



# Taller, Límites de funciones en $\mathbb{R}$ Cálculo 11°



Germán Avendaño Ramírez, Lic. U.D., M.Sc. U.N.

Nombre: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

## Introducción

**Materiales:** Regla, escuadra, calculadora, esferos o lápices de diferentes colores.

1. Grafica cada una de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números Reales:

$$a) \ y = f(x) = 2x + 1 \qquad b) \ y = g(x) = x^2 - 4 \qquad c) \ y = h(x) = x^3 - 2x$$

2. En la siguiente recta numérica, escoge un par de unidades consecutivas y cada una divídelas en 10 partes iguales. Coloca el número correspondiente a cada división. ¿Cuáles serían los números si cada unidad es dividida en 100 partes iguales?



3. A continuación encontrarás dibujadas dos rectas. Traza perpendiculares por los puntos dibujados



4. Consideremos la función definida mediante la expresión  $y = j(x) = 4 - x^2$ . Observemos los valores del recorrido ( $y$ ) cuando los del dominio ( $x$ ) están cerca de 1. Para ello:



- a) Elaboramos una tabla de valores donde se observen los valores de “ $y$ ” cuando los de “ $x$ ” se están acercando a 1:

	Por la izquierda de 1 →				Por la derecha de 1 ←		
$x$	0.97	0.98	0.99	<b>1</b>	1.01	1.02	1.03
$y$							

- b) Construimos su gráfica conectando mediante segmentos de rectas, los elementos del Dominio próximos a 1, con su correspondiente elemento del recorrido:



- c) Hacia que valores se aproximan los de “ $y$ ”, cuando los de “ $x$ ” se acercan a 1?
- d) Observemos que ocurre gráficamente. Para ello haz cuatro gráficas de la función. En cada una de ellas:

- Dibuja en el eje “ $y$ ”, una de las siguientes vecindades del 3:  $V_1(3)$ ,  $V_{\frac{1}{2}}(3)$ ,  $V_{\frac{1}{4}}(3)$  y  $V_{\frac{1}{10}}(3)$ . (Vecindad  $V_{\frac{1}{2}}(3)$  significa que cerca de tres se construye una vecindad de radio  $\frac{1}{2}$ , es decir de radio 0.5; tenemos entonces el intervalo abierto  $(-2.5, 3.5)$ )
- Escoge varios puntos de la vecindad (pueden ser dos, por encima y por debajo de 3). Levanta en cada uno de ellos una perpendicular que llegue hasta la gráfica. A continuación, traza desde aquí, otra perpendicular que llegue hasta el eje “ $x$ ”.
- ¿Dentro de qué vecindad quedan los puntos de los extremos de los segmentos que llegan hasta el eje “ $x$ ”?

- ¿Qué pasa cuando la vecindad es más pequeña?

5. De lo anterior, podemos darnos cuenta que no importa la vecindad de 3 que escojamos, que siempre tendremos una vecindad (del número 1) en el eje “ $x$ ” dentro de la cual se encuentran los valores del dominio próximo a él, pero que cuanta más pequeña sea la vecindad escogida en el eje “ $y$ ”, más cercanos al número 1 estarán los valores de “ $x$ ”. Ver gráficos:

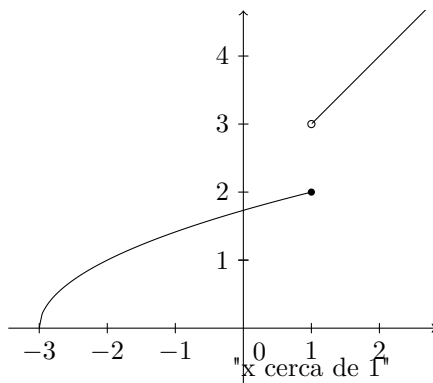
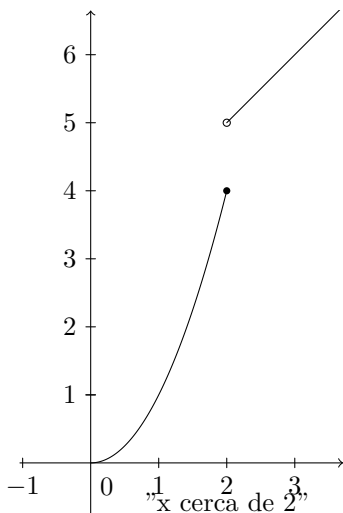
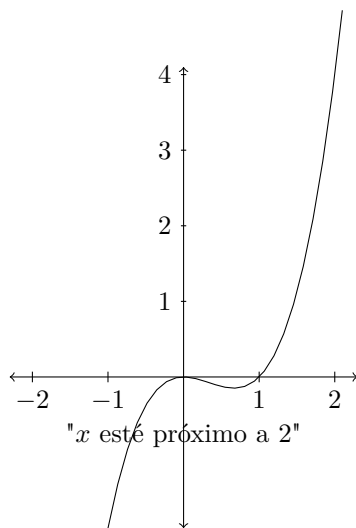
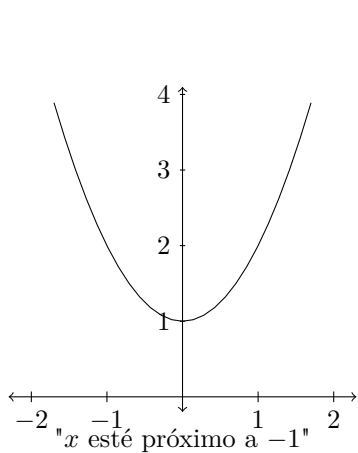


La situación anterior es descrita en matemáticas diciendo que el Límite de la función  $j(x) = 4 - x^2$ , cuando  $x$  esta próxima (o tiende) a 1, es igual a 3. También suele decirse que “ $j(x)$  tiende a 3, cuando  $x$  tiende a 1” y se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} j(x) = 3$$

En ocasiones se escribe  $j(x) \rightarrow 3$  cuando  $x \rightarrow 1$

6. A continuación te presentamos varias gráficas de funciones definidas en los números reales para que determines el valor hacia donde se acercan los de “ $y = f(x)$ ” cuando “ $x$ ” se aproxima al valor indicado, escribiendo el resultado con notación de límites:



7. Determine los siguientes límites haciendo la tabla de valores cercanos al número indicado por el límite. (Ejemplo, si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , entonces se deberá hacer una tabla de valores cercanos a 2 por la izquierda y derecha, los cuales podrían ser 1.9, 1.99, 1.999 por izquierda y 2.001, 2.01, 2.1 por derecha).

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 1 =$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 4 =$       c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$