vel. Así, "$P \vee Q$" significa "P y/o Q", pero por conveniencia se lee "P o Q".

El conjunto de verdad de $P \vee Q$ es la *unión* de los conjuntos de verdad de P y Q. Es decir, clasificamos a $P \vee Q$ como verdadero siempre que P sea verdadero, o que Q sea verdadero, o que ambos sean verdaderos. Un diagrama rectangular para el conjunto de verdad de $P \vee Q$ se muestra en la figura 15. Toda la región sombreada, que comprende las tres cuartas



Proposición compuesta $P \vee Q$, sombreada o doblemente sombreada.

FIGURA 15



Proposición compuesta "$x > 5$ o x es par", sombreada o doblemente sombreada.

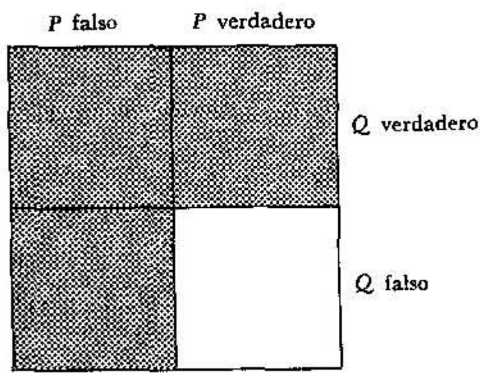
FIGURA 16

partes del rectángulo grande, representa el conjunto de verdad. El lector debe comparar esta área sombreada con el área sombreada en el diagrama de Venn para la unión de los conjuntos A y B, $A \cup B$, en la figura 2. Pensemos de nuevo, como ejemplo específico, en las proposiciones simples "$x > 5$" y "x es par", con el conjunto de los números naturales como conjunto de reemplazamiento para x en ambas. El diagrama resultante, mostrando los elementos del conjunto de reemplazamiento, aparecería como se muestra en la figura 16. Como "$x > 5$ o x es par" es cierto *o* cuando $x > 5$ *o* cuando x es par, *o cuando ambas cosas ocurren*, los únicos números del conjunto de reemplazamiento que no están también en el conjunto de verdad son 1, 3 y 5.

Exactamente lo mismo que "$P \& Q$" y "$Q \& P$" son lógicamente equivalentes, también lo son "$P \vee Q$" y "$Q \vee P$". Cuando una de estas proposiciones es cierta, también lo es la otra; y cuando una de las proposiciones es falsa, también la otra lo es.

SI . . . ENTONCES

La conjunción básica que nos queda usa las dos palabras "si" y "entonces" en su forma habitual, aunque hay muchos modos de expresar la misma idea. La conjunción se usa con proposiciones simples P y Q para obtener proposiciones compuestas de la forma "si P, entonces Q". Como las consecuencias lógicas directas de esta conjunción son más fáciles de explicar que los problemas verbales asociados con él, comenzaremos con lo primero.



Proposición compuesta $P \rightarrow Q$, sombreada.

FIGURA 17

La conjunción se simboliza por medio de una flecha de una sola punta, $\rightarrow$. Así, $P \rightarrow Q$ se lee "si P, entonces Q", o, "P implica Q". El valor de verdad asignado a $P \rightarrow Q$ es en cierta forma curioso. El rectángulo de la figura 17 nos muestra este conjunto de verdad. El dibujo muestra que $P \rightarrow Q$ es cierto, excepto cuando P es cierto y Q falso. Por ejemplo, sea P la proposición simple "hace calor", y sea Q la proposición simple "me marcho". La proposición compuesta $P \rightarrow Q$ sería entonces: "si hace calor, entonces me marcho".

En una proposición en español, la palabra "entonces" se omite a menudo como superflua, la anterior proposición normalmente se enunciaría diciendo "si hace calor, me marcho".

¿Cuándo sería falsa esta afirmación? Solamente si el tiempo fuera caluroso y el que habló no se marchase. ¿Pero entonces qué hay cuando hace frío? El que habló tendría que tomar de nuevo una decisión. Podría hacer lo que quisiera. ¿Significa esto que originalmente mintió cuando dijo "si hace calor me marcho"? De ningún modo. Su condición no se verificó, luego su afirmación no le obliga a acción alguna, ni positiva ni negativa. Esto hace menos curioso el hecho de que $P \rightarrow Q$ se dice que es cierta incluso cuando P sea falsa.

Para ilustrar la variedad casi oscurecedora de designaciones de esta conjunción que se usan particularmente en matemáticas, sustituiremos por proposiciones numéricas a P y a Q. Usemos para P, al que se llama *antecedente de la implicación,* la proposición "$x > 5$"; para Q, al que se llama *consecuente,* usemos "$x > 4$". Podemos de nuevo considerar como conjunto de reemplazamiento al conjunto de los números naturales. Nuestro diagrama rectangular estándar toma entonces el aspecto que mostramos en la figura 18. El conjunto de verdad para $P \rightarrow Q$ es todo el conjunto de los números naturales, porque el cuadro inferior derecho del rectángulo total, está vacío. No hay ningún número natural para el que "$x > 5$" sea cierto y "$x > 4$" sea falso.

"$x > 5$" falso	"$x > 5$" verdadero	
5	6, 7, 8, ...	"$x > 4$" verdadero
1, 2, 3, 4		"$x > 4$" falso

Proposición compuesta $(x > 5) \rightarrow (x > 4)$.

FIGURA 18

He aquí un número de formas en que la idea de $P \rightarrow Q$, o "$x > 5$" $\rightarrow$ "$x > 4$" puede expresarse:

1. Si $x > 5$, entonces $x > 4$.
2. $x > 5$ implica $x > 4$.
3. $x > 4$ siempre que $x > 5$.

4. $x > 5$ es una condición suficiente para que $x > 4$
5. $x > 4$ es una condición necesaria para que $x > 5$.
6. Dado que $x > 5$, entonces se sigue que $x > 4$.
7. $x > 4$ si $x > 5$.
8. $x > 5$ solamente si $x > 4$.
9. $x > 4$ con tal de que $x > 5$.

¿Cuántas de estas expresiones tienen sentido cuando los ejemplos en español se usan, es decir, cuando P es "hace calor" y Q es "me marcho"? La verdad es que nunca se dice "hace calor solamente si me marcho". Ensáyese con las otras expresiones. Siempre que aparezca "$x > 5$" pongamos "hace calor". En donde veamos "$x > 4$", pongamos "me marcho". Algunas nos resultarán en buen castellano, pero otras serán muy extrañas.

Composición de compuestas

Una vez que tenemos las piezas elementales de las proposiciones simples y el material de las conjunciones, no hay ningún límite teórico para el tamaño del edificio que podamos construir.

Una proposición composición de compuestas muy útil es la $(P \rightarrow Q)$ & $(Q \rightarrow P)$. Esta proposición es tan común que tiene su propia abreviatura, sugerida por las dos flechas de la fórmula. Esta abreviatura es la flecha de punta doble: $P \leftrightarrow Q$ (lo que se lee: "P si y sólo si Q").

Consideremos la clasificación de esta proposición en términos de P y Q. La proposición $P \rightarrow Q$ es cierta salvo cuando P es cierta y Q es fa'sa; $Q \rightarrow P$ es cierta a menos que Q sea cierta y P falsa. (Véase la figura 19.) Las partes inferior izquierda y superior derecha están sombreadas en ambos

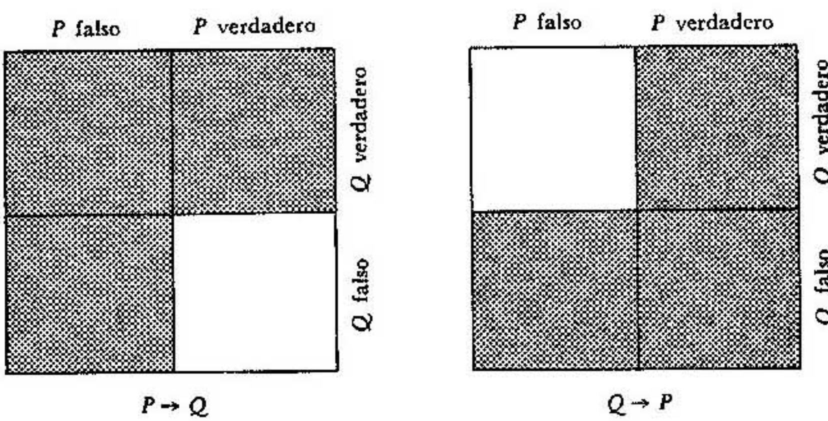
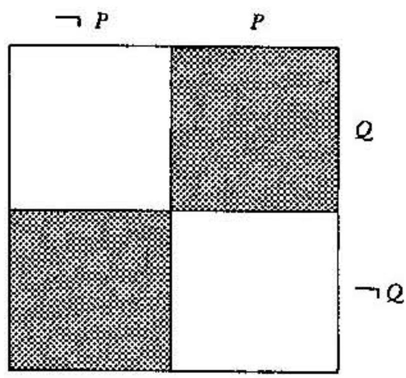


FIGURA 19

diagramas. El diagrama para $(P \rightarrow Q)$ & $(Q \rightarrow P)$ se muestra en la figura 20.

La proposición compuesta resulta cierta precisamente cuando las proposiciones simples P y Q son, ambas ciertas o ambas falsas. En matemáticas, esta proposición compuesta recibe varios nombres especiales construidos uniendo algunas de las palabras usadas para $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$. Uno de estos, ya antes mencionado, es "P si y sólo si Q". Otro, "P es una condición necesaria y suficiente para Q".

Desde luego, $P \leftrightarrow Q$ es lógicamente equivalente a $Q \leftrightarrow P$, de manera que podemos intercambiar las dos expresiones.



Proposición compuesta $P \leftrightarrow Q$, sombreada.

FIGURA 20

Para dar algunos ejemplos matemáticos del uso de esta conjunción, recordemos primero algunas definiciones:

> Un *triángulo equilátero* es un triángulo en el que los tres lados son de igual longitud.
> Un *triángulo equiángulo* es un triángulo en el que los tres ángulos son de igual medida.
> Un *número natural cuadrado* es un número natural que es igual al producto de algún número natural por sí mismo: $25 = 5 \times 5$; es decir, 25 es el cuadrado de 5.

He aquí dos proposiciones que podemos discutir usando las definiciones precedentes

Un triángulo es equiángulo si y sólo si es equilátero.
Una condición necesaria y suficiente para que un número sea par es que su cuadrado sea un múltiplo de 4.

La frase "si y sólo si" no se usa a menudo fuera de las matemáticas. Pocas personas dirán en alguna ocasión "voy si y sólo si hace calor", mientras que es posible que alguno pueda decir algo como "voy si hace calor, pero sólo si hace calor".

Otro compuesto que presta buenos servicios se usa cuando tenemos más de una hipótesis y, por tanto, un antecedente compuesto en una implicación. Por ejemplo, a menudo es útil decir cuál es el conjunto de reemplazamiento en la proposición básica: "si a y b son números naturales y $a > 1$, entonces $(a \times b) > b$". Dividiremos la sentencia en componentes simples.

A: a es un número natural.
B: b es un número natural.
C: $a > 1$
D: $(a \times b) > b$.

Podemos, entonces, abreviar toda la proposición de esta manera $[(A \,\&\, B) \,\&\, C] \rightarrow D$. Este simbolismo podría leerse "si A, B y C son verdaderos, entonces también lo es D", o bien, "A y B, junto con C, implican D". Nótese el doble agrupamiento de los símbolos. Este doble agrupamiento aparece porque ninguna de nuestras conjunciones se aplica a más de dos proposiciones a la vez, y las llaves y paréntesis están estratégicamente situados para identificar cuáles dos se unen en cada caso. Así, los paréntesis en

$$(A \,\&\, B) \,\&\, C$$

muestran que primero formamos la proposición compuesta $A \,\&\, B$ y luego la proposición compuesta $(A \,\&\, B) \,\&\, C$ uniendo $A \,\&\, B$ con C. Luego, los paréntesis en

$$[(A \,\&\, B) \,\&\, C] \rightarrow D$$

muestran que la proposición $(A \,\&\, B) \,\&\, C$ está unida con D por un "si... entonces". Cuando observamos a

$$[(A \,\&\, B) \,\&\, C] \rightarrow D,$$

puede pensarse que a medida que escribamos proposiciones más y más complicadas, es fácil que nos encontremos con muchas dificultades con los paréntesis y las llaves. Convengamos en unas cuantas y sencillas reglas que eliminarán algunos de los problemas.

1. Una negación, $\neg$, es un símbolo débil. Su influencia cubre solamente el símbolo o expresión entre paréntesis inmediatamente a su derecha.

Es decir, $\neg A \& B$ se puede usar en vez de $(\neg A) \& B$ porque entendemos que $\neg$ va solamente con la A. Análogamente, $[\neg(A \vee B)] \rightarrow C$ puede simplificarse a la forma $\neg(A \vee B) \rightarrow C$, porque no podemos confundir esta última forma por la $\neg [(A \vee B) \rightarrow C]$.

2. **Los símbolos & y $\vee$ unen con lo próximo e igualmente.**
3. Los símbolos $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, que tienen más fuerza que & y $\vee$, son iguales en rango.

$(A \& B) \rightarrow C$ puede reemplazarse por $A \& B \rightarrow C$, porque no debemos confundir el último con $A \& (B \rightarrow C)$. Intentemos simplificar algunas expresiones que aparecerán, en forma simplificada, en los ejercicios:

$$R \& (\neg G).$$

No hay necesidad alguna de paréntesis; el símbolo $\neg$ puede solamente ir con G: $R \& \neg G$.

$$[(\neg W) \& (\neg R)] \leftrightarrow C.$$

No hay necesidad de paréntesis alrededor de $\neg W$ y $\neg R$: $(\neg W \& \neg R) \leftrightarrow C$. Pero no hay necesidad de *ningún* paréntesis; la doble flecha sigue hasta el principio: $\neg W \& \neg R \leftrightarrow C$. La forma $(\neg W \& \neg R) \leftrightarrow C$, sin embargo, puede que sea más clara. No hay por qué hacer sobreactuar a los anteriores convenios; se crearon para ayudar, no para confundir.

Grupo de ejercicios 1

Teniendo en cuenta las abreviaciones que a continuación se presentan para las proposiciones simples, escríbanse las diez proposiciones compuestas en nuestro lenguaje cotidiano. El lector *no* debe limitarse a insertar simplemente las interpretaciones estándar de las conjunciones a menos que ya sólo con eso la expresión suene común y corriente.

W: Hace calor.
R: Está lloviendo.
G: Voy.
C: Viene (él).

EJEMPLO: $R \rightarrow \neg G$. (Proposición en castellano: si está lloviendo, no voy.)

1. $R \& \neg G$.
2. $\neg C \rightarrow G$.
3. $W \rightarrow R$.
4. $W \vee R$.

5. $\neg (R \& \neg G)$.
6. $\neg (W \& R) \leftrightarrow C$.
7. $(\neg W \& \neg R) \leftrightarrow C$.
8. $(W \vee \neg R) \rightarrow G$.
9. $((W \& R) \& G) \& C$.
10. $(G \vee C) \& \neg (G \& C)$.

Sustituyendo la abreviación por medio de una letra para cada una de las proposiciones simples y el símbolo correcto para las conjunciones, escríbanse simbólicamente equivalentes de las proposiciones compuestas:

E: x es par.
F: x es un múltiplo de 4.
G: $x > 5$.
H: $x < 3$.

Ejemplo: x es un múltiplo de 4, pero no es mayor que 5. (Proposición en símbolos: $F \& \neg G$.)

11. Si x es un múltiplo de 4, no es menor que 3.
12. Si x es mayor que 5, no es menor que 3.
13. Si x es par, pero no un múltiplo de 4, entonces es o mayor que 5 o menor que 3.
14. Para que x sea un múltiplo de 4, x debe ser par.
15. x es par o x es mayor que 5.
16. Si x no es par, entonces x no es múltiplo de 4.
17. Si x no es menor que 3, entonces x es mayor que 5 o x es par.

Tradúzcase cada una de las siguientes expresiones simbólicas a frases en lenguaje común.

Ejemplo: $H \rightarrow \neg G$ (Proposición en castellano: si x es menor que 3, entonces x no es mayor que 5.)

18. $G \& E$.
19. $\neg (E \& H) \rightarrow F$.
20. $\neg H \vee F \rightarrow G$.
21. $\neg E \& H \rightarrow \neg F \vee G$.
22. $\neg (G \vee \neg E) \rightarrow H$.
23. $\neg H \& \neg F$.
24. $\neg (E \& G) \rightarrow \neg F$.
25. $F \rightarrow \neg (G \vee H)$.
26. $F \vee \neg E \rightarrow G \vee \neg H$.

Valores de verdad y tablas de verdad

Aunque los diagramas rectangulares son útiles, son muy complicados para analizar la estructura de proposiciones compuestas. Un modelo más formal, llamado tabla de verdad, es bastante apropiado para este propósito. Si convenimos en que V represente a "verdadero" y que F represente a "falso", entonces todas las posibilidades para los dos elementos de una proposición compuesta están incluidas en el conjunto {VV, VF, FV, FF}.

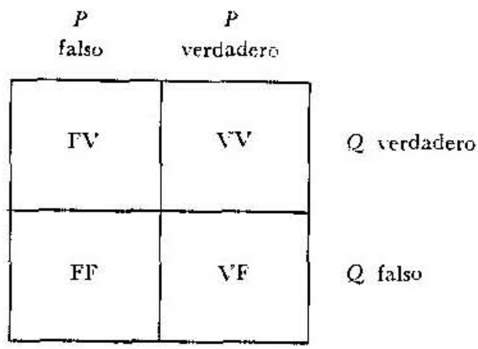


FIGURA 21

Estas cuatro posibilidades corresponden a las cuatro casillas del diagrama. En lugar de sombrear, metemos la combinación correspondiente de V y F que es el "valor de verdad" de la composición. Podríamos, así, tener el diagrama que se ve en la figura 21. Luego, para simplificar éste para las proposiciones compuestas $P \,\&\, Q$, $P \vee Q$ y $P \rightarrow Q$ nos podríamos limitar a mostrar los diagramas como en la figura 22.

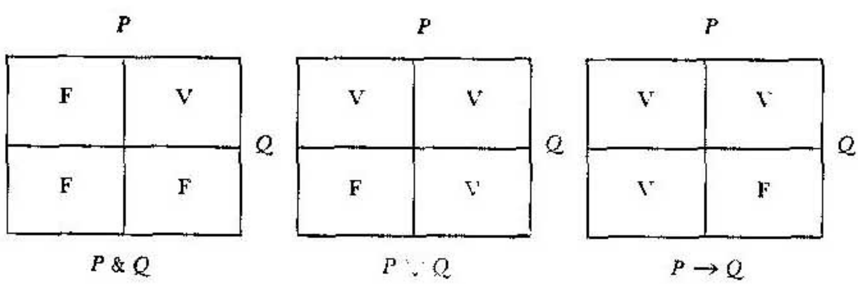


FIGURA 22

Lo acostumbrado cuando se hacen tablas de verdad, sin embargo, es prescindir de los rectángulos totalmente y limitarse a usar una disposición en columnas. Las tablas I y II son las tablas para las conjunciones básicas. Las tablas deben leerse transversalmente, línea por línea. La penúltima línea

TABLA I

P	$\neg P$
V	F
F	V

TABLA II

P	Q	$P \& Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

en la mayor de las tablas nos dice, por ejemplo, que cuando P es falso y Q es cierto, entonces $P \& Q$ es falso, pero $P \vee Q$ y $P \rightarrow Q$ son ciertos. Como un ejemplo de aplicación de esta tabla, podemos hacer que P sea la proposición simple "Juan come alimentos feculentos" y Q "Juan come demasiado." Entonces la verdad de las siguientes proposiciones compuestas puede determinarse por la tabla II, que tiene los diversos valores de verdad de P y Q.

1. Juan come alimentos feculentos y Juan come demasiado.
2. Juan come alimentos feculentos o Juan come demasiado.
3. Si Juan come alimentos feculentos, entonces Juan come demasiado.

Así pues, si Juan no come alimentos feculentos, pero es cierto que come con exceso, entonces, según la tercera línea de la tabla II con P falso y Q verdadero, vemos que la proposición 1 es falsa, la 2 cierta, y la 3 también es cierta.

Si guardamos a mano estas tablas básicas o memorizamos su contenido, podemos analizar composiciones más complicadas. Por ejemplo, ¿cuál es la clasificación de $\neg P \vee Q$ para las varias clasificaciones de P y Q? Hacemos nuestro trabajo parte por parte como en la tabla III.

TABLA III

P	Q	$\neg P$	Q	$\neg P \vee Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Primero, escribimos las columnas básicas para P y Q; luego escribimos cualesquiera partes de nuestra proposición que pueda calcularse inmediatamente partiendo de ellas, $\neg P$ en este caso; Q se ha vuelto a escribir para tenerla más a mano para el siguiente paso, que es $\neg P \lor Q$. Para acabar este paso, observamos las diversas combinaciones posibles de los dos elementos. Son, en orden, FV, FF, VV, VF. Recordemos ahora el significado de "$\lor$". Una composición con $\lor$ es cierta si al menos uno de los componentes es cierto. Luego escribimos V sobre todas las líneas de la última columna excepto en la segunda, a la que marcamos con F.

Compárese la tabla para $\neg P \lor Q$ con la tabla para $P \rightarrow Q$. Son idénticas. Es decir, $P \rightarrow Q$ y $\neg P \lor Q$ son *lógicamente equivalentes.* Esto explica por qué en ocasiones se dice, por ejemplo, "o ella no viene a la reunión, o no voy yo" en lugar de "si ella viene a la reunión, entonces yo no voy", cuando queremos decir que al menos uno de nosotros no va a ir bajo ninguna circunstancia.

Probemos con una composición un poco más difícil: $\neg(\neg P \lor \neg Q)$, por medio del método que se ilustra en las tablas IV a VII.

1. Fórmense las columnas básicas, como en la tabla IV:

TABLA IV

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

2. Calcúlense los elementos más simples de la proposición partiendo de las columnas básicas, como en la tabla V:

TABLA V

$\neg P$	$\neg Q$
F	F
F	V
V	F
V	V

3. Partiendo de estas columnas, podemos calcular $\neg P \lor \neg Q$, en la tabla VI.

TABLA VI

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

4. Finalmente, ya estamos listos para calcular la tabla para $\neg(\neg P \vee \neg Q)$, en la tabla VII. Nos basta con invertir los valores de la última columna de la tabla VI.

TABLA VII

$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$
F	V
V	F
V	F
V	F

Esta es la misma que la columna para $P \& Q$. Tendremos que profundizar un poco más para encontrar un ejemplo en castellano de esto, pero es concebible (aunque improbable) que alguien pueda decir "no es cierto que no quiera a Juan o no quiero a María", en lugar de "quiero a Juan y quiero a María".

Los últimos dos ejemplos muestran que realmente no necesitamos *cuatro* conectivos básicos. Podríamos haber comenzado con "$\neg$" y "$\vee$" y haber *definido* la proposición $P \rightarrow Q$ como $\neg P \vee Q$ y la proposición $P \& Q$ como $\neg(\neg P \vee \neg Q)$. Pero realmente nada se gana con este proceder, puesto que todos sentimos que "$\rightarrow$" e "&" son exactamente igual de básicas que "$\vee$". Lo cierto es que es posible escoger "$\neg$" y cualquiera de las conjunciones básicas y definir los restantes dos conectivos en los términos de nuestra elección. (En realidad, *todos los cuatro* conectivos básicos, $\neg$, &, $\vee$, y $\rightarrow$, pueden definirse en términos del *solo* conectivo "no ambos ... y...", y también *todos los cuatro* pueden definirse en términos del *solo* conectivo "ni... ni...".)

Ensayemos una aplicación más de las tablas de valores. Piénsese en las siguientes dos proposiciones:

1. Si nieva esta semana y me llega mi cheque, voy a esquiar este fin de semana.
2. Si nieva esta semana, entonces, si mi cheque llega, voy a esquiar este fin de semana.

¿Hay alguna diferencia en su sentido? Pasemos a comprobarlo. Definamos P, Q y R como sigue:

P: Esta semana nieva.
Q: Mi cheque llega.
R: Voy a esquiar este fin de semana.

Entonces, la proposición 1 es $(P \& Q) \rightarrow R$, y la 2, $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Ahora tenemos ocho posibles combinaciones de V y F para P, Q y R. La tabla de verdad para la proposición 1 se muestra en la tabla VIII. En la última columna, la única F está en la línea en que $P \& Q$ es cierto y R es falso.

TABLA VIII

P	Q	R	$P \& Q$	R	$(P \& Q) \rightarrow R$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V

La tabla IX es la tabla de verdad para la proposición 2. Si ahora comparamos las columnas finales de las tablas VIII y IX, las encontramos absolutamente idénticas, de donde tenemos que concluir que las dos proposiciones son lógicamente equivalentes.

TABLA IX

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	P	$(Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

Grupo de ejercicios 2

Hágase una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones.

1. $P \& (Q \vee R)$.
2. $P \vee (Q \& R)$.
3. $P \vee (Q \vee R)$.
4. $(P \vee Q) \vee R$.
5. $(P \& Q) \& R$.
6. $P \& (Q \& R)$.
7. $(P \& Q) \vee (P \& R)$.
8. $(P \vee Q) \& (P \vee R)$.
9. ¿Cuáles de entre las proposiciones 1 a la 8 son lógicamente equivalentes?

Equivalentes lógicos; tautologías

Los símbolos lógicos & y $\vee$ están estrechamente relacionados a los símbolos de conjunción $\cap$ y $\cup$, respectivamente. (Véase el cuaderno 1: *Conjuntos.*) Si P y Q son proposiciones abiertas en la variable x, con conjuntos de verdad p y q, respectivamente, entonces vemos que

el conjunto de verdad de $P \& Q$ es $p \cap q$,

y

el conjunto de verdad de $P \vee Q$ es $p \cup q$.

No debe sorprendernos, por tanto, que el álgebra de & y $\vee$ sea paralela al álgebra de $\cap$ y $\cup$, con la que es posible que el lector esté más familiarizado. En realidad, pueden verificarse mediante las tablas de verdad (y se ha hecho ya, si el lector resolvió los ejercicios 1 a 9 del grupo de ejercicios 2) los siguientes hechos acerca de proposiciones lógicamente equivalentes. Usamos el símbolo $\equiv$ para expresar "es lógicamente equivalente a". (Las proposiciones correspondientes de la teoría de conjuntos resultarán al reemplazar tres proposiciones, por ejemplo, P, Q y R, por sus respectivos conjuntos de verdad, p, q y r. Desde luego, & y $\vee$ serán de nuevo reemplazados por $\cap$ y $\cup$, respectivamente, y $\equiv$ deberá interpretarse como denotando igualdad entre conjuntos. En lo que a conjuntos se refiere, los resultados pueden entenderse mejor si dibujamos diagramas de Venn.)

$$\left.\begin{aligned} P \& Q &\equiv Q \& P \\ P \vee Q &\equiv Q \vee P \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{propiedades conmutativas}\\ \text{de \& y } \vee\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} P \& (Q \& R) &\equiv (P \& Q) \& R \\ P \vee (Q \vee R) &\equiv (P \vee Q) \vee R \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{propiedades asociativas}\\ \text{de \& y } \vee\end{array}$$

Recordando estas últimas equivalencias, podemos prescindir de más paréntesis y escribir simplemente $P \& Q \& R$, $P \vee Q \vee R$.

Nótese que en esta álgebra hay dos propiedades distributivas:

$$\left.\begin{array}{r} P \vee (Q \,\&\, R) \equiv (P \vee Q) \,\&\, (P \vee R) \\ P \,\&\, (Q \vee R) \equiv (P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{propiedades distributivas} \\ \text{de } \vee \text{ e } \&\end{array}$$

Dos equivalencias útiles más se comprobaron ya en la sección precedente:

$$(P \,\&\, Q) \rightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \rightarrow R);$$
$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$$

Para las igualdades correspondientes en la teoría de conjuntos, debemos reemplazar "$\rightarrow$" por el símbolo de inclusión de conjuntos "$\subseteq$", y "$\neg$" por el símbolo de complemento "-".

Un tipo de proposición que es más útil que lo que a primera vista parece es la "tautología". Una tautología es una proposición que es cierta para todos los posibles valores de verdad que se asignen.

He aquí dos con un solo componente básico: $P \rightarrow P$ y $P \vee \neg P$. Estas dos no dejan de sernos familiares en el lenguaje común y corriente, ya que frecuentemente se oyen "perlas" tautológicas tales como "si esa es la forma de hacerlo, esa es la forma de hacerlo" y "o es verdad o no es verdad".

La tautología $P \vee \neg P$, tiene un nombre especial. Se llama "ley del medio excluso", porque nos dice que una proposición simple debe siempre o ser verdadera o ser falsa. No hay términos medios en lógica.

Una forma de construir una tautología consiste en tomar dos enunciados equivalentes y conectarlos con una flecha doble o sencilla, como por ejemplo, en $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

He aquí otras dos tautologías útiles:

$$Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$$
$$\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q).$$

Pueden comprobarse por los valores de verdad en las tablas X y XI. Como puede ver el lector, la columna final en cada una de las tablas sólo

TABLA X

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

TABLA XI

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg P \to (P \to Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

contiene letras V. Significa esto que las proposiciones compuestas $Q \to (P \to Q)$ y $\neg P \to (P \to Q)$ son ciertas, independientemente de cuáles sean los valores de verdad de las proposiciones simples P y Q.

Las tautologías ocupan un lugar bien definido en el razonamiento lógico. Pueden insertarse en cualquier punto de un argumento, con cualesquiera proposiciones lógicamente admisibles en lugar de los símbolos. Siempre que en el curso de una discusión alguien dice, "bien, o esto es así, o no lo es, no puedes suponer las dos cosas a un tiempo", ese alguien está realmente usando *dos* tautologías: $P \vee \neg P$ y $\neg(P \& \neg P)$.

Grupo de ejercicios 3

Muéstrese que cada proposición es una tautología.

1. $P \to (\neg P \to Q)$.
2. $(P \& Q) \to P$.
3. $\neg P \to \neg (P \& Q)$.
4. $(P \& Q) \to (P \vee Q)$.

REGLAS DE INFERENCIA

Ya estamos preparados para que comience a trabajar nuestra argumentación simbólica, comprobando métodos de deducción tanto en las matemáticas como en otros campos.

La situación típica es ésta: se nos dan algunas proposiciones, simples o compuestas. Estas las aceptamos. Debe suponerse que son ciertas. Queremos llegar partiendo de ellas, nuestras premisas, a una conclusión mediante un argumento lógico. Para hacer esto, podemos usar nuestras premisas y tautologías, junto con las reglas de inferencia que estudiaremos ahora.

Por simplicidad vamos a limitar nuestra atención a la deducción estrictamente *lógica*. Por ejemplo, no será permisible en nuestro trabajo inferir de la premisa $x = 5$ la conclusión de que $x + 1 = 6$. Esta conclusión es de naturaleza *aritmética* y exige su propio y extenso desarrollo lógico. Si necesitamos tales resultados, tendremos que presentarlos como premisas extra.

Modus ponens

También se emplea para denominar a este argumento la expresión más larga *modus ponendo ponens*, lo que en latín quiere decir "el método de obtención (la consecuencia) mediante la aserción (del antecedente)". He aquí un ejemplo: "si está lloviendo, entonces estoy en casa. Está lloviendo. Luego estoy en casa". Hay dos premisas: una es una implicación; la otra es el antecedente de la implicación. El resultado, o conclusión, es el consecuente de la implicación. El argumento se abrevia como sigue:

Implicación: $P \rightarrow Q$
Antecedente: P
Conclusión: $\overline{Q}$

Nótese que el argumento del *modus ponens* está asociado a una tautología, a saber, una que tiene la forma lógica $[(P \rightarrow Q) \,\&\, P] \rightarrow Q$, y que, por tanto, no depende de la verdad o falsedad de P, Q o $P \rightarrow Q$ para que sea válido.

Naturalmente, si hay algo equivocado en las premisas, podemos llegar a una conclusión falsa; pero esto no invalida el argumento en sí, que mecánicamente nos presenta el consecuente cuando lo alimentamos con la implicación y su antecedente.

En un argumento del tipo *modus ponens* simple, la conclusión es evidente de inmediato cuando se dan las premisas. Ensayemos otros dos:

a) Si $x > 5$, entonces $x^2 > 25$.
Dado que $x > 5$
Conclusión: $x^2 > 25$

b) Es difícil nadar cuando hay mucho oleaje.
Dado que hay mucho oleaje.
Conclusión: Es difícil nadar.

Hay que estar seguro de que una de las premisas es el antecedente. Sustituir el consecuente y derivar el antecedente es una manera equivocada de razonamiento. No puede decirse, por ejemplo, "es difícil nadar cuando hay mucho oleaje. Es difícil nadar. Luego, hay mucho oleaje". La verdad de la situación posiblemente se deba a que el mar está en calma, pero hay muchos tiburones.

En la práctica el argumento *modus ponens* se usa en argumentos más complicados, en una o más etapas. Antes de proseguir, establezcamos algunas de las reglas de la argumentación.

1. Cualquier premisa puede usarse en cualquier etapa de la argumentación. Al presentar esquemas de formas de argumentación, indicaremos el uso de una premisa por "Pr".
2. Cualquier tautología puede usarse en cualquier lugar en un argumento. Indicaremos el uso de una tautología por "T".
3. Un equivalente lógico de cualquier enunciado puede sustituirse por el enunciado en una derivación. Si estamos sustituyendo un equivalente lógico de un enunciado señalado por 5 en nuestra derivación, escribimos "L 5".
4. Cuando se usa el *modus ponens*, por ejemplo, sobre los enunciados, 2 y 3 (que desde luego deben estar en forma correcta), escribiremos "MP 2, 3".

La tabla XII enumera estos símbolos, junto con sus significados. No hay por qué intentar memorizar todo esto, porque si el significado de uno de estos símbolos no es claro, siempre podremos acudir a esta tabla. Para ver por qué se usan estos símbolos, consideremos un simple argumento tanto con símbolos como sin ellos. Consideremos la afirmación: "si llueve estaré en casa. Si estoy en casa, me perderé el concierto. Está lloviendo. Por tanto, me perderé el concierto".

TABLA XII

Símbolo	Significado
Pr	Esta proposición es cierta porque suponemos que es cierta.
T	Esta proposición es cierta porque es una tautología, y las tautologías siempre son ciertas.
L 3	Esta proposición es cierta porque es lógicamente equivalente a la proposición 3.
MP 6, 8	Esta proposición es cierta porque estamos aplicando *modus ponens* a las proposiciones 6 y 8

Lo que ahora queremos hacer es establecer que si todas las cosas acerca de llover y permanecer en casa son ciertas, entonces ha de ser verdadero que perderé el concierto. Comenzaremos enumerando aquellas cosas que suponemos son ciertas. Primero, hagamos un convenio acerca de denominaciones de los distintos enunciados.

R representa a "está lloviendo" o "llueve".
H representa a "estaré en casa".
C representa a "me perderé el concierto".

Lleguemos, a continuación, hasta el asunto de perder el concierto. Haremos esto a través de una serie de pasos enumerando algunas proposiciones ciertas y las razones por las que son ciertas.

1. $R \rightarrow H$.	Este enunciado es cierto porque suponemos que es cierto.
2. $H \rightarrow C$.	Este enunciado es cierto porque suponemos que es cierto.
3. R.	Este enunciado es cierto porque suponemos que es cierto.
4. H.	Este enunciado es cierto porque estamos aplicando el *modus ponens* a los enunciados 1 y 3.
5. C.	Este enunciado es cierto porque estamos aplicando el *modus ponens* a los enunciados 2 y 4.

He aquí ahora la misma argumentación usando los símbolos de la tabla XII.

1. $R \rightarrow H$.	Pr
2. $H \rightarrow C$.	Pr
3. R.	Pr
4. H.	MP 1, 3
5. C.	MP 2, 4

En ambas formas los pasos hacen posible desarrollar una derivación lógica formal de la verdad de C, dada la veracidad de $R \rightarrow H, H \rightarrow C$ y R.

He aquí otro ejemplo, éste relativo a los números naturales.

"Si $x > 3$ y $x < 5$, entonces $x = 4$. Dado que $x > 3$ es cierto y que $x < 5$ es cierto, entonces $x = 4$ debe ser cierto."

En este caso, estamos suponiendo que es cierto que *si* x es un número natural mayor que 3 y menor que 5, entonces x debe ser 4. Estamos también suponiendo que x *es* mayor que 3 y menor que 5. Queremos llegar a la conclusión que x es 4. Empleemos estos símbolos:

A: $x > 3$.
B: $x < 5$.
C: $x = 4$.

Aquí está la argumentación.

1. $(A \& B) \rightarrow C$.	Pr
2. A.	Pr

3. B. Pr
4. $A \to (B \to C)$. L 1 (Véase esto en la tabla.)
5. $B \to C$. MP 4, 2
6. C. MP 5, 3

El lector debe examinar algunas veces este ejemplo hasta estar seguro de que sigue perfectamente toda la argumentación. En el paso 4, sustituimos la proposición compuesta $A \to (B \to C)$ por la proposición compuesta $(A \& B) \to C$, y justificamos la sustitución en base a que estas dos proposiciones son lógicamente equivalentes. Si no son lógicamente equivalentes, el argumento queda ahí mismo completamente deshecho, desde luego; pero si el lector vuelve a leer la página 40, encontrará que usamos las tablas de verdad para establecer esta equivalencia lógica. Aunque ninguno de los ejemplos de esta sección ha hecho uso de la regla 2 sobre tautologías, veremos cómo usamos tal regla un poco más adelante. Se incluyó aquí para dar una presentación completa.

Grupo de ejercicios 4

Dígase si cada una de las conclusiones es o no válida empleando el *modus ponens*.

1. Si nieva, entonces iré a esquiar. Nieva. Luego iré a esquiar.
2. Si nieva, entonces iré a esquiar. No nieva. Luego no iré a esquiar.
3. Si me caigo de una escalera, me heriré. Estoy herido. Luego me caí de una escalera.
4. Si voy de tiendas, compraré un sombrero. Compraré un vestido azul si compro un sombrero. Voy de tiendas. Luego compro un vestido azul.
5. Manifiéstese la argumentación que pruebe que la conclusión en el ejercicio 1 es válida.
6. Proporciónese la argumentación que pruebe que la conclusión del ejercicio 4 es válida.

Modus tollens

El nombre más largo para esta regla es el de *modus tollendo tollens*, el método de negar (el antecedente) mediante la negación (del consecuente).

Imaginémonos la siguiente situación: un muchacho está viendo televisión. Oye que su padre dice, "si llueve, me quedaré en casa". Poco después, cuando su programa termina, mira en una y otra habitación y descubre que su padre se ha ido. Sin mirar al exterior, se dice a sí mismo, "luego, después de todo, no llovió".

Podríamos describir la situación mediante el uso de símbolos en la forma que sigue:

R: Llueve.
H: Permaneceré en casa.

Implicación: $R \rightarrow H$
Observación: $\neg H$
Conclusión: $\neg R$

El esquema formalizado presenta, pues, dos premisas. Una es una implicación. La otra es la negación del consecuente de la implicación. La conclusión es la negación del antecedente. El argumento se abrevia como sigue:

$$\begin{array}{rr} & P \rightarrow Q \\ & \neg Q \\ \hline \text{por tanto:} & \neg P \end{array}$$

Esta argumentación está íntimamente relacionada con el *modus ponens*. Consideremos la tabla de verdad para $\neg Q \rightarrow \neg P$. (Véase la tabla XIII.)

TABLA XIII

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Pero esta es exactamente la tabla para $P \rightarrow Q$ (pág. 31). Por tanto, $P \rightarrow Q$ y $\neg Q \rightarrow \neg P$ son lógicamente equivalentes, y podría procederse a una derivación formal como sigue:

1. $P \rightarrow Q$.	Pr
2. $\neg Q$.	Pr
3. $\neg Q \rightarrow \neg P$.	L 1
4. $\neg P$.	MP 3, 2

Acerca de esta nueva forma, podemos decir que el *modus tollens* nos ahorra dos pasos al precio de tener que recordar otra regla de inferencia. Nosotros adoptaremos aquí el *modus tollens* como un tipo de argumento y lo representaremos en las derivaciones formales por "MT".

Ensayemos una ligera variación del *modus tollens.* Un profesor dice: "si no termina su proyecto, le daré una calificación baja". El estudiante obtiene una buena calificación. De donde concluimos que terminó su proyecto. Usando símbolos, el razonamiento es el que sigue:

P: El estudiante termina su proyecto.
G: El profesor le da una calificación baja.

1. $\neg P \rightarrow G$.	Pr
2. $\neg G$.	Pr
3. $\neg\neg P$.	MT 1, 2
4. P.	L 3

La anterior derivación nos muestra el resultado de tener un antecedente que era ya una negación. La primera conclusión es una negación doble. La reemplazamos, como lógicamente equivalente, por el enunciado directo.

Grupo de ejercicios 5

Dígase, por medio del uso del *modus tollens,* si cada una de las conclusiones es o no correcta.

1. Si voy a Nueva York, viajaré en avión.

   Estoy viajando en avión.
   Por tanto, no estoy yendo a Nueva York.

2. Si no me corto el pelo, entonces me quedaré en casa.

   Voy a la iglesia.
   Por tanto, me corté el pelo.

3. Si estoy enfermo, entonces no voy a trabajar.

   No estoy enfermo.
   Luego estoy en el trabajo.

4. Si no estoy enfermo, entonces no tomaré mi medicina.

   Tomo mi medicina.
   Luego estoy enfermo.

5. Pruébese la validez de la conclusión del ejercicio 1.

6. Pruébese la validez de la conclusión del ejercicio 2.

COMO CONSTRUIR NUESTRAS PROPIAS REGLAS DE INFERENCIA

Hay muchas otras de las llamadas reglas. Sería cansadísimo presentarlas todas; e incluso si lo hiciésemos, siempre podría encontrarse una argumentación que pareciera válida, pero que aparentemente usara otra regla.

Si en una argumentación se usa una regla que el lector no ha visto, ensaye los siguientes pasos:

1. Compruébese que el argumento realmente trabaja con enunciados o proposiciones como unidades. La operación aritmética no está aquí bajo estudio. Además, las manipulaciones que implican pertenencia a un conjunto o inclusión entre conjuntos todavía no se han visto. (Sócrates es un hombre; todos los hombres son mortales; luego Sócrates es mortal. Formalmente esto es análogo a: Sócrates $\in$ hombres. Hombres $\subset$ mortales. Luego, Sócrates $\in$ mortales).
2. Escríbase a continuación el modelo de la inferencia.
3. Compruébese si la argumentación se pondrá o no por medio de una equivalencia lógica directamente en forma MP o MT.
4. Compruébese si se puede introducir una tautología o no, que pueda poner el argumento en forma más estándar.

Veamos algunos ejemplos. Supongamos que tenemos $P \& Q$ y queremos usar ambos, P y Q, como premisas separadas o sólo una de ellas, digamos P, por sí misma. Deseamos esta inferencia: $P \& Q$ es cierto, luego P es cierto. En símbolos

$$\frac{P \& Q}{P}$$

Podemos ahora decirnos, "naturalmente, si sabemos que P y Q son, ambas verdaderas, ciertamente sabemos que P lo es". Las palabras "naturalmente" y "ciertamente" sugieren una tautología en el resto del enunciado: "si tanto P como Q, entonces P"; es decir, $(P \& Q) \rightarrow P$. Es fácil comprobar que, ciertamente, esto es una tautología. Ya tenemos ahora todo listo:

1. $P \& Q$.	Pr
2. $(P \& Q) \rightarrow P$.	T
3. P.	MP 2, 1

Esto es suficiente para mostrar lo que queremos decir al afirmar que se pueden construir reglas propias de inferencia sin necesidad de hacer una argumentación formal al respecto.

He aquí dos ejemplos más.

a) Hoy es viernes o sábado.
No es sábado.
Luego es viernes.

El esquema es

$$\frac{\begin{array}{r} P \vee Q \\ \neg Q \end{array}}{P}$$

b) Si aquí llueve, entonces está nevando en las montañas.
Si nieva en las montañas, entonces voy a ir a esquiar.
Luego, si llueve aquí, entonces voy a esquiar.

El esquema es

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \end{array}}{P \rightarrow R}$$

Grupo de ejercicios 6

Hágase el esquema de cada uno de los siguientes argumentos:

1. Si llueve, entonces no iré a la playa.
Estoy en la playa.
Luego no está lloviendo.

2. Si no le gustan los perros, no le gustan los perros pachones.
Le gustan los perros pachones.
Luego le gustan los perros.

3. ¿Es válida la conclusión del ejercicio 1?

4. ¿Es válida la conclusión del ejercicio 2?

Prueba condicional

He aquí una muestra de argumentación deliberadamente complicada: Si el comité adopta el plan A, entonces, si el gobernador asiste, se cambiará la ley. O la comisión de carreteras no puede funcionar o se debe adoptar el plan A. El gobernador asiste. Por tanto, si la comisión de carreteras puede funcionar, se cambiará la ley.

Recurramos a los símbolos:

A: El comité adopta el plan A.
G: El gobernador asiste.
L: Se cambiará la ley.
H: La comisión de carreteras puede funcionar.

La marcha del argumento es la siguiente:

$$\begin{array}{rl} & A \rightarrow (G \rightarrow L) \\ & \neg H \vee A \\ & G \\ \hline \text{por tanto:} & H \rightarrow L \end{array}$$

¿Cómo tenemos que derivar la conclusión de las premisas? Parece que se presentan obstáculos, porque la única cosa obvia por hacer es reemplazar $\neg H \vee A$ por la proposición lógicamente equivalente $H \rightarrow A$ (véase la página 32), y H no aparece en ninguna parte entre las premisas. Supongamos que nos limitamos a añadir H a las premisas y, para ahorrarnos una etapa formal, sigamos adelante y reemplacemos $\neg H \vee A$ por $H \rightarrow A$.

1. H.	Pr
2. $A \rightarrow (G \rightarrow L)$.	Pr
3. $H \rightarrow A$.	Pr
4. G.	Pr
5. A.	MP 3, 1
6. $G \rightarrow L$.	MP 2, 5
7. L.	MP 6, 4

Al añadir H a la lista de las presunciones, probamos L. Es decir, dadas las premisas y suponiendo también H, deducimos L. ¿Pero cuál es la diferencia entre el último enunciado y decir que, dadas las premisas, H implica L? Esencialmente ninguna. Cuando hacemos un enunciado como "o la comisión de carreteras no puede funcionar o debe adoptarse el plan A", es decir, $\neg H \vee A$, la hipótesis de que es *posible* que funcione la comisión de carreteras (H) está implícita. Si no fuese este el caso, la premisa ($\neg H \vee A$) se podría reemplazar simplemente por $\neg H$, ya que la verdad o falsedad de A sería irrelevante: la adopción del plan A no tendría entonces relación alguna con el funcionamiento de la comisión de carreteras.

Para formalizar todo esto, adoptemos la siguiente regla. (Puede probarse partiendo de las reglas anteriores, pero no haremos esto aquí.)

> *Regla de la prueba condicional: si una proposición Q puede deducirse de un conjunto de premisas y una premisa particular P, entonces P → Q puede deducirse de las otras premisas solas.*

Así pues, si queremos probar una implicación, es una práctica estándar añadir a las premisas el antecedente de la implicación, y tratar de deducir de todo ello el consecuente.

Como regla general, para construir una prueba formal verificando o corrigiendo una argumentación, se comienza por escribir las premisas. Se ponen en forma de implicaciones, apartando formas como $P \& R$ para enumerar los componentes separadamente. Si el resultado a probar tiene la forma de una implicación, *agréguese su antecedente a las premisas.* Inténtese derivar a continuación el consecuente por MP y MT.

Probemos con otro ejemplo bastante complejo: si el testigo está diciendo la verdad, Sam tiene un alibí. O el testigo está diciendo la verdad o hay una conspiración. Si hay una conspiración, Juan está complicado. Si Sam tiene un alibí, Jorge es inocente. Luego, si Juan no está implicado, Jorge es inocente.

¿Todo claro? Quizá no, así es que vamos a dejar a un lado las palabras y a meter los símbolos. Entonces podremos ver con claridad.

W:	El testigo está diciendo la verdad.
S:	Sam tiene un alibí.
C:	Hay una conspiración.
J:	Juan está complicado.
G:	Jorge es inocente.

La forma del argumento, es la siguiente:

$$\begin{array}{c} W \to S \\ W \vee C \\ C \to J \\ S \to G \\ \hline \neg J \to G \end{array}$$

Reemplacemos ahora $W \vee C$ por $\neg W \to C$, de acuerdo con nuestro sistema estándar, y agreguemos $\neg J$ a las premisas.

1. $\neg J$.	Pr
2. $W \to S$.	Pr
3. $\neg W \to C$.	Pr
4. $C \to J$.	Pr
5. $S \to G$.	Pr
6. $\neg C$.	MT 4, 1
7. $\neg \neg W$.	MT 3, 6
8. W.	L 7
9. S.	MP 2, 8
10. G.	MP 5, 9

Hemos derivado el consecuente G de la premisa $\neg J$ y las otras premisas. Esto es lo que necesitábamos.

Grupo de ejercicios 7

1. Encuéntrense los errores en la siguiente derivación.

1. $A \rightarrow B$.	Pr	6. $\neg\neg D$.	MT 5, 4
2. $C \vee D$.	Pr	7. D.	L 6
3. $D \rightarrow \neg B$.	Pr	8. $\neg B$.	MP 3, 7
4. $\neg C$.	Pr	9. $\neg A$.	MT 1, 8
5. $C \rightarrow \neg D$.	L 2		

2. Corríjanse los errores en la derivación del ejercicio 1 y lléguese después a la *misma* conclusión.

Negaciones, contrarrecíprocas y recíprocas

Excepto cuando estábamos haciendo cambios formales en las pruebas, no hemos discutido en detalle los problemas que se presentan al negar expresiones compuestas, es decir, expresiones tales como $P \& Q$, $P \vee Q$ y $P \rightarrow Q$. Comencemos con "y" y "o". Consideremos la afirmación

Pedro vendrá y Quintín vendrá.

Podría pensarse que negar esto es simplemente cuestión de negar ambas proposiciones simples:

Pedro no vendrá y Quintín no vendrá.

Pero si sometemos estas proposiciones a las evaluaciones de una tabla de verdad, obtenemos la tabla XIV.

TABLA XIV

P	Q	$P \& Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \& \neg Q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V

P: Pedro vendrá. $\neg P$: Pedro no vendrá.
Q: Quintín vendrá. $\neg Q$: Quintín no vendrá.

Al observar las columnas 3 y 6 es posible que nos sorprenda encontrar que $P \& Q$ y $\neg P \& \neg Q$ están muy lejos de ser negaciones la una de la otra. Para que $P \& Q$ sea cierta, tanto P como Q deben ser ciertas. Si P o Q, una cualquiera de ellas, es falsa ($\neg P \vee \neg Q$), entonces $P \& Q$ es falsa. Lo anterior nos conduce a someter a la prueba de las tablas de verdad a $P \& Q$ y $\neg P \vee \neg Q$. (Véase la tabla XV.)

TABLA XV

P	Q	$P \& Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V

Si, como antes, inspeccionamos las columnas 3 y 6, en esta ocasión encontramos las F en vez de las V, y las V en vez de las F exactamente en los sitios adecuados, de forma que la equivalencia lógica de $\neg(P \& Q)$ y $\neg P \vee \neg Q$ es un hecho.

Esto nos lleva a pensar que como

$$\neg (P \& Q) \equiv \neg P \vee \neg Q,$$

podría ser que el esquema fuera el mismo para la negación de una composición con "o". Es decir, podría ser que

$$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \& \neg Q,$$

Un ejemplo de esto sería

No es cierto que o Pedro vendrá o Quintín vendrá,

y

Pedro no vendrá y Quintín no vendrá.

La tabla de verdad para estas proposiciones se muestra en la tabla XVI.

TABLA XVI

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \& \neg Q$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V

Como al comparar las columnas 3 y 6 encontramos siempre las V en lugar de las F y las F en lugar de las V, nuestra sospecha resultó correcta. La negación de $P \vee Q$ es $\neg P \,\&\, \neg Q$.

Las proposiciones de equivalencia lógica,

$$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \,\&\, \neg Q,$$

y

$$\neg (P \,\&\, Q) \equiv \neg P \vee \neg Q,$$

se llaman *leyes de De Morgan*. El proceso de obtención de estas equivalencias puede resumirse en esta forma:

> Para negar una expresión con "y" u "o", se niegan ambos componentes y se cambia la conjunción; es decir, se niegan ambos componentes y luego se reemplaza "y" por "o", y "o" por "y".

Consideremos a continuación esta proposición:

Si Pedro viniera, Quintín vendría.

¿Cuál de entre las siguientes es la negación correcta?

1. Si Pedro viniera, Quintín no vendría.
2. Si Pedro no viniera, entonces vendría Quintín.
3. Si Pedro no viniera, entonces no vendría Quintín.
4. Si Quintín viniera, entonces Pedro no vendría.
5. Pedro vendrá, pero Quintín no vendrá.

Lo que queremos obtener es la negación de $P \rightarrow Q$. Recuérdese que $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$. Luego $\neg (P \rightarrow Q) \equiv \neg (\neg P \vee Q)$. Apliquemos ahora las leyes de De Morgan:

$$\neg (P \rightarrow Q) \equiv \neg (\neg P \vee Q) \equiv \neg \neg P \,\&\, \neg Q \equiv P \,\&\, \neg Q.$$

Y esta es la proposición 5.

¿Qué hay de equivocado en la proposición 1, $P \rightarrow \neg Q$? Véanse las tablas XVII y XVIII que tienen los valores de verdad para cada proposición. Las filas correspondientes a lo que sucede cuando Pedro *no* vendrá producen valores de verdad distintos en las columnas finales de las tablas.

TABLA XVII

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg (P \rightarrow Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

TABLA XVIII

P	Q	P	$\neg Q$	$P \rightarrow \neg Q$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

Consideremos aún otro par de proposiciones:

Si Pedro viniera, Quintín vendría,

y

Si Quintín no viniera, entonces Pedro no vendría.

Una tiene la forma $P \to Q$; la otra, la forma $\neg Q \to \neg P$. ¿En qué difieren en valor? Comparémoslas escribiéndolas ambas en la forma "o":

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q.$$
$$\neg Q \to \neg P \equiv \neg \neg Q \vee \neg P \equiv Q \vee \neg P.$$

Pero $\vee$ es conmutativa, y $Q \vee \neg P \equiv \neg P \vee Q$, luego

$$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P.$$

Cuando nos sea conveniente, es permisible dar la vuelta a cualquier implicación si negamos cada componente. Mencionamos esta equivalencia cuando mostramos que el MT es derivable del MP. Es en sí de considerable importancia. A $\neg Q \to \neg P$ se le llama *contrarrecíproca* de $P \to Q$. Es frecuente el caso en que una de las dos expresiones parecerá más evidente o expresará una idea mejor que la otra, aunque las dos son lógicamente equivalentes. Un caso extremo de diferencia en el modo aparece cuando formamos la contrarrecíproca de "si llueve, permanezco en casa". La *contrarrecíproca lógicamente equivalente* es "si no permanezco en casa, no llueve".

Hay otra proposición estrechamente relacionada con $P \to Q$. Es su *recíproca*, $Q \to P$. Nótese que $Q \to P$ no es ni la negación de $P \to Q$, ni tampoco es equivalente a ella. Quizás los diagramas rectangulares de la figura 23 puedan darnos la imagen más clara de la situación.

Hay dos rectángulos en que los valores no concuerdan y dos rectángulos en que sí concuerdan.

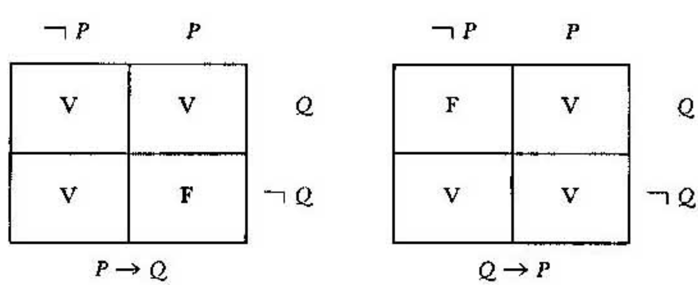


FIGURA 23

Formemos las recíprocas de las siguientes tres proposiciones:

1. Si un número es un múltiplo de 4, entonces es un múltiplo de 2
2. Si llueve, me quedaré en casa.
3. Si $x < y$, entonces $y > x$.

Se tiene:

1. * Si un número es un múltiplo de 2, entonces es un múltiplo de 4
2. * Si me quedo en casa, lloverá.
3. * Si $y > x$, entonces $x < y$.

La observación de que los valores de verdad de las proposiciones (1) y (1*) y de las proposiciones (2) y (2*) son diferentes [aunque los valores para (3) y (3*) son iguales], nos dice que, en general, nunca debemos mezclar una proposición y su recíproca, aunque haya casos, como sucede en la proposición (3), en donde ello no importe.

Resumamos la situación:

Implicación:	$P \rightarrow Q$	
Contrarrecíproca:	$\neg Q \rightarrow \neg P$	(lógicamente equivalente a $P \rightarrow Q$)
Recíproca:	$Q \rightarrow P$	(no lógicamente equivalente a $P \rightarrow Q$)
Negación:	$P \,\&\, \neg Q$	

Grupo de ejercicios 8

Formúlese la negación de cada una de las siguientes proposiciones.

1. Si voy al centro, me compraré un sombrero nuevo.
2. Voy a comer y al teatro.
3. Voy a ir a la playa o a la montaña.
4. Si no me doy prisa, llegaré tarde.
5. Juan irá si voy yo.

Formúlense las recíprocas de:

6. La implicación del ejercicio 1.
7. La implicación del ejercicio 4.
8. La implicación del ejercicio 5.

LOGICA DE PREDICADOS

Términos y predicados

Hasta el momento, hemos venido usando como unidades básicas en nuestras construcciones a las proposiciones. Para seguir más adelante, debemos llegar al interior mismo de estas proposiciones. Consideremos los siguientes argumentos sencillos:

Todos los números naturales son mayores que 0.
El número 3 es un número natural.
Luego 3 es mayor que 0.
Ningún perro tiene seis patas.
Rover es un perro.
Luego Rover no tiene seis patas.

No hay nada que pueda hacerse con estos argumentos desde un punto de vista simbólico porque no podemos encontrar ninguna de las conjunciones, ni "y", ni "o", ni "si . . . entonces". No podemos, por tanto, formalizarlos. Desde un punto de vista formal, cada una de las tres proposiciones de cada argumento es una proposición atómica. Las proposiciones están relacionadas, pero la relación se encuentra dentro de las proposiciones.

Hasta este momento ha sido posible explicar las palabras y las estructuras de las proposiciones en este estudio comparando su uso con usos análogos del idioma español. Pero de ahora en adelante debemos en ocasiones usar definiciones que tienen significado solamente en la lógica simbólica. Para los propósitos de la lógica, definimos *término* como significando un nombre propio u otra palabra que especifique un objeto definido único. Los términos en los argumentos anteriores son "Rover", "3" y "0".

La forma habitual de describir un *predicado* es la de decir que es algo que puede ser el resto de una proposición simple que tiene un término como sujeto. (Los predicados que aparecen en los ejemplos son "es un número natural"; "es mayor que 0"; "no tiene seis patas", y "es un perro". Nótese que no hemos incluido "son mayores que 0" y "tienen seis patas", pues estas proposiciones tienen sujetos plurales que no son "términos" según la definición anterior.)

Nótese, sin embargo, que uno de estos predicados contiene un término. Cuando esto sucede, es a veces conveniente cambiar nuestra descripción para permitir que un predicado sea *la parte de una proposición que se convierte en una proposición simple al insertar uno o más términos en los lugares adecuados*: "el hombre [término] ama", "x [término] es mayor que 5 [término]", y así por el estilo.

Necesitamos usar predicados simbólicamente. Usaremos una letra mayúscula para representar un predicado. Cuando queramos mostrar cuántos términos pueden estar implicados, pondremos letras minúsculas tales como x o y a su derecha. Si C representa a "es un número natural", entonces escribiremos Cx por "x es un número natural". Si G representa a "es mayor que", entonces escribiremos Gxy por "x es mayor que y". En la tabla XIX aparece una breve lista de algunos ejemplos de este simbolismo que usaremos en las páginas que siguen.

TABLA XIX

Predicado	Significado	Predicado y término	Significado
C	es un número natural	Cx	x es un número natural
G	es mayor que	Gxy	x es mayor que y
R	corre de prisa	Rb	Bernardo corre de prisa
Z	es mayor que cero	Zy	y es mayor que cero
D	es un perro	Dx	x es un perro
L	tiene seis patas	Lx	x tiene seis patas

Nótese que los nombres comunes y las descripciones, como distintos de los nombres propios, forman parte de los predicados. Un predicado puede tener o no tales nombres comunes. "Bernardo corre de prisa" tiene "corre de prisa" como predicado.

Al simbolizar proposiciones, usaremos con frecuencia letras minúsculas para representar a los términos. Por ejemplo, si R representa "corre de prisa", podríamos poner b por Bernardo, y abreviar la sentencia escribiendo Rb. Siempre guardaremos a x, y y z para uso general, sin embargo, y nunca las usaremos como términos particulares. Si en alguna ocasión tuviésemos una proposición, por ejemplo, "Jerjes corre de prisa" encontraríamos alguna letra, por ejemplo, e, para representar a "Jerjes", y escribiríamos: Re.

Grupo de ejercicios 9

Usando letras mayúsculas apropiadas por los predicados y letras minúsculas por los términos, simbolícese cada una de las siguientes proposiciones:

1. x es igual a y.
2. Rover tiene cuatro patas.
3. Bonita da leche.
4. Pussy bebe leche.

Cuantificadores

Todavía no estamos completamente preparados para simbolizar los argumentos con los que comenzamos. Necesitamos algo acerca de "todos los números naturales son mayores que cero" y de "ningún perro tiene seis patas".

Vayamos tan lejos como podamos con las siguientes frases y términos.

C: es un número natural
Z: es mayor que cero
D: es un perro
L: tiene seis patas
r: Rover
t: 3

Lo que ahora necesitamos es alguna forma de decir "todos los números naturales son mayores que cero" y "ningún perro tiene seis patas". En términos de nuestra estructura simbólica el procedimiento más claro sería convertir estas proposiciones en algo como

Para todo x, si x es un número natural, entonces x es mayor que cero.
Para todo y, si y es un perro, entonces y no tiene seis patas.

La razón para esta aparentemente oscura locución es que necesitamos solamente un símbolo más y con él sólo ya seremos capaces de resumir los argumentos simbólicamente. Usaremos el símbolo $(\forall x)$ para cualesquiera de las siguientes expresiones:

Para todo x
Para cada x
Todo x
Todo

Reconsideremos nuestros dos argumentos en forma simbólica:

$$\begin{array}{c}(\forall x)(Cx \to Zx)\\ Ct\\ \hline Zt\end{array}$$

y

$$\begin{array}{c}(\forall y)(Dy \to \neg Ly)\\ Dr\\ \hline \neg Lr\end{array}$$

Estos parecen, excepto por un detalle de menor cuantía, exactamente como el ya familiar *modus ponens*. Entraremos en detalle después de una corta discusión sobre el uso de $(\forall x)$.

Debe quedar absolutamente claro hasta qué punto el símbolo $(\forall x)$, al que se llama "cuantificador universal", ejerce influencia sobre una proposición compuesta. Si omitiésemos los paréntesis y escribiésemos $(\forall x) Cx \rightarrow Zx$, deberíamos entender algo como esto: "si todo x es un número natural, entonces x es mayor que cero". Por tanto, para obtener lo que realmente queremos decir, debemos poner $Cx \rightarrow Zx$ entre paréntesis: $(\forall x)(Cx \rightarrow Zx)$.

Nunca debemos usar variables que se presten a confusión. Una forma de evitar esto es tener en cada situación una letra diferente para cada diferente categoría o tipo de objetos y para cada término.

Esto nos lleva a otra regla que necesitaremos.

> *Regla de instanciación: en cualquier proposición precedida de un cuantificador universal, la variable indicada por el cuantificador puede reemplazarse en toda la proposición por cualquier término.*

Indicaremos el uso de la regla de instanciación por "I".

1. $(\forall x)(Cx \rightarrow Zx)$.	Pr
2. Ct.	Pr
3. $Ct \rightarrow Zt$.	I 1
4. Zt.	MP 3, 2

1. $(\forall y)(Dy \rightarrow \neg Ly)$.	Pr
2. Dr.	Pr
3. $Dr \rightarrow \neg Lr$.	I 1
4. $\neg Lr$.	MP 3, 2

En otras palabras, nuestro nuevo sistema es exactamente nuestro viejo sistema, una vez que prescindimos del cuantificador universal al reemplazar la variable por un término adecuado. Naturalmente, tenemos que elegir el término adecuado con cuidado; no sería de gran ayuda que al final terminásemos con una proposición como: "si 3 es un perro, entonces 3 no tiene seis patas".

Grupo de ejercicios 10

Escríbase la forma simbólica de cada uno de los siguientes argumentos.

1. Todos los gatos tienen bigotes.
   Tobías es un gato.
   Luego, Tobías tiene bigotes.

2. Todos los sábados duermo hasta mediodía.
   Hoy es sábado.
   Luego hoy dormiré hasta mediodía.

3. Todas las balandras tienen velas.
"Espuma" es una balandra.
Luego "Espuma" tiene velas.

4. Todo hombre fue niño alguna vez.
El señor García es un hombre.
Luego el señor García fue niño alguna vez.

5. Escríbase una prueba completa de la forma simbólica para el ejercicio 1.

6. Escríbase una prueba completa de la forma simbólica para el ejercicio 3.

Negación y existencia

Debemos tener sumo cuidado con el uso de los negativos en conexión con los cuantificadores. Consideremos, por ejemplo, estas proposiciones:

1. No todos los hombres son locos.
2. Ningún hombre es un loco.

La proposición (1) es, evidentemente, la negación directa de la proposición "todos los hombres son locos". Si alguien dice "todos los hombres son locos", esperamos que se niegue tal afirmación diciendo "no, no todos", o, "no, algunos hombres no son locos".

La otra proposición es diferente. Antes de buscar cuál es su negación podemos primero escribir de nuevo la proposición como "todos los hombres son no locos". Esto es confuso. Si viésemos la proposición aislada, no sabríamos si era equivalente a la proposición (1) o a la proposición (2). Es esta una razón más para ser cuidadosos. Ensayemos ahora en esta forma: "todo hombre no es un loco". Para propósitos simbólicos, escribimos esto como: "para todo x, si x es un hombre, entonces x no es un loco". Es decir, colocamos la negación en el consecuente de una implicación.

Podríamos haberla puesto en una forma diferente teniendo la misma connotación lógica: "para todo x, no es el caso que x sea a la vez un hombre y un loco". En símbolos $(\forall x)(\neg(Mx \& Fx))$, como puede ver el lector en la tabla XX.

TABLA XX

Mx	Fx	$Mx \& Fx$	$\neg Fx$	$Mx \to \neg Fx$	$\neg(Mx \& Fx)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V

¿Qué hay acerca de $(\forall x)(\neg(Mx \rightarrow Fx))$? Se leerá más fácilmente esto si recordamos la forma de negar una implicación: $\forall x(Mx \,\&\, \neg Fx)$. "Todo es un hombre pero no un loco". Esto no es en absoluto lo que teníamos *in mente*. ¿Cómo decimos: "algunos hombres son locos"? Negamos la proposición "ningún hombre es un loco":

$$\neg(\forall x)(Mx \rightarrow \neg Fx) \quad \text{o} \quad \neg(\forall x)(\neg(Mx \,\&\, Fx)).$$

La combinación simbólica $\neg(\forall x)\neg$ recibe un símbolo especial $\exists(x)$ que se lee de cualesquiera de las siguientes maneras:

Hay un x tal que,
Existe un x tal que,
Para algún x,

o una equivalente. Por ejemplo,

$$(\exists x)(Mx \,\&\, Fx)$$

se lee "hay una x que es a la vez un hombre y un loco", o "para alguna x, x es a la vez un hombre y un loco", o "algunos hombres son locos".

Grupo de ejercicios 11

Escríbanse las proposiciones en español que son las negaciones de las siguientes:

1. Todos los gatos son blancos.
2. Algunos gatos son blancos.
3. Ningún gato es blanco.
4. Ningún gato es no blanco.
5. Usando símbolos convenientes, exprésese cada una de las anteriores proposiciones y su negación.

——oOo——

Para lecturas posteriores

Entre los varios libros valiosos que tratan el tema que aquí hemos introducido, uno es el *First Course in Mathematical Logic* de Patrick Suppes y Shirley Hill (segunda edición; Boston: Ginn & Co., 1966). Este libro de 271 páginas puede adquirirse en Ginn and Company, Statler Building, Back Bay P. O. 191, Boston, Massachusetts 02117.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1 (pág. 28)

1. Llueve y no me voy.
2. Si no viene, yo voy.
3. Cuando hace calor, llueve.
4. O hace calor o llueve.
5. No es el caso de que llueva y no vaya yo. (Mejor: o no está lloviendo o voy.)
6. El está viniendo si ni hace calor ni llueve y solamente en ese caso.
7. El está viniendo si ni hace calor ni llueve y solamente en caso de que ambas cosas sucedan.
8. Yo voy si hace calor o si no llueve.
9. Hace calor y llueve; yo voy, pero él viene.
10. O yo voy, o él viene, pero no ambas cosas.
11. $F \rightarrow \neg H$.
12. $G \rightarrow \neg H$.
13. $(E \& \neg F) \rightarrow (G \vee H)$.
14. $F \rightarrow E$.
15. $E \vee G$.
16. $\neg E \rightarrow \neg F$.
17. $\neg H \rightarrow G \vee E$.
18. x es mayor que 5 y x es par.
19. Si no ocurre que x es par y x es menor que 3, entonces x es un múltiplo de 4.
20. Si x no es menor que 3 o x es un múltiplo de 4, entonces x es mayor que 5.
21. Si x no es par y x es menor que 3, entonces x no es un múltiplo de 4 o x es mayor que 5.
22. Si no ocurre que x sea mayor que 5 o que x no sea par, entonces x es menor que 3.
23. x no es menor que 3 y x no es un múltiplo de 4.
24. Si no ocurre que x es par y que x es mayor que 5, entonces x no es un múltiplo de 4.
25. Si x es un múltiplo de 4, entonces no ocurre que x sea mayor que 5 o que x sea menor que 3.
26. Si x es un múltiplo de 4 o x no es par, entonces x es mayor que 5 o x no es menor que 3.

Grupo de ejercicios 2 (pág. 35)

Si las tablas básicas se ordenan en la misma forma que las tablas que preceden inmediatamente al conjunto de ejercicios, los resultados son:

P	Q	R	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

9. Las proposiciones 1 y 7, 2 y 8, 3 y 4, 5 y 6.

Grupo de ejercicios 3 (pág. 37)

1.

P	Q	$\neg P$	Q	$\neg P \to Q$	$P \to (\neg P \to Q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

2.

P	Q	$P \& Q$	$P \& Q \to P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

3

P	Q	$\neg P$	$P \& Q$	$\neg (P \& Q)$	$P \to \neg (P \& Q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

4.

P	Q	$P \& Q$	$P \vee Q$	$(P \& Q) \to (P \vee Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Grupo de ejercicios 4 (pág. 41)

1. Sí
2. No
3. No
4. Sí
5. S: nieva; G: esquiaré.

1. $S \to G$.	Pr
2. S.	Pr
3. G.	MP 1, 2

6. S: voy de compras; H: compraré un sombrero; D: compraré un traje azul.

1. $S \to H$.	Pr
2. $H \to D$.	Pr
3. S.	Pr
4. H.	MP 1, 3
5. D.	MP 2, 4

Grupo de ejercicios 5 (pág. 43)

1. Sí
2. Sí
3. No
4. Sí
5. N: voy a Nueva York; P: viajo en aeroplano.

1. $N \to P$.	Pr
2. $\neg P$.	Pr
3. $\neg N$.	MT

6. H: me pelo; S: me quedo en casa.

1. $\neg H \to S$.	Pr
2. $\neg S$.	Pr

3. $\neg\neg H$.	MT 1, 2
4. H.	L 3

Grupo de ejercicios 6 (pág. 45)

1. $$\begin{array}{r} P \rightarrow \neg Q \\ Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} \neg P \rightarrow \neg Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

3. Sí

4. Sí

Grupo de ejercicios 7 (pág. 48)

1. Los pasos 5 y 6 son equivocados.

2. Lo siguiente es correcto:

1. $A \rightarrow B$.	Pr
2. $C \vee D$.	Pr
3. $D \rightarrow \neg B$.	Pr
4. $\neg C$.	Pr
5. $\neg C \rightarrow D$.	L 2
6. D.	MP 5, 4
7. $\neg B$.	MP 3, 6
8. $\neg A$.	MT 1, 7

Grupo de ejercicios 8 (pág. 52)

1. Voy al centro, pero no me compraré un sombrero nuevo.

2. O no voy a comer, o no voy al teatro.

3. No voy a la playa, y no voy a la montaña.

4. No me estoy dando prisa, pero no llegaré tarde.

5. Yo no voy, pero Juan no va.
6. Si compro un sombrero nuevo, iré al centro.
7. Si llego tarde, no me daré prisa.
8. Si Juan va, yo iré.

Grupo de ejercicios 9 (pág. 54)

1. E: es igual a; Exy.
2. F: tiene cuatro patas; Fr.
3. M: da leche; Mb.
4. D: bebe leche; Dp.

Grupo de ejercicios 10 (pág. 56)

1. C: es un gato; W: tiene bigotes; t: Tobías.

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)(Cx \rightarrow Wx)\\ Ct\end{array}}{Wt}$$

2. S: es sábado; N: es un día en que duermo hasta el mediodía; t: hoy.

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)(Sx \rightarrow Nx)\\ St\end{array}}{Nt}$$

3. S: es una balandra; H: tiene velas; s: "Espuma".

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)(Sx \rightarrow Hx)\\ Ss\end{array}}{Hs}$$

4. M: es un hombre; B: fue niño; s: el señor García.

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)(Mx \rightarrow Bx)\\ Ms\end{array}}{Bs}$$

5.

1. $(\forall x)(Cx \rightarrow Wx)$.	Pr
2. Ct.	Pr
3. $Ct \rightarrow Wt$.	I 1
4. Wt.	MP 3, 2

6.

1. $(\forall x)(Sx \rightarrow Hx)$.	Pr	
2. Ss.	Pr	
3. $Ss \rightarrow Hs$.	I	1
4. Hs.	MP	3, 2

Grupo de ejercicios 11 (pág. 58)

1. Algunos gatos no son blancos.

2. Todos los gatos no son blancos; o, ningún gato es blanco.

3. Algunos gatos son blancos.

4. Algunos gatos no son blancos.

5. Cx: x es un gato; Wx: x es blanco.

(1)	$(\forall x)(Cx \rightarrow Wx)$,	$(\exists x)(Cx \,\&\, \neg Wx)$.
(2)	$(\exists x)(Cx \,\&\, Wx)$,	$(\forall x)(Cx \rightarrow \neg Wx)$.
(3)	$(\forall x)(Cx \rightarrow \neg Wx)$,	$(\exists x)(Cx \,\&\, Wx)$.
(4)	$(\forall x)(\neg Wx \rightarrow \neg Cx)$	$(\exists x)(Cx \,\&\, \neg Wx)$.

Esta obra terminó de imprimirse el día 20 de junio de 1972, en los talleres de Offset Rebosán, S. A., Zacahuitzco No. 40, Col. Portales, México, D. F.

Se tiraron 2.000 ejemplares más sobrantes de reposición

(National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda auxiliar tanto a los maestros en su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.

Títulos que componen esta colección:

1. Conjuntos
2. Números enteros
3. Sistemas de numeración para los números enteros
4. Algoritmos de las operaciones con números enteros
5. Números y sus factores
6. Números racionales
7. Sistemas de numeración para los números racionales
8. Proposiciones numéricas
9. El sistema de los enteros
10. El sistema de los números racionales
11. El sistema de los números reales
12. Lógica
13. Gráficas, relaciones y funciones
14. Geometría informal
15. Medida
16. Recopilación, organización e interpretación de datos
17. Sugerencias para resolver problemas
18. Simetría, congruencia y semejanza

OTRO TÍTULO

Manual de lógica para estudiantes de matemáticas

Gonzalo Zubieta Russi

Es una valiosa ayuda para la mejor comprensión del lenguaje matemático. Ofrece a los estudiantes de matemáticas, el material que necesitan sobre técnicas de orden lógico del manejo del lenguaje matemático, el empleo de métodos eficaces de razonamiento, etc., ya que muchas de las dificultades con que tropiezan se deben a la falta de familiaridad con todos estos factores.