离散数学

(下册)

邹晓红　刘天歌　编著

燕山大学出版社

·秦皇岛·

前　　言

本书是学习离散数学课程的学习指导书，内容安排上基本按照《离散数学》（上册）的内容体系，以方便读者查阅学习。

离散数学是计算机专业的一门重要基础课，它包括集合论、图论、代数系统、数理逻辑等内容。具有很强的抽象性，教学过程中学生普遍反映难学。为配合课堂教学及有利于学生自学，编写了这本学习指导书，期望它能对学生学好这门课程有所帮助。

为指导学生学习，本书按章给出了内容提要、习题与解等内容。其中内容提要给出了本章的主要内容。习题与解则给出了大量的习题及求解过程，习题的涉及面较广，将有助于学生对内容的全面理解和掌握。为检测学习情况，书中编有自测题及答案，以便学生对自己的学习情况进行检测。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不免有错误和疏漏存在，敬请读者批评指正。

编　者

2020 年 12 月

目　　录

第一篇　集合论

第二篇　图　论

第三篇　代数系统

第四篇　数理逻辑

第一篇　集合论

第一章　集　合

一、内容提要

1. **集合的概念**

集合：集合是一个不能精确定义的基本概念，一般地，把具有某种属性的一些对象汇集成一个整体，就形成一个集合。

元素：组成集合的对象称作元素。若元素 a 属于集合 A，记作 $a \in A$，否则记作 $a \notin A$。

子集：设 A，B 是集合，如果对任意的 $x \in A$，都有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，也称 A 包含于 B，记作 $A \subseteq B$。

真子集：设 A，B 是集合，若 $A \subseteq B$，并且 B 中至少存在一个元素 x，$x \notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$。

外延性原理：设 A，B 是集合，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$，否则记为 $A \neq B$。

空集：不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$。

全集：在一定范围内，如果所有集合都为某一集合的子集，则称该集合为全集，记作 E。

幂集：设 A 是集合，由 A 的所有子集构成的集合称作 A 的幂集，记作 $\rho(A)$，即

$$\rho(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

定理 1.1.1：对于任一集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$。

定理 1.1.2：设 A 是有限集合，且 $|A| = n$，则其幂集 $|\rho(A)| = 2^n$。

2. **集合的运算**

集合的交：设 A，B 是集合，由所有属于 A 并且属于 B 的共同元素组成的集合，称作 A 和 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

集合的并：设 A，B 是集合，由 A 和 B 中的所有元素组成的集合，称作 A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合的相对补：设 A，B 是集合，由所有属于 A，但不属于 B 的元素组成的集合，称作 A 的相对补集，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

集合的绝对补：设 A 为集合，E 为全集，称 $E-A$ 为 A 的绝对补集，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x \mid x \notin A\}$$

集合的对称差：设 A，B 是集合，由所有属于 A 或 B，但不同时属于 A 和 B 的元素组成的集合，称作 A 和 B 的对称差，记作 $A \oplus B$，即

$$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$$

定理 1.2.1：设 A，B 是有限集合，则 $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$。

3. **序偶与笛卡儿积**

序偶：两个具有固定次序的客体组成的集合，称作序偶，记作 (x,y)。

笛卡儿积：设 A，B 是集合，若序偶的第一元素是 A 的元素，第二元素是 B 的元素，所有这样序偶的集合，称作 A 和 B 的笛卡儿积，记作 $A \times B$，即

$$A \times B=\{(x,y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$$

定理 1.3.1：设 A，B，C 是集合，则有

(1) $A \times (B \cap C)=(A \times B) \cap (A \times C)$；

(2) $A \times (B \cup C)=(A \times B) \cup (A \times C)$；

(3) $(B \cap C) \times A=(B \times A) \cap (C \times A)$；

(4) $(B \cup C) \times A=(B \times A) \cup (C \times A)$。

定理 1.3.2：若 $C \neq \varnothing$，则 $A \subseteq B$ 的充要条件是 $A \times C \subseteq B \times C$ 或 $C \times A \subseteq C \times B$。

定理 1.3.3：设 A，B，C，D 是非空集合，则 $A \times B \subseteq C \times D$ 的充要条件是 $A \subseteq C$，$B \subseteq D$。

二、习题与解

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 1 至 100 的整数中的完全平方数的集合；

(2) 大于 3 而小于等于 7 的整数集合；

(3) 12 的质因数集合；

(4) 全体偶数的集合。

解：(1) $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$；

(2) $\{4,5,6,7\}$；

(3) $\{2,3\}$；

(4) $\{\cdots,-2,0,2,\cdots\}$。

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 被 5 除余 1 的整数集合；

(2) 平面直角坐标系中单位圆内(不包括单位圆周)的点集；

(3) 使 $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合。

解：(1) $\{5x+1 \mid x\in \mathbf{Z}\}$；

(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$；

(3) $\{x\mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x^2+x-6\neq 0\}$。

3. 判定下列各题的正确与错误：

(1) $\{a\}\in\{a,b,c\}$；

(2) $\{a\}\subseteq\{a,b,c\}$；

(3) $\varnothing\in\{a,b,c\}$；

(4) $\varnothing\subseteq\{a,b,c\}$；

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a,b\}\}$；

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$；

(9) $\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(10) $\{a,b,c\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$。

解：(1) 错误 (2) 正确 (3) 错误 (4) 正确 (5) 正确

(6) 错误 (7) 正确 (8) 正确 (9) 正确 (10) 正确

4. 对于任意集合 A,B,C,确定下列各命题是否正确：

(1) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$,则 $A\in C$；

(2) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$；

(3) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$,则 $A\in C$；

(4) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$,则 $A\subseteq C$；

(5) 如果 $A\in B$ 及 $B\not\subseteq C$,则 $A\notin C$；

(6) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$,则 $A\notin C$。

解：(1) 正确。

(2) 错误,例如:$A=\{a\}$,$B=\{\{a\},b\}$,$C=\{\{a\},b,d\}$,有 $A\in B$,$B\subseteq C$,但 $A\not\subseteq C$。

(3) 错误,例如:$A=\{a\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{\{a,b\},a\}$,有 $A\subseteq B$,$B\in C$,但 $A\notin C$。

(4) 错误,例如:$A=\{a\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{\{a,b\},d\}$, 有 $A\subseteq B$,$B\in C$,但 $A\not\subseteq C$。

(5) 错误,例如:$A=\{a\}$,$B=\{\{a\},b\}$,$C=\{\{a\},d\}$, 有 $A\in B$,$B\not\subseteq C$,但 $A\in C$。

(6) 错误,例如:$A=\{a\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{\{a\},\{a,b\}\}$, 有 $A\subseteq B$,$B\in C$,但 $A\in C$。

5. 写出$\{a,b,c\}$的全部子集和真子集，并求幂集。

解：令 $A=\{a,b,c\}$，$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$。$\rho(A)$中的元素就是 A 的全部子集，其中除 A 本身之外，都是 A 的真子集。

6. 求下列集合的幂集：

(1) $\{a,\{a\}\}$；

(2) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$。

解：(1) 令 $A=\{a,\{a\}\}$，$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$；

(2) 令 $B=\{\varnothing,a,\{a\}\}$，$\rho(B)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{a\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\varnothing,a,\{a\}\}\}$。

7. 设某集合有 40 个元素，试问：

(1) 可构成多少个子集？

(2) 其中有多少个子集的基数为奇数？

(3) 是否有含有 41 个元素的子集？

解：(1) 可构成 2^{40} 个子集；

(2) 有 $2^{40}/2=2^{39}$个子集的基数为奇数；

(3) 不可能有含有 41 个元素的子集。

8. 设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，试求下列集合：

(1) $A\cap B$；

(2) $A\cup B$；

(3) $A\cap B\cap C$；

(4) $A\cap\overline{B}$；

(5) $\overline{A}\cup\overline{B}$；

(6) $(A\cap B)\cup\overline{C}$；

(7) $\overline{(A\cap B)}$；

(8) $A\cup\overline{B}\cup C$；

(9) $\rho(A)\cap\rho(B)$；

(10) $\rho(A)-\rho(B)$。

解：(1) $A\cap B=\{1\}$；

(2) $A\cup B=\{1,2,4,5\}$；

(3) $A\cap B\cap C=\varnothing$；

(4) $A\cap\overline{B}=\{4\}$；

(5) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,3,4,5\}$；

(6) $(A\cap B)\cup\overline{C}=\{1,3,5\}$；

(7) $\overline{(A\cap B)}=\{2,3,4,5\}$；

(8) $A\cup\overline{B}\cup C=\{1,2,3,4\}$；

(9) $\rho(A)\cap\rho(B)=\{\varnothing,\{1\}\}$；

(10) $\rho(A)-\rho(B)=\{\{4\},\{1,4\}\}$。

9. 判定下列命题哪些是恒成立？恒不成立？还是有时成立？可用文氏图来确定。

(1) 若 $a\in A-B$，则 $a\in A-(A\cap B)$；

(2) 若 $A\neq B$，则 $A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}$；

(3) $(A-B)\cup B=A\cup B$；

(4) $(A-B)\cup(A-C)=A$；

(5) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$。

解：(1) 恒成立。若 $a\in A-B$，则 $a\in A$，$a\notin B$。由 $a\notin B$，有 $a\notin A\cap B$，所以 $a\in A-(A\cap B)$。

(2) 恒不成立。由 $A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}$，必有 $A=B$。

(3) 恒成立。$(A-B)\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=(A\cup B)\cap E=A\cup B$。

(4) 有时成立。$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=A-(B\cap C)=A$，所以只要 $A\cap B\cap C=\varnothing$，等式成立。

(5) 有时成立。当 $A\subseteq B\cup C$ 时，成立。

10. A，B 为任意两个集合，求证：

$$A-(A\cap B)=A-B$$

证明：
$$\begin{aligned}&A-(A\cap B)\\&=A\cap\overline{(A\cap B)}\\&=A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\\&=\varnothing\cup(A-B)\\&=A-B。\end{aligned}$$

11. 设 A，B，C 是三个任意集合，求证：

(1) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$。

证明：(1)
$$\begin{aligned}&(A\cup B)-C\\&=(A\cup B)\cap\overline{C}\\&=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})\\&=(A-C)\cup(B-C)；\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&A-(B-C)\\&=A\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=A\cap(\overline{B}\cup C)\\&=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)\\&=(A-B)\cup(A\cap C)。\end{aligned}$$

12. 证明$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap(B\cup\overline{C}))$ 的补集是$(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$。

证明：$\overline{((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap(B\cup\overline{C})))}$

$=\overline{(A\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap(B\cup\overline{C}))}$

$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{(B\cup\overline{C})})$

$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup(\overline{B}\cap C))$

$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$。

13. 证明下列等式：

(1)　$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)=(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(B\cap C)$；

(2)　$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$。

证明：(1)　$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)$

$=((A\cup B)\cap\overline{A})\cup((A\cup B)\cap C)$

$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$=(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(B\cap C)$；

(2)　$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$。

14. 设有集合 A,B：

(1)　若 $A-B=B$，则 A 与 B 有什么关系？

(2)　若 $A-B=B-A$，则 A 与 B 有什么关系？

解：(1)　若 $A-B=B$，则 $B=B\cap B=(A-B)\cap B=A\cap\overline{B}\cap B=A\cap\varnothing=\varnothing$，又$\varnothing=B=A-B=A\cap\overline{B}=A\cap E=A$，所以有 $A=B=\varnothing$。

(2)　若 $A-B=B-A$，则 $B\cup(B-A)=B\cup(A-B)$，有 $B=B\cup A$，同理 $A\cup(B-A)=A\cup(A-B)$，有 $A=B\cup A$，所以有 $A=B$。

15. 在城镇居民身份调查中，假设在 15 名居民中，有 12 名是工人，有 5 名是干部，其中有 3 名具有双重身份，即编制是工人，做干部工作（以工代干人员），试问既不是工人又不是干部的非在职人员几人？

解：设 $A_1=\{$工人$\}$，$A_2=\{$干部$\}$，则按题意有：

$|A_1|=12$，$|A_2|=5$，$|A_1\cap A_2|=3$，$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=14$，

所以既不是工人又不是干部的人共 15－14＝1 人。

16. 某校足球队有球衣 38 件，篮球队有球衣 15 件，棒球队有球衣 20 件，三个队队员的总数是 58 人，其中有三人同时参加三个队，试求同时参加两个队的队员共有几人？

解：设 $A_1=\{$足球队员$\}$，$A_2=\{$篮球队员$\}$，$A_3=\{$棒球队员$\}$，则按题意有：

$|A_1|=38$，$|A_2|=15$，$|A_3|=20$，$|A_1\cup A_2\cup A_3|=58$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$，

由包含排斥原理，得

$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$

即 $58=38+15+20-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_3|+3$。

所以 $|A_1\cap A_2|+|A_2+A_3|+|A_1\cap A_3|=18$。

参加两个队的队员共 18 人。

17.(1) 在一个班级的 50 个学生中，有 26 人在第一次考试中得到 A，21 人在第二次考试中得到 A，假如有 17 人两次考试都没有得到 A，问有多少学生两次考试中都得到 A？

(2) 在这些学生中，如果第一次考试中得到 A 的学生人数等于第二次考试中得到 A 的人数，如果仅仅在一次考试中得到 A 的学生总数是 40，并且有 4 个学生两次考试都没有得到 A，问有多少学生仅在第一次考试中取得 A？问有多少学生仅在第二次考试中取得 A？又问有多少学生在两次考试中都得 A？

解：设 $A_1=\{$第一次考试得到 A 的学生$\}$，$A_2=\{$第二次考试得到 A 的学生$\}$。

(1) 按题意有，$|A_1|=26$，$|A_2|=21$，$|A_1\cup A_2|=50-17=33$，由包含排斥原理，得

$|A_1\cap A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cup A_2|=26+21-33=14$，

所以两次考试都得到 A 的共 14 人。

(2) $|A_1|=|A_2|$，$|A_1\cup A_2|=50-4=46$。

又 $|A_1\cup A_2|=|A_1\cap\overline{A_2}|+|A_2\cap\overline{A_1}|+|A_1\cap A_2|$，$|A_1\cap\overline{A_2}|+|A_2\cap\overline{A_1}|=40$，故 $|A_1\cap A_2|=46-40=6$，由 $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$，得到 $2|A_1|=46+6=52$，即 $|A_1|=|A_2|=26$。

所以在第一次(或第二次)考试中有 26 人得到 A，在两次考试中都得到 A 的有 6 人。

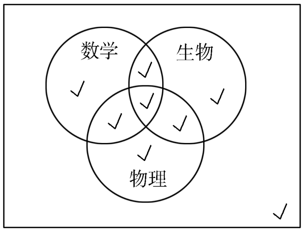
18. 对 200 名大学一年级的学生进行调查的结果是：其中 67 人学数学，47 人学物理，95 人学生物，26 人既学数学又学生物，28 人既学数学又学物理，27 人既学物理又学生物，50 人这三门课都不学。

(1) 求出对这三门课都学的学生人数；

(2) 在文氏图中将正确的学生人数填入其中 8 个区域。

解：(1) 设 $|A_1|=\{$学习数学的学生$\}$，$|A_2|=\{$学习物理的学生$\}$，$|A_3|=\{$学习生物的学生$\}$，由题设有，

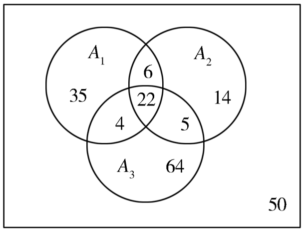
$|A_1|=67$，$|A_2|=47$，$|A_3|=95$，$|A_1\cap A_3|=26$，$|A_1\cap A_2|=28$，$|A_2\cap A_3|=27$，$|A_1\cup A_2\cup A_3|=200-50=150$，由包含排斥原理，得



$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$，故 $|A_1\cap A_2\cap A_3|=150-67-47-95+26+28+27=22$，

所以对这三门课都学的学生共 22 人。

(2)



19. 设 $A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$，试确定下面的集合：

(1) $A\times\{1\}\times B$；

(2) $A^2\times B$；

(3) $(B\times A)^2$；

(4) $(A\times B)\cap(B\times A)$。

解：(1) $A\times\{1\}\times B=\{(0,1,1),(0,1,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$

(2) $A^2\times B=\{(0,0,1),(0,0,2),(0,1,1),(0,1,2),(1,0,1),(1,0,2),(1,1,1),(1,1,2)\}$

(3) $(B\times A)^2=\{((1,0),(1,0)),((1,0),(1,1)),((1,0),(2,0)),((1,0),(2,1)),((1,1),(1,0)),((1,1),(1,1)),((1,1),(2,0)),((1,1),(2,1)),((2,0),(1,0)),((2,0),(1,1)),((2,0),(2,0)),((2,0),(2,1)),((2,1),(1,0)),((2,1),(1,1)),((2,1),(2,0)),((2,1),(2,1))\}$

(4) $(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$。

20. 设 $A=\{1,2\}$，构成集合 $\rho(A)\times A$。

解：$\rho(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，所以

$\rho(A)\times A=\{(\varnothing,1),(\varnothing,2),(\{1\},1),(\{1\},2),(\{2\},1),(\{2\},2),(\{1,2\},1),(\{1,2\},2)\}$。

21. 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{\alpha,\beta\}$，试求 $A\times(B\cap C)$ 和 $(A\times B)\cap(A\times C)$，并验证 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ 成立。

解：$A\times(B\cap C)=A\times\varnothing=\varnothing$，

$(A\times B)\cap(A\times C)=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}\cap\{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta)\}=\varnothing$，所以 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$。

22. 证明：若 $A\times A=B\times B$，则 $A=B$。

证明：(1) 若 $A=\varnothing$，则 $\varnothing=A\times A=B\times B$，所以 $B=\varnothing$。

(2) 若 $B=\varnothing$，同理有 $A=B=\varnothing$。

(3) 若 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，由 $A\times A=B\times B$，有 $A\times A\subseteq B\times B$，且 $B\times B\subseteq A\times A$，由定理 1.3.3，故 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，所以 $A=B$。

23. 证明：若 $A\times B=A\times C$，且 $A\neq\varnothing$，则 $B=C$。

证明：(1) 若 $B=\varnothing$，则 $\varnothing=A\times B=A\times C$，而 $A\neq\varnothing$，所以 $C=\varnothing$，即 $B=C$。

(2) 若 $C=\varnothing$，同理 $B=C=\varnothing$。

(3) 若 $B\neq\varnothing$，$C\neq\varnothing$，由 $A\times B=A\times C$，有 $A\times B\subseteq A\times C$ 且 $A\times C\subseteq A\times B$，由定理 1.3.3，故 $B\subseteq C$ 且 $C\subseteq B$，所以 $B=C$。

24. 设 A,B,C,D 是任意集合，证明 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

证明：对任意的 $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，有 $x\in A\cap B$，$y\in C\cap D$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，$y\in C$ 且 $y\in D$，故 $x\in A$，$y\in C$ 且 $x\in B$，$y\in D$，有 $(x,y)\in A\times C$ 且 $(x,y)\in B\times D$，$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，所以 $(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$。

对任意的 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，有 $(x,y)\in A\times C$，且 $(x,y)\in B\times D$，故 $x\in A$，$y\in C$ 且 $x\in B$，$y\in D$，即 $x\in A\cap B$ 且 $y\in C\cap D$，有 $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，因此 $(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$。

所以 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

25. 给定正整数集合 $\mathbf{Z}^+$ 的下列子集：

$A=\{n\mid n<12\}$，$B=\{n\mid n\leqslant 8\}$，

$C=\{n\mid n=2k,k\in\mathbf{Z}^+\}$，$D=\{n\mid n=3k,k\in\mathbf{Z}^+\}$，

$F=\{n\mid n=2k-1,k\in\mathbf{Z}^+\}$。

试用 A,B,C,D 和 F 表达下列集合：

(1) $\{2,4,6,8\}$；

(2) $\{3,6,9\}$；

(3) $\{10\}$；

(4) $\{n\mid n$ 是偶数，$n>10\}$；

(5) $\{n\mid n$ 是偶数且 $n\leqslant 10$，或 n 是奇数，且 $n\geqslant 9\}$。

解：(1) $\{2,4,6,8\}=B-F$；

(2) $\{3,6,9\}=A\cap D$；

(3) $\{10\}=(A-B)-F$；

(4) $\{n\mid n$ 是偶数，$n>10\}=C-A$；

(5) $\{n\mid n$ 是偶数且 $n\leqslant 10$，或 n 是奇数且 $n\geqslant 9\}=(A\cap C)\cup(F-B)$。

26. 给定下列自然数集的子集：

$A=\{1,2,7,8\}$；

$B=\{i\mid i^2<50\}$；

$C=\{i\mid 3$ 整除 $i,0\leqslant i\leqslant 30\}$；

$D=\{i\mid i=2^k,k\in\mathbf{Z}^+,1\leqslant k\leqslant 6\}$。

求下列集合：

(1)　$A\cup(B\cup(C\cup D))$；

(2)　$A\cap(B\cap(C\cap D))$；

(3)　$B-(A\cup C)$；

(4)　$(\overline{A}\cap B)\cup D$。

解：$A=\{1,2,7,8\}$；

$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$；

$C=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$；

$D=\{2,4,8,16,32,64\}$。

则(1)　$A\cup(B\cup(C\cup D))$

$=A\cup B\cup C\cup D$

$=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$；

(2)　$A\cap(B\cap(C\cap D))=A\cap B\cap C\cap D=\varnothing$；

(3)　$A\cup C=\{0,1,2,3,6,7,8,9,12,15,18,21,24,27,30\}$，

$B-(A\cup C)=\{4,5\}$。

(4)　$\overline{A}\cap B=B-A=\{0,3,4,5,6\}$，

$(\overline{A}\cap B)\cup D=\{0,2,3,4,5,6,8,16,32,64\}$。

27. 证明：对任意集合 A 和 B，$\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$。

证明：对任意 $x\in\rho(A)\cap\rho(B)$，则 $x\in\rho(A)$且 $x\in\rho(B)$，即有 $x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$，故 $x\subseteq A\cap B$，有 $x\in\rho(A\cap B)$，所以

$$\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$$

对任意 $x\in\rho(A\cap B)$，则 $x\subseteq A\cap B$，有 $x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$，即 $x\in\rho(A)$且 $x\in\rho(B)$，故 $x\in\rho(A)\cap\rho(B)$，所以

$$\rho(A\cap B)\subseteq\rho(A)\cap\rho(B)$$

综上可得：$\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$。

28. 设 A，B 是集合，证明：$\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$，并给出等号成立的充分必要条件。

证明：对任意的 $x\in\rho(A)\cup\rho(B)$，则 $x\in\rho(A)$或者 $x\in\rho(B)$。

若 $x\in\rho(A)$，则 $x\subseteq A$，而 $A\subseteq A\cup B$，于是 $x\subseteq A\cup B$，故 $x\in\rho(A\cup B)$。

同理可证，若 $x\in\rho(B)$，则有 $x\in\rho(A\cup B)$。

因此 $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$。

要使等号成立，应有 $\rho(A\cup B)\subseteq\rho(A)\cup\rho(B)$。即对任意 $x\in\rho(A\cup B)$，应有 $x\in\rho(A)\cup\rho(B)$，于是由 $x\subseteq A\cup B$，能推出 $x\subseteq A$ 或 $x\subseteq B$，则有 $A\subseteq B$ 或 $A\subseteq B$。

反之，当 $B\subseteq A$ 或 $A\subseteq B$ 时，必有 $\rho(A\cup B)\subseteq\rho(A)\cup\rho(B)$。

因此，要使 $\rho(A)\cup\rho(B)=\rho(A\cup B)$成立的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$。

29. 设 $x\in B$，$y\in B$，证明$\{\{x\},\{x,y\}\}\in\rho(\rho(B))$。

证明：由 $x,y\in B$，得$\{x\}\in\rho(B)$，$\{x,y\}\in\rho(B)$，故$\{\{x\},\{x,y\}\}\subseteq\rho(B)$，所以$\{\{x\},\{x,y\}\}\in\rho(\rho(B))$。

30. 设 S 是任意集合，证明：$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\rho\rho\rho(S)$。

证明：因为$\varnothing\subseteq S$，所以$\varnothing\in\rho(S)$，$\{\varnothing\}\subseteq\rho(S)$，$\{\varnothing\}\in\rho\rho(S)$。又因为$\varnothing\subseteq\rho(S)$，故$\varnothing\in\rho\rho(S)$，所以$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq\rho\rho(S)$，即$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\rho\rho\rho(S)$。

31. 设 A,B 是任意集合，若 $\rho(A)=\rho(B)$，则 $A=B$。

证明：对任意 $x\in A$，则$\{x\}\subseteq A$，有$\{x\}\in\rho(A)$，由 $\rho(A)=\rho(B)$，故$\{x\}\in\rho(B)$，即$\{x\}\subseteq B$，得到 $x\in B$，所以 $A\subseteq B$。

同理可证 $B\subseteq A$，因此 $A=B$。

32. 设 $A=\{a\}$，判定下列各题正确与错误：

(1) $\varnothing\in\rho\rho(A)$；

(2) $\varnothing\subseteq\rho\rho(A)$；

(3) $\{\varnothing\}\subseteq\rho\rho(A)$；

(4) $\{\varnothing\}\in\rho\rho(A)$；

(5) $\{a\}\in\rho\rho(A)$；

(6) $\{a\}\subseteq\rho\rho(A)$。

解：(1) 正确。因为$\varnothing\subseteq\rho(A)$，故有$\varnothing\in\rho\rho(A)$。

(2) 正确。空集$\varnothing$是所有集合的子集。

(3) 正确。因为$\varnothing\in\rho\rho(A)$，故有$\{\varnothing\}\subseteq\rho\rho(A)$。

(4) 正确。因为$\varnothing\in\rho(A)$，故有$\{\varnothing\}\in\rho\rho(A)$。

(5) 错误。因为 $\rho(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$，$\rho\rho(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\varnothing,\{a\}\}\}$。

(6) 错误。

33. 试求在 1 到 10000 之间不能被 4，5 或 6 整除的整数的个数。

解：设 A_i 是 1 到 10000 之间能被 i 整除的整数的集合，则有：

$|A_4|=2500$，$|A_5|=2000$，$|A_6|=1666$，

$|A_4\cap A_5|=500$，$|A_4\cap A_6|=833$，

$|A_5\cap A_6|=333$，$|A_4\cap A_5\cap A_6|=166$，

根据包含排斥原理，有：

$|A_4\cup A_5\cup A_6|=|A_4|+|A_5|+|A_6|-|A_4\cap A_5|-|A_5\cap A_6|-|A_4\cap A_6|+|A_4\cap A_5\cap A_6|=2500+2000+1666-500-833-333+166=4666$，

所以满足题意的整数个数为：$10000-4666=5334$。

34. 设有集合$\{1,2,\cdots,n\}$，其不重复的一个排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

满足条件 $a_i\neq i(i=1,2,\cdots,n)$，则称该排列为一个错列。求证集合$\{1,2,\cdots,n\}$的错列个数

D_n 为

$$D_n=\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)n!$$

证明：设 S 是$\{1,2,\cdots,n\}$的所有不重复排列的集合，则$|S|=n!$。

设有一个排列，如果 j 在第 j 个位置上，称该排列具有性质 P_j，设 A_j 是具有性质 P_j 的排列的集合，故 $A_j\subseteq S$。

对于$\{1,2,\cdots,n\}$中的任意一个错列，当且仅当这个错列不具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 中的任意一个性质，所以全部错列组成的集合为：

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$$

在集合 A_1 中，所有排列具有形式 $1,i_2,i_3,\cdots,i_n$，其中：$i_2,i_3,\cdots,i_n$ 是集合$\{2,3,\cdots,n\}$的一个不重复的排列，因而有$|A_1|=(n-1)!$。

同理当 $1\leqslant j\leqslant n$ 时，有$|A_j|=(n-1)!$。

在集合 $A_1\cap A_2$ 中的排列具有形式 $1,2,i_3,\cdots,i_n$，其中：$i_3,i_4,\cdots,i_n$是$\{3,4,\cdots,n\}$的一个不重复的排列，所以有$|A_1\cap A_2|=(n-2)!$。

同理当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时，有$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$。

一般地，对 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$$

集合$\{1,2,3,\cdots,n\}$中取 k 个元素的组合数是 C_n^k，故由包含排斥原理：

$$\begin{aligned}D_n&=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|\\&=|S|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!+\cdots+(-1)^kC_n^k(n-k)!+\cdots+(-1)^nC_n^n0!\\&=n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!}\\&=\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)n!\end{aligned}$$

35．设由某项调查，发现学生阅读杂志的情况如下：

百分之六十阅读甲类杂志；

百分之五十阅读乙类杂志；

百分之五十阅读丙类杂志；

百分之三十阅读甲类杂志与乙类杂志；

百分之三十阅读甲类杂志与丙类杂志；

百分之三十阅读乙类杂志与丙类杂志；

百分之十阅读三类杂志。

试求：(1)　确定阅读两类杂志的学生的百分比；

(2)　不读任何杂志的学生的百分比。

解：设 A_1 表示阅读甲类杂志学生的集合；

A_2 表示阅读乙类杂志学生的集合；

A_3 表示阅读丙类杂志学生的集合。

则按题意有：$|A_1|=60\%$，$|A_2|=50\%$，$|A_3|=50\%$，

$|A_1\cap A_2|=30\%$，$|A_1\cap A_3|=30\%$，

$|A_2\cap A_3|=30\%$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=10\%$。

(1)　$|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|-3|A_1\cap A_2\cap A_3|$

$=30\%+30\%+30\%-3\times10\%=60\%$。

(2)　$|A_1\cup A_2\cup A_3|$

$=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$

$=60\%+50\%+50\%-30\%-30\%-30\%+10\%$

$=80\%$。

所以，$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=1-|A_1\cup A_2\cup A_3|=20\%$。

36. 证明：

(1)　$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$；

(2)　$A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$不一定成立。

证明：(1)　$(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$=((A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)})\cup((A\cap C)\cap\overline{(A\cap B)})$

$=((A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C}))\cup((A\cap C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))$

$=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})$

$=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{B})$

$=A\cap((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))$

$=A\cap((B-C)\cup(C-B))$

$=A\cap(B\oplus C)$。

(2)　设 $A=\{2,3\}$，$B=\{1,4,7\}$，$C=\{3,5\}$，则 $B\oplus C=\{1,3,4,5,7\}$，$A\cup(B\oplus C)=\{1,2,3,4,5,7\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,7\}$，$A\cup C=\{2,3,5\}$，故有$(A\cup B)\oplus(A\cup C)=\{1,4,5,7\}$，有 $A\cup(B\oplus C)\neq(A\cup B)\oplus(A\cup C)$，因此 $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$ 不一定成立。

37. 设 A，B，C 是任意集合，证明：

(1)　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$；

(2)　$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$。

证明：(1)　$A-(B\cup C)$

$=A\cap\overline{(B\cup C)}$

$=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$

$=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})$

$=(A-B)\cap(A-C)$。

(2) $A-(B\cap C)$

$=A\cap\overline{(B\cap C)}$

$=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

$=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})$

$=(A-B)\cup(A-C)$。

38. 下列各式中哪些成立,哪些不成立,为什么?

(1) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$;

(2) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$;

(3) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$;

(4) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$;

(5) $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$。

解:(1) 不成立。

设 $A=\{a\},B=\{b\},C=\{c\},D=\{d\}$,有

$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$,

$(A\times C)\cup(B\times D)=\{(a,c),(b,d)\}$,即

$(A\cup B)\times(C\cup D)\neq(A\times C)\cup(B\times D)$。

(2) 不成立。

设 $A=\{a,e\},B=\{a,b\},C=\{c,f\},D=\{d)$,有

$(A-B)\times(C-D)=\{(e,c),(e,f)\}$,

$(A\times C)-(B\times D)=\{(a,c),(a,f),(e,c),(e,f)\}$,即

$(A-B)\times(C-D)\neq(A\times C)-(B\times D)$。

(3) 不成立。

设 $A=\{a\},B=\{b\},C=\{c\},D=\{d\}$,有

$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$,

$(A\times C)\oplus(B\times D)=\{(a,c),(b,d)\}$,即

$(A\oplus B)\times(C\oplus D)\neq(A\times C)\oplus(B\times D)$。

(4) 成立。

对任意的$(x,y)\in(A-B)\times C$,有 $x\in A-B,y\in C$,即 $x\in A,x\notin B$ 且 $y\in C$,因此 $x\in A,y\in C$,且 $x\notin B,y\in C$,故$(x,y)\in A\times C$,且$(x,y)\notin B\times C$,所以$(x,y)\in(A\times C)-(B\times C)$,即$(A-B)\times C\subseteq(A\times C)-(B\times C)$。

对任意的$(x,y)\in(A\times C)-(B\times C)$,有$(x,y)\in A\times C$ 且 $(x,y)\notin B\times C$,故 $x\in A,y\in C$,再由$(x,y)\notin B\times C$,得 $x\notin B$,所以 $x\in A-B,y\in C$,即$(x,y)\in(A-B)\times C$,有

$(A\times C)-(B\times C)\subseteq(A-B)\times C$。

综上可得，$(A\times C)-(B\times C)=(A-B)\times C$。

(5) 成立。

$$
\begin{aligned}
(A\oplus B)\times C &=((A-B)\cup(B-A))\times C\\
&=((A-B)\times C)\cup((B-A)\times C)\\
&=((A\times C)-(B\times C))\cup((B\times C)-(A\times C))\\
&=(A\times C)\oplus(B\times C)。
\end{aligned}
$$

39. 证明：对任意集合 A,B,C，有 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ 当且仅当 $C\subseteq A$。

证明：必要性，对任意 $x\in C$，有 $x\in(A\cap B)\cup C$，由 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$，有 $x\in A\cap(B\cup C)$，所以 $x\in A$，即 $C\subseteq A$。

充分性，若 $C\subseteq A$，则 $A\cup C=A$，所以 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$。

40. (1) 已知 $A\cup B=A\cup C$，是否必须 $B=C$？

(2) 已知 $A\cap B=A\cap C$，是否必须 $B=C$？

(3) 已知 $A\oplus B=A\oplus C$，是否必须 $B=C$？

解：(1) 不一定，例如 $A=\{a\}$，$B=\{a,c\}$，$C=\{c\}$，则有 $A\cup B=A\cup C$，而 $B\neq C$。

(2) 不一定，例如 $A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{a,c\}$，则有 $A\cap B=A\cap C$，而 $B\neq C$。

(3) $B=C$。因为 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$，有 $(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C=\varnothing\oplus B=B=\varnothing\oplus C=C$，所以必有 $B=C$。

41. 设 A,B,C 是任意集合，证明：

(1) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$；

(2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})$；

(3) $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)=B-A$。

证明：(1)

$$
\begin{aligned}
&(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)\\
&=((A\cap C)\cup B)\cap(C\cup A)\\
&=(A\cap C\cap(C\cup A))\cup(B\cap(C\cup A))\\
&=(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\\
&=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)。
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(A\cap B)\cup(B\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\
&=(((A\cap B)\cup B)\cap((A\cap B)\cup C)\cap((A\cap B)\cup\overline{A}))\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\
&=(B\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)\cap(A\cup\overline{A})\cap(B\cup\overline{A}))\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\
&=(B\cap(A\cup C))\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\
&=(B\cup(A\cap C\cap\overline{B}))\cap((A\cup C)\cup(A\cap C\cap\overline{B}))\\
&=(B\cup A)\cap(B\cup C)\cap(B\cup\overline{B})\cap(A\cup C)\\
&=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)。
\end{aligned}
$$

(3) 利用吸收律,得:

$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$

$=(A\cup B)-A$

$=(A\cup B)\cap\overline{A}$

$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})$

$=\varnothing\cup(B\cap\overline{A})$

$=B-A$。

42. 已知集合 A,B,C 满足:

$$A\cap C\subseteq B\cap C, A-C\subseteq B-C$$

证明:$A\subseteq B$。

证明:对任意的 $x\in A$,则

(1) 若 $x\in C$,则 $x\in A\cap C$,而 $A\cap C\subseteq B\cap C$,所以 $x\in B\cap C$,故 $x\in B$;

(2) 若 $x\notin C$,则 $x\in A-C$,而 $A-C\subseteq B-C$,所以 $x\in B-C$,故 $x\in B$。

综上可得,$x\in B$,所以 $A\subseteq B$。

43.(1) 设 $A\subseteq B,C\subseteq D$,那么,一定有 $A\cup C\subseteq B\cup D$ 吗?又是否 $A\cap C\subseteq B\cap D$ 一定成立?

(2) 设 $A\subset B,C\subset D$,那么,一定有 $A\cup C\subset B\cup D$ 吗?又是否 $A\cap C\subset B\cap D$ 一定成立?

解:(1) 对于任意的 $x\in A\cup C$,则 $x\in A$ 或 $x\in C$,

若 $x\in A$,而 $A\subseteq B,B\subseteq B\cup D$,则 $x\in B\cup D$,

若 $x\in C$,而 $C\subseteq D,D\subseteq B\cup D$,则 $x\in B\cup D$,

可见,若 $x\in A\cup C$,则必有 $x\in B\cup D$,因此,$A\cup C\subseteq B\cup D$ 一定成立。

易证,$A\cap C\subseteq B\cap D$ 也一定成立。

(2) $A\cup C\subset B\cup D$ 不一定成立。

例如,$A=\{a\},C=\{b\},B=D=\{a,b\}$,显然,$A\subset B,C\subset D$,而 $A\cup C=B\cup D$。

所以,一般地,当 $A\subset B,C\subset D$ 时,可推出 $A\cup C\subseteq B\cup D$。

$A\cap C\subset B\cap D$ 也不一定成立。

例如,$A=\{a,b\},B=\{a,b,c\},C=\{b,d\},D=\{b,d,e\}$,显然,$A\subset B,C\subset D$,而 $A\cap C=B\cap D$。

所以,一般地,当 $A\subset B,C\subset D$ 时,可推出 $A\cap C\subseteq B\cap D$。

44. 设 A,B 是集合,证明以下各式中每个关系式彼此等价:

(1) $A\subseteq B,\overline{B}\subseteq\overline{A},A\cup B=B,A\cap B=A$;

(2) $A\cap B=\varnothing,A\subseteq\overline{B},B\subseteq\overline{A}$;

(3) $A=B,A\oplus B=\varnothing$。

证明：(1)　若 $A\subseteq B$，对任意的 $x\in\overline{B}$，则 $x\notin B$，由 $A\subseteq B$，有 $x\notin A$，$x\in\overline{A}$，所以，$\overline{B}\subseteq\overline{A}$。

若 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$，对任意的 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$。如果 $x\in A$，$x\notin\overline{A}$，由 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$，得 $x\notin\overline{B}$，$x\in B$，故 $A\cup B\subseteq B$；如果 $x\in B$，亦有 $A\cup B\subseteq B$。

而 $B\subseteq A\cup B$，所以 $A\cup B=B$。

若 $A\cup B=B$，对任意的 $x\in A$，因为 $A\subseteq A\cup B$，而 $A\cup B=B$，有 $x\in B$，故 $x\in A\cap B$。于是 $A\subseteq A\cap B$。又因为 $A\cap B\subseteq A$，所以 $A\cap B=A$。

若 $A\cap B=A$，因为 $A\cap B\subseteq B$，故 $A\subseteq B$。

综上可有：$A\subseteq B\Leftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A$。

(2)　若 $A\cap B=\varnothing$，对任意的 $x\in A$，由 $A\cap B=\varnothing$，可知 $x\notin B$，即 $x\in\overline{B}$，所以 $A\subseteq\overline{B}$。

若 $A\subseteq\overline{B}$，由(1)可得，$\overline{\overline{B}}\subseteq\overline{A}$，即 $B\subseteq\overline{A}$。

若 $B\subseteq\overline{A}$，假设存在 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，由 $B\subseteq\overline{A}$，得 $x\in\overline{A}$，$x\notin A$，与 $x\in A$ 矛盾，所以 $A\cap B=\varnothing$。

综上可有：$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq\overline{B}\Leftrightarrow B\subseteq\overline{A}$。

(3)　若 $A=B$，有

$$\begin{aligned}A\oplus B&=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\\&=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{A})\\&=\varnothing\cup\varnothing\\&=\varnothing\text{。}\end{aligned}$$

若 $A\oplus B=\varnothing$，因为 $A\oplus A=\varnothing$，所以 $A\oplus A=A\oplus B$，故 $A=B$(参见习题 40)。

综上可有：$A=B\Leftrightarrow A\oplus B=\varnothing$。

45. 设 A_i 是实数集合，它被定义为：

$$A_0=\{x\mid x<1\},A_i=\{x\mid x\leqslant 1-\frac{1}{i}\}(i=1,2,\cdots)$$

证明：$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_0$。

证明：首先证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq A_0$。

对任意的 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，则必存在某个正整数 k，使 $x\in A_k$，即 $x\leqslant 1-\frac{1}{k}$，则 $x<1$，故 $x\in A_0$。

最后证明 $A_0\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

对任意的 $x\in A_0$，即 $x<1$，则存在 $q>0$，使 $x=1-q$，令 $k=[\frac{1}{q}]+1$$\left([\frac{1}{q}]\right.$表示不超过$\frac{1}{q}$的最大整数$\left.\right)$，则 $x\leqslant 1-\frac{1}{k}$，即 $x\in A_k$，所以 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，故有 $A_0\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

综上可得，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$。

46. 设 B_i 是实数集，它被定义为：

$$B_0 = \{x \mid x \leqslant 1\}, B_i = \{x \mid x < 1 + \frac{1}{i}\} (i = 1, 2, \cdots)$$

证明：$B_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$。

证明：先证 $B_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$。

对任意的 $x \in B_0$，即 $x \leqslant 1$，对任意的 i，均有 $x < 1 + \frac{1}{i}$，故对任意的 i，$x \in B_i$，所以 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$

再证 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq B_0$。

对任意的 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$，则 $x \in B_i (i = 1, 2, \cdots)$，故对任意的 i，都有 $x < 1 + \frac{1}{i}$，则必有 $x \leqslant 1$ 成立。

假设 $x > 1$，则存在 $q > 0$，使 $x = 1 + q$，令 $k = 1 + [\frac{1}{q}]$，则 $x \geqslant 1 + \frac{1}{k}$，故 $x \notin B_k$，与 $x \in B_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 矛盾。因此 $x \leqslant 1$，故 $x \in B_0$，所以 $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq B_0$。

综上可得，$B_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$。

47. 若 $A \cap B \neq \varnothing$，求证：

$$(A \cap B) \times (A \cap B) = (A \times A) \cap (B \times B) = (A \times B) \cap (B \times A)$$

证明：对任意的 $(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$，有 $x \in A \cap B$，$y \in A \cap B$，$x \in A$ 且 $x \in B$，$y \in A$ 且 $y \in B$，得 $x \in A$，$y \in A$ 且 $x \in B$，$y \in B$，于是 $(x, y) \in A \times A$ 且 $(x, y) \in B \times B$，即 $(x, y) \in (A \times A) \cap (B \times B)$，所以 $(A \cap B) \times (A \cap B) \subseteq (A \times A) \cap (B \times B)$。

对任意的 $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$，则 $(x, y) \in A \times B$，且 $(x, y) \in B \times A$，$(x, y) \in A$，$(x, y) \in B$，故 $(x, y) \in A \cap B$，所以 $(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$，故 $(A \times A) \cap (B \times B) \subseteq (A \cap B) \times (A \cap B)$，所以 $(A \cap B) \times (A \cap B) = (A \times A) \cap (B \times B)$。

对任意的 $(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$，有 $x \in A \cap B$，$y \in A \times B$，$x \in A$ 且 $x \in B$，$y \in A$ 且 $y \in B$，得 $x \in A$，$y \in B$ 且 $x \in B$，$y \in A$，于是 $(x, y) \in A \times B$ 且 $(x, y) \in B \times A$，即 $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A)$，所以 $(A \times A) \cap (B \times B) \subseteq (A \times B) \cap (B \times A)$。

反之，对任意的 $(x, y) \in (A \times A) \cap (B \times B)$，有 $(x, y) \in A \times A$ 且 $(x, y) \in B \times B$，故 $(x, y) \in A$ 且 $(x, y) \in B$，所以 $(x, y) \in A \cap B$，故 $(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$，$(A \times B) \cap (B \times A) \subseteq (A \cap B) \times (A \cap B)$，所以 $(A \cap B) \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (B \times A)$。

48. 若 $A \cap B \neq \varnothing$，求证：

(1) $(A\cup B)\times(A\cap B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$；

(2) $(A\cap B)\times(A\cup B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$。

证明：(1) 对任意的$(x,y)\in(A\cup B)\times(A\cap B)$，则 $x\in A\cup B$，$y\in A\cap B$，有 $x\in A$ 或 $x\in B$，$y\in A$ 且 $y\in B$，得 $x\in A$，$y\in A$ 或 $x\in B$，$y\in B$，故$(x,y)\in A\times A$ 或$(x,y)\in B\times B$，即$(x,y)\in(A\times A)\cup(B\times B)$，所以$(A\cup B)\times(A\cap B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$。

(2) 对任意的$(x,y)\in(A\cap B)\times(A\cup B)$，则 $x\in A\cap B$，$y\in A\cup B$，有 $x\in A$ 且 $x\in B$，$y\in A$ 或 $y\in B$，得 $x\in A$，$y\in A$ 或 $x\in B$，$y\in B$，故$(x,y)\in A\times A$ 或$(x,y)\in B\times B$，即$(x,y)\in(A\times A)\cup(B\times B)$，所以$(A\cap B)\times(A\cup B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$。

第二章　关　系

一、内容提要

1. **关系的概念**

关系的两种定义：

(1)　任一序偶的集合 R，就称作一个二元关系。

(2)　设 A,B 是集合，$A\times B$ 的子集 R，称作 A 到 B 的一个二元关系。

空关系：$A\times B$ 的平凡子集 $\varnothing$，称作空关系。

全关系：$A\times B$ 的平凡子集 $A\times B$，称作全关系。

恒等关系：设 A 为集合，令 $I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$，则称 I_A 为 A 上的恒等关系。

关系矩阵：设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，R 是 A 到 B 的二元关系，称矩阵 $\boldsymbol{M}_R=(r_{ij})_{m\times n}$ 为 R 的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}0,(a_i,b_j)\notin R\\1,(a_i,a_j)\in R\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

关系图：设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，R 是 A 到 B 的一个二元关系。在平面上画 $m+n$ 个顶点，分别表示元素 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$。如果 $(a_i,b_j)\in R$，则从顶点 a_i 到 b_j 作一条有向弧。如果 $(a_i,b_j)\notin R$，则从顶点 a_i 到 b_j，没有有向弧。这样所得的图形称作 R 的关系图。

定理 2.1.1：若 R 和 S 是集合 A 到集合 B 的二元关系，则 R 和 S 的交、并、补、差仍是 A 到 B 的二元关系。

2. **复合关系**

复合关系：设 R 是 A 到 B 的关系，S 是 B 到 C 的关系，称 A 到 C 的关系 $R\circ S$ 为 R 与 S 的复合关系，其中

$R\circ S=\{(a,c)\mid a\in A,c\in C$，且存在 $b\in B$，使 $(a,b)\in R,(b,c)\in S\}$

定理 2.2.1：设 R 是集合 A 到 B 的关系，S 是集合 B 到 C 的关系，T 是集合 C 到 D 的关系，则

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$$

定理 2.2.2：设 R_1 是 A 到 B 的关系，R_2 和 R_3 是 B 到 C 的关系，R_4 是 C 到 D 的关系，则

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$;

(2) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$;

(3) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$;

(4) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$。

3. **逆关系**

逆关系：设 R 是 A 到 B 的关系，称 B 到 A 的关系 R^{-1} 为的 R 逆关系，其中

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

定理 2.3.1：设 R, R_1, R_2 是集合 A 到 B 的关系，则

(1) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(2) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;

(3) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

(4) $(A \times B)^{-1} = B \times A$;

(5) $\varnothing^{-1} = \varnothing$;

(6) $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$;

(7) $(R_1 - R_2)^{-1} = R_1^{-1} - R_2^{-1}$;

(8) 若 $R_1 \subseteq R_2$，则 $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$。

定理 2.3.2：设 R 是集合 A 到 B 的关系，S 是 B 到 C 的关系，则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

4. **关系的性质**

自反关系：设 R 是集合 A 上的关系，如果对任意的 $x \in A$，都有 $(x, x) \in R$，则称 R 是 A 上的自反关系。

对称关系：设 R 是集合 A 上的关系，如果对任意的 $(x, y) \in R$，都有 $(y, x) \in R$，则称 R 是 A 上的对称关系。

传递关系：设 R 是集合 A 上的关系，如果对任意的 $(x, y), (y, z) \in R$，都有 $(x, z) \in R$，则称 R 是 A 上的传递关系。

反自反关系：设 R 是集合 A 上的关系，如果对任意的 $x \in A$，都有 $(x, x) \notin R$，则称 R 是 A 上的反自反关系。

反对称关系：设 R 是集合 A 上的关系，如果对任意的 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$，必有 $x = y$，则称 R 是 A 上的反对称关系。

5. **关系的闭包运算**

闭包：设 R, R' 是集合 A 上的关系，如果 R' 满足：

(1) R' 是自反的(对称的、传递的)；

(2) $R \subseteq R'$;

(3) 对于 A 上任一自反的(对称的、传递的)关系 R'',如果 $R\subseteq R''$,必有 $R'\subseteq R''$。

则称 R'是 R 的自反(对称、传递)闭包,记为 $r(R)$($s(R)$,$t(R)$)。

定理 2.5.1:设 R 是集合 A 上的关系,则

(1) R 是自反的当且仅当 $r(R)=R$;

(2) R 是对称的当且仅当 $s(R)=R$;

(3) R 是传递的当且仅当 $t(R)=R$。

定理 2.5.2:设 R 是集合 A 上的关系,则:

(1) $r(R)=R\cup I_A$;

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$;

(3) $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup\cdots$;

(4) 若 A 是有限集合,且 $|A|=n$,则 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$。

6. 相容关系

相容关系:设 R 是集合 A 上的关系,若 R 是自反的、对称的,则称 R 是相容关系。

相容类:设 R 是集合 A 上的相容关系,若 $C\subseteq A$,且对任意的 $x,y\in C$,有 $(x,y)\in R$,则称 C 是由 R 产生的相容类。

最大相容类:设 R 是集合 A 上的相容关系,不能真包含在任何其他相容类中的相容类,称作最大相容类。

7. 等价关系

等价关系:设 R 是集合 A 上的关系,若 R 是自反的、对称的、传递的,则称 R 是等价关系。

等价类:设 R 是集合 A 上的等价关系,对任意的 $a\in A$,集合 $[a]_R=\{x\mid x\in A,(a,x)\in R\}$ 称作元素 a 形成的 R 的等价类。

定理 2.7.1:设 R 是集合 A 上的等价关系,对任意的 $a,b\in A$,有 $(a,b)\in R$ 当且仅当 $[a]_R=[b]_R$。

定理 2.7.2:设 R 是集合 A 上的等价关系,$M_1,M_2,\cdots$是 A 中所有等价类,则

(1) $A=M_1\cup M_2\cup\cdots$;

(2) $M_i\cap M_j=\varnothing(i\neq j)$。

8. 序关系

偏序关系:设 R 是集合 A 上的关系,若 R 是自反的、反对称的、传递的,则称 R 是偏序关系,也称为半序关系,称 (A,R) 为半序集。

最小元:设 $(A,\leqslant)$ 是偏序集,$B\subseteq A$,$b\in B$,满足:对任意的 $x\in B$,有 $b\leqslant x$,则称 b 是 B 的最小元。

最大元:设 $(A,\leqslant)$ 是偏序集,$B\subseteq A$,$b\in B$,满足:对任意的 $x\in B$,有 $x\leqslant b$,则称 b 是 B 的最大元。

极小元：设$(A,\leqslant)$是偏序集，$B\subseteq A$，$b\in B$，满足：不存在 $x\in B$，$x\neq b$，使得 $x\leqslant b$，则称 b 是 B 的极小元。

极大元：设$(A,\leqslant)$是偏序集，$B\subseteq A$，$b\in B$，满足：不存在 $x\in B$，$x\neq b$，使得 $b\leqslant x$，则称 b 是 B 的极大元。

上界：设$(A,\leqslant)$是偏序集，$B\subseteq A$，$a\in A$，满足：对任意的 $x\in B$，有 $x\leqslant a$，则称 a 是 B 的上界。

下界：设$(A,\leqslant)$是偏序集，$B\subseteq A$，$a\in A$，满足：对任意的 $x\in B$，有 $a\leqslant x$，则称 a 是 B 的下界。

最小上界(上确界)：设$(A,\leqslant)$是偏序集，$B\subseteq A$，a 为 B 的上界，满足：对 B 的任一上界 x，有 $a\leqslant x$，则称 a 是 B 的最小上界(上确界)。

最大下界(下确界)：设$(A,\leqslant)$是偏序集，$B\subseteq A$，a 为 B 的下界，满足：对 B 的任一下界 x，有 $x\leqslant a$，则称 a 是 B 的最大下界(下确界)。

全序关系：设$(A,\leqslant)$是偏序集，若对任意的 $x,y\in A$，有 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$，则称$\leqslant$为全序关系或线序关系，称$(A,\leqslant)$为全序集、线序集，或链。

定理 2.8.1：设$(A,\leqslant)$是偏序集，$B\subseteq A$，若 B 中存在最大(小)元，则必是唯一的。

9. **集合的划分和覆盖**

覆盖：设 A 是非空集合，$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，若满足：

(1) $A_i\subseteq A \quad (i=1,2,\cdots,n)$；

(2) $A_i\neq\varnothing \quad (i=1,2,\cdots,n)$；

(3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A$。

则称集合 S 为 A 的覆盖。

划分：设 A 是非空集合，$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，若满足：

(1) $A_i\subseteq A \quad (i=1,2,\cdots,n)$；

(2) $A_i\neq\varnothing \quad (i=1,2,\cdots,n)$；

(3) $A_i\cap A_j=\varnothing \quad (i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$；

(4) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A$。

则称集合 S 为 A 的划分。

加细：给定集合 A 的两个划分$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$和$\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$，若对每一个 B_i，均有 A_j 使 $B_i\subseteq A_j$，则称$\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$的加细。

二、习题与解

1. 设集合 $A=\{2,3,5,7\}$，试写出集合 A 上的小于或等于关系、大于或等于关系。

解：设 R_1,R_2 分别表示集合 A 上的小于或等于关系和大于或等于关系，则

$R_1=\{(2,2),(3,3),(5,5),(7,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7),(5,7)\}$

$R_2=\{(2,2),(3,3),(5,5),(7,7),(3,2),(5,2),(5,3),(7,2),(7,3),(7,5)\}$

2. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，下列各式定义的 R 都是 A 上的关系，试分别写出 R 的元素：

(1) $R=\{(x,y)|x$ 整除 $y)\}$；

(2) $R=\{(x,y)|x$ 是 y 的整数倍$)\}$；

(3) $R=\{(x,y)|(x-y)^2\in A\}$；

(4) $R=\{(x,y)|(x/y)$是素数$\}$。

解：(1) $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}$。

(2) $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(4,2),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(6,2),(6,3)\}$。

(3) $R=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(3,4),(4,3),(5,6),(6,5),(4,6),(6,4),(4,5),(5,4)\}$。

(4) $R=\{(2,1),(3,1),(4,2),(6,3),(5,1),(6,2)\}$。

3. 试列出从集合 $A=\{1,2\}$到集合 $B=\{a,b\}$的所有关系。

解:列出 $A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$的所有子集即列出所有从 A 到 B 的关系，共 $2^4=16$ 个。

4. 对于下列情况，试写出从集合 A 到集合 B 的关系 R 的元素：

(1) $A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,2,4\}$，

$R=\{(a,b)|a,b\in A\cap B\}$；

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，

$R=\{(a,b)|a\in A,b\in B$，且 $a=b^2\}$。

解：(1) $R=\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)\}$。

(2) $R=\{(1,1),(4,2)\}$。

5. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，若 $R_1=\{(x,y)|(x-y)/2$ 是整数$\}$，$R_2=\{(x,y)|(x-y)/3$ 是整数$\}$，求 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，R_1-R_2，$\overline{R_1}$。

解：$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$，

$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4),(4,1)\}$，

则 $R_1\cup R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(1,4),(4,1)\}$，

$R_1\cap R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$，

$R_1-R_2=\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$，

$\overline{R_1}=A\times A-R_1=\{(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$。

6. 在 n 个元素组成的集合上，可以有多少种不同的二元关系？若集合 A，B 的元素个数分别为 $|A|=m$，$|B|=n$，试问从 A 到 B 有多少种不同的二元关系？

解：(1)在 n 个元素组成的集合上，可以有 2^{n^2} 种不同的二元关系。

(2)　若 $|A|=m$，$|B|=n$，则从 A 到 B 有 2^{mn} 种不同的二元关系。

7. 求空关系、恒等关系的关系矩阵和关系图。

解：(1)　空关系的关系矩阵是零矩阵，其关系图由孤立的顶点组成，图中没有一条边。

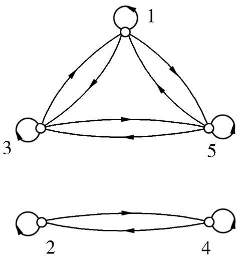
(2)　恒等关系的关系矩阵是恒等矩阵，即 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，其关系图中每个顶点都有一条自回路，但任何两个不同顶点之间没有边。

8. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，试求 A 上的模 2 同余关系 R 的关系矩阵和关系图。

解：$R=\{(x,y)\mid x,y\in A, x\equiv y(\bmod 2)\}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3)\}$，

关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

关系图：

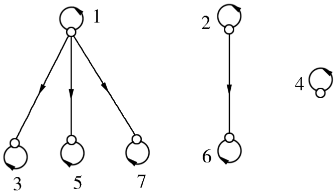


9. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{x\mid 1<x<10$，且 $x\in\mathbf{N}\}$，$R=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B$，且 b 是 a 的奇数倍$\}$。求关系 R 并作出关系矩阵和关系图。

解：$R=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B$，且 b 是 a 的奇数倍$\}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(1,3),(1,5),(1,7),(2,6)\}$，

关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$。

关系图：



10. 试写出下列各式所给出集合 A 上的二元关系 R 的元素，并作出关系矩阵和关系图：

(1)　$A=\{0,1,2,3,4\}$，$R=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y\geqslant 3\}$；

(2)　$A=\{a\mid a\in\mathbf{N}$，且 $a\leqslant 8\}$，$R=\{(x,y)\mid x\geqslant 2,y\leqslant 5,y\mid x\}$；

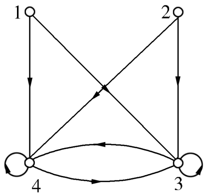
(3)　$A=\{0,1,2,3,4\}$，$R=\{(x,y)\mid 0\leqslant(x-y)\leqslant 3\}$；

(4)　$A=\{2,3,4,5,6\}$，$R=\{(x,y)\mid x$ 与 y 是互质的$\}$。

解：(1)　$R=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4),(4,3\}$，

关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$。

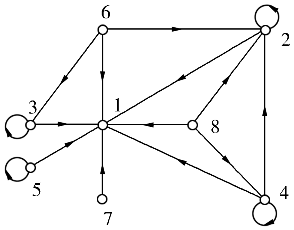
关系图：



(2)　$R=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(7,1),(8,1),(8,2),(8,4)\}$，

$$
\text{关系矩阵 } \boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\text{。}
$$

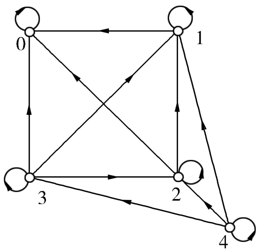
关系图：



(3) $R=\{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(0,0)\}$,

$$
\text{关系矩阵 } \boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}\text{。}
$$

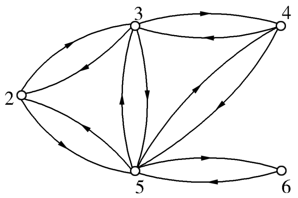
关系图：



(4) $R=\{(2,3),(3,2),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$,

关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$。

关系图：



11. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{1,2,3\}$，R_1 是 A，B 上的二元关系，R_2 是 B，C 上的二元关系，并且 R_1 和 R_2 已经给定：

$$R_1=\{(a,b)\mid a+b=6\}$$

$$R_2=\{(b,c)\mid b-c=1\}$$

试求复合关系 $R_1\circ R_2$，并作出复合关系 $R_1\circ R_2$ 的关系矩阵及关系图。

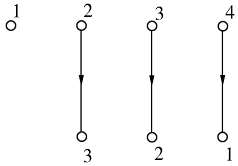
解：$R_1=\{(2,4),(3,3),(4,2)\}$，

$R_2=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$，

则 $R_1\circ R_2=\{(2,3),(3,2),(4,1)\}$，

关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{R_1\circ R_2}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$。

关系图：



12. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 上的二元关系 $R=\{(1,2),(3,4),(2,2)\}$，$S=\{(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)\}$，试求：$R\circ S$，$S\circ R$，$R\circ(S\circ R)$，$(R\circ S)\circ R$，$R^2$，$S^2$，$R^3$。

解：$R\circ S=\{(1,5),(3,2),(2,5)\}$，

$S\circ R=\{(4,2),(3,2),(1,4)\}$，

$R\circ(S\circ R)=\{(3,2)\}$，

$(R\circ S)\circ R=\{(3,2)\}$，

$R^2=\{(1,2),(2,2)\}$，

$S^2=\{(4,5),(3,3),(1,1)\}$，

$R^3=\{(1,2),(2,2)\}$。

13. 设 R_1 和 R_2 是集合 $A=\{0,1,2,3\}$ 上的关系，$R_1=\{(x,y)\mid y=x+1$ 或 $x=2y\}$，$R_2=\{(x,y)\mid x=y+2\}$，试求 $R_1\circ R_2$，$R_2\circ R_1$，$R_1\circ R_2\circ R_1$，$R_1{}^2$，$R_1{}^3$。

解： $R_1=\{(0,1),(1,2),(2,3),(0,0),(2,1)\}$，

$R_2=\{(2,0),(3,1)\}$，

$R_1\circ R_2=\{(1,0),(2,1)\}$，

$R_2\circ R_1=\{(2,1),(2,0),(3,2)\}$，

$R_1\circ R_2\circ R_1=\{(1,1),(1,0),(2,2)\}$，

$R_1{}^2=\{(0,2),(1,3),(1,1),(0,0),(0,1),(2,2)\}$，

$R_1{}^3=\{(0,3),(0,1),(1,2),(0,0),(0,2),(2,3),(2,1)\}$。

14. 设集合 $A=\{0,1,2\}$，R 是 A 上的二元关系，$R=\{(0,1),(0,2),(1,2),(2,2)\}$，求 $\boldsymbol{M}_R$，$\boldsymbol{M}_{R^{-1}}$，$\boldsymbol{M}_{R^2}$，$\boldsymbol{M}_{R\circ R^{-1}}$。

解： $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{M}_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_{R^2}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_{R\circ R^{-1}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}。$$

15. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 和 S 是 A 上的二元关系，其关系矩阵分别为：

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_S=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{M}_{R^{-1}}$，$\boldsymbol{M}_{S^{-1}}$，$\boldsymbol{M}_{(R\circ S)^{-1}}$。

解： $\boldsymbol{M}_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{M}_{S^{-1}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_{(R\circ S)^{-1}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}。$$

16. 设集合 $A=\{2,3,5,7\}$ 上的关系 $R=\{(2,2),(2,3),(3,3),(5,3),(5,7),(7,5),(7,3),(7,7)\}$，试判断 R 是否具有自反性、对称性、传递性、反自反性、反对称性。

解：因为 $(5,5)\notin R$，所以不具有自反性。

因为 $(2,3)\in R$，而 $(3,2)\notin R$，所以不具有对称性。

因为 $(5,7),(7,5)\in R$，而 $(5,5)\notin R$，所以不具有传递性。

因为 $(2,2)\in R$，所以不具有反自反性。

因为 $(5,7),(7,5)\in R$，而 $5\neq 7$，所以不具备反对称性。

17. 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,20\}$ 上的关系 $R=\{(x,y)\mid x,y\in A$ 且 $x+y=20\}$，试判断 R 具有哪几种性质。

解：因为 $1+1\neq 20$，所以 $(1,1)\notin R$，因此 R 不具有自反性。

又 $10+10=20$，故 $(10,10)\in R$，因此 R 不是反自反的。

因为 $(3,17),(17,3)\in R$，因此 R 不是反对称的。

对任意的 $(x,y)\in R$，有 $x+y=20$，于是 $y+x=20$，则 $(y,x)\in R$，因此 R 是对称的。

对于 $(5,15),(15,5)\in R$，而 $(5,5)\notin R$，因此 R 不是传递的。

综上可知，R 只具有对称性。

18. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的关系 $R=\{(a,b),(b,a),(b,b),(c,a),(d,c)\}$。

(1) 试证明 R 不是可传递的；

(2) 找出关系 $R_1\supseteq R$，使得 R_1 是可传递的；

(3) 再找出关系 $R_2\supseteq R$，使得 R_2 也是传递的。

解：(1) 因为 $(a,b),(b,a)\in R$，而 $(a,a)\notin R$，所以 R 不是可传递的。

(2) 令 $R_1=\{(a,b),(d,c),(b,b),(b,a),(c,a),(d,a),(a,a),(c,b),(d,b)\}$。

(3) 令 $R_2=R_1\cup\{(c,c)\}=\{(a,b),(d,c),(b,b),(b,a),(c,a),(d,a),(a,a),(c,b),(d,b),(c,c)\}$。

19. 设集合 $a=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系 $R=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$。

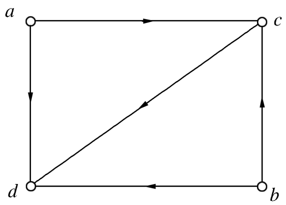
(1) 试写出 R 的关系矩阵；

(2) 试画 R 的关系图；

(3) 试利用关系矩阵和关系图判断 R 具有哪几种性质。

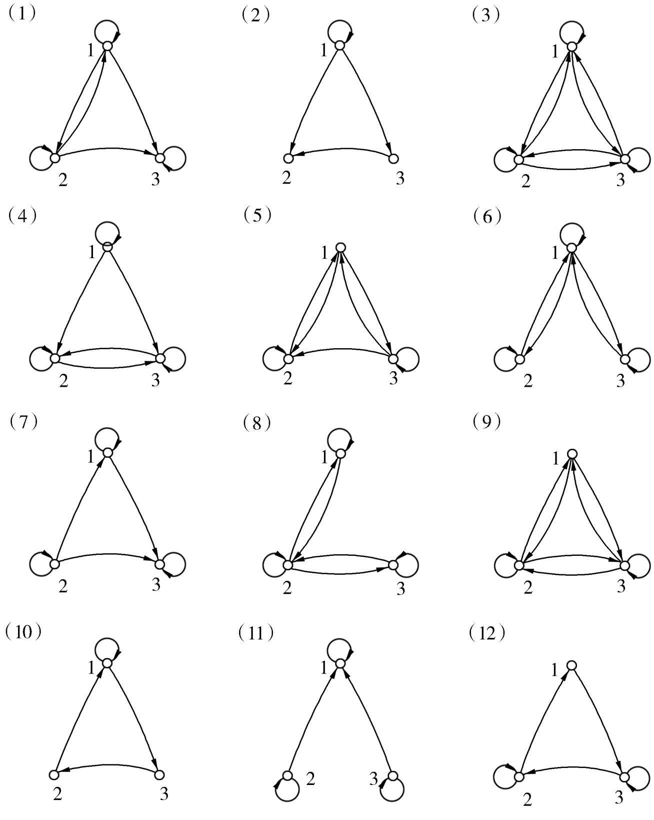
解：(1)　$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$。

(2)



(3)　具有反自反性、反对称性、传递性。

20. 写出下述 12 个关系图的关系矩阵，并讨论它们的性质。



解：(1) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$，具有自反性、传递性。

(2) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$，具有反对称性、传递性。

(3) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，具有自反性、对称性、传递性。

(4) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，具有自反性、传递性。

(5) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，无任何性质。

(6) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，具有对称性、自反性。

(7) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，具有自反性、反对称性、传递性。

(8) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，具有自反性、对称性。

(9) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，具有对称性。

(10) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，具有反对称性。

(11) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，具有自反性、反对称性、传递性。

(12) $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,具有反对称性。

21. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的任意关系,试证明或用反例推翻下列论断:

(1) 若 R_1 和 R_2 都是自反的,则 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的;

(2) 若 R_1 和 R_2 都是对称的,则 $R_1 \circ R_2$ 也是对称的;

(3) 若 R_1 和 R_2 都是反对称的,则 $R_1 \circ R_2$ 也是反对称的;

(4) 若 R_1 和 R_2 都是传递的,则 $R_1 \circ R_2$ 也是传递的。

解:(1) 成立。

对任意的 $x \in A$,因为 R_1, R_2 是自反的,所以 $(x,x) \in R_1$,且 $(x,x) \in R_2$,故有 $(x,x) \in R_1 \circ R_2$,因此 $R_1 \circ R_2$ 是自反的。

(2) 不成立。

例如 $A=\{1,2,3\}$,$R_1=\{(1,2),(2,1)\}$,$R_2=\{(2,2)\}$,则 R_1, R_2 是 A 上的对称关系,而 $R_1 \circ R_2=\{(1,2)\}$不是对称的。

(3) 不成立。

例如 $A=\{1,2,3\}$,$R_1=\{(1,2),(3,1)\}$,$R_2=\{(2,3),(1,1)\}$,则 R_1, R_2 是反对称的,而 $R_1 \circ R_2=\{(1,3),(3,1)\}$不是反对称的。

(4) 不成立。

例如 $A=\{1,2,3\}$,$R_1=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$,$R_2=\{(2,3),(3,1),(2,1)\}$,则 R_1, R_2 是传递关系,而 $R_1 \circ R_2=\{(1,3),(1,1),(2,1)\}$不是传递的。

22. 设 R 为集合 A 上的二元关系,试证明:

(1) R 是对称的,当且仅当 $R=R^{-1}$;

(2) R 是反对称的,当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(3) R 是传递的,当且仅当 $R \circ R \subseteq R$;

(4) R 是自反的,当且仅当 $I_A \subseteq R$。

证明:(1) 必要性,对任意的 $(x,y) \in R$,因为 R 是对称的,所以 $(y,x) \in R$,故 $(x,y) \in R^{-1}$,有 $R \subseteq R^{-1}$。

同理 $R^{-1} \subseteq R$,所以 $R=R^{-1}$。

充分性,对任意的 $(x,y) \in R$,因为 $R=R^{-1}$,所以 $(x,y) \in R^{-1}$,则 $(y,x) \in R$,故 R 是对称的。

(2) 必要性,对任意的 $(x,y) \in R \cap R^{-1}$,即 $(x,y) \in R$ 且 $(x,y) \in R^{-1}$,有 $(y,x) \in R$,由于 R 是反对称的,所以 $x=y$,故 $(x,y) \in I_A$,因此 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

充分性,对任意的 $(x,y),(y,x) \in R$,有 $(x,y) \in R^{-1}$,则 $(x,y) \in R \cap R^{-1}$,而 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$,所以 $x=y$,因此 R 是反对称的。

(3) 必要性,对任意的 $(x,y) \in R \circ R$,则存在 $z \in A$,使得 $(x,z) \in R$,$(z,y) \in R$,由于 R

是传递的，故$(x,y)\in R$，所以$R\circ R\subseteq R$。

充分性，对任意的$(x,y),(y,z)\in R$，则$(x,z)\in R\circ R$，由于$R\circ R\subseteq R$，有$(x,z)\in R$，所以R是传递的。

(4)　必要性，对任意的$(x,x)\in I_A$，由于R是自反的，所以$(x,x)\in R$，有$I_A\subseteq R$。

充分性，对任意的$x\in A$，有$(x,x)\in I_A$，由于$I_A\subseteq R$，故$(x,x)\in R$，所以R是自反的。

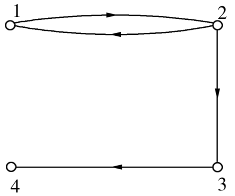
23. 如果R是反对称的关系，则在$R\cap R^{-1}$的关系矩阵中有多少非零值？

解：如果R是反对称的，则在$R\cap R^{-1}$的关系矩阵中只有主对角线上有非零值。

24. 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，A上的二元关系$R=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,4)\}$，试利用$R$的关系图求出$R$的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

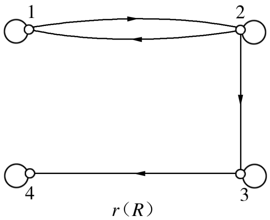
解：

R的关系图：



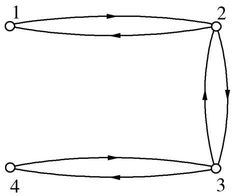
R

$r(R)$的关系图：



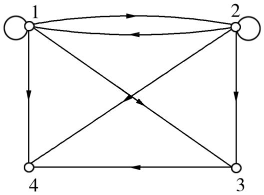
$r(R)$

$s(R)$的关系图：



$s(R)$

$t(R)$的关系图



$t(R)$

25. 设集合$A=\{a,b,c,d\}$，R_1，R_2和R_3都是A上的二元关系，$R_1=\{(a,a),(b,b)\}$，$R_2=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，$R_3=\varnothing$，试求$R_1$，$R_2$和$R_3$的自反闭包、对称闭包和传递闭包，并画出相应的关系图。

解：$r(R_1)=I_A\cup R_1=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$，

$s(R_1)=R_1\cup R_1^{-1}=\{(a,a),(b,b)\}$，

$t(R_1)=R_1\cup R_1^2\cup R_1^3\cup R_1^4=\{(a,a),(b,b)\}$，

$r(R_2)=I_A\cup R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(c,a)\}$，

$s(R_2)=R_2\cup R_2^{-1}=\{(a,b),(b,c),(c,a),(b,a),(c,b),(a,c)\}$，

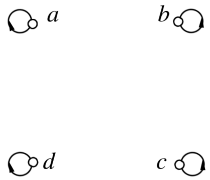
$t(R_2)=R_2\cup R_2^2\cup R_2^3\cup R_2^4=\{(a,b),(b,c),(c,a),(a,c),(b,a),(c,b),(a,a),(b,b),(c,c)\}$，

$r(R_3)=I_A\cup R_3=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$，

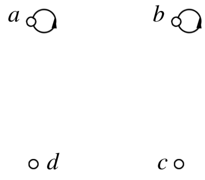
$s(R_3)=R_3\cup R_3^{-1}=\varnothing$，

$t(R_3)=R_3\cup R_3^2\cup R_3^3\cup R_3^4=\varnothing$。

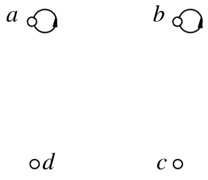
其关系图分别如下：



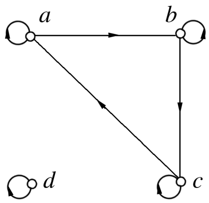
$r(R_1)$



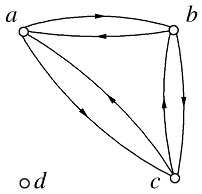
$s(R_1)$



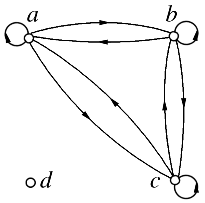
$t(R_1)$



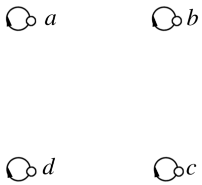
$r(R_2)$



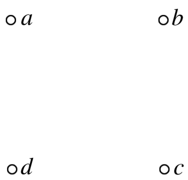
$s(R_2)$



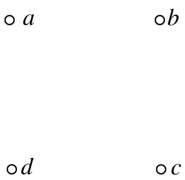
$t(R_2)$



$r(R_3)$



$s(R_3)$



$t(R_3)$

26. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的二元关系，试判断下列命题是否正确；如果正确请作出证明，如果不正确请加以改正。

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$；

(2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$；

(3) $t(R_1\cup R_2)=t(R_1)\cup t(R_2)$。

解：(1) 正确。

$$\begin{aligned}r(R_1\cup R_2)&=(R_1\cup R_2)\cup I_A\\&=R_1\cup I_A\cup R_2\cup I_A\\&=r(R_1)\cup r(R_2)。\end{aligned}$$

(2)　正确。

$$s(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^{-1}$$
$$=R_1\cup R_2\cup R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$$
$$=s(R_1)\cup s(R_2)。$$

(3)　不正确。例如,$R_1=\{(1,2)\}$,$R_2=\{(2,3)\}$,$R_1\cup R_2=\{(1,2),(2,3)\}$,$t(R_1\cup R_2)=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$,$t(R_1)\cup t(R_2)=\{(1,2),(2,3)\}$,应为 $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$。

因为 $R_1,R_2\subseteq R_1\cup R_2$,则 $t(R_1),t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$,所以 $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$。

类似地,还有

(1)　$r(R_1\cap R_2)\subseteq r(R_1)\cap r(R_2)$;

(2)　$s(R_1\cap R_2)\subseteq s(R_1)\cap s(R_2)$;

(3)　$t(R_1\cap R_2)\subseteq t(R_1)\cap t(R_2)$。

27. 设 R 是集合 A 上的一个任意二元关系,$R^*=tr(R)$,证明下列各式:

(1)　$t(t(R))=t(R)$;

(2)　$R\circ R^*=t(R)=R^*\circ R$;

(3)　$(R^*)^*=R^*$。

证明:(1)　因为 $t(R)$是传递的,而传递的二元关系的传递闭包是其自身,所以 $t(t(R))=t(R)$。

(2)　$tr(R)=t(R\cup I_A)$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(R\cup I_A)^i$$
$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(R^i\cup I_A)$$
$$=I_A\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i,$$

则 $R\circ R^*=R\circ(I_A\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i)$

$$=R\circ I_A\cup R\circ\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$$
$$=R\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}(R\circ R^i)$$
$$=R\cup R^2\cup\cdots=t(R),$$

同理可证　$R^*\circ R=t(R)$。

(3)　$(R^*)^*=tr(R^*)=trtr(R)$,因为 $tr(R)$是传递的,所以 $rtr(R)$,也是传递的,故 $trtr(R)=rtr(R)$,又因为 $r(R)$是自反的,则 $tr(R)$也是自反的,故 $rtr(R)=tr(R)$,即$(R^*)^*=R^*$。

28. 设 R 是 A 上的关系,试证明 $\alpha=I_A\cup R\cup R^{-1}$ 是 A 上的相容关系。

证明:因为 $\alpha=I_A\cup R\cup R^{-1}$,所以 $I_A\subseteq\alpha$,即 α 是自反的。

又 $\alpha^{-1}=(I_A\cup R\cup R^{-1})^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}\cup(R^{-1})^{-1}$

$=I_A \cup R \cup R^{-1}=\alpha$,

所以 α 是对称的，因此 α 是相容关系。

29. 设 R 和 S 是 A 上的相容关系，试问：

(1) $R \cup S$ 是 A 上的相容关系吗？

(2) $R \cap S$ 是 A 上的相容关系吗？

(3) $R \circ S$ 是 A 上的相容关系吗？

(4) R^{-1} 是 A 上的相容关系吗？

(5) $R-S$ 是 A 上的相容关系吗？

(6) R^2 是 A 上的相容关系吗？

(7) $A \times A-R$ 是 A 上的相容关系吗？

(8) $r(R-S)$是 A 上的相容关系吗？

解：(1) 是。

因为 R,S 是相容关系，所以 $I_A \subseteq R, I_A \subseteq S, R=R^{-1}, S=S^{-1}$，则有 $I_A \subseteq R \cup S, (R \cup S)^{-1}=R^{-1} \cup S^{-1}=R \cup S$，所以 $R \cup S$ 是自反的、对称的，即是相容的。

(2) 是。

同上，有 $I_A \subseteq R \cap S, (R \cap S)^{-1}=R^{-1} \cap S^{-1}=R \cap S$，所以 $R \cap S$ 是自反的、对称的，即是相容的。

(3) 不是。

例如 $A=\{1,2,3\}, R=I_A \cup \{(1,2),(2,1)\}, S=I_A \cup \{(1,3),(3,1)\}$，

而 $R \circ S=I_A \cup \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3)\}$不是相容的。

(4) 是。

因为 R 是相容关系，有 $I_A \subseteq R$，且 $R=R^{-1}$，故 $I_A=I_A{}^{-1} \subseteq R^{-1}, (R^{-1})^{-1}=R=R^{-1}$，所以 R^{-1} 也是相容关系。

(5) 不是。

例如 $A=\{1,2,3\}, R=\{(1,2),(2,1)\} \cup I_A, S=I_A \cup \{(1,3),(3,1)\}$，而 $R-S=\{(1,2),(2,1)\}$不是相容关系。

(6) 是。

因为 R 是相容关系，有 $I_A \subseteq R$ 且 $R=R^{-1}$，故 $I_A=I_A \circ I_A \subseteq R \circ R=R^2, (R^2)^{-1}=(R \circ R)^{-1}=R^{-1} \circ R^{-1}=R \circ R=R^2$，所以 R^2 也是相容关系。

(7) 不是。

例如 $A=\{1,2,3\}, R=I_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$，而 $A \times A-R=\{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$不是相容关系。

(8) 是。

因为 R,S 是相容关系，所以 $R=R^{-1}, S=S^{-1}$，又 $r(R-S)$是 $R-S$ 的自反闭包，因此是

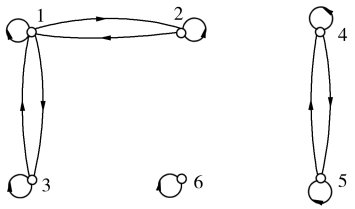
自反的，而$(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}=R-S$，故$R-S$是对称的，则$r(R-S)$也是对称的，因此$r(R-S)$是相容关系。

30．设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$上的关系$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$。试验证$R$是$A$上的相容关系，并求出关系矩阵、关系图及最大相容类。

解：因为$R=R^{-1}$，$I_A\subseteq R$，所以R是相容关系。

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

最大相容类为：$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{4,5\}$，$\{6\}$。

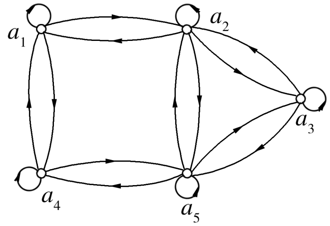


31．给定集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$R$是$A$上的相容关系且$\boldsymbol{M}_R$的简化矩阵为

a_2	1			
a_3	0	1		
a_4	1	0	0	
a_5	0	1	1	1
	a_1	a_2	a_3	a_4

给出关系图并求出最大相容类。

解：最大相容类为：$\{a_2,a_3,a_5\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_4\}$，$\{a_4,a_5\}$。

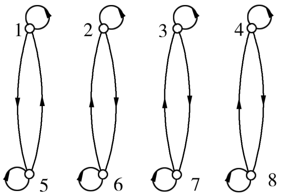


32. 设集合 $A=\{1,2,\cdots,8\}$，A 上的关系 $R=\{(a,b)\mid\dfrac{a-b}{4}$ 为整数，$a,b\in A\}$，即"模 4 同余"关系，试通过关系图来验证 R 是等价关系。

解：对任意的 $x\in A$，有 $\dfrac{x-x}{4}\in\mathbf{Z}$，即 $(x,x)\in R$，所以 R 是自反的。

对任意的 $(x,y)\in R$，有 $\dfrac{x-y}{4}\in\mathbf{Z}$，则 $\dfrac{y-x}{4}\in\mathbf{Z}$，即 $(y,x)\in R$，所以 R 是对称的。

对任意的 $(x,y),(y,z)\in R$，有 $\dfrac{x-y}{4},\dfrac{y-z}{4}\in\mathbf{Z}$，则 $\dfrac{x-y}{4}+\dfrac{y-z}{4}=\dfrac{x-z}{4}\in\mathbf{Z}$。即 $(x,z)\in R$，所以 R 是传递的，因此 R 是等价关系。



33. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，试写出 A 上的所有等价关系。

解：$R_1=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$，

$R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$，

$R_3=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\}$，

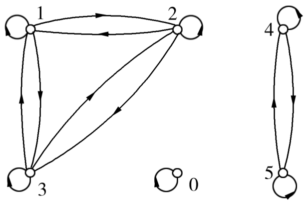
$R_4=\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$，

$R_5=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$。

34. 设集合 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ 上的关系 $R=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$。试利用关系图来验证 R 是 A 上的等价关系，并求出在 A 上构成的等价类。

解：由关系图可以看出图中每个顶点都有自回路，两个顶点之间若有弧，是成双成对的，且具有传递性。

等价类为 $\{0\},\{1,2,3\},\{4,5\}$。



35. 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 上的等价类为 $M_1=\{b,c\}$，$M_2=\{d\}$，$M_3=\{a\}$，$M_4=\{e\}$，试求

此等价类所对应的等价关系。

解：$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(b,c),(c,b)\}$。

36. 试证明集合 A 上的全关系 $R=A\times A$ 是等价关系。

证明：因为 $I_A\subseteq A\times A$，所以 $A\times A$ 是自反的，对任意的 $(x,y)\in A\times A$，即 $(x,y)\in A$，故 $(y,x)\in A\times A$，所以 $A\times A$ 是对称的。

对任意的 $(x,y),(y,z)\in A\times A$，即 $x,y,z\in A$，故 $(x,z)\in A\times A$，所以 $A\times A$ 是传递的。

综上可得，$A\times A$ 是等价关系。

37. 证明若 R 是 A 上的等价关系，则 R^{-1} 也是 A 上的等价关系。

证明：因为 R 是自反的，有 $I_A\subseteq R$，则 $I_A{}^{-1}\subseteq R^{-1}$，即 $I_A\subseteq R^{-1}$，所以 R^{-1} 是自反的。

因为 R 是对称的，有 $R=R^{-1}$，则 $(R^{-1})^{-1}=R=R^{-1}$，所以 R^{-1} 是对称的。

因为 R 是传递的，有 $R\circ R\subseteq R$，则 $(R\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}$，即 $R^{-1}\circ R^{-1}\subseteq R^{-1}$，所以 R^{-1} 是传递的。

综上可得，R^{-1} 也是等价关系。

38. 设 R 和 S 是 A 上的等价关系，证明：

(1) $R\cap S$ 也是 A 上的等价关系；

(2) $R\cup S$ 是 A 上的自反关系和对称关系，但不一定是传递关系。

证明：(1) 因为 R,S 是等价关系，即 R,S 是自反的、对称的、传递的，则 $R\cap S$ 也是自反的、对称的。

又对任意的 $(x,y),(y,z)\in R\cap S$，即 $(x,y),(y,z)\in R$ 且 $(x,y),(y,z)\in S$，由于 R,S 是传递的，所以 $(x,z)\in R$ 且 $(x,z)\in S$，即 $(x,z)\in R\cap S$，所以 $R\cap S$ 是传递的，因此 $R\cap S$ 是等价关系。

(2) 由于 R,S 是等价关系，则 $R\cup S$ 是自反的、对称的，但不一定是传递的。

例如 $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$，

$S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$，

则 R,S 是传递的，而 $R\cup S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$ 不是传递的。

39. 设 R 是集合 A 上的对称和传递关系，证明：如果对于 A 中的每一个元素 a，在 A 中也同时存在一个 b，使 $(a,b)\in R$，则 R 是一个等价关系。

证明：对任意的 $a\in A$，由题设，存在 $b\in A$，使 $(a,b)\in R$，因为 R 是对称的，故 $(b,b)\in R$，又因为 R 是传递的，故 $(a,a)\in R$，所以 R 是自反的，再由已知，R 是等价关系。

40. 设 R 和 S 是非空集合 A 上的等价关系，确定下列各式哪些是 A 上的等价关系，对不是的提供反例证明。

(1) $(A\times A)-R$；　　(2) $R-S$；

(3) R^2；　　(4) $r(R-S)$。

解：(1) 不是。

例如 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$，则 $A\times A-R$ 不具有自反性。

(2) 不是。

例如 $R=\{(1,1),(2,2)\}$，$S=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$，则 $R-S$ 不具有自反性。

(3) 是。

因为 R 是自反的，由 29 题，R^2 也是自反的。

又 R 是对称的，所以 $R^{-1}=R$，则 $(R\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ R^{-1}=R\circ R$，所以 R^2 是对称的。

因为 R 是传递的，所以 $R^2\subseteq R$，则 $R^2\circ R^2\subseteq R\circ R$，即 $(R^2)^2\subseteq R^2$，

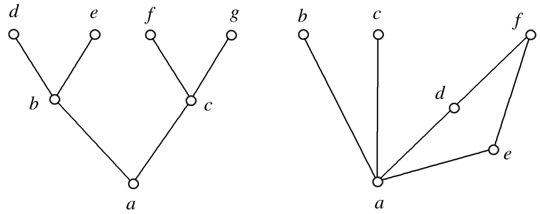
所以 R^2 是传递的，

综上可知 R^2 是等价关系。

(4) 不是。

例如 $A=\{a,b,c,\}$，$R=A\times A$，$S=I_A\cup\{(b,c),(c,b)\}$，则 $r(R-S)=I_A\cup\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$，不具有传递性。

41. 如图所示为两半序集 (A,R) 的哈斯图，试分别写出集合 A 和半序关系 R 的集合表达式。

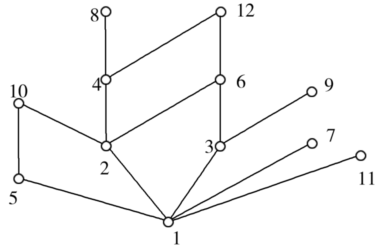


解：(1) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$R=I_a\cup\{(a,b),(a,d),(a,e),(a,c),(a,g),(a,f),(b,d),(b,e),(c,f),(c,g)\}$。

(2) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$R=I_A\cup\{(a,e),(a,d),(a,f),(a,c),(a,b),(d,f),(e,f)\}$。

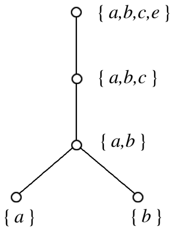
42. 设集合 $A=\{1,2,\cdots,12\}$，R 为整除关系，试画出半序集 (A,R) 的哈斯图。

解：



43. 设集合 $a=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c,e\}\}$，$A$ 在包含关系"$\subseteq$"下构成一个半序集$(A,\subseteq)$，试画出$(A,\subseteq)$的哈斯图。

解：

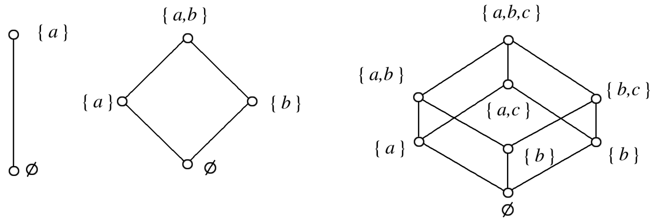


44. 设集合 $A_1=\{a\}$，$A_2=\{a,b\}$，$A_3=\{a,b,c\}$，其幂集 $\rho(A_1)$，$\rho(A_2)$，$\rho(A_3)$上的半序关系为包含关系$\subseteq$，试分别画出半序集$(\rho(A_1),\subseteq)$，$(\rho(A_2),\subseteq)$，$(\rho(A_3),\subseteq)$的哈斯图，并求出各自的最大元和最小元。

解：(1)　最大元为$\{a\}$，最小元为$\varnothing$。

(2)　最大元为$\{a,b\}$，最小元为$\varnothing$。

(3)　最大元为$\{a,b,c\}$，最小元为$\varnothing$。



45. 设 R 是集合 A 上的半序关系，且 $B\subseteq A$，试证明 $R'=R\cap(B\times B)$是 B 上的半序关系。

证明：对任意的 $x\in B$，故$(x,x)\in(B\times B)$，又因为 $B\subseteq A$，R 是自反的，所以$(x,x)\in R$，有$(x,x)\in R\cap(B\times B)$，即$(x,x)\in R'$，所以 R'是自反的。

对任意的(x,y)，$(y,x)\in R\cap(B\times B)$，所以$(x,y)$，$(y,x)\in R$，而 R 是反对称的，有 $x=y$，所以 R'是反对称的。

对任意的(x,y)，$(y,z)\in R\cap(B\times B)$，有$(x,y)$，$(y,z)\in R$ 且(x,y)，$(y,z)\in B\times B$，因为 R 是传递的，有$(x,z)\in R$，又由(x,y)，$(y,z)\in B\times B$，有 $x,y,z\in B$，即$(x,z)\in B\times B$，故$(x,z)\in R\cap(B\times B)$，所以 R'是传递的。

综上可得，R'是 B 上的半序关系。

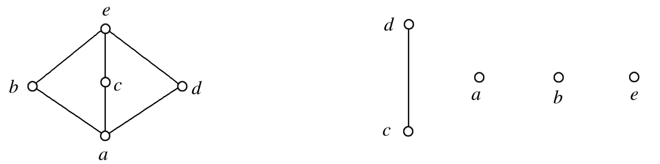
46. 设分别画出下列各半序集(A,R)的哈斯图，并写出 A 的最大元、最小元、极大元和极小元。

(1)　$A=\{a,b,c,d,e\}$，$R=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,e),(c,e),(d,e)\}\cup I_A$；

(2) $A=\{a,b,c,d,e\}$，$R=\{(a,b)\}\cup I_A$。

解：(1) 最大元为$\{e\}$，最小元为 a，极大元是 e，极小元是 a。

(2) 没有最大元和最小元，极大元是 a,b,e,d，极小元是 a,b,e,c。



(1)　　　　　　　　(2)

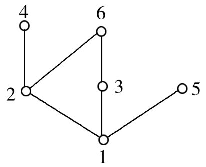
47. 试画出集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$在半序关系“整除”下的哈斯图，并分别求出：

(1) 集合 A 的最大元、最小元、极大元和极小元；

(2) 集合 $B=\{2,3,6\}$的上界、下界、最小上界和最大下界，其中 $B\subseteq A$；

(3) 集合 $C=\{4,5,6\}$的上界、下界、最小上界和最大下界，其中 $C\subseteq A$。

解：

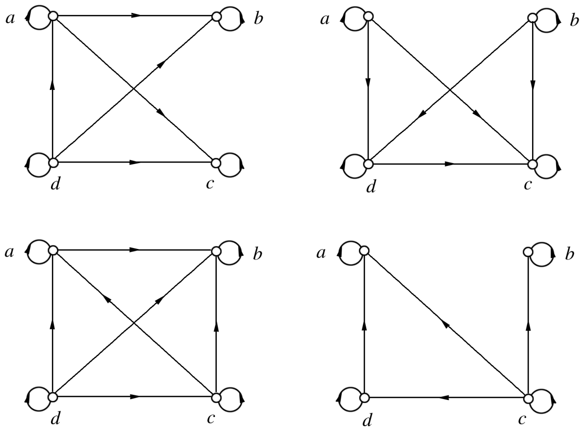


(1) 没有最大元，最小元是 1，极大元是 4，5，6，极小元是 1。

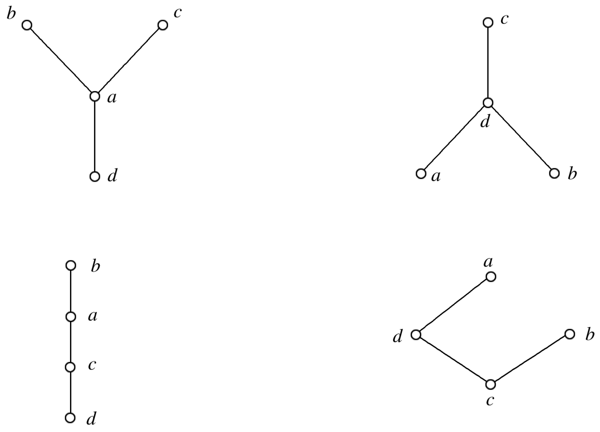
(2) B 的上界是 6，下界是 1，最小上界是 6，最大下界是 1。

(3) 没有上界和最小上界，下界是 1，最大下界是 1。

48. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，图中给出了 A 上的四个关系图，试说明其中哪个具有半序关系，如有，画出哈斯图，并进一步判断哪个是线序关系。



解：都是半序关系，其哈斯图分别如下：



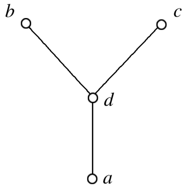
其中(3)是线序关系。

49. 构造下述集合的例子：

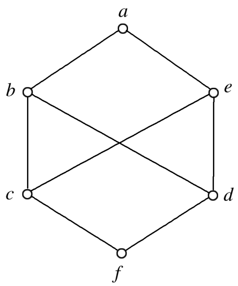
(1)　一个半序集有一个子集，它存在最大下界但没有最大元素；

(2)　一个半序集有一个子集，它存在一上界但没有最小上界。

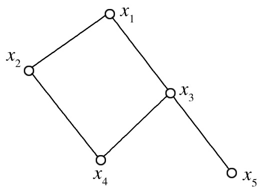
解：(1)　子集 $B=\{b,c\}$，存在最大下界 d，但没有最大元。



(2)　子集 $B=\{c,d\}$，存在上界 a 和 b，但没有最小上界。



50. 设集合 $P=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的半序关系如图所示，找出 P 的最大元素、最小元素、极大元素、极小元素。找出子集$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$\{x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_1,x_2,x_3\}$的上界、下界、最大下界和最小上界。



解：P 的最大元为 x_1，没有最小元，极大元为 x_1，极小元为 x_4 和 x_5。

	上　界	下　界	最大下界	最小上界
$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$	x_1	x_4	x_1	x_4
$\{x_3,x_4,x_5\}$	x_1,x_3	无	无	x_3
$\{x_1,x_2,x_3\}$	x_1	x_4	x_1	x_4

51. 设 R 为从 X 到 Y 的关系，S 为从 T 到 Z 的关系，$A\subseteq X$，令 $R(A)=\{y\mid$存在 $x\in A$，使$(x,y)\in R\}$，证明：

(1)　$R(A)\subseteq Y$；

(2)　$(R\circ S)(A)=S(R(A))$；

(3)　$R(A\cup B)=R(A)\cup R(B)$；

(4)　$R(A\cap B)\subseteq R(A)\cap R(B)$。

证明：(1)　对任意的 $y\in R(A)$，则存在 $x\in A$，使得$(x,y)\in R$，而 $R\subseteq X\times Y$，所以 $y\in Y$，因此 $R(A)\subseteq Y$。

(2)　对任意的 $Z\in(R\circ S)(A)$，则存在 $x\in A$，使得$(x,z)\in R\circ S$，于是存在 $y\in Y$，有$(x,y)\in R$，$(y,z)\in S$，由 $x\in A$，$(x,y)\in R$，有 $y\in R(A)$，再由$(y,z)\in S$，得 $z\in S(R(A))$，所以$(R\circ S)(A)\subseteq S(R(A))$。

对任意的 $z\in S(R(A))$，则存在 $y\in R(A)$，使得$(y,z)\in S$，由 $y\in R(A)$，存在 $x\in A$，使$(x,y)\in R$，由$(x,y)\in R$，$(y,z)\in S$，得$(x,z)\in R\circ S$，又 $x\in A$，故 $z\in(R\circ S)(A)$，所以 $S(R(A))\subseteq(R\circ S)(A)$。

综上可知，$(R\circ S)(A)=S(R(A))$。

(3)　对任意的 $y\in R(A\cup B)$，则存在 $x\in A\cup B$，使得$(x,y)\in R$。

若 $x\in A$，则 $y\in R(A)\subseteq R(A)\cup R(B)$；

若 $x\in B$，则 $y\in R(B)\subseteq R(A)\cup R(B)$。

总之，有 $y\in R(A)\cup R(B)$，故 $R(A\cup B)\subseteq R(A)\cup R(B)$。

对任意的 $y\in R(A)\cup R(B)$，$y\in R(A)$或 $y\in R(B)$。

若 $y\in R(A)$，则存在 $x\in A\subseteq A\cup B$，使$(x,y)\in R$，故 $y\in R(A\cup B)$；

若 $y\in R(B)$，则存在 $x\in B\subseteq A\cup B$，使$(x,y)\in R$，故 $y\in R(A\cup B)$。

总之，有 $R(A)\cup R(B)\subseteq R(A\cup B)$，所以 $R(A\cup B)=R(A)\cup R(B)$。

(4) 对任意的 $y\in R(A\cap B)$，则存在 $x\in A\cap B$，使得 $(x,y)\in R$，于是 $x\in A$ 且 $x\in B$，$(x,y)\in R$，故 $y\in R(A)$ 且 $y\in R(B)$，即 $y\in R(A)\cap R(B)$，所以 $R(A\cap B)\subseteq R(A)\cap R(B)$。

52. 设 A 为具有 n 个元素的有限集，R 是 A 上的关系，则必存在 s 和 t，使得 $R^s=R^t$，且 $0\leqslant s<t\leqslant 2^{n^2}$。

证明：因为 A 上的每个关系都是 $A\times A$ 的子集，由 $|A|=n$，得 $A\times A$ 共有 2^{n^2} 个子集，即在 A 上有 2^{n^2} 个不同的关系。而 $R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{2^{n^2}}$，有 $2^{n^2}+1$ 个，故必存在 s 和 t，使得 $R^s=R^t$，其中 $0\leqslant s<t\leqslant 2^{n^2}$。

53. 设 R,S 是集合 A 上的关系，证明：

(1) $I_A^{-1}=I_A$；

(2) $I_A^n=I_A$（n 为正整数）；

(3) $I_A\circ R=R\circ I_A=R$；

(4) $(R\cup I_A)^n,=I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$；

(5) 若 $R\subseteq S$，则 $R^n\subseteq S^n$。

证明：(1) 因为 $I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$，所以 $I_A^{-1}=\{(x,x)\mid x\in A\}=I_A$。

(2) 对 n 做数学归纳法。

当 $n=1$ 时，显然成立。

当 $n=2$ 时，对任意的 $(x,y)\in I_A^2$，则存在 $z\in A$，使 $(x,z),(z,y)\in A$，所以 $x=z=y$，故 $(x,y)\in I_A$，于是 $I_A^2\subseteq I_A$。

对任意的 $(x,x)\in I_A$，由 $(x,x),(x,x)\in I_A$，有 $(x,x)\in I_A^2$，所以 $I_A\subseteq I_A^2$，于是 $I_A^2=I_A$。

设当 $n=k$ 时，有 $I_A^k=I_A$。当 $n=k+1$ 时，$I_A^{k+1}=I_A^k\circ I_A=I_A\circ I_A=I_A$，即当 $n=k+1$ 时，命题成立，所以 $I_A^n=I_A$。

(3) 对任意的 $(x,y)\in I_A\circ R$，则存在 $z\in A$，使 $(x,z)\in I_A,(z,y)\in R$，故 $x=z$，于是 $(x,y)\in R$，所以 $I_A\circ R\subseteq R$。

对任意的 $(x,y)\in R$，由 $(x,x)\in I_A$，有 $(x,y)\in I_A\circ R$，所以 $R\subseteq I_A\circ R$。

综上可知，$I_A\circ R=R$。同理可证 $R\circ I_A=R$。

(4) 对 n 做数学归纳法。

当 $n=1$ 时，显然成立。

设当 $n=k$ 时，有 $(R\cup I_A)^k=I_A\cup R\cup\cdots\cup R^k$。

当 $n=k+1$ 时，$(R\cup I_A)^{k+1}=(R\cup I_A)^k\circ(R\cup I_A)$

$$=(I_A\cup R\cup\cdots\cup R^k)\circ(R\cup I_A)$$

$$=I_A\circ R\cup R\circ R\cup\cdots\cup R^k\circ R\cup I_A\circ I_A\cup R\circ I_A\cup\cdots\cup R^k\circ I_A$$
$$=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^{k+1}\cup I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k$$
$$=I_A\cup R\cup\cdots\cup R^{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时,命题成立。

(5) 对任意的 $(x,y)\in R^n$,则存在 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$,使 $(x,z_1),(z_1,z_2),\cdots,(z_{n-1},y)\in R$,因为 $R\subseteq S$,所以 (x,z_1) ,$(z_1,z_2),\cdots,(z_{n-1},y)\in S$,于是 $(x,y)\in S^n$,因此 $R^n\subseteq S^n$。

54. 举出 $A=\{a,b,c,d\}$ 上关系 R 的例子,使其具有下述性质:

(1) 既是对称的,又是反对称的;

(2) 既不是对称的,又不是反对称的;

(3) R 是可传递的。

解:(1) $R=I_A=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$。

(2) $R=\{(a,b),(b,a),(c,d)\}$。

(3) $R=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b),(c,d)\}$。

55. 设 R 是集合 A 上的关系,若 R 是对称的和反自反的,证明 R 不是传递的。

证明:假设 R 是传递的。对任意的 $(x,y)\in R$,由 R 是对称的,有 $(y,x)\in R$,又 R 是传递的,有 $(x,x)\in R$,与 R 是反自反的矛盾,所以 R 不是传递的。

56. 设 R 是集合 A 上的关系,若对任意的 $(x,y),(y,z)\in R$,必有 $(x,z)\notin R$,则称 R 是反传递的。证明:R 是反传递的当且仅当 $R^2\cap R=\varnothing$。

证明:必要性,假设存在 $(x,y)\in R^2\cap R$,则 $(x,y)\in R$,且 $(x,y)\in R^2$,存在 $z\in A$,使 $(x,z)\in R$,$(z,y)\in R$,由 R 是反传递的,必有 $(x,y)\notin R$,与 $(x,y)\in R$ 矛盾,所以 $R^2\cap R=\varnothing$。

充分性,对任意的 $(x,y),(y,z)\in R$,则 $(x,z)\in R^2$,由 $R^2\cap R=\varnothing$,必有 $(x,z)\notin R$,所以 R 是反传递的。

57. 设 R 是集合 X 上的一个自反关系,求证:R 是对称和传递的,当且仅当若 (a,b) 和 $(a,c)\in R$,则有 $(b,c)\in R$。

证明:必要性,对任意的 $(a,b),(a,c)\in R$,由 R 是对称的,有 $(b,a),(a,c)\in R$,再由 R 是传递的,有 $(b,c)\in R$。

充分性,对任意的 $(a,b)\in R$,由 R 是自反的,有 $(a,a)\in R$,由 $(a,b),(a,a)\in R$ 及题设,有 $(b,a)\in R$,所以 R 是对称的。

对任意的 $(a,b),(b,c)\in R$,由 R 是对称的,有 $(b,a),(b,c)\in R$,由题设,则 $(a,c)\in R$,所以 R 是传递的。

58. 设 R 为集合 A 上的关系,证明:若 R 是自反和传递的,则 $R\circ R=R$,其逆为真吗?

证明:若 R 是传递的,则 $R\circ R\subseteq R$,对任意的 $(x,y)\in R$,由 R 是自反的,有 $(y,y)\in R$,由 $(x,y),(y,y)\in R$,得 $(x,y)\in R\circ R$,故 $R\subseteq R\circ R$,所以 $R\circ R=R$。

其逆不成立，例如 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,2),(2,2),(1,1)\}$，有 $R\circ R=R$，但 R 不是自反的。

59. 设 R，S 是集合 A 上的对称关系，则 $R\circ S$ 是对称的当且反当 $R\circ S=S\circ R$。

证明：充分性，对任意的 $(x,y)\in R\circ S$，而 $R\circ S=S\circ R$，即有 $(x,y)\in R\circ S$，则存在 $z\in A$，使得 $(x,z)\in S$，$(z,y)\in R$，由 R，S 是对称的，有 $(y,z)\in R$，$(z,s)\in S$，则 $(y,x)\in R\circ S$，所以 $R\circ S$ 是对称的。

必要性，是任意的 $(x,y)\in R\circ S$，由 $R\circ S$ 是对称的，有 $(y,x)\in R\circ S$，则存在 $z\in A$，使得 $(y,z)\in R$，$(z,s)\in S$，因为 R，S 是对称的，所以 $(x,z)\in S$，$(z,y)\in R$，故 $(x,y)\in S\circ R$，有 $R\circ S\subseteq S\circ R$。

同理可证，$S\circ R\subseteq R\circ S$，所以 $R\circ S=S\circ R$。

60. 设 R 是集合 A 上的二元关系，试证：

(1)　若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；

(2)　若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；

(3)　若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的。

证明：(1)　因为 R 是自反的，所以 $I_A\subseteq R$，而 $s(R)=R\cup R^{-1}$，$t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i$，故 $I_A\subseteq s(R)$，$I_A\subseteq t(R)$，所以 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的。

(2)　由 R 是对称的，有 $R=R^{-1}$，而 $r(R)=I_A\cup R$，所以

$$\begin{aligned}r(R)^{-1}&=(I_A\cup R)^{-1}\\&=I_A^{-1}\cup R^{-1}\\&=I_A\cup R\\&=r(R),\end{aligned}$$

则 $r(R)$ 是对称的。

对任意的 $(x,y)\in t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i$，则存在 $k\in\mathbf{Z}^+$，使 $(x,y)\in R^k$，反复利用复合关系的定义，存在 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}\in A$，使 $(x,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{k-1},y)\in R$，由 R 是对称的，有 $(y,x_{k-1}),\cdots,(x_2,x_1),(x_1,x)\in R$，有 $(y,x)\in R^k\subseteq t(R)$，所以 $t(R)$ 是对称的。

(3)　因为 R 是传递的，所以 $R\circ R\subseteq R$，则

$$\begin{aligned}r(R)\circ r(R)&=(I_A\cup R)\circ(I_A\cup R)\\&=((I_A\cup R)\circ I_A)\cup((I_A\cup R)\circ R)\\&=I_A\circ I_A\cup R\circ I_A\cup I_A\circ R\cup R\circ R\\&=I_A\cup R\cup R\cup R\circ R\\&=I_A\cup R\cup R\circ R\\&\subseteq I_A\cup R\cup R\\&=I_A\cup R=r(R),\end{aligned}$$

即 $r(R)\circ r(R)\subseteq r(R)$，所以 $r(R)$ 是传递的。

61. 设 R_1,R_2 是集合 A 上的二元关系,且 $R_1 \subseteq R_2$,求证:

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

证明:(1) 因为 $r(R_1) = R_1 \cup I_A$,$r(R_2) = R_2 \cup I_A$,又 $R_1 \subseteq R_2$,则有 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$。

(2) 因为 $s(R_1) = R_1 \cup R_1^{-1}$,$s(R_2) = R_2 \cup R_2^{-1}$,又 $R_1 \subseteq R_2$,有 $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$,则 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$。

(3) 因为 $R_2 \subseteq t(R_2)$,由 $R_1 \subseteq R_2$,有 $R_1 \subseteq t(R_2)$,而 $t(R_2)$是传递的,由 $t(R_1)$的定义,有 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

62. 设 R 是集合 A 上的二元关系,则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$。

证明:(1)
$$\begin{aligned} rs(R) &= r(R \cup R^{-1}) \\ &= I_A \cup R \cup R^{-1} \\ &= I_A \cup R \cup I_A \cup R^{-1} \\ &= r(R) \cup (I_A \cup R)^{-1} \\ &= r(R) \cup r(R)^{-1} \\ &= sr(R)。\end{aligned}$$

(2) 因为 $R \subseteq r(R)$,则 $t(R) \subseteq tr(R)$,所以 $rt(R) \subseteq rtr(R)$,又 $tr(R)$是自反的,故 $rtr(R) = tr(R)$,即 $rt(R) \subseteq tr(R)$。

同理,$tr(R) \subseteq rt(R)$,故有 $rt(R) = tr(R)$。

(3) 因为 $R \subseteq s(R)$,则 $t(R) \subseteq ts(R)$,所以 $st(R) \subseteq sts(R)$,又 $ts(R)$是对称的,故 $sts(R) = ts(R)$,即有 $st(R) \subseteq ts(R)$。

63. 设 R 是集合 A 上的二元关系,$S = \{(a,b) \mid 存在 c \in A,使(a,c) \in R 且(c,b) \in R\}$,证明:若 R 是等价关系,则 S 也是等价关系。

证明:对任意的 $x \in A$,由 R 是自反的,有$(x,x) \in R$,由 S 的定义,有$(x,x) \in S$,所以 S 是自反的。

对任意的$(x,y) \in S$,则存在 $c \in A$,使$(x,c) \in R$ 且$(c,y) \in R$,因为 R 是对称的,有$(c,x) \in R$,$(y,c) \in R$,由 S 的定义,有$(y,x) \in S$,所以 S 是对称的。

对任意的(x,y),$(y,z) \in S$,则分别存在 $c,d \in A$,使(x,c),(c,y),(y,d),$(d,z) \in R$,由 R 是传递的,有(x,y),$(y,z) \in R$,由 S 的定义,有$(x,z) \in S$,所以 S 是传递的。

综上可得,S 是 A 上的等价关系。

64. 设 A 为正整数序偶集合,在 A 上定义二元关系 R 如下:$((x,y),(u,v)) \in R$ 当且仅

当 $xv=yu$,证明 R 是等价关系。

证明:对任意的$(x,y)\in A$,因为 $xy=yx$,由 R 的定义,有$((x,y),(x,y))\in R$,所以 R 是自反的。

对任意的$((x,y),(u,v))\in R$,则 $xv=yu$,于是 $uy=vx$,由 R 的定义,有$((u,v),(x,y))\in R$,所以 R 是对称的。

对任意的$((x,y),(u,v))$,$((u,v),(w,r))\in R$,则 $xv=yu$,$ur=vw$,于是$\frac{u}{v}=\frac{x}{y}=\frac{w}{r}$,故 $xr=yw$,由 R 的定义,有$((x,y),(w,r))\in R$,所以 R 是传递的。

综上可得,R 是等价关系。

65. 设 R 是 A 上的二元关系,令 $R'=tsr(R)$,则

(1) R'是 A 上的等价关系;

(2) 若有等价关系 R'',使得 $R\subseteq R''$,则 $R'\subseteq R''$,即 R'是包含 R 的最小等价关系。

证明:(1) 因为 $r(R)$是自反的,则 $sr(R)$也是自反的且是对称的,进而 $tsr(R)$也是对称和自反的,且是传递的,所以 $tsr(R)$是等价关系。

(2) 因为 R''是等价关系,则 R''是自反的、对称的和传递的,故 $R''=r(R'')=s(R'')=t(R'')$,由 $R\subseteq R''$,有 $r(R)\subseteq r(R'')=R''$,$sr(R)\subseteq s(R'')=R''$,$tsr(R)\subseteq t(R'')=R''$,即 $R'\subseteq R''$。

66. 有人说:"等价关系中的自反性可以不要,因为自反性可以从对称性和传递性推出:由对称性,$(a,b)\in R$,则$(b,a)\in R$,再由传递性,得$(a,a)\in R$。"你的意见呢?

解:这种说法不对,虽然由对称性和传递性可推出$(a,a)\in R$,但不能保证对任意的 a,都有$(a,a)\in R$。例如,$A=\{a,b,c\}$,$R=\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$,$R$ 是对称的、传递的,但不是自反的。

67. 设 R 是集合 A 上的一个传递和自反关系,定义 A 上的关系 T:$(a,b)\in T$,当且仅当$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$。证明:T 是一个等价关系。

证明:对任意的 $a\in A$,因为 R 是自反的,故有$(a,a)\in R$,由 T 的定义,得$(a,a)\in T$,所以 T 是自反的。

对任意的$(a,b)\in T$,则$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$,即$(b,a)\in R$ 且$(a,b)\in R$,由 T 的定义,得$(b,a)\in T$,所以 T 是对称的。

对任意的(a,b),$(b,c)\in T$,则(a,b),$(b,a)\in R$ 且(b,c),$(c,b)\in R$,因为 R 是传递的,故有$(a,c)\in R$,$(c,a)\in R$,由 T 的定义,得$(a,c)\in T$,所以 T 是传递的。

综上可知,T 是一个等价关系。

68. 设 $C^*=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b$ 为实数,且 $a\neq 0\}$,C^* 上的关系 R 定义为:$(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})\in R$ 当且仅当 $ac>0$,证明 R 是等价关系,并给出 R 的等价类的几何说明。

证明:对任意的 $a+b\mathrm{i}\in C^*$,则 $a\neq 0$,而 $a^2>0$,由 R 的定义,有$(a+b\mathrm{i},a+b\mathrm{i})\in R$,所以 R 是自反的。

对任意的$(a+bi,c+di)\in R$，则$ac>0$，而$ca=ac>0$，由R的定义，有$(c+di,a+bi)\in R$，所以R是对称的。

对任意的$(a+bi,c+di),(c+di,e+fi)\in R$，则$ac>0$且$ce>0$。于是$ac\cdot ce>0$，又$c^2>0$，所以$ae>0$，由$R$的定义，有$(a+bi,e+fi)\in R$，所以$R$是传递的。

综上可知，R是等价关系。

关系R的等价类，就是在平面上第一、第四象限上的点，或第二、第三象限上的点，因为在这两种情况下，任意两个点$(a,b),(c,d)$，都满足$ac>0$。

69. 试在复数集$\mathbf{C}$中给出一个关系，使它是$\mathbf{C}$的一个等价关系，并以此等价关系构成$\mathbf{C}$的划分。

解：对任意的$(a+bi,c+di)\in\mathbf{C}$，定义关系R为：

$$(a+bi,c+di)\in R \text{ 当且仅当 } a^2+b^2=c^2+d^2$$

对任意的$a+bi\in\mathbf{C}$，因为$a^2+b^2=a^2+b^2$，由R的定义，有$(a+bi,a+bi)\in R$，所以R是自反的。

对任意的$(a+bi,c+di)\in R$，则$a^2+b^2=c^2+d^2$，而$c^2+d^2=a^2+b^2$，由R的定义，有$(c+di,a+bi)\in R$，所以R是对称的。

对任意的$(a+bi,c+di),(c+di,e+fi)\in R$，则$a^2+b^2=c^2+d^2,c^2+d^2=e^2+f^2$，故$a^2+b^2=e^2+f^2$，由$R$的定义，$(a+bi,e+fi)\in R$，所以$R$是传递的。

综上可知，R是等价关系。

关系R所决定的划分，是复平面上以原点为中心的圆的集合，即每个半径r对应一个等价类，该等价类对应圆上点的集合。

70. 设R是集合A上的二元关系，如果对任意的$(x,y),(y,z)\in R$，有$(z,x)\in R$，则称R是循环的。证明：R是等价关系当且仅当R是自反和循环的。

证明：必要性，对任意的$(x,y),(y,z)\in R$，因为R是传递的，有$(x,z)\in R$，又R是对称的，所以$(z,x)\in R$。所以R是自反的、循环的。

充分性，对任意的$(x,y)\in R$，因为R是自反的，所以$(x,x)\in R$，由$(x,x),(x,y)\in R$，及R是循环的，有$(y,x)\in R$，所以R是对称的。

对任意的$(x,y),(y,z)\in R$，因为R是循环的，所以$(z,x)\in R$，又R是对称的，有$(x,z)\in R$，所以R是传递的。

综上可知，R是等价关系。

71. 设$C=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$为集合A的覆盖，试由此覆盖确定A上的一个相容关系，并说明在什么条件下，此相容关系为等价关系。

解：令$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\cdots\cup A_n\times A_n$，则$R$是$A$上的相容关系。

对任意的$x\in A$，因为$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，则必存在正整数k，$1\leqslant k\leqslant n$，使$x\in A_k$，故$(x,x)\in A_k$

$\times A_k$，由 R 的定义，有$(x,x)\in R$，所以 R 是自反的。

对任意的$(x,y)\in R$，必存在正整数 k，$1\leqslant k\leqslant n$，使$(x,y)\in A_k\times A_k$，则$(y,x)\in A_k\times A_k$，所以 R 是对称的。

综上可知，R 是相容关系。

只有当此覆盖是 A 划分时，此相容关系 R 为 A 上的等价关系。

72. 设 R 是集合 A 上的二元关系，如果 R 是传递的和反自反的，则称 R 是拟序关系，证明：

(1) 如果 R 是 A 上的拟序关系，则 $r(R)$是偏序关系；

(2) 如果 R 是 A 上的偏序关系，则 $R-I_A$ 是拟序关系。

证明：(1) 因为 $r(R)$是 R 的自反闭包，必是自反的。

对任意的(a,b)，$(b,a)\in r(R)=R\cup I_A$，则有以下几种情况：

① (a,b)，$(b,a)\in I_A$，则有 $a=b$；

② (a,b)，$(b,a)\in R$，因为 R 是传递，故$(a,a)\in R$，而 R 又是反自反的，所以这种情况不可能；

③ $(a,b)\in R$，$(b,a)\in I_A$，则有 $a=b$，亦与 R 的反自反性矛盾；

④ $(a,b)\in I_A$，$(b,a)\in R$，则有 $a=b$，亦与 R 的反自反性矛盾。

总之，当(a,b)，$(b,a)\in r(R)$时，必有 $a=b$，所以 $r(R)$是反对称的。

若 R 是传递的，由 60 题知 $r(R)$也是传递的。

综上可知，$r(R)$是偏序关系。

(2) 对任意的(x,y)，$(y,z)\in R-I_A$，则(x,y)，$(y,z)\in R$ 且(x,y)，$(y,z)\notin I_A$，因为 R 是传递的，则$(x,z)\in R$，且必有$(x,z)\notin I_A$。

假设$(x,z)\in I_A$，则有 $x=z$，即(x,y)，$(y,x)\in R$，而 R 是反对称的，故 $x=y$，与$(x,y)\notin I_A$ 矛盾，所以$(x,z)\notin I_A$，故$(x,z)\in R-I_A$，因此 $R-I_A$ 是传递的。

如果存在 $x\in A$，使$(x,x)\in R-I_A$，则$(x,x)\in R$，$(x,x)\notin I_A$，矛盾。所以对任意的 $x\in A$，有$(x,x)\notin R-I_A$，因此 $R-I_A$ 是反自反的。

综上可知，$R-I_A$ 是拟序关系。

73. 设 R 是集合 A 上的二元关系，证明：

(1) R 是拟序关系，当且仅当 $R\cap R^{-1}=\varnothing$ 和 $R=t(R)$；

(2) R 是偏序关系，当且仅当 $R\cap R^{-1}=I_A$ 和 $R=tr(R)$。

证明：(1) 必要性，若 R 是拟序关系，则 R 是传递的和反自反的，所以 $R=t(R)$。

假设存在$(x,y)\in R\cap R^{-1}$，则$(x,y)\in R$ 且$(x,y)\in R^{-1}$，即(x,y)，$(y,x)\in R$，而 R 是传递的，有$(x,x)\in R$，与 R 的反自反性矛盾。所以 $R\cap R^{-1}=\varnothing$。

充分性，由 $R=t(R)$可知，R 是传递的。

假设存在 $x\in A$，有$(x,x)\in R$，则$(x,x)\in R^{-1}$，故$(x,x)\in R\cap R^{-1}$，与 $R\cap R^{-1}=\varnothing$矛

盾。则对任意的 $x\in A$，有 $(x,x)\notin R$，所以 R 是反自反的。

综上可知，R 是拟序关系。

(2) 必要性，若 R 是偏序关系，则 R 是自反的、反对称的和传递的，故 $R=r(R)=t(R)$，$tr(R)=t(R)=R$。

由 R 是反对称的，有 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

由 R 是自反的，可知 R^{-1} 也是自反的，则有 $I_A\subseteq R$，$I_A\subseteq R^{-1}$，故 $I_A\subseteq R\cap R^{-1}$，所以 $R\cap R^{-1}=I_A$。

充分性，由 $R=tr(R)$ 可知，R 是传递的，又 $r(R)$ 是自反的，由 60 题知，$tr(R)$ 也是自反的。

因为 $R\cap R^{-1}=I_A$，自然有 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，所以 R 是反对称的。

综上可知，R 是偏序关系。

74. 设 R 是集合 A 上的二元关系，如果 R 是反自反的、反对称的和传递的，则称 R 是严格序关系。证明：

(1) 如果 R 是偏序关系，则 $R-I_A$ 是严格序关系；

(2) 如果 R 是严格序关系，则 $r(R)$ 是偏序关系。

证明：(1) 假设存在 $x\in A$，使 $(x,x)\in R-I_A$，则 $(x,x)\in R$ 且 $(x,x)\notin I_A$，矛盾。故对任意的 $x\in A$，有 $(x,x)\notin R-I_A$，所以 $R-I_A$ 是反自反的。

对任意的 $(x,y),(y,z)\in R-I_A$，有 $(x,y),(y,z)\in R$ 且 $(x,y),(y,z)\notin I_A$，由 R 是传递的，有 $(x,z)\in R$，且必有 $(x,z)\notin I_A$。

假设 $(x,z)\in I_A$，则 $x=z$，由 $(x,y),(y,z)\in R$ 及 R 的反对称性，有 $x=y$，与 $(x,y)\notin I_A$ 矛盾，所以 $(x,z)\notin I_A$，故 $(x,z)\in R-I_A$，因此 $R-I_A$ 是传递的。

对任意的 $(x,y),(y,x)\in R-I_A$，则 $(x,y),(y,x)\in R$，由 R 的反对称性知 $x=y$，所以 $R-I_A$ 是反对称的。

综上可知，$R-I_A$ 是严格序关系。

(2) 显然，$r(R)$ 是自反的。

因为 R 是反对称的，所以 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，又 $I_A\subseteq I_A$，则

$$
\begin{aligned}
&r(R)\cap r(R)^{-1}\\
&=(R\cup I_A)\cap(R\cup I_A)^{-1}\\
&=(R\cup I_A)\cap(R^{-1}\cup I_A^{-1})\\
&=(R\cup I_A)\cap(R^{-1}\cup I_A)\\
&\subseteq I_A\cup I_A\\
&=I_A,
\end{aligned}
$$

所以 $r(R)$ 是反对称的。

因为 R 是传递的，有 60 题知 $r(R)$ 也是传递的。

综上可知，$r(R)$是偏序关系。

75．设 R 为集合 A 上的偏序关系，S 为集合 B 上的偏序关系，定义二元关系 T 如下：$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in T$ 当且仅当$(x_1,x_2)\in R$ 且$(y_1,y_2)\in T$，证明 T 是 $A\times B$ 上的偏序关系。

证明：对任意的$(x,y)\in A\times B$，则 $x\in A$ 且 $y\in B$，因为 R,S 分别是 A,B 上的偏序关系，故有$(x,x)\in R$，$(y,y)\in S$，由 T 的定义，有$((x,y),(x,y))\in T$，所以 T 是自反的。

对任意的$((x_1,y_1),(x_2,y_2))$，$((x_2,y_2),(x_1,y_1))\in T$，则$(x_1,x_2)$，$(x_2,x_1)\in R$ 且(y_1,y_2)，$(y_2,y_1)\in S$，而 R 和 S 都是反对称的，故 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$，于是有$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$，所以 T 是反对称的。

对任意的$((x_1,y_1),(x_2,y_2))$，$((x_2,y_2),(x_3,y_3))\in T$，则$(x_1,x_2)$，$(x_2,x_3)\in R$ 且(y_1,y_2)，$(y_2,y_3)\in S$，而 R 和 S 都是传递的，故$(x_1,x_3)\in R$ 且$(y_1,y_3)\in S$，由 T 的定义，有$((x_1,y_1),(x_3,y_3))\in T$，所以 T 是传递的。

综上可知，T 是偏序关系。

76．设 $\mathbf{Z}^+$ 上的二元关系为整除关系，$T=\{1,2,\cdots,10\}$，求 T 的上界、下界、最小上界、最大下界。

解：T 的上界为 1，2，…，10 的公倍数，最小上界是 1，2，…，10 的最小公倍数 2520，T 的下界为 1，2，…，10 的公因数 1，最大下界也是 1。

77．设 R 是集合 A 上的偏序关系，若对 A 的任一非空子集皆存在最小元，则称 R 是良序关系，证明：若 R 是良序关系，则 R 必是线序关系。

证明：对任意的 $x,y\in A$，往证$(x,y)\in R$ 或者$(y,x)\in R$。

因为$\{x,y\}\subseteq A$，由于 R 是良序关系，则在$\{x,y\}$中必存在最小元，或者是 x，或者是 y。若是 x，则有$(x,y)\in R$；若是 y，则有$(y,x)\in R$，所以 R 是线序关系。

78．设 R 是有限集合 A 上的偏序关系，如果 R 是线序关系，则 R 是良序关系。

证明：设 B 是 A 的任一非空子集，往证 B 中存在最小元。

因为 A 是有限集合，所以 B 也是有限集，不妨设 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geqslant 1)$，对 n 作数学归纳法。

当 $n=1$ 时，则由 R 是自反的，有$(a_1,a_1)\in R$，故 a_1 是最小元。

设 $n=k$ 时，B 中存在最小元，设为 a。当 $n=k+1$ 时，由归纳假设$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$中有最小元 a，因为 R 是线序关系，则对于 a_{k+1} 和 a，有$(a,a_{k+1})\in R$，或者$(a_{k+1},a)\in R$，如果$(a,a_{k+1})\in R$，则 a 是$\{a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}\}$的最小元；如果$(a_{k+1},a)\in R$，由 R 是传递的及 a 是$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$的最小元，有 a_{k+1} 是$\{a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}\}$的最小元。

因此 A 的任一非空子集皆有最小元，所以 R 是良序关系。

79．设 R 是集合 S 上的关系，S'是 S 的子集，定义 S'上的关系 R'如下：$R'=R\cap(S'\times S')$，证明：

(1) 如果 R 在 S 上是传递的，则 R' 在 S' 上是传递的；

(2) 如果 R 是 S 上的偏序关系，则 R' 是 S' 上的偏序关系；

(3) 如果 R 是 S 上的线序关系，则 R' 是 S' 上的线序关系；

(4) 如果 R 是 S 上的良序关系，则 R' 是 S' 上的良序关系。

证明：(1) 对任意的 $(x,y),(y,z)\in R'$，则 $(x,y),(y,z)\in R$ 且 $(x,y),(y,z)\in S'\times S'$，由 R 是传递的，有 $(x,z)\in R$，又 $x,y,z\in S'$，故 $(x,z)\in S'\times S'$，于是 $(x,z)\in R\cap S'\times S'=R'$，即 R' 是传递的。

(2) 对任意的 $x\in S'$，因为 $S'\subseteq S$ 及 R 是 S 上的偏序关系，有 $(x,x)\in R$ 且 $(x,x)\in S'\times S'$，于是 $(x,x)\in R\cap(S'\times S')=R'$，即 R' 是自反的。

对任意的 $(x,y),(y,x)\in R'$，有 $(x,y),(y,x)\in R$，由 R 是反对称的，有 $x=y$，即 R' 是反对称的。

再由(1)可知，R' 是传递的，所以 R' 是偏序关系。

(3) 由(2)可知，如果 R 是 S 上的偏序关系，则 R' 是 S' 上的偏序关系。

对任意的 $x,y\in S'$，有 $(x,y),(y,x)\in S'\times S'$，又 $S'\subseteq S$，而 R 是 S 上的线序关系，所以或者 $(x,y)\in R$，或者 $(y,x)\in R$，于是或者 $(x,y)\in R'$，或者 $(y,x)\in R'$，因此 R' 是线序关系。

(4) 由(2)可知，如果 R 是 S 上的偏序关系，则 R' 是 S' 上的偏序关系。

对于 S' 的任一非空子集 B，由 $B\subseteq S'\subseteq S$ 及 R 是 S 上的良序关系，于是存在 $a\in B$，使得对任意的 $x\in B$，有 $(a,x)\in R$，又 $a,x\in B\subseteq S'$，有 $(a,x)\in S'\times S'$，所以 $(a,x)\in R'$，即 a 是关于偏序关系 R' 在 B 上的最小元，因此 R' 是良序关系。

80. 设 Π_1 和 Π_2 是非空集合 A 的划分，说明下列各式，哪些是 A 的划分，哪些可能是 A 的划分，哪些不是 A 的划分，并给予证明。

(1) $\Pi_1\cup\Pi_2$；

(2) $\Pi_1\cap\Pi_2$；

(3) $\Pi_1-\Pi_2$。

证明：(1) 当 $\Pi_1=\Pi_2$ 时，$\Pi_1\cup\Pi_2=\Pi_1$，故 $\Pi_1\cup\Pi_2$ 是 A 的划分。

设 $\Pi_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$\Pi_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$。

当 $\Pi_1\neq\Pi_2$ 时，不妨设 $B_i\in\Pi_2$，而 $B_i\notin\Pi_1$，但 $B_i\in\Pi_1\cup\Pi_2$。

若 $\Pi_1\cup\Pi_2$ 是 A 的划分，则 $B_i\cap A_1=B_i\cap A_2=\cdots=B\cap A_n=\varnothing$。故对任意 $x\in B_i\subseteq A$，$x\notin A_1$，$x\notin A_2$，$\cdots$，$x\notin A_n$，从而 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A$，与 $x\in A$ 矛盾。所以当 $\Pi_1\neq\Pi_2$ 时，$\Pi_1\cup\Pi_2$ 不是 A 的划分。

(2) 当 $\Pi_1=\Pi_2$ 时，$\Pi_1\cap\Pi_2=\Pi_1$ 是 A 的划分。

首先证明，若 $\Pi'\subset\Pi$，Π 是 A 的划分，则 Π' 不可能是 A 的划分。

假设 Π' 是 A 的划分，由 $\Pi'\subset\Pi$，存在 $A_0\in\Pi$，$A_0\notin\Pi'$，对于 Π' 中的任一分块 A'，有

$A'\cap A_0=\varnothing$，则对于任意的 $x\in A_0\subseteq A$，$x\notin A'$，故 $\bigcup\limits_{A'\in\Pi'}A'\neq A$，与 $\bigcup\limits_{A'\in\Pi'}A'=A$ 矛盾。所以划分的任一真子集不可能构成 A 的划分。

最后再证，当 $\Pi_1\neq\Pi_2$ 时，$\Pi_1\cap\Pi_2$ 不是 A 的划分。

设 $\Pi_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$\Pi_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$。因为 $\Pi_1\neq\Pi_2$，不妨设存在 $B_i\in\Pi_2$，而 $B_i\notin\Pi_1$，故 $B_i\notin\Pi_1\cap\Pi_2$，由此可得 $\Pi_1\cap\Pi_2\subset\Pi_2$，$\Pi_2$ 是 A 的划分，所以 Π_2 的真子集 $\Pi_1\cap\Pi_2$ 不是 A 的划分。

(3)　若 $\Pi_1\cap\Pi_2=\varnothing$，$\Pi_1-\Pi_2=\Pi_1$ 是 A 的划分。

若 $\Pi_1\cap\Pi_2\neq\varnothing$，存在 $A_i\in\Pi_1$ 且 $A_i\in\Pi_2$，故 $A_i\notin\Pi_1-\Pi_2$，则 $\Pi_1-\Pi_2\subset\Pi_1$，Π_1 是 A 的划分，其真子集 $\Pi_1-\Pi_2$ 不是 A 的划分。

81. 设 R 是集合 A 上的等价关系，$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是 A 的子集的集合，当 $i\neq j$ 时，满足 $A_i\nsubseteq A_j$，且对任意的 $a,b\in A$，$(a,b)\in R$ 当且仅当 a,b 同在一个 A_i 中，证明：$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是 A 的一个划分。

证明：(1)　若某个 $A_i=\varnothing$，则对于 $i,j\neq i$，有 $A_i\subseteq A_j$，与 $A_i\nsubseteq A_j$ 矛盾，所以 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 A 的非空子集。

(2)　因为 $A_i\subseteq A(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\subseteq A$。

对任意的 $x\in A$，因为 R 是等价关系，所以$(x,x)\in R$，则存在 A_i，使 $x\in A_i\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，故 $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A$。

(3)　当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$。

假设 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$，则存在 $x\in A_i\cap A_j$，对任意的 $y\in A_i$，则$(x,y)\in R$，再由 $x\in A_i$，有 $y\in A_j$，故 $A_i\subseteq A_j$，与 $A_i\nsubseteq A_j$ 矛盾。

综上可得，$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是 A 的划分。

82. 设$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是集合 A 的划分，若 $A_i\cap B\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,n)$，证明：$\{A_1\cap B,A_2\cap B,\cdots,A_n\cap B\}$是集合 $A\cap B$ 的划分。

证明：(1)　因为 $A_i\subseteq A$，所以 $A_i\cap B\subseteq A\cap B$，故 $A_i\cap B$ 是 $A\cap B$ 的非空子集$(i=1,2,\cdots,n)$。

(2)　由 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A$，可得，

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)&=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\cdots\cup(A_n\cap B)\\&=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap B\\&=A\cap B。\end{aligned}$$

(3)　当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$，则

$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=A_i\cap A_j\cap B\cap B$

$$=\varnothing\cap B$$
$$=\varnothing,$$

综上可得，$\{A_1\cap B, A_2\cap B, \cdots, A_n\cap B\}$是集合 $A\cap B$ 的划分。

83. 设 Π_1 和 Π_2 是非空集合 A 上的划分，R_1 和 R_2 分别由 Π_1 和 Π_2 诱导的等价关系，则 Π_2 细分 Π_1 的充分必要条件是 $R_2\subseteq R_1$。

证明：必要性，对任意的$(a,b)\in R_2$，因为 R_2 是由 Π_2 所诱导的，故在 Π_2 中存在一个非空子集 A_2，使得 $a,b\in A_2$。

对于 A_2，因为 Π_2 细分 Π_1，故在 Π_1 中存在一个非空子集 A_1，使 $A_2\subseteq A_1$，则 $a,b\in A_1$，又由于 R_1 是由 Π_1 所诱导的，所以$(a,b)\in R_1$，因此 $R_2\subseteq R_1$。

充分性，对于 Π_2 中的任一非空子集 A_2，因为 $A_2\neq\varnothing$，设 $a\in A_2$，则 $A_2=[a]_{R_2}=\{x\mid(x,a)\in R_2\}$，由此可得 $A_1=[a]_{R_1}=\{x\mid(x,a)\in R_1\}$，因为 $R_2\subseteq R_1$，有 $A_2\subseteq A_1$，且 $A_1\in\Pi$，所以 Π_2 细分 Π_1。

84. 设 R_n 是整数集 I 上模 n 同余关系，R_m 是 I 上模 m 同余关系，Π_1，Π_2 分别是由 R_n，R_m 所诱导的 I 上的划分，证明：Π_2 细分 Π_1 的充分必要条件是 m 是 n 的整数倍。

证明：由题设

$$R_n=\{(x,y)\mid x\equiv y(\mathrm{mod}\ n)\}$$
$$R_m=\{(x,y)\mid x\equiv y(\mathrm{mod}\ m)\}$$

必要性，若 Π_2 细分 Π_1，则 $R_m\subseteq R_n$，对于$(m,0)\in R_m$，故$(m,0)\in R_n$，即 $m\equiv 0(\mathrm{mod}\ n)$，所以 m 是 n 的整数倍。

充分性，对任意的$(x,y)\in R_m$，则 $x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ m)$，于是 m 能整除 $x-y$，又 m 是 n 的整数倍，即 n 能整除 m，所以 n 整除 $x-y$，故 $x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ n)$，即$(x,y)\in R_n$，所以 $R_m\in R_n$，由习题 83 知 Π_2 细分 Π_1。

85. 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集合，R 是 $\mathbf{Z}$ 上的模 6 同余关系，试求由 R 所诱导的划分 Π。

解：由题设

$$R=\{(x,y)\mid x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 6)\}$$

由 R 所形成的等价类的集合，即是 R 所诱导的划分 Π，所以

$$\Pi=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$$

其中：$[i]=\{6x+i\mid x\in\mathbf{Z}\}(i=0,1,2,3,4,5)$。

第三章　映射和函数

一、内容提要

1. **函数与映射**

函数：设 f 是集合 A 到 B 的关系，若对每一个 $x\in A$，存在唯一的 $y\in B$，使得 $(x,y)\in f$，则称 f 是从 A 到 B 的映射（或称 f 为函数），记作 $f:A\to B$，若 $(x,y)\in f$，记作 $y=f(x)$。

定义域：设 $f:A\to B$，称 A 为 f 的定义域，记为 $\mathrm{dom}f$。

值域：设 $f:A\to B$，称 $f(A)=\{y\mid$存在 $x\in A$，使 $y=f(x)\}$为 f 的值域，记作 $\mathrm{ran}f$。

函数相等：设 f 和 g 是从集合 A 到 B 的两个函数，若对于任意的 $x\in A$，都有 $f(x)=g(x)$，则称 f 和 g 是相等的，记作 $f=g$。

映射集合：从 A 到 B 的所有映射的集合，记作 B^A，即

$$B^A=\{f\mid f:A\to B\}$$

满射：设 $f:A\to B$，若 $f(A)=B$，即对任意的 $y\in B$，存在 $x\in A$，使 $y=f(x)$，则称 f 为满射。

单射：设 $f:A\to B$，对任意的 $x_1,x_2\in A$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，就有 $x_1=x_2$，则称 f 为单射（或称 f 为入射）。

双射：设 $f:A\to B$，若 f 既是满射又是单射，则称 f 为双射。

f 对 A' 限制：设 $f:A\to B$，$A'\subseteq A$，f 对 A' 的限制表示为 $f|A'$，定义为

$$f|A':A'\to B，对任意的\ x\in A'，f|A'(x)=f(x)$$

2. **复合映射和逆映射**

逆映射：设 $f:A\to B$ 是双射，f 的逆关系称为 f 的逆映射，记为 $f^{-1}:B\to A$。

复合映射：设 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则

$$g\circ f=\{(x,z)\mid x\in A,z\in C，且存在\ y\in B,y=f(x),z=g(y)\}$$

称作 f 与 g 的复合函数，简记为 gf。

定理 3.2.1：设 $f:A\to B$ 是双射，则 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射，且 $(f^{-1})^{-1}=f$。

定理 3.2.2：设 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则

(1)　若 f 与 g 都是满射，则 $g\cdot f$ 也是满射；

(2)　若 f 与 g 都是单射，则 $g\cdot f$ 也是单射；

(3)　若 f 与 g 都是双射，则 $g\cdot f$ 也是双射。

3. **基数的概念**

后继集：设 A 为集合，称 $A^+=A\cup\{A\}$ 为 A 的后继集。

等势：设 A,B 是集合，若 A 与 B 之间存在双射，则称 A 和 B 是等势的，记作 $A\sim B$。

有限集：设 A 是集合，若 $A\sim\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，则称 A 是有限集。

无限集：设 A 是集合，如果 A 不是有限集，则称 A 是无限集。

基数：设 A 是集合，所有与 A 等势的集合组成的集合，称作 A 的基数，记作 $K[A]$，即

$$K[A]=\{\ x\mid x\text{ 是集合，且 }x\sim A\}$$

定理 3.3.1：集合族上的等势关系是一个等价关系。

定理 3.3.2：自然数集合 $\mathbf{N}$ 是无限集。

4. **可数集与不可数集**

可数集：与自然数集合等势的集合称为可数集，可数集合的基数记为 Ψ_0。

至多可数集：有限集和可数集，统称为至多可数集。

连续统的势：称实数集的基数为连续统的势，记作 Ψ。

定理 3.4.1：A 为可数集的充分必要条件是 A 中的元素可以排列成：

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

定理 3.4.2：任一无限集合必含有可数子集。

定理 3.4.3：任一无限集合必与其某一真子集等势。

定理 3.4.4：可数集的任何无限子集也是可数的。

定理 3.4.5：可数个两两互不相交的可数集合的并集，仍是可数集。

定理 3.4.6：设 $\mathbf{N}$ 是自然数集合，则 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可数集。

定理 3.4.7：有理数集合是可数集。

定理 3.4.8：实数集合不是可数集。

5. **基数的比较**

基数的大小：设 A,B 是集合，若从 A 到 B 存在一个入射，则称 A 的基数不大于 B 的基数，记作 $K[A]\leqslant K[B]$。若从 A 到 B 存在一个入射，但不存在双射，则称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $K[A]<K[B]$。

Zermelo 定理：设 A,B 是集合，则以下三式有且只有一式成立：

(1) $K[A]<K[B]$；

(2) $K[B]<K[A]$；

(3) $K[A]=K[B]$。

Cantor-Schroder-Bernstein 定理：设 A,B 是集合，若 $K[A]\leqslant K[B]$，$K[B]\leqslant K[A]$，则 $K[A]=K[B]$。

定理 3.5.1：设 A 是有限集合，则 $K[A]<\Psi_0<\Psi$。

定理 3.5.2：设 A 是无限集合，则 $\Psi_0\leqslant K[A]$。

Cantor 定理：设 A 是集合，则 $K[A]<K[\rho(A)]$。

二、习题与解

1. 试判断下列关系中哪一个构成映射：

(1) $R_1=\{(a,b)\mid a+b<20$，且 $a,b\in\mathbf{N}\}$；

(2) $R_2=\{(a,b)\mid b$ 等于小于 a 的质数的个数，$a,b\in\mathbf{N}\}$。

解：(1) 不是。因为有 $(1,2),(1,3)\in R_1$。

(2) 是。

2. 下列集合哪些能构成映射？若能，试求出所定义的映射的定义域和值域；若不能，说明理由。

(1) $R_1=\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(3,(1,4)),(4,(1,4))\}$；

(2) $R_2=\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(3,(3,2))\}$；

(3) $R_3=\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(1,(2,4))\}$；

(4) $R_4=\{(1,(2,3)),(2,(2,3)),(3,(2,3))\}$。

解：(1) 能，定义域为 $\{1,2,3,4\}$，值域为 $\{(2,3),(3,4),(1,4)\}$。

(2) 能，定义域为 $\{1,2,3\}$，值域为 $\{(2,3),(3,4),(3,2)\}$。

(3) 不能，因为有 $(1,(2,3)),(1,(2,4))\in R_3$。

(4) 能，定义域为 $\{1,2,3\}$，值域为 $\{(2,3)\}$。

3. 设集合 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{0,1\}$，σ 定义为 $\sigma(2n)=0$，$\sigma(2n+1)=1$，$n=0,1,2$，$C=\{2,3\}$，试求 σ/C。

解：$\sigma/C=\{(2,0),(3,1)\}$。

4. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，构成映射 $\sigma:A\to B$，试列出所有的映射 σ，并指出哪些是满射、单射和双射。

解：$\sigma_1=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$，

$\sigma_2=\{(a,1),(b,1),(c,2)\}$，

$\sigma_3=\{(a,1),(b,2),(c,1)\}$，

$\sigma_4=\{(a,2),(b,1),(c,1)\}$，

$\sigma_5=\{(a,2),(b,2),(c,1)\}$，

$\sigma_6=\{(a,2),(b,1),(c,2)\}$，

$\sigma_7=\{(a,2),(b,2),(c,2)\}$，

$\sigma_8=\{(a,2),(b,2),(c,2)\}$，

其中 $\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6,\sigma_7$ 是满射的，没有单射和双射。

5. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，σ_1 和 σ_2 是从 A 到 B 的映射：

(1) $\sigma_1=\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,2)\}$;

(2) $\sigma_2=\{(a,1),(b,3),(c,4),(d,2)\}$。

试问:σ_1 和 σ_2 是否是满射,是否是单射?

解:σ_1 既不是满射,也不是单射;σ_2 是满射,也是单射。

6. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集,$\mathbf{C}$ 为复数集,映射 $\sigma:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$。

(1) $\sigma_1(a)=\mathrm{i}|a|$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$\mathrm{i}\in\mathbf{C}$ 为虚数单位;

(2) $\sigma_2(a)=\mathrm{i}a$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$\mathrm{i}\in\mathbf{C}$。

试问:σ_1 和 σ_2 是否是满射,是否是单射?

解:σ_1 既不是满射,也不是单射,σ_2 是单射。

7. 下列映射中哪些是满射?哪些是单射?哪些是双射?

(1) $\sigma_1:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,$\sigma_1(n)=\begin{cases}1, n\text{ 是奇数}\\0, n\text{ 是偶数}\end{cases}$;

(2) $\sigma_2:\mathbf{N}\to\{0,1\}$,$\sigma_2(n)=\begin{cases}1, n\text{ 是奇数}\\0, n\text{ 是偶数}\end{cases}$;

(3) $\sigma_3:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$,$\sigma_3(a)=|2a|+1$;

(4) $\sigma_4:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$\sigma_4(a)=2a+6$。

解:σ_2 是满射,σ_4 是双射。

8. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集,$\sigma:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$\sigma(x,y)=x+y$,又 $\tau:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$\tau(x,y)=x\cdot y$,试证明 σ 和 τ 是满射,而不是单射。

证明:对任意的 $x\in\mathbf{R}$,存在 $(0,x)$,$(1,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,使得 $\sigma(0,x)=x$,$\tau(1,x)=x$,所以 σ 和 τ 是满射。

又 $\sigma(0,x)=\sigma(x,0)$,$\tau(1,x)=\tau(x,1)$,所以 σ 和 τ 都不是单射。

9. 设 A 和 B 是有限集合,它们的基数都是 n,则 $\sigma:A\to B$ 是单射的充分必要条件是 σ 为满射。

证明:必要性,若 σ 是单射,则 $|A|=|\sigma(A)|$,又因为 $|A|=|B|$,故 $|\sigma(A)|=|B|$,而 $\sigma(A)\subseteq B$,所以 $\sigma(A)=B$,即 σ 是满射。

充分性,若 σ 是满射,则 $\sigma(A)=B$,于是 $|A|=|B|=|\sigma(A)|$,有 $|A|=|\sigma(A)|$,故 σ 是单射。

10. 假设 f 和 g 是函数,且有 $f\subseteq g$ 和 $D_g\subseteq D_f$,证明 $f=g$。

证明:对任意的 $(x,y)\in g$,$x\in D_g$,又 $D_g\subseteq D_f$,则存在 y_1,使 $(x,y_1)\in f$,由已知 $f\subseteq g$,有 $(x,y_1)\in g$,由映射定义,有 $y=y_1$,即 $(x,y)\in f$,所以 $g\subseteq f$,再由 $f\subseteq g$,因此 $f=g$。

11. 假设 A 和 B 是有限集合,找出从 A 到 B 存在入射的充要条件是什么?

解:从 A 到 B 存在入射的充要条件是 $|A|\leqslant|B|$,且对任意的 x_1,$x_2\in A$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1=x_2$。

12. 假设 f 和 g 是函数，证明 $f\cap g$ 也是函数。

证明：$f\cap g=\{(x,y)\mid x\in D_f$ 且 $x\in D_g, y=f(x)=g(x)\}=\{(x,y)\mid x\in D_f\cap D_g$，且 $y=f(x)=g(x)\}$。

令 $h=f\cap g$，则 $D_h=\{x\mid x\in D_f\cap D_g, f(x)=g(x)\}$，若 $y_1\neq y_2$，因为 f 是函数，故必有 $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$，且 $x_1\neq x_2$，所以 $h=f\cap g$ 是一个函数。

13. 设 A 和 B 是有限集合，试问从 A 到 B 有多少不同的入射函数和多少不同的双射函数？

解：设 $|A|=m, |B|=n$，则有 $C_n^m\cdot m!$ 个不同的入射函数，当 $m=n$ 时，有 $m!$ 个不同的双射，若 $m\neq n$，则没有双射。

14. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数定义如下：对任意 $x\in\mathbf{R}$，$\sigma(x)=2x+1$，$\tau(x)=x-3$，$\varphi(x)=4x$，求 $\sigma\cdot\tau$，$\tau\cdot\sigma$，$\sigma\cdot\sigma$，$\tau\cdot\tau$，$\sigma\cdot\varphi$，$\varphi\cdot\sigma$，$\sigma\cdot\varphi\cdot\tau$。

解：$\sigma\cdot\tau(x)=\sigma(\tau(x))=\sigma(x-3)=2(x-3)+1=2x-5$，

同理可求：$\tau\cdot\sigma(x)=2x-2$，

$\sigma\cdot\sigma(x)=4x-13$，

$\tau\cdot\tau(x)=x-6$，

$\sigma\cdot\varphi(x)=8x+1$，

$\varphi\cdot\sigma(x)=8x+4$，

$\sigma\cdot\varphi\cdot\tau(x)=8x-23$。

15. 下列关系哪些是函数？哪些是满射？哪些是单射？对于每一个双射，写出它的逆函数：

（1） $\sigma_1:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$\sigma_1(x)=x^2+1$；

（2） $\sigma_2:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，$\sigma_2(x)=\dfrac{1}{x}$；

（3） $\sigma_3:\mathbf{Z}\times\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，$\sigma_3(z,n)=\dfrac{z}{n+1}$；

（4） $\sigma_4:\{a,b,c\}\to\{1,2,3\}$，

$\sigma_4=\{(a,2),(b,3),(c,1)\}$；

（5） $\sigma_5:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$\sigma_5(x)=2^x$。

解：（1） 单射　　（2） 单射　　（3） 满射

（4） 双射，$\sigma_4^{-1}=\{(2,a),(3,b),(1,c)\}$　　（5） 单射

16. 设 $(\tau\cdot\sigma)^{-1}$ 是函数，求证 σ 和 τ 是单射不一定成立。

证明：设 $\sigma=\{(a_1,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_4)\}$，

$\tau=\{(b_1,c_1),(b_2,c_1),(b_3,c_2),(b_4,c_3)\}$，

$\tau \cdot \sigma = \{(a_1, c_1), (a_2, c_2), (a_3, c_3)\}$,

$(\tau \cdot \sigma)^{-1} = \{(c_1, a_1), (c_2, a_3), (c_3, a_3)\}$是双射，但 τ 不是入射。

17. 设 $\sigma: A \to B$，$\tau: B \to C$，σ，τ 都是双射函数，求证$(\tau \cdot \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \tau^{-1}$。

证明：$(\tau \cdot \sigma) \cdot (\sigma^{-1} \cdot \tau^{-1}) = \tau \cdot (\sigma \cdot \sigma^{-1}) \cdot \tau^{-1} = \tau \cdot \tau^{-1} = I_C$，$(\sigma^{-1} \cdot \tau^{-1}) \cdot (\tau \cdot \sigma) = \sigma^{-1} \cdot (\tau^{-1} \cdot \tau) \cdot \sigma = \sigma^{-1} \cdot \sigma = I_A$，故$(\tau \cdot \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \tau^{-1}$。

18. 对下述每组集合 A 和 B，构造一个从 A 到 B 的双射，说明 A 和 B 具有相同的势。

(1) $A = (0,1)$，$B = (0,2)$；

(2) $A = \mathbf{N}$，$B = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$；

(3) $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$，$B = \mathbf{N}$；

(4) $A = \mathbf{R}$，$B = (0, \infty)$；

(5) $A = [0,1)$，$B = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$。

解：(1) 对任意的 $x \in A$，令 $f(x) = 2x$。

(2) 设 $A = \{0,1,2,\cdots\}$，其对应 B 可按序偶次序记为：$B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), \cdots\}$。

(3) 设 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$，对任意的 $n \in \mathbf{N}$，

令 $f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2}n, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2}(n+1), & n \text{ 为奇数} \end{cases}$，故 f 为双射。

设 $g: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$，对任意的$(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$，令 $g(m,n) = (f(m), f(n))$，则 g 是双射，即在 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 之间存在双射，由(2)知，在 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 之间存在双射，故在 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{N}$ 之间必存在双射。

(4) 设 $f: A \to B$，对任意的 $x \in A$，令

$$f(x) = \tan \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

(5) 设 $f: A \to B$，对任意的 $x \in A$，令 $f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$。

19. 证明$(0,1)$与$[0,1)$等势，$[0,1)$与$[0,1]$等势。

证明：(1) 设 $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$，$f: (0,1) \to [0,1)$，对任意的 $x \in (0,1)$，令

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{n-1}, & x\in A, x=\dfrac{1}{n} \\ x, & x\in(0,1)-A \end{cases}$$

则 f 是双射,故$(0,1)$与$[0,1)$等势。

(2) 设 $A=\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}$,$f:[0,1)\to[0,1]$,对任意的 $x\in[0,1)$,令

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \dfrac{1}{n-1}, & x\in A, x=\dfrac{1}{n} \\ x, & x\in[0,1)-A \end{cases}$$

则 f 是双射,故$[0,1)$与$[0,1]$等势。

20. 若 $X_1\sim X_2$ 和 $Y_1\sim Y_2$,且 $X_1\cap Y_1=X_2\cap Y_2=\varnothing$,证明 $X_1\cup Y_1\sim X_2\cup Y_2$。

证明:由 $X_1\sim X_2$,$Y_1\sim Y_2$,存在双射 $f:X_1\to X_2$,$g:Y_1\sim Y_2$。

设 $h:X_1\cup Y_1\to X_2\cup Y_2$,对任意的 $x\in X_1\cup Y_1$,由 $X_1\cap Y_1=\varnothing$,可知 $x\in X_1$ 和 $x\in Y_1$ 有且只有一式成立,则令

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in X_1 \\ g(x), & x\in Y_1 \end{cases}$$

对任意的 $y\in X_2\cup Y_2$,因 $X_2\cap Y_2=\varnothing$,则 $y\in X_2$ 与 $y\in Y_2$ 有且只有一式成立。

若 $y\in X_2$,由 f 是双射,则存在 $x\in X_1$,使 $f(x)=y$。

若 $y\in Y_2$,由 g 是双射,则存在 $x\in y_1$,使 $g(x)=y$。

故对任意的 $y\in X_2\cup Y_2$,必存在 $x\in X_1\cup Y_1$,使 $h(x)=y$,所以 h 是满射。

对任意的 $x_1,x_2\in X_1\cup Y_1$,若 $h(x_1)=h(x_2)$,由 $X_2\cap Y_2=\varnothing$,则 $h(x_1),h(x_2)\in X_2$,或 $h(x_1),h(x_2)\in Y_2$。

若 $h(x_1),h(x_2)\in X_2$,由 h 的定义,$h(x_1)=h(x_2)=f(x_1)=f(x_2)$,因为 f 是双射,有 $x_1=x_2$。

若 $h(x_1),h(x_2)\in Y_2$,由 h 的定义,$h(x_1)=h(x_2)=g(x_1)=g(x_2)$,因为 g 是双射,有 $x_1=x_2$,所以 h 是单射。

综上,h 为双射,故 $X_1\cup Y_1\sim X_2\cup Y_2$。

21. 若 $A\sim C$ 和 $B\sim D$,证明 $A\times B\sim C\times D$。

证明:由 $A\sim C$,$B\sim D$,存在双射 $f:A\to C$ 和 $g:B\to D$。

设 $h:A\times B\to C\times D$,对任意的$(x,y)\in A\times B$,令 $h(x,y)=(f(x),g(y))$。

对任意的$(c,d)\in C\times D$,$c\in C$,$d\in D$,因为 f,g 是双射,则存在 $a\in A$,$b\in B$,使 $c=$

$f(a),d=g(b)$，即存在$(a,b)\in A\times B$，使$(c,d)=(f(a),g(b))=h(a,b)$，所以 h 是满射。

对任意的$(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$，若 $h(a_1,b_1)=h(a_2,b_2)$，则有$(f(a_1),g(b_1))=(f(a_2),g(b_2))$，即 $f(a_1)=f(a_2),g(b_1)=g(b_2)$，由于 f,g 是双射，故 $a_1=a_2,b_1=b_2$，即$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$，所以 h 是单射。

综上，h 是双射，故 $A\times B\sim C\times D$。

22. 下列集合 A 的势是什么？

(1) $A=\{(p,q)\mid p,q$ 都是整数$\}$；

(2) $A=\{(p,q)\mid p,q$ 都是有理数$\}$；

(3) A 是由所有半径为 1，圆心在 x 轴上的圆周所组成的集合；

(4) A 是由实数轴上所有两两不相交的有限开区间组成的集合。

解：(1) Ψ_0：事实上 $A=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，而 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\sim\mathbf{N}$。

(2) Ψ_0：$A=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$，又 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\sim\mathbf{N}$。

(3) Ψ：A 中的每一个圆周都对应其圆心，故 $A\sim\mathbf{R}$。

(4) Ψ_0：在 A 中的每一个有限开区间内任意一个有理数，则 A 与有理数集的无限子集等势，而可数集与其任一无限子集皆等势，故 $A\sim\mathbf{Q}$。

23. 如果 A 是不可数无穷集，M 是 A 的可数子集，则$(A-M)\sim A$。

证明：设 $B=A-M$，则 B 不是有限集。因为 $A=B\cup M$，若 B 是有限集，又 M 是可数集，则 A 为可数集，矛盾，所以 B 为无限集，则 B 中含有可数子集，设为 C，令 $D=B-C$，即 $B=C\cup D$。

由 $A=B\cup M=C\cup D\cup M$，$A-M=B=C\cup D$，因为 $C\cap M=\varnothing$，又 C,M 都是可数集，有 $C\cup M$ 也是可数集，则 $C\cup M\sim C$，而 $D\sim D$，$(C\cup M)\cap D=\varnothing$，$C\cap D=\varnothing$，所以 $C\cup M\cup D\sim C\cup D$，即 $A\sim(A-M)$。

24. 如果 A 是任意无限集，M 是一个可数集，则$(A\cup M)\sim A$。

证明：(1) 若 A 为可数集，则 $A\cup M$ 仍是可数集，故 $A\cup M\sim A$。

(2) 若 A 不是可数集，因为 $M-(A\cap M)\subseteq M\subseteq A\cup M$，则 $M-(A\cap M)$是可数集，又 $A\cup M$ 是不可数无限集，由 23 题有 $A\cup M\sim(A\cup M)-(M-(A\cap M))$，其中$(A\cup M)-(M-A\cap M)=A$，所以$(A\cup M)\sim A$。

25. 如果两集合 A_1 和 A_2 都是可数的，证明 $A_1\times A_2$ 也是可数的。

证明：由 A_1,A_2 是可数集，有 $A_1\sim\mathbf{N},A_2\sim\mathbf{N}$，由 21 题，有 $A_1\times A_2\sim\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，而 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$，所以 $A_1\times A_2\sim\mathbf{N}$，即 $A_1\times A_2$ 是可数集。

26. 有限集 A 和可数集 B 的笛卡儿积集 $A\times B$ 是可数集。

证明：因为 A 为有限集，则 $A\cup\mathbf{N}$ 是可数集，由 25 题知，$(A\cup\mathbf{N})\times B$ 是可数集，又 $A\times B\subseteq(A\cup\mathbf{N})\times B$，且 $A\times B$ 是无限集，则 $A\times B$ 是可数集。

27. 若 S 为无理数集，证明 $K[S]=\Psi$。

证明：设 $\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{Q}$ 为有理数集，则 $\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup S$，由 23 题知 $\mathbf{R}\sim(\mathbf{R}\sim\mathbf{Q})$，即 $\mathbf{R}\sim S$，所以 $K(S)=\boldsymbol{\Psi}$。

28. 令 $K[A]=\boldsymbol{\Psi}$，$K[B]=\boldsymbol{\Psi}$，$K[D]=\boldsymbol{\Psi}_0$。这里 A,B,D 为互不相交集合，证明以下各式：

(1) $K[A\cup B]=\boldsymbol{\Psi}$；

(2) $K[A\cup D]=\boldsymbol{\Psi}$。

证明：(1) 因为 $K[A]=K[B]=\boldsymbol{\Psi}$，$K[(0,1)]=K[(1,2)]=\boldsymbol{\Psi}$，故 $A\sim(0,1]$，$B\sim(1,2)$，又 $A\cap B=\varnothing$，$(0,1]\cap(1,2)=\varnothing$，由 20 题知，$A\cup B\sim(0,1]\cup(1,2)=(0,2)$，而 $K[(0,2)]=\boldsymbol{\Psi}$，所以 $K[A\cup B]=\boldsymbol{\Psi}$。

(2) 因为 $K[A]=\boldsymbol{\Psi}$，$K[D]=\boldsymbol{\Psi}_0$，$K[\mathbf{Q}]=\boldsymbol{\Psi}_0$，$K[S]=\boldsymbol{\Psi}$，其中 $\mathbf{Q},S$ 分别为有理数集和无理数集，则 $A\sim S$，$D\sim\mathbf{Q}$，又 $A\cap D=\varnothing$，$S\cap\mathbf{Q}=\varnothing$，由 20 题知，$A\cup D\sim S\cup\mathbf{Q}=\mathbf{R}$，所以 $K[A\cup D]=K[\mathbf{R}]=\boldsymbol{\Psi}$。

29. 证明 $[0,1]$，$(0,1]$，$[0,1)$，$(0,1)$ 是等势的。

证明：(1) 设 $f:[0,1]\to(0,1]$，令 $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$，$f$ 为入射；

设 $g:(0,1]\to[0,1]$，令 $g(x)=x$，g 为入射，故 $[0,1]\sim(0,1]$。

(2) 设 $f:(0,1]\to[0,1)$，令 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2}$，$f$ 为入射；

设 $g:[0,1)\to(0,1]$，令 $g(x)=1-x$，g 为入射，故 $(0,1]\sim[0,1)$。

(3) 设 $f:[0,1)\to(0,1)$，令 $f(x)=x$，f 为入射；

设 $g:(0,1)\to[0,1)$，令 $g(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$，$g$ 为入射，故 $[0,1)\sim(0,1)$。

(4) 设 $f:(0,1)\to[0,1]$，令 $f(x)=x$，f 为入射；

设 $g:[0,1]\to(0,1)$，令 $g(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}$，$g$ 为入射，故 $(0,1)\sim[0,1]$。

由上可得 $[0,1]\sim(0,1]\sim[0,1)\sim(0,1)$。

30. 证明若从 A 到 B 存在一个满射，则 $K[B]\leqslant K[A]$。

证明：设 $f:A\to B$ 为满射。

$g:B\to A$，对任意的 $b\in B$，由 f 是满射，必存在 $a_1,a_2\cdots\in A$，使 $f(a_i)=b$，则取 a_1，令 $g(b)=a_1$，所以 g 是入射，故 $K[B]\leqslant K[A]$。

31. 设 $\mathbf{N}$ 为自然数集，证明：$K[\rho(\mathbf{N})]=\boldsymbol{\Psi}$。

证明：(1) 首先证明 $K[\rho(\mathbf{N})]\leqslant\boldsymbol{\Psi}$。

设 $g:\rho(\mathbf{N})\to[0,1]$，定义为

对任意的 $S\in\rho(\mathbf{N})$，即 $S\subseteq\mathbf{N}$，定义 $g(S)=.x_0x_1x_2\cdots$，这里映射 $g(S)$ 用二进制表示，且规定

$$\begin{cases} x_{2j}=0 \\ x_{2j+1}=1, & j\in S \quad (j=0,1,2,\cdots) \\ x_{2j+1}=0, & j\notin S \end{cases}$$

即：$g(\varnothing)=0$，$g(\mathbf{N})=.01010101\cdots$，

$g(\{1,3,5\})=.0001000100010000\cdots$。

由 g 的构造知，g 是单射，所以 $K[\rho(\mathbf{N})]\leqslant\Psi$。

(2) 最后证明 $\Psi\leqslant K[\rho(\mathbf{N})]$。

设 $f:[0,1]\to\rho(\mathbf{N})$，对任意的 $x\in[0,1]$，令 $x=.x_0x_1x_2\cdots$，为 x 的二进制数表示，定义 $f(x)=\{j\mid x_j=1\}$。

即：$f(0)=\varnothing$，

$f(1)=f(.111\cdots)=\mathbf{N}$，

$f(.1010101000\cdots)=\{0,2,4\}$等。

由 f 的定义知，f 是单射，所以 $\Psi\leqslant K[\rho(\mathbf{N})]$。

由 Cantor-Schroder-Bernstein 定理可知 $\Psi=K[\rho(\mathbf{N})]$。

32. 证明 $K[\mathbf{N}^{\mathbf{N}}]=\Psi_0$。

证明：$\mathbf{N}^{\mathbf{N}}=\{f\mid f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\}$。

设 $g:\mathbf{N}^{\mathbf{N}}\to(0,1)$，对任意的 $f\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$，即 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，对每个 $i\in\mathbf{N}$，使 $f(i)$的二进制表达式为 x_i，令 $g(f)=(0.x_0 2x_1 2x_2 2x_3 2\cdots)$，其中 2 为分隔符。

例如：$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=2x$，则 $f(0)=(0)_2$，$f(1)=(10)_2$，$f(2)=(100)_2$，$f(3)=(110)_2$，$f(4)=(1000)_2$，$\cdots$，$g(f)=0.021021002110210002\cdots$

$h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$h(x)=3x$，则 $h(0)=(0)_2$，$h(1)=(11)_2$，$h(2)=(110)_2$，$h(3)=(1001)_2$，$h(4)=(1100)_2$，$g(h)=0.021121102100121100\cdots$

由 g 的定义知，g 是入射，所以 $K[\mathbf{N}^{\mathbf{N}}]\leqslant\Psi_0$。

设 $\Phi:(0,1)\to\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$，对任意的 $x\in(0,1)$，令 $x=0.x_0x_1x_2\cdots$是 x 的十进制小数表示（如 $0.12=0.11999\cdots$），定义 $\Phi(x)=f$，使 $f(0)=x_0$，$f(1)=x_1$，$f(2)=x_2$，$\cdots$。

由 Φ 的定义知 Φ 是入射，所以 $\Psi_0\leqslant K[\mathbf{N}^{\mathbf{N}}]$，故 $K[\mathbf{N}^{\mathbf{N}}]=\Psi_0$。

33. 设 A,B,D 都是集合且 $A\cap B=\varnothing$，$A\cap D=B\cap D=\varnothing$，$K[A]=a$，$K[B]=b$，$K[D]=d$；若定义 $a+b=K[A\cup B]$，$ab=K[A\times B]$，求证：

(1) $\Psi+\Psi_0=\Psi$；

(2) 如果 $a\leqslant b$，则 $a+d\leqslant b+d$，

(3) 如果 $a\leqslant b$，则 $ad\leqslant bd$。

证明：(1)设 $A=\{x\mid x$ 为无理数$\}$，$B=\{x\mid x$ 为有理数$\}$，则 $K[A]=\Psi$，$K[B]=\Psi_0$，$A\cap B=\varnothing$，所以

$$
\begin{aligned}
K[A\cup B] &= K[A]+K[B] \\
&= \Psi+\Psi_0 \\
&= K[\mathbf{R}] \\
&= \Psi。
\end{aligned}
$$

(2) 若 $K[A]\leqslant K[B]$,则存在一个入射 $f:A\to B$,

设 $g:A\cup D\to B\cup D$,对任意的 $x\in A\cup D$,令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A \\ x, & x\in D \end{cases}$$

由 f 是入射及 g 的定义可知,g 是入射,因此 $K[A\cup D]\leqslant K[B\cup D]$,由 $A\cap D=B\cap D=\varnothing$,故得 $a+d\leqslant b+d$。

(3) 若 $K[A]\leqslant K[B]$,则存在一个入射 $f:A\to B$,

设 $g:A\times D\to B\times D$,对任意的$(a,d)\in A\times D$,令

$$g(a,d)=(f(a),d)$$

由 f 是入射及 g 的定义可知,g 是入射,因此 $K[A\times D]\leqslant K[B\times D]$,即 $ad\leqslant bd$。

34. 设 $A=\{a,b,c,d\}$,确定映射 $f:A\to A$,满足 $f\neq I_A$,且 f 是单射,并求出 f^2,f^3,f^{-1},$f\circ f^{-1}$;是否能够找到另外一个单射 $g:A\to A$,使得 $g\neq I_A$,但 $g^2=I_A$。

解:

$\{a,b,c,d\}$的任意一个排列均满足要求,例如:

$f=\{(a,b),(b,c),(c,a),(b,d)\}$,

$f^2=\{(a,c),(b,a),(c,b),(d,d)\}$,

$f^3=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$,

$f^{-1}=\{(a,c),(b,a),(c,b),(d,d)\}$,

$f\circ f^{-1}=\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,d)\}$,

设 $g=\{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}\neq I_A$,而 $g\circ g=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}=I_A$。

35. 设 $f:X\to Y$,$A,B\subseteq X$,证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

证明:(1) 对任意的 $y\in f(A\cup B)$,存在 $x\in A\cup B$,使 $y=f(x)$,若 $x\in A$,则 $y\in f(A)\subseteq f(A)\cup f(B)$;若 $x\in B$,则 $y\in f(B)\subseteq f(A\cup B)$,故 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$。

对任意的 $y\in f(A)\cup f(B)$,若 $y\in f(A)$,存在 $x\in A$,使 $y=f(x)$,而 $x\in A\subseteq A\cup B$,所以 $y\in f(A\cup B)$;若 $y\in f(B)$,存在 $x\in B\subseteq A\cup B$,使 $y=f(x)$,所以 $y\in f(A\cup B)$,故 $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$。

综上可得,$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

(2) 对任意的 $y\in f(A\cap B)$，存在 $x\in A\cap B$，使 $y=f(x)$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，故 $y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)$，即 $y\in f(A)\cap f(B)$，所以 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

36. 设 $f:X\to Y,A,B\subseteq Y$，证明：$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$。

证明：对任意的 $x\in f^{-1}(A\cap B)$，有 $f(x)\in A\cap B$，则 $f(x)\in A$ 且 $f(x)\in B$，于是 $x\in f^{-1}(A)$ 且 $x\in f^{-1}(B)$，所以 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$，故 $f^{-1}(A\cap B)\subseteq f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$。

同理可证，$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cap B)$，所以有

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$

37. 设 $f:X\to Y,A,B\subseteq Y$，证明：$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$。

证明：对任意的 $y\in f^{-1}(A\cup B)$，则存在 $x\in A\cup B$，使 $y=f(x)$。

若 $x\in A$，则 $y\in f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$；

若 $x\in B$，则 $y\in f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$。

所以 $f^{-1}(A\cup B)\subseteq f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$。

对任意的 $y\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，则 $y\in f^{-1}(A)$，或者 $y\in f^{-1}(B)$。

若 $f\in f^{-1}(A)$，则存在 $x\in A\subseteq A\cup B$，使 $y=f(x)$，故 $y\in f^{-1}(A\cup B)$；

若 $f\in f^{-1}(B)$，则存在 $x\in B\subseteq A\cup B$，使 $y=f(x)$，故 $y\in f^{-1}(A\cup B)$；

所以 $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cup B)$，因此 $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)=f^{-1}(A\cup B)$。

38. 设 $f:A\to B,C\subseteq A$，证明：

$$f(A)-f(C)\subseteq f(A-C)$$

证明：对任意的 $y\in f(A)-f(C)$，则 $y\in f(A)$ 且 $y\notin f(C)$，于是存在 $x\in A$，使 $y=f(x)$。

若 $x\in C$，由 $y=f(x)$，可得 $y\in f(C)$，与 $y\notin f(C)$ 矛盾，所以 $x\notin C$，即 $x\in A-C$ ，因此 $y\in f(A-C)$，故 $f(A)-f(C)\subseteq f(A-C)$。

39. 若 $A\subseteq B$，C 是集合，则 $A^C\subseteq B^C$。

证明：对任意的 $f\in A^C$，即 $f:C\to A$，则 $f\subseteq C\times A\subseteq C\times B$。

由 f 是从 C 到 B 的映射可知，对任意的 $x\in C$，存在 $y\in A\subseteq B$，使 $y=f(x)$。

由 f 是映射，对任意的 $x_1,x_2\in C$，当 $x_1=x_2$ 时，必有 $f(x_1)=f(x_2)$。

综上可知，f 是从 C 到 B 的映射，即 $f\in B^C$，所以 $A^C\subseteq B^C$。

40. 设 $f:X\to X$，证明：

(1) 若 $f\subseteq I_X$，则 $f=I_X$；

(2) 若 $I_X\subseteq f$，则 $f=I_X$。

证明：(1) 对任意的 $x\in X$，因为 f 是函数，则存在唯一的 $y\in X$，使得 $y=f(x)$，即 $(x,y)\in f$，由 $f\subseteq I_X$，有 $(x,y)\in I_X$，即 $x=y$。

于是对任意的 $x\in X$，必有 $(x,x)\in f$，则 $I_X\subseteq f$，所以 $f=I_x$。

(2) 对任意的 $(x,y)\in f$，因为 $x\in X$，故 $(x,x)\in I_X$，由 $I_X\subseteq f$，得 $(x,x)\in f$，则有

$(x,y),(x,x)\in f$，由 f 是函数，有 $x=y$。

于是对任意的 $(x,y)\in f$，必有 $(x,y)\in I_X$，即 $f\subseteq I_X$，所以 $f=I_X$。

41. 设 $f:A\to B$，定义一个函数 $g:B\to P(A)$，对于任意的 $b\in B$，令

$$g(b)=\{x \mid x \in A \text{ 且 } f(x)=b\}$$

证明：若 f 是满射，则 g 是入射。其逆成立吗？

证明：对任意的 $y_1,y_2\in B$，由 f 是满射，至少存在 $x_1,x_2\in A$，使 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，若 $y_1\neq y_2$，

$$g(y_1)=\{x\in A \mid f(x)=y_1\}$$
$$g(y_2)=\{y\in A \mid f(y)=y_2\}$$

因为 $y_1\neq y_2$，有 $f(x)\neq f(y)$，而 f 是函数，故 $x\neq y$，所以 $g(y_1)\neq g(y_2)$，故 g 是入射。但其逆不成立。

例如 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y,z\}$，设 $f:A\to B$，$f(a)=x$，$f(b)=x$，$f(c)=y$，$g:B\to P(A)$，$g(x)=\{a,b\}$，$g(y)=\{c\}$，$g(z)=\varnothing$，则 g 是入射，但 f 不是满射。

42. 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，若 $g\cdot f$ 是满射，且 g 是入射，证明 f 是满射。

证明：对任意的 $y\in Y$，存在 $z\in Z$，使 $g(y)=z$，又 $g\cdot f$ 是满射，必存在 $x\in X$，使 $g\cdot f(x)=z$，于是有 $z=g(y)=g\cdot f(x)=g(f(x))$，而 g 是入射，故 $y=f(x)$，即对任意的 $y\in Y$，存在 $x\in X$，使 $y=f(x)$，所以 f 是满射。

43. 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，若 $g\cdot f$ 是单射，且 f 是满射，证明 g 是单射。举例说明若 f 不是满射，则 g 不一定是单射。

证明：对任意的 $y_1,y_2\in Y$，若 $g(y_1)=g(y_2)$，往证 $y_1=y_2$。

因为 f 是满射，对于 $y_1,y_2\in Y$，分别存在 $x_1,x_2\in X$，使得 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$。

又 g 是映射，则有 $g(f(x_1))=g(y_1)$，$g(f(x_2))=g(y_2)$，即 $g\cdot f(x_1)=g(y_1)=g(y_2)=g\cdot f(x_2)$，因为 $g\cdot f$ 是单射，故 $x_1=x_2$，由 f 是映射，有 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $y_1=y_2$，即 g 是单射。

例如：$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，定义映射如下：

$$f(x)=x,\ g(x)=x^2$$

则 $g\cdot f$ 是单射，但 f 不是满射，g 也不是单射。

44. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，令 $X=\mathbf{R}^{[0,1]}$，在 X 上定义二元关系 S 如下：

$$(f,g)\in S \text{ 当且仅当对任意的 } x\in[0,1]\text{，有 } f(x)-g(x)\geqslant 0$$

证明：S 是偏序关系，S 是全序关系吗？

证明：(a)先证 S 是一个偏序关系。

(1) 对任意的 $f\in X$，对任意的 $x\in[0,1]$，有 $f(x)-f(x)\geqslant 0$，故 $(f,f)\in S$，即 S 是自反的。

(2) 对任意的 $f,g\in X$，若 $(f,g),(g,f)\in S$，则对任意的 $x\in[0,1]$，有 $f(x)-g(x)\geqslant 0$，

$g(x)-f(x)\geqslant 0$,故 $f(x)=g(x)$,$f=g$,即 S 是反对称的。

(3) 对任意的 $f,g,h\in X$,若(f,g),$(g,h)\in S$,则对任意的 $x\in[0,1]$,有 $f(x)-g(x)\geqslant 0$,$g(x)-h(x)\geqslant 0$,故 $f(x)-h(x)\geqslant 0$,于是$(f,h)\in S$,即 S 是传递的。

综上可得,S 是偏序关系。

(b) 再证 S 不是全序关系。

例如,设 $f(x)=x$,$g(x)=-x+1$,则 $f(0)-g(0)=-1$,$g(1)-f(1)=-1$,即 f 和 g 是不可比的,故 S 在 X 上不是全序关系。

45. 设 F 为函数簇 X^X,$f\in F$,证明:f 是传递的,当且仅当 $f^2=f$。

证明:充分性,$f^2=f$,必有 $f^2\subseteq f$,故 f 是传递的。

必要性,若 f 是传递的,必有 $f^2\subseteq f$。

对任意的$(x,y)\in f$,有 $y\in X$,由 f 是函数,存在 $z\in X$,使$(y,z)\in f$,则$(x,z)\in f\cdot f$。由(x,y),$(y,z)\in f$ 及 f 的传递性,有$(x,z)\in f$,由$(x,y)\in f$,$(x,z)\in f$,f 是函数,有 $y=z$,由$(x,z)\in f^2$,得$(x,y)\in f^2$,即对任意的$(x,y)\in f$,有$(x,y)\in f^2$,故 $f\subseteq f^2$,所以 $f^2=f$。

46. 设 $f:A\to B$,$A'\subseteq A$,$B'\subseteq B$,令 $f^{-1}(B')=\{x\mid f(x)\in B'\}$,证明:

(1) $f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$;

(2) 若 f 是满射,则 $f(f^{-1}(B'))=B'$;

(3) $A'\subseteq f^{-1}(f(A'))$;

(4) 若 f 是入射,则 $A'=f^{-1}(f(A'))$。

证明:(1) 对任意的 $y\in f(f^{-1}(B'))$,存在 $x\in f^{-1}(B')$,使 $y=f(x)$,故 $f(x)\in B'$,即 $y\in B'$,所以 $f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$。

(2) 由(1)知 $f(f^{-1}(B')\subseteq B'$。

对任意的 $y\in B'$,因为 f 是满射,存在 $x\in A$,使 $y=f(x)$,由 $y\in B'$,得 $x\in f^{-1}(B')$,故 $y\in f(f^{-1}(B'))$,有 $B'\subseteq f(f^{-1}(B'))$,于是 $f(f^{-1}(B'))=B'$。

(3) 对任意的 $x\in A'$,$f(x)\in f(A')$,则 $x\in f^{-1}(f(A'))$,于是 $A'\subseteq f^{-1}(f(A'))$。

(4) 由(3)知 $A'\subseteq f^{-1}(f(A'))$。

对任意的 $x\in f^{-1}(f(A'))$,则 $f(x)\in f(A')$,存在 $x'\in A'$,使 $f(x)=f(x')$,因为 f 是入射,故 $x=x'$,即 $x\in A'$,所以 $f(f^{-1}(A'))\subseteq A'$,于是 $f^{-1}(f(A'))=A'$。

47. 设 $h\in X^X$,证明:对任意的 $f,g\in X^X$,若 $h\cdot f=h\cdot g$,则 $f=g$ 当且仅当 h 是一个入射。

证明:必要性,假设 h 不是入射,则存在 $x_1,x_2\in X$,$x_1\neq x_2$,但 $h(x_1)=h(x_2)$,现定义两个函数 f,g 如下:

$$f:X\to X,\text{对任意的 } x\in X,\text{令 } f(x)=x_1$$
$$g:X\to X,\text{对任意的 } x\in X,\text{令 } g(x)=x_2$$

则 $f,g\in X^X$，且 $h\cdot f=h\cdot g$，但 $f\neq g$，与 $f=g$ 矛盾，故 h 是入射。

充分性，假设 $f\neq g$，则存在 $x_1\in X$，使 $f(x_1)\neq g(x_1)$，而 $h\cdot f(x_1)=h\cdot g(x_1)$，即 $h(f(x_1))=h(g(x_1))$，与 h 是入射矛盾，于是 $f=g$。

48. 设 $h\in X^X$，证明：对任意的 $f,g\in X^X$，若 $f\cdot h=g\cdot h$，则 $f=g$ 当且仅当 h 是满射。

证明：必要性，假设 h 不是满射，则存在 $x\in X$，对任意的 $x\in X$，有 $h(x)\neq x_1$，因为 h 是一个函数，故 $X\neq\{x_1\}$，于是存在 $x_2\in X$，且 $x_2\neq x_1$，现定义两个函数 f,g 如下：

$$f:X\to X,\text{令 } f(x)=\begin{cases}x_2, & x\in X,x\neq x_1\\ x_1, & x=x_1\end{cases}$$

$$g:X\to X,\text{对任意 } x\in X,\text{令 } g(x)=x_2$$

则 $f\cdot h(x)=g\cdot h(x)$，即 $f(h(x))=g(h(x))$，但 $f\neq g$，矛盾，故 h 必是一个满射。

充分性，假设 $f\neq g$，则必存在 $x_1\in X$，使 $f(x_1)\neq g(x_1)$，因为对任意的 $x\in X$，有 $f\cdot h(x)=g\cdot h(x)$，即 $f(h(x))=g(h(x))$，必有 $h(x)\neq x_1$，与 h 是满射矛盾，于是有 $f=g$。

49. $f:T\to S$，$g:S\to T$，若对所有的 $t\in T$，有 $g(f(t))=t$，则称 g 是 f 的左逆，f 是 g 的右逆，证明：

(1) f 存在一个左逆当且仅当 f 是入射；

(2) f 存在一个右逆当且仅当 f 是满射；

(3) 若 g 是 f 的左逆和右逆，则 f 是双射且 $g=f^{-1}$。

证明：(1) 必要性，设 g 是 f 的左逆，则对任意的 $t\in T$，有 $g(f(t))=t$，即 $g\cdot f(t)=t=I_T(t)$，有 $g\cdot f=I_T$，而 I_T 是双射，所以 f 是入射。

充分性，定义 $g:S\to T$ 如下：

$$g(s)=\begin{cases}t, & s\in f(T),\text{且 } f(t)=s\\ c, & s\notin f(T),c\in T\end{cases}$$

对每个 $s\in S$，$g(s)$ 只有一个值，且若 $f(t)=s$，则 $g\cdot f(t)=g(s)=t$，故 g 是 f 的左逆。

(2) 必要性，设 g 是 f 的右逆，则对任意的 $s\in S$，有 $f(g(s))=f\cdot g(s)=s=I_s(s)$，有 $f\cdot g=I_s$，而 I_s 是双射，所以 f 是满射。

充分性，若 f 是满射，则对任意的 $s\in S$，至少存在一个 $t\in T$，使 $f(t)=s$，定义 $g:S\to T$ 如下：对每个 $s\in S$，有

① 若只有一个 $t\in T$，使 $f(t)=s$，令 $g(s)=t$；

② 若有 $t_1,t_2,\cdots\in T$，使 $f(t_1)=f(t_2)=\cdots=s$，则取某一 t_i，令 $g(s)=t_i$，

这样，对每个 $s\in S$，$g(s)$ 只有一个值，且 $f\cdot g(s)=s$，故 g 是 f 的右逆。

(3) 由(1)和(2)知，若 g 是 f 的左逆和右逆，则 f 是满射和入射，即 f 是双射，且 $g\cdot f=I_T$，$f\cdot g=I_s$，则 $g\cdot f\cdot f^{-1}=I_T\cdot f^{-1}$，即 $g\cdot I_s=g=f^{-1}$。

50. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，若对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，$x\leqslant y$，有 $f(x)\leqslant f(y)$，则称 f 是单调递增的。设 f 和 g 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，证明：

(1) 若$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,则 $f+g$ 是单调递增的;

(2) $f \cdot g$ 是单调递增的。

证明:(1) 因为 f 和 g 是单调递增的,若 $x \leqslant y$,则有 $f(x) \leqslant f(y)$,$g(x) \leqslant g(y)$,于是

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+g(x)\\&\leqslant f(y)+g(y)\\&=(f+g)(y),\end{aligned}$$

所以 $f+g$ 是单调递增的。

(2) 因为 f 和 g 是单调递增的,若 $x \leqslant y$,则 $f(x) \leqslant f(y)$,$g(x) \leqslant g(y)$,于是

$$f \cdot g(x)=f(g(x)) \leqslant f(g(y))=f \cdot g(y)$$

所以 $f \cdot g$ 是单调递增的。

51. 设 $f \cdot g$ 是复合函数,证明:

(1) 如果 $f \cdot g$ 是满射,则 f 是满射;

(2) 如果 $f \cdot g$ 是入射,则 g 是入射;

(3) 如果 $f \cdot g$ 是双射,则 f 是满射,g 是入射。

证明:设 $g:X \to Y$,$f:Y \to Z$。

(1) 对任意的 $z \in Z$,因为 $f \cdot g$ 是满射,则存在 $x \in X$,使 $z=f \cdot g(x)=f(g(x))$,这里 $g(x)=y \in Y$,故对任意的 $z \in Z$,存在 $y \in Y$,使 $z=f(y)$,所以 f 是满射。

(2) 对任意的 $x_1, x_2 \in X$,若 $g(x_1)=g(x_2)$,因为 f 是函数,所以 $f(g(x_1))=f(g(x_2))$,即 $f \cdot g(x_1)=f \cdot g(x_2)$,由于 $f \cdot g$ 是入射,有 $x_1=x_2$,所以 g 是入射。

(3) 若 $f \cdot g$ 是双射,则 $f \cdot g$ 是满射和入射,由(1)和(2)知,f 是满射,g 是入射。

52. 设 $h_1:A \times B \to A$,使得 $h_1((a,b))=a$,

$h_2:A \times B \to B$,使得 $h_2((a,b))=B$。

令 $f:X \to A$,$G:X \to B$,证明:存在唯一的映射 $\sigma:X \to A \times B$,使得 $h_1 \cdot \sigma=f$,$h_2 \cdot \sigma=g$。

证明:由 h_1,h_2 的定义可知,h_1,h_2 是满射。

定义映射 $\sigma:X \to A \times B$,对任意的 $x \in X$,有

$$\sigma(x)=(f(x),g(x))$$

则

$$h_1 \cdot \sigma(x)=h_1(\sigma(x))=h_1((f(x),g(x)))=f(x)$$

$$h_2 \cdot \sigma(x)=h_2(\sigma(x))=h_2((f(x),g(x)))=g(x)$$

于是有 $h_1 \cdot \sigma=f$,$h_1 \cdot \sigma=g$。

设 Ψ 是从 X 到 $A \times B$ 的任意一个映射,且满足

$$h_1 \cdot \Psi=f, h_2 \cdot \Psi=g$$

对任意的 $x \in X$,不妨设 $\Psi(x)=(a,b)$,由 $h_1 \cdot \Psi=f$,$h_2 \cdot \Psi=g$,可得

$$f(x)=h_1 \cdot \Psi(x)=h_1(\Psi(x))=h_1((a,b))=a$$

$$g(x)=h_2\cdot\Psi(x)=h_2(\Psi(x))=h_2((a,b))=b$$

由 σ 的定义，有 $\sigma(x)=(f(x),g(x))=(a,b)$，即对任意的 $x\in X$，$\sigma(x)=\Psi(x)$，所以 $\sigma=\Psi$，因此 σ 是唯一的。

53. 设 X 是非空集合，在 X^X 上定义二元关系 R 如下：

$$\text{对任意的 } f,g\in X^X,(f,g)\in R \text{ 当且仅当 } \mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$$

证明：

(1) R 是 X^X 上的等价关系；

(2) 设 Π 是由 R 所诱导的 X^X 上的划分，则存在双射 $\sigma:\Pi\to\rho(X)-\{\varnothing\}$。

证明：(1) 对任意的 $f\in X^X$，显然，$\mathrm{ran}f=\mathrm{ran}f$，则 $(f,f)\in R$，所以 R 是自反的。

对任意的 $f,g\in X^X$，若 $(f,g)\in R$，则 $\mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$，即 $\mathrm{ran}g=\mathrm{ran}f$，故 $(g,f)\in R$，所以 R 是对称的。

对任意的 $f,g,h\in X^X$，若 (f,g)，$(g,h)\in R$，则 $\mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$，$\mathrm{ran}g=\mathrm{ran}h$，于是 $\mathrm{ran}f=\mathrm{ran}h$，故 $(f,h)\in R$，所以 R 是传递的。

综上可得，R 是 X^X 上的等价关系。

(2) 设 $\sigma:\Pi\to\rho(X)-\{\varnothing\}$，其中 Π 是由等价关系 R 所诱导的 X^X 上的划分，对任意的 $[f]_R\in\Pi$，令

$$\sigma([f]_R)=\mathrm{ran}f$$

对任意的 $[f]_R$，$[g]_R\in\Pi$，若 $[f]_R=[g]_R$，则 $(f,g)\in R$，由 R 的定义，有 $\mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$，所以当 $[f]_R=[g]_R$ 时，有 $\sigma([f]_R)=\sigma([g]_R)$，因此 σ 是从 Π 到 $\rho(X)-\{\varnothing\}$ 的映射。

对任意的 $[f]_R$，$[g]_R\in\Pi$，若 $\sigma([f]_R)=\sigma([g]_R)$，即 $\mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$，由 R 的定义，有 $(f,g)\in R$，故 $[f]_R=[g]_R$，所以 σ 是单射。

对任意的 $A\in\rho(X)-\{\varnothing\}$，则 $A\subseteq X$，且 $A\neq\varnothing$，取 $a\in A$，定义 $f:X\to A$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in A\\ a, & x\notin A\end{cases}$$

显然有 $\mathrm{ran}f\subseteq A$，又对任意的 $x\in A$，则 $x=f(x)\in\mathrm{ran}f$，所以 $\mathrm{ran}f=A$。

于是对任意的 $A\in\rho(X)-\{\varnothing\}$，存在 $f:X\to A$，使 $\sigma([f]_R)=\mathrm{ran}f=A$，所以 σ 是满射。

综上可知，σ 是双射。

54. 证明：A 到 B 的映射决定 A 的一个划分 Π，A 的一个划分也决定 A 到 Π 的一个映射。

证明：(1) 设 $f:A\to B$ 是一个映射，在 A 上定义二元关系 R 如下：

对任意的 $x,y\in A$，$(x,y)\in R$ 当且仅当 $f(x)=f(y)$

往证 R 是 A 上的等价关系。

对任意的 $x\in A$，因为 $f(x)=f(x)$，则 $(x,x)\in R$，所以 R 是自反的。

对任意的 $x,y\in A$，若 $(x,y)\in R$，则 $f(x)=f(y)$，即 $f(y)=f(x)$，由 R 的定义，有

$(y,x)\in R$，所以 R 是对称的。

对任意的 $x,y,z\in A$，若$(x,y),(y,z)\in R$，则 $f(x)=f(y)$，$f(y)=f(z)$，即 $f(x)=f(z)$，由 R 的定义，有$(x,z)\in R$，所以 R 是传递的。

综上可知，R 是 A 上的等价关系，而 A 上的等价关系都可诱导出 A 上的一个划分 Π。

(2) 设 $\Pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是 A 的一个划分，定义 $f:A\to\Pi$，对任意的 $x\in A$，因为 Π 是 A 的划分，所以存在唯一的 $A_i\in\Pi$，使得 $x\in A_i$，则令

$$f(x)=A_i$$

f 是从 A 到 Π 的一个映射，且是满射。

55. 设 $f:A\to B$ 是一个满射，则可由 f 确定 A 上的一个等价关系 R，设 Π 是由 R 所诱导的 A 上的划分，证明：存在唯一的双射 $g:\Pi\to B$，使得 $f=g\cdot f$，其中 h 是 A 到 Π 的满射。

证明：如下定义 A 上的二元关系 R：

对任意的　　$x,y\in A$，$(x,y)\in R$ 当且仅当 $f(x)=f(y)$

由习题 54 可知，R 是 A 上的等价关系。

设 $g:\Pi\to B$，对任意的$[a]\in\Pi$，令

$$g([a])=f(a)$$

首先证明 g 是双射。

对任意的$[a]$，$[b]\in\Pi$，若$[a]=[b]$，则$(a,b)\in R$，由 R 的定义，有 $f(a)=f(b)$，即 $g([a])=g([b])$，所以 g 是 Π 到 B 的一个映射。

对任意的 $b\in B$，因为 f 是满射，则存在 $a\in A$，使 $f(a)=b$，由 g 的定义，有 $g([a])=f(a)=b$，即对任意的 $b\in B$，存在$[a]\in\Pi$，使得 $g([a])=b$，所以 g 是满射。

对任意的$[x]$，$[y]\in\Pi$，若 $g([x])=g([y])$，即 $f(x)=f(y)$，由 R 的定义，有$(x,y)\in R$，故$[x]=[y]$，所以 g 是单射。

综上可知，g 是双射。

其次证明 $f=g\cdot h$。

设 $h:A\to\Pi$，对任意的 $x\in A$，令

$$h(x)=[x]$$

显然 h 是满射。

对任意的 $x\in A$，$g\cdot h(x)=g(h(x))=g([x])=f(x)$，所以 $f=g\cdot h$。

最后证明 g 是唯一的。

设有 $g_1:\Pi\to B$，满足 $g_1\cdot h=f$，则 $g_1([a])=f(a)$。

假设 $g\neq g_1$，则至少存在一个 $a\in A$，使得 $g([a])\neq g_1([a])$，而

$$g\cdot h(a)=g(h(a))=g([a])=f(a)$$

$$g_1\cdot h(a)=g_1(h(a))=g_1([a])=f(a)$$

这与 $g([a])\neq g_1([a])$矛盾，所以 g 是唯一的。

56. 设 A,B,C 是集合,若 $A\sim B$,则 $A^C\sim B^C$。

证明:因为 $A\sim B$,则存在双射 $\sigma:A\to B$。

设 $\tau:A^C\sim B_C$,对任意的 $f\in A^C$,定义为

$$\tau(f)=\sigma\cdot f$$

现证 τ 为双射。

对任意的 $f,g\in A^C$,若 $\tau(f)=\tau(g)$,即 $\sigma\cdot f=\sigma\cdot g$,因为 σ 是双射,则有 $\sigma^{-1}\cdot(\sigma\cdot f)=\sigma^{-1}\cdot(\sigma\cdot g)$,$(\sigma^{-1}\cdot\sigma)\cdot f=(\sigma^{-1}\cdot\sigma)\cdot g$,于是 $f=g$,所以 τ 是单射。

对任意的 $f\in B^C$,则存在 $\sigma^{-1}\cdot f\in A^C$,使得 $\tau(\sigma^{-1}\cdot f)=\sigma\cdot(\sigma^{-1}\cdot f)=f$,所以 τ 是满射。

综上可得,$\sigma:A^C\to B^C$ 是双射,所以 $A^C\sim B^C$。

57. 设 A 为任意的一个集合,$n\in\mathbf{N}$,令 S 为从$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$到 A 的所有映射的集合,即

$$S=\{f\mid f:\{0,1,2,\cdots,n-1\}\to A\}$$

定义 T 为 A 上所有 n 元有序组的集合,即

$$T=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A(i=1,2,\cdots,n)\}$$

证明:从 S 到 T 存在一个双射。

证明:设 $\sigma:S\to T$,对任意的 $f\in S$,定义为

$$\sigma(f)=(f(0),f(1),\cdots,f(n-1))$$

现在证明 σ 是双射。

对任意的 $f,g\in S$,若 $\sigma(f)=\sigma(g)$,则$(f(0),f(1),\cdots,f(n-1))=(g(0),g(1),\cdots,g(n-1))$于是有 $f(i)=g(i)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,即对任意的 $x\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$,都有 $f(x)=g(x)$,故 $f=g$,所以 σ 是单射。

对任意的$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in T$,设 $f:\{0,1,2,\cdots,n-1\}\to A$,对任意的 $i\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$,定义为

$$f(i)=a_{i+1}$$

于是 $\sigma(f)=(f(0),f(1),\cdots,f(n-1))=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,

即对任意的$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in T$,存在 $f\in S$,使得

$$\sigma(f)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

所以 σ 是满射。

综上可知,σ 是双射。

58. 设 S 表示 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$到$\{0,1\}$的所有映射组成的集合,即

$$S=\{0,1\}^A=\{f\mid f:A\to\{0,1\}\}$$

证明:$\rho(A)\sim S$。

证明:任取 $B\subseteq A$,即 $B\in\rho(A)$,定义映射 $f_B:A\to\{0,1\}$,使得

$$f_B(x)=\begin{cases}0, & x\notin B\\ 1, & x\in B\end{cases}$$

则 $f_B \in S$。

设 $\sigma:\rho(A)\to S$,对任意的 $B\in\rho(A)$,定义为 $\rho(B)=f_B$。

现在证明 σ 是双射。

对任意的 $B,C\in\rho(A)$,若 $\sigma(B)=\sigma(C)$,即 $f_B=f_C$。

对任意的 $x\in B$,有 $f_C(x)=f_B(x)=1$,故 $x\in C$,则 $B\subseteq C$。同理可证,$C\subseteq B$,所以 $B=C$,因此是 σ 单射。

对任意的 $f\in S$,令

$$B=\{x\mid x\in A,\text{且 } f(x)=1\}$$

则 $B\subseteq A$,且 $\sigma(B)=f$,所以 σ 是满射。

综上可得,σ 是双射,所以 $\rho(A)\sim S$。

59. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集合,证明:$K[\mathbf{R}\times\mathbf{R}]=\Psi$。

证明:(1) 设 $f:\mathbf{R}\to(0,1)$,定义为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

则 f 为双射,所以 $\mathbf{R}\sim(0,1)$。

(2) 设 $g:(0,1)\to(0,1)\times(0,1)$,定义为

$$g(x)=(x,0)$$

则 g 为单射,所以 $K[(0,1)]\leqslant K[(0,1)\times(0,1)]$。

(3) 设 $h:(0,1)\times(0,1)\to(0,1)$,对任意的$(x,y)\in(0,1)\times(0,1)$,令

$$x=0.x_0x_1x_2x_3\cdots$$

$$y=0.y_0y_1y_2\cdots$$

为 x,y 的十进制小数的表示式,定义

$$h((x,y))=z,\text{其中 } z=0.x_0y_0x_1y_1x_2y_2\cdots$$

则 h 是单射,所以 $K[(0,1)\times(0,1)]\leqslant K[(0,1)]$。

由(2)和(3),有 $K[(0,1)]=K[(0,1)\times(0,1)]$,即$(0,1)\sim(0,1)\times(0,1)$。由 $\mathbf{R}\sim(0,1)$ 及习题 21 可知,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\sim(0,1)\times(0,1)$,所以 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\sim(0,1)$,故 $K[\mathbf{R}\times\mathbf{R}]=K[(0,1)]=K[\mathbf{R}]=\Psi$。

60. 设 A,B,C 为两两互不相交的集合,令 $K[A]=a,K[B]=b$,$K[C]=c,K[A\cup B]=a+b,K[A\times B]=a\cdot b,K[A^B]=a^b$,证明:

(1) $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$;

(2) $(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c$;

(3) $(a^b)^c=a^{b\cdot d}$。

证明：(1) 设 $g:B\to A$，$h:C\to A$，因为 $B\cap C=\varnothing$，定义映射 $f:B\cup C\to A$，对任意的 $x\in B\cup C$，有

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in B\\ h(x), & x\in C\end{cases}$$

设 $\sigma:A^B\times A^C\to A^{B\cup C}$，对任意的 $(g,h)\in A^B\times A^C$，令 $\sigma((g,h))=f$，则 σ 是单射，所以 $K[A^B\times A^C]\leqslant K[A^{B\cup C}]$。

设 $\tau:A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$，对任意的 $f\in A^{B\cup C}$，使 $\tau(f)=(g,h)$，其中

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in B\\ h(x), & x\in C\end{cases}$$

则 τ 是单射，所以 $K[A^{B\cup C}]\leqslant K[A^B\times A^C]$，于是有 $K[A^{B\cup C}]=K[A^B\times A^C]$，即 $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$。

(2) 设 $\Phi:A^C\times B^C\to(A\times B)^C$，使得

对任意的 $x\in C,\Phi((f,g))(x)=(f(x),g(x))$

现在证明 Φ 是双射。

对任意的 $(f_1,g_1),(f_2,g_2)\in A^C\times B^C$，若 $\Phi((f_1,g_1))=\Phi((f_2,g_2))$，则对任意的 $x\in C$，有

$$\Phi((f_1,g_1))(x)=\Phi((f_2,g_2))(x)$$
$$(f_1(x),g_1(x))=(f_2(x),g_2(x))$$

亦即对任意的 $x\in C$，有 $f_1(x)=f_2(x)$，$g_1(x)=g_2(x)$，故有 $f_1=f_2$，$g_1=g_2$，即 $(f_1,g_1)=(f_2,g_2)$，所以 Φ 是单射。

对任意的 $h\in(A\times B)^C$，$h(x)\in A\times B$，设 $h(x)=(h_1(x),h_2(x))$，则 $h_1\in A^C$，$h_2\in B^C$，故 $(h_1,h_2)\in A^C\times B^C$。

设 $\Phi((h_1,h_2))=h$，则对任意的 $x\in C$，有

$$\Phi((h_1,h_2))(x)=(h_1(x),h_2(x))=h(x)$$

故 Φ 是满射。

综上可得，Φ 是双射，所以

$$K[A^C\times B^C]=K[(A\times B)^C]\text{，即 } a^c\cdot b^c=(a\cdot b)^c$$

(3) 设 $f\in A^{B\times C}$，定义 $\sigma:A^{B\times C}\to(A^B)^C$ 如下：

$$\sigma(f)=\{(c,g)\mid(c,g)\in C\times A^B\text{，且 } g(b)=f((b,c))\}$$

现在证明 σ 是双射。

对任意的 $f_1,f_2\in A^{B\times C}$，若 $\sigma(f_1)=\sigma(f_2)$，则

$$\{(c,g)\mid(c,g)\in C\times A^B,g(b)=f_1((b,c))\}$$
$$=\{(c,g)\mid(c,g)\in C\times A^B,g(b)=f_2((b,c))\}$$

对所有的 $b\in B$，和 $c\in C$，有

$$f_1((b,c))=f_2((b,c))$$

所以 $f_1=f_2$，故 Φ 是单射。

对任意的 $h\in(A^B)^C$，则 $h(c):B\to A$，$h(c)(b)\in A$，令 $f:B\times C\to A$，使得

$$f((b,c))=h(c)(b)$$

则 $\sigma(f)=\{(c,g)\mid(c,g)\in C\times A^B,\text{且 } g(b)=f((b,c))\}$

$=\{(c,g)\mid(c,g)\in C\times A^B,\text{且 } g(b)=h(c)(b)\}$

$=\{(c,g)\mid(c,g)\in C\times A^B,\text{且 } g=h(c)\}$

$=h$，

故 σ 是满射。

综上可得，σ 是双射，所以

$$K[A^{B\times C}]=K[(A^B)^C]$$

即 $a^{b\cdot c}=(a^b)^c$。

61. 设 A 是任意集合，B 是 A 到集合 $\{0,1\}$ 的所有映射组成的集合，即

$$B=\{f\mid f:A\to\{0,1\}\}$$

证明：A 与 B 不等势。

证明：对任意的 $f\in B$，令

$$A_f=\{a\mid a\in A\text{ ，且 } f(a)=0\}$$

则 $A_f\subseteq A$，即 $A_f\in\rho(A)$。

设 $\sigma:B\to\rho(A)$，对任意的 $f\in B$，定义 $\sigma(f)=A_f$。

现在证明 σ 为双射。

对任意的 $S\in\rho(A)$，设 $g:A\to\{0,1\}$，使得

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in S\\ 1, & x\notin S\end{cases}$$

则 $g\in B$，且 $A_g=S$。这说明对任意的 $S\in\rho(A)$，存在 $g\in B$，使得 $\sigma(g)=A_g=S$，所以 σ 是满射。

对任意的 $f,g\in B$，若 $\sigma(f)=\sigma(g)$，即 $A_f=A_g$，往证 $f=g$。

对任意的 $x\in A$，$f(x)=0$ 或 1。

若 $f(x)=0$，则 $x\in A_f=A_g$，故 $g(x)=0$；

若 $f(x)=1$，则 $x\notin A_f=A_g$，故 $g(x)=1$。

即对任意的 $x\in A$，有 $f(x)=g(x)$，所以 $f=g$，因此 σ 是单射。

综上可得，σ 是双射，所以 $B\sim\rho(A)$。

由 Cantor 定理可知，A 与 $\rho(A)$ 不能等势，所以 A 与 B 也不能等势，否则由 $A\sim B$，$B\sim\rho(A)$，将有 $A\sim\rho(A)$，与 Cantor 定理矛盾。

62. 设 S 为基数的集合，即 $S=\{K[A]\mid A\text{ 为集合}\}$，在 S 上定义二元关系 R 如下：对任意

的 $K[A],K[B]\in S$，$(K[A],K[B])\in R$，当且仅当存在一个从 A 到 B 的入射，证明：R 是全序关系。

证明：首先证明 R 是偏序关系。

对任意的 $K[A]\in S$，存在双射 $I_A:A\to A$，故 $(K[A],K[A])\in R$，R 是自反的。

对任意的 $K[A],K[B]\in S$，若 $(K[A],K[B])\in R$ 且 $(K[B],K[A])\in R$，则从 A 到 B 存在入射且从 B 到 A 存在入射，于是 $K[A]\leqslant K[B]$ 且 $K[B]\leqslant K[A]$，故 $K[A]=K[B]$，R 是反对称的。

对任意的 $K[A],K[B],K[C]\in S$，若 $(K[A],K[B])\in R$，$(K[B],K[C])\in R$，则存在从 A 到 B 的入射 f 和从 B 到 C 的入射 g，那么 $g\cdot f$ 是从 A 到 B 的入射，故 $(K[A],K[C])\in R$，R 是传递的。

综上可得，R 是偏序关系。

其次证明，R 是全序关系。

对任意的 $K[A],K[B]\in S$，由 Zermelo 定理，以下三式有且只有一个式成立：

$$K[A]<K[B],K[A]=K[B],K[B]<K[A]$$

所以或者从 A 到 B 存在入射，或者从 B 到 A 存在入射，即 $(K[A],K[B])\in R$ 或者 $(K[B],K[A])\in R$，于是 R 是全序关系。

自测题及答案(第一篇)

自测题一

（一）　填空题。(24 分)

1. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A\cap B=$_____，$A\cup B=$_____，$A-B=$_____，$\rho(A)-\rho(B)=$_____，$\rho(B)\times B=$_____。

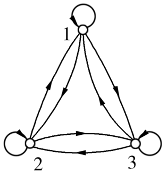
2. 设于 A 与 B 是两个有限集合，则包含排斥定理 $|A\cup B|=$_____。

3. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系 $R=\{(a,a),(a,c),(b,d),(c,a)\}$，则 $R^2=$_____，$\boldsymbol{M}_R=$_____，$\boldsymbol{M}_{R^2}=$_____，R 的关系图_____，$R^{-1}=$_____。

4. 设 R_1,R_2 是集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的二元关系，其中 $R_1=\{(1,1),(1,2),(2,3)\}$，$R_2=\{(1,4),(2,3),(2,4),(3,2)\}$，则 $R_1\circ R_2=$_____，$R_2\circ R_1=$_____，$(R_2\circ R_1)^{-1}=$_____，$R_1^{-1}\circ R_2^{-1}=$_____。

5. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，σ 与 τ 都是 A 上的变换，$\sigma:a\to b,b\to a,c\to c$；$\tau:a\to c,b\to b,c\to b$ 则 $\tau\cdot\sigma=$_____，$\sigma\cdot\tau=$_____，$\sigma\cdot\sigma=$_____。

6. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，A 上的二元关系 R 的关系图，如图所示，则关系 R 具有的性质是_____。



（二） 判断下列命题是否正确。(20 分)

1. 设 A,B 为任意集合，当 $A=B=\varnothing$ 时，$A-B=B$。
2. 设 $X=\{x,y\}$，则 $\rho(X)=\{\varnothing,\{x\},\{y\}\}$。
3. $\varnothing=0$。
4. 若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$。
5. $\varnothing\subseteq\{a,b,c\}$。
6. 设 $A=\{1,2,3,4)\}$，A 上的关系：

$$R=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,4)\}$$

则 R 具有对称性。

7. 设 $A=\{a,b\}$，A 上的关系 $R=\{(a,a),(b,b)\}$，则 R 是 A 上的等价关系。
8. 在一个由 n 个元素组成的集合 A 上，空关系基数是 0。

（三） 多项选择题。(20 分)

1. 下列命题正确的有_____。

A. $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a,b\}\}$

B. $\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$

C. $\{a,b\}\subseteq\{a,\{a,b\}\}$

D. $\{a,b\}\in\{a,\{a,b\}\}$

2. 设 $A=\{a,b\}$，下列命题正确的有_____。

A. $\{a\}\in\rho(A)$　　B. $\{a\}\subseteq\rho(A)$

C. $\{b\}\in\rho(A)$　　D. $\{b\}\subseteq\rho(A)$

3. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，A 上的关系 $R=\{(a,b),(a,a),(b,b),(b,a),(c,a)\}$，则 R 具有 _____。

A. 自反性　B. 对称性　C. 传递性　D. 以上答案都不对

4. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,1),(2,2)\}$，则 R 不具有_____性质。

A. 自反性　B. 对称性　C. 传递性　D. 以上答案都不对

（四） 计算题。(20 分)

1. 已知：$A=\{1,2\}$，求 $\rho(A)$ 及 $\rho(A)\times A$。

2. 某班有 50 名学生，其中 8 人是足球队员，10 人是篮球队员，有 3 人既是足球队员又是篮球队员，问既不是足球队员又不是篮球队员的学生有几人？

3. 设集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，映射 $\sigma:A\to B$，试列出所有 A 到 B 的映射 σ，并指出哪些是单射、满射和双射？

4. 设 $A=\{2,4,6,8\}$，写出 A 上的小于等于关系并求出关系图及关系矩阵。

（五） 证明题。（16 分）

1. 设 $\mathbf{Z}$ 为整数集，$R=\{(x,y)\mid(x-y)/3$ 是整数，$x,y\in\mathbf{Z}\}$，证明 R 是 A 上的等价关系。

2. 设 $\sigma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 为实数集合），$\sigma(r)=2r-10$，$\forall r\in\mathbf{R}$，求证：σ 是双射。

自测题二

（一） 填空题。（28 分）

1. 设全集 $E=\{a,b,c,d,e\}$，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,d,e\}$，则 $A\cup B=$_____，$A\cap B=$_____，$A-B=$_____，$\overline{A}\cap\overline{B}=$_____，$\rho(A)-\rho(B)=$_____。

2. 设 $A=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A-B=$_____，$B-A=$_____，$A\times B=$_____，$B\times A=$_____。

3. 设 $\mathbf{Z}$ 为整数集，$R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{Z},x>y\}$，则 R 具有_____性。

4. 设 $A=\{a,b,c,d\ ,e\}$，A 上的关于等价关系 R 的等价类为 $M_1=\{a,b,c\}$，$M_2=\{d,e\}$，则等价关系 $R=$_____，关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R=$_____。

5. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，$\sigma(x)=x^2-2$，$\tau(x)=x+4$，都是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的映射，则 $\tau\cdot\sigma=$_____，$\sigma\cdot\tau=$_____，$\tau^{-1}=$_____。

6. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，$\sigma:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$\sigma(x,y)=x+y$，则 σ 为_____映射，若 $\tau:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，且 $\tau(x\ y)=xy$，则 τ 为_____映射。

7. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{1,2\}$，R_1 是 A 到 B 上的关系，R_2 是 B 到 C 上的关系，且 $R_1=\{(a,b)\in A\times B\mid a+b=4\}$，$R_2=\{(b,c)\in B\times C\mid b-c=1\}$，则 $R_1\cdot R_2=$_____，$\boldsymbol{M}_{R_1\cdot R_2}=$_____，则$(R_1\cdot R_2)^{-1}=$_____。

（二） 多项选择题。（24 分）

1. 下列式子正确的有_____。

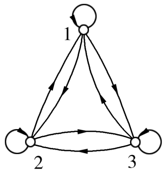
A. $\varnothing=0$　　B. $\varnothing\in\{a,b\}$　　C. $\varnothing\subseteq\{a,b\}$

2. 下列命题正确的是_____。

A. $\{a\}\in\{a,b,c\}$　　B. $\{a\}\subseteq\{a,b,c\}$

C. $A=\{a,b\}$，$\{a\}\in\rho(A)$　　D. $A=\{a,b\}$，$a\subseteq\rho(A)$

3. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，A 上关系 R 的关系图如图所示，则 R 具有_____。



A. 自反性，对称性，传递性

B. 自反性，传递性

C. 对称性，传递性

D. 自反性，对称性

4. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，映射 $\sigma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$\sigma(x)=-x^2-1$$

则 σ 是_____。

A. 单射而非满射　　B. 满射而非单射

C. 双射　　D. 即不是单射，也不是满射

5. 设 $A=\{0,1,2\}$，R 是 A 上的关系，$R=\{(0,1),(0,2),(1,2),(2,2)\}$，下述结论正确的是 _____。

A. $R^{-1}=\{(1,0),(2,0),(2,1)\}$

B. $R^{-1}\cdot R=\{(0,2)\}$

C. $R\cdot R=\{(0,2),(1,2)\}$

D. $R\cdot R=\{(0,2),(1,2),(2,2)\}$

6. 设 A 是除 0 以外的实数集，对 A 中的任何两个实数 x 和 y，我们规定 xRy 当且仅当 $xy>0$，则下列说法正确的有_____。

A. R 自反的　　B. R 对称的

C. R 传递的　　D. R 是等价关系

（三） 计算题。(48 分)

1. 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{1,2\}$，试求 $A\times(B\cap C)$和$(A\times B)\cap(A\times C)$，并验证 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$。

2. 在一个班级的 50 名学生中，有 26 人在第一次考试中得到 A，21 人在第二次考试中得到 A，假如有 17 人两次考试都没有得到 A，试问有多少学生在两次考试中都得到 A？

3. 下列映射哪些是满射，哪些是单射？对每个双射写出它的逆映射。

(1) $\sigma_1:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$\sigma_1(x)=x^2+1$，$\forall x\in\mathbf{N}$；

(2) $\sigma_2:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$\sigma_2(x)=x$，$\forall x\in\mathbf{N}$。

4. 若集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$上的二元关系 $R_1=\{(a,b)\mid(a,b)\in A^2$ 且 a 整除 $b\}$，$R_2=\{(a,b)\mid(a,b)\in A^2$ 且 $b=2a\}$，求 $R_1\cap R_2$，$R_1\cup R_2$，R_1-R_2。

（四） R 是 A 上等价关系，$M_1,M_2,\cdots,M_n$ 是 R 在 A 上所有等价类，求证 $R=M_1\times M_1\cup M_2\times M_2\cup\cdots\cup M_n\times M_n$。

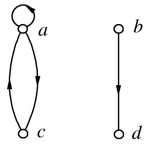
【自测题一答案】

（一） 填空题

1. $\{1,2\},\{1,2,3\},\{3\},\{\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{3\}\},\{(\{1\},1),(\{1\},2),(\varnothing,1),(\varnothing,2),(\{2\},1),(\{2\},2),(\{1,2\},1),(\{1,2\},2)\}$

2. $|A|+|B|-|A\cap B|$

3. $R^2=\{(a,c),(a,a),(c,a),(c,c)\}$



$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R^{-1}=\{(a,a),(c,a),(d,b),(a,c)\}$

4. $\{(1,4),(1,3),(2,2)\}$　　$\{(3,3)\}$

　$\{(4,1),(3,1),(2,2)\}$　　$\{(3,3)\}$

5. $\tau\cdot\sigma:a\to b,b\to c,c\to b;\sigma\cdot\tau:a\to c,b\to a,c\to a;\sigma\cdot\sigma:a\to a,b\to b,c\to c$。

6. 对称性,自反性,传递性。

（二） 判断题

1. 正确。因为 $A=B=\varnothing$,故 $A-B=\varnothing$,所以 $A-B=B=\varnothing$。

2. 不正确。$\rho(A)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$。

3. 不正确。$\varnothing$是没有任何元素的集合,与 0 概念不一样,0 是数字。

4. 不正确。设 $A=\{1,2,3\},B=\{1\},C=\{2\}$,则 $A\cup B=A\cup C=A$ 但 $B\neq C$。

5. 正确。因为$\varnothing$是任何集合的子集。

6. 不正确。因为$(3,4)\in R$,但$(4,3)\notin R$。

7. 正确。R 具有自反性、对称性、传递性。

8. 正确。$\varnothing$无元素,故$|\varnothing|=0$。

（三） 多项选择题

（1） A、B、D （2） A、C （3） D （4） A

（四） 计算题

1. $\rho(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$\rho(A)\times A=\{(\varnothing,1),(\varnothing,2),(\{1\},1),(\{1\},2),(\{2\},1),(\{2\},2),(\{1,2\},1),(\{1,2\},2)\}$

2. 35

3. $\sigma_1:a\to1,b\to1$

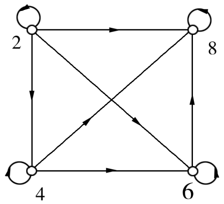
$\sigma_2: a \rightarrow 2, b \rightarrow 2$

$\sigma_3: a \rightarrow 1, b \rightarrow 2$

$\sigma_4: a \rightarrow 2, b \rightarrow 1$

σ_4、σ_4 是双射。

4. $R=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(4,4),(4,6),(4,8),(6,6),(6,8),(8,8)\}$



$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

（五） 证明题

1. 证明：① 任意 $x\in\mathbf{Z}$，有 $(x-x)/3$ 是整数，故 $(x-x)\in R$，所以 R 具有自性。

② 任意 $x,y\in\mathbf{Z}$，若 $(x,y)\in R$，则 $(x-y)/3$ 是整数，又因为 $(y-x)/3=-(x-y)/3$，故 $(y-x)/3$ 是整数，所以 $(y,x)\in R$，R 具有对称性。

③ 任意 $x,y,z\in\mathbf{Z}$，若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$，则 $(x-y)/3$ 和 $(y-z)/3$ 都是整数，又因为 $(x-y)/3+(y-z)/3=(x-z)/3$，故 $(x-z)/3$ 是整数，所以 $(x,z)\in R$，R 具有传递性，由以上证明知，R 是 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系。

2. 证明：任取 $r_1,r_2\in\mathbf{R}$，且 $r_1\neq r_2$，则 $\sigma(r_1)-\sigma(r_2)=2r_1-10-(2r_2-10)=2(r_1-r_2)\neq 0$，故 $\sigma(r_1)\neq\sigma(r_2)$，所以 σ 是单射。

又任取 $y\in\mathbf{R}$，令 $2r-10=y$，那么 $r=(y+10)/2\in\mathbf{R}$，则 $\sigma(r)=y$，所以 σ 是满射，故 σ 是双射。

【自测题二答案】

（一） 填空题

1. $\{a,b,c,d,e\}$，$\{a\}$，$\{b,c\}$，$\varnothing$，$\{\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

2. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$，$\{x\mid 2<x\leqslant 5\}$

$\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 2, 0<y\leqslant 5, x,y\in\mathbf{R}\}$

$\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 5, -1\leqslant y\leqslant 2, x,y\in\mathbf{R}\}$

3. 传递性

4. $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),(d,e),(e,d)\}$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

5. $x^2+2, x^2+8x+14, x-4$。

6. 满射、满射

7. $\{(2,1),(1,2)\}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\{(1,2),(2,1)\}$

(二)　多项选择题

1. C　　2. B、C　　3. A、B、C、D　　4 . D　　5 . D　　6. A、B、C、D

(三)　计算题

1. **解**:$A\times(B\cap C)=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$,

$(A\times B)\cap(A\times C)=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

$=A\times(B\cap C)$。

2. **解**:设第一次得 A 的学生集合为 A,第二次得 A 的学生集合为 B,$|A|=26$,$|B|=21$,故

$$|A\cup B|=(50-17)=33$$

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=26+21-33=14$$

答:有 14 名学生在两次考试中都得到 A。

3. (1)　σ_1 是单射,不是满射;

(2)　σ_2 是双射,$\sigma_2^{-1}(x)=x$。

4. **解**:$R_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$R_2=\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$

$R_1\cap R_2=R_2, R_1\cup R_2=R_1$

$R_1-R_2=\{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,6),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

(四)　证明:对任意的$(x,y)\in R$,$x\in A$,$y\in A$,则存在某个等价类 M_i,使 $x\in M_i$,由于$(x,y)\in R$,故 $y\in M_i$,所以$(x,y)\in M_i\times M_i\subseteq M_1\times M_1\cup M_2\times M_2\cup\cdots\cup M_n\times M_n$,即 $R\subseteq M_1\times M_1$。

对任意的$(x,y)\in M_1\times M_1\cup M_2\times M_2\cup\cdots\cup M_n\times M_n$,则必存在某个等价类 M_i,使$(x,y)\in M_i\times M_i$,即 x,y 同属于一个等价类中,故$(x,y)\in R$,于是有 $M_1\times M_1\cup M_2\times M_2\cup\cdots\cup M_n\times M_n\subseteq R$,所以 $R=M_1\times M_1\cup M_2\times M_2\cup\cdots\cup M_n\times M_n$。

第二篇　图　论

第四章　图　论

一、内容提要

1. **图的基本概念**

图：设 $G=<P,L>$ 是由点以及点和点之间的边组成的图形，其中 P 是顶点集合，L 是连接某些点的边的集合，则称序偶 $G=<P,L>$ 为一个图。

简单图：任一对不同顶点之间最多有一条边的图，称为简单图。

有限图：设 $G=<P,L>$，若 P 为有限集合，则称 G 为有限图。

无向图：每条边都不带有方向的图，称为无向图。

有向图：每条边都带有方向的图，称为有向图。

混合图：某些边带有方向，而另一些边不带有方向的图，称为混合图。

邻接点：关联于同一条边的两个顶点，称为邻接点。

邻接边：与同一个顶点相关联的边，称为邻接边。

完全图：任两个顶点之间都恰有一条边的图，称为完全图。具有 n 个顶点的完全图，记为 K_n。

补图：由图 G 中所有顶点以及所有能使 G 成为完全图的添加边所组成的图，称为 G 的补图，记为 $\overline{G}$。

子图：设 $G=<P,L>$，$H=<P_1,L>$ 是两个图，如果 $P_1\subseteq P$，$L_1\subseteq L$，则称 H 是 G 的子图，G 是 H 的母图。

支撑子图：如果 G 的子图包含 G 的所有顶点，称该子图为 G 的支撑子图。

顶点度数：设 $G=<P,L>$ 是一个图，$v\in P$，v 所关联的边的个数称为 v 的度，记作 $d(v)$。

最大度：$\Delta(G)=\max\{d(v)\,|\,v\in P\}$。

最小度：$\delta(G)=\min\{d(v)\,|\,v\in P\}$。

图的同构：设 $G=<P,L>$，$G'=<P',L'>$ 是两个图，如果在 P 与 P' 之间存在双射 σ：$P\rightarrow P'$，且对任意的 $e=(u,v)\in L$ 当且仅当 $e'=(\sigma(u),\sigma(v))\in L'$，则称 G 与 G' 是同构的。

关联矩阵：设 $G=<P,L>$ 是有限无向图，$|P|=m$，$|L|=n$，且

$$P(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$$
$$L(G)=\{l_1,l_2,\cdots,l_m\}$$
称 $\boldsymbol{M}(G)=(a_{ij})_{m\times n}$ 为 G 的关联矩阵,其中
$$a_{ij}=\begin{cases}0, & v_i \text{ 不是 } l_j \text{ 的端点}\\ 1, & v_i \text{ 是 } l_j \text{ 的端点}\end{cases}$$
$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$。

邻接矩阵：设 $G=<P,L>$是有限无向图,$|P|=m$,$|L|=n$,且 $P(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m,\}$,称矩阵 $\boldsymbol{A}(G)=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵,其中
$$r_{ij}=\begin{cases}0, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不邻接}\\ 1, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 邻接}\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

定理 4.1.1：设 $G=<P,L>$是有限图,则有
$$\sum_{v\in P}d(v)=2\,|\,L\,|$$

定理 4.1.2：在任何有限图中,度数为奇数的顶点的个数是偶数。

2. **路与回路**

路：设 $G=<P,L>$,$v_i\in P(i=0,1,\cdots,n)$,e_i 是关联顶点 v_{i-1} 与 v_i 的边($i=1,2,\cdots,n$),称交替序列
$$v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$$
为从 v_0 到 v_n 的长度为 n 的路。

回路：在交替序列
$$v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$$
中,若 $v_0=v_n$,则称此交替序列为回路。

简单路：在交替序列
$$v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$$
中如果：

(1) $v_0,v_1,\cdots,v_{n-1}$互不相同;

(2) $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 互不相同。

则称此交替序列为简单路。

迹：在交替序列
$$v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$$
中,如果所有的边均不相同,则称此交替序列为迹。

连通：设 $G=<P,L>$是一个图,$u,v\in P$,如果从 u 到 v 存在一条路,则称顶点 u 和顶点 v 是连通的。

连通图：如果一个图中任何两点均连通,则称该图为连通图。

连通分支：顶点之间的连通性是顶点集 P 上的等价关系，由该等价关系可将 P 分成若干个非空子集 $P_1, P_2 \cdots, P_n$，每一个非空子集 P_i 确定了一个连通子图 $G(P_i)$，称 $G(P_1)$，$G(P_2)$，…，$G(P_n)$为图 G 的连通分支。图 G 的连通分支数记为 $W(G)$。

点割集：设 $G=<P,L>$为连通图，$P_1 \subset P$，满足：

(1)　在 G 中，删除 P_1 中的所有顶点后，所得的子图是不连通图或平凡图；

(2)　在 G 中，删除 P_1 的任一真子集，所得的子图仍是非平凡的连通图。

则称 P_1 是 G 的一个点割集。

割点：在 G 中，删除顶点 v 后，所得到的子图是不连通的，则称 v 是割点。

点连通度：在图 G 中为了产生一个不连通图或平凡图需要删除的点的最少数目，称为图 G 的点连通度，记为 $k(G)$，即

$$k(G)=\min\{|P_1| \mid P_1 \text{ 是 } G \text{ 的点割集}\}$$

边割集：设 $G=<P,L>$是连通图，$L_1 \subset L$，满足：

(1)　在 G 中，删除 L_1 中的所有边后，所得到的子图是不连通的；

(2)　在 G 中，删除 L_1 的任一真子集，所得到的子图是连通的。

则称 L_1是 G 的一个边割集。

割边：在 G 中删除边 e 后，所得到的子图是不连通的，则称 e 为割边。

边连通度:在图 G 中为了产生一个不连通图需要删除的边的最少数目，称为图 G 的边连通度，记为 $\lambda(G)$，即

$$\lambda(G)=\min\{|L_1| \mid L_1 \text{ 是 } G \text{ 的边割集}\}$$

加权图：设 $G=<P,L>$是有限图，如果对任意的 $e \in L$，都附带一个实数 $w(e)$，则称 G 为加权图，称 $w(e)$为边的权，规定：

(1)　对任意的 $v \in P$，$w(v,v)=0$；

(2)　对任意的 $u,v \in P$，若 u 与 v 不邻接，则 $w(v,v)=\infty$。

定理 4.2.1：对任何图 $G=<P,L>$，有

$$K(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$$

定理 4.2.2：一个连通图中的顶点 v 是割点的充分必要条件是存在两点 u 和 w，使 u 和 w 之间任何的路都通过顶点 v。

3. **树**

树：设 $G=<P,L>$是一个图，如果 G 是连通的且无回路，则称 G 是一棵树，记为 T。

树叶：树中度数为 1 的顶点称为树叶。

分支点：树中度数大于 1 的顶点称为分支点。

森林：一个无回路的图，称作森林。

支撑树：设 $G=<P,L>$是连通图，T 是 G 的支撑子图且为树，则称 T 为 G 的支撑树。

根树：对根树进行递归定义如下：

(1) 设 $T=\langle P,L\rangle$是树，存在 $v_1\in P$，称为树根。只由一个点构成的树也是根树；

(2) 从 T 中删除 v_1 后，可得到 r 个连通分支 $T_1,T_2,\cdots,T_r$，每个 T_i 也是一棵根树，称作 v_1 的子树。且 T_i 的根都与 v_1 邻接，称作 v_1 的儿子$(i=1,2,\cdots,r)$。

m 叉树：如果根数 T 的每个分支点最多有 m 棵子树，则称 T 为 m 叉树。

完全 m 叉树：如果根树 T 的每个分支点恰好有 m 棵子树，则称 T 为完全 m 叉树。

路长：在根树中，从树根到一个顶点的简单路的长度，称为该顶点的路长。

树权：带权树 T 中所有边之和称作 T 的树权。

最小支撑树：图 G 的所有支撑树中，树权最小的支撑树称作 G 的最小支撑树。

赋权二叉树：设 T 是一棵二叉树，如果 T 中每一片树叶都附上一个实数，则称 T 为赋权二叉树。

二叉树的权：设 T 是一棵赋权二叉树，带权 w_i 的树叶 v_i 的路长为 $L(w_i)$，则称

$$w(T)=\sum_{i=1}^{t}w_iL(w_i)$$

为 T 的权。

最优树:在所有带权 $w_1,w_2,\cdots,w_t$ 的赋权二叉树中，$w(T)$最小的树，称为最优树。

定理 4.3.1：任何一颗非平凡树至少有两片树叶。

定理 4.3.2：设权图 $G=\langle P,L\rangle$有 n 个顶点，其最小支撑树算法如下：

(1) 在 L 中选一个权最小的边 e_1，令 $T=\{e_1\}$，$i=1$。

(2) 若 $i=n-1$，则算法终止，否则转(3)。

(3) 在 $L—T$ 中选取边 e，满足：

(a) $T\cup\{e\}$中无回路；

(b) e 是 $L—T$ 中满足(a)的权最小的边。

则令 $T=T\cup\{e\}$，$i=i+1$，转(2)。

定理 4.3.3：设 T 是完全 m 叉树，其树叶数为 t，分支点数为 i，则有

$$(m-1)i=t-1$$

定理 4.3.4:设 T 是带权 $w_1\leqslant w_2\leqslant\cdots\leqslant w_t$ 的最优树，则

(1) 带权 w_1,w_2 的树叶 v_{w_1},v_{w_2} 是兄弟；

(2) 以树叶 v_{w_1},v_{w_2} 为儿子的分支点，其路长最大；

(3) 若将以带权 w_1 和 w_2 的树叶为儿子的分支点改为带权 w_1+w_2 的树叶，得到一棵新树 T'，则 T'是带权 $w_1+w_2,w_3,\cdots,w_t$ 的最优树。

4. **图的遍历**

欧拉路(回路)：给定无孤立顶点的图 G，若存在一条路(回路)，经过图中每条边一次且仅一次，则称该路(回路)为欧拉路(回路)。

欧拉图：具有欧拉回路的图称为欧拉图。

汉密尔顿路(回路)：给定图 G,若存在一条路(回路),经过图中每个顶点一次且仅一次,则称该路(回路)为汉密尔顿路(回路)。

汉密尔顿图：具有汉密尔顿回路的图称为汉密尔顿图。

闭包：设 $G=<P,L>$ 是有限图,$|P|=n$,若将图 G 中度树之和大于等于 n 的非邻接点连接起来得图 G',对图 G' 重复上述步骤,直到不再有这样的顶点对存在为止,最后所得到的图称作 G 的闭包,记作 $C(G)$。

定理 4.4.1：无向图 G 具有欧拉路,当且仅当 G 是连通的,且有零个或两个奇数度顶点。

推论 4.4.1：无向图 G 是欧拉图,当且仅当 G 是连通的,并且所有顶点的度数皆为偶数。

定理 4.4.2：如果图 $G=(P,L)$ 是汉密尔顿图,则对于任意的 $S,S\subseteq P,S\neq\varnothing$,都有

$$W(G-S)\leqslant |S|$$

定理 4.4.3：设 G 是具有 n 个顶点的简单图,$n\geqslant 3$,若 $\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$,则 G 是汉密尔顿图。

定理 4.4.4：设 G 是具有个 n 顶点的简单图,u,v 是 G 中不邻接的两个顶点,且 $d(u)+d(v)\geqslant n$,则 G 是汉密尔顿图的充要条件是 $G\cup\{uv\}$ 是汉密尔顿图。

定理 4.4.5：有限图 G 是汉密尔顿图的充要条件是其闭包 $C(G)$ 是汉密尔顿图。

5. **平面图**

平面图：设 $G=<P,L>$ 是图,如果能把 G 画在一个平面内,使得图的各边除在端点外彼此都不相交,则称 G 为平面图。

Jordan 曲线：起点与终点重合,自身互不相交的平面曲线叫 Jordan 曲线。

面：设 G 是平面图,则 G 将平面划分成一些连通的区域,这些区域称为 G 的面。

面的度数：设 f 是 G 的面,与 f 相邻的边的总数(不在任何回路上的边要计算两次),称为面 f 的度,记作 $d_G(f)$。

同胚：给定两个图 G_1 和 G_2,如果 G_1 与 G_2 是同构的;或者通过反复插入或除去度数为 2 的顶点后,使 G_1 与 G_2 同构,则称 G_1 与 G_2 是同胚的。

定理 4.5.1：设 $G=<P,L>$ 是平面图,$|L|=m$,则

$$\sum_{f\in F(G)} d_G(f)=2m$$

其中 $F(G)$ 是 G 的面的集合。

定理 4.5.2(**欧拉公式**)：设 $G=<P,L>$ 是连通平面图,$|P|=n$,$|L|=m$,且共有 r 个面,则有

$$n-m+r=2$$

推论 4.5.1：设 $G=<P,L>$ 是连通简单平面图,$|P|=n$,$|L|=m$,则 $m\leqslant 3n-6$。

定理 4.5.3：一个图是平面图的充分必要条件是它不含有与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

6. **有向图**

入度：设 $G=<P,L>$ 是有向图,$v\in P$,称与 v 关联且以 v 为终点的边的个数为 v 的入

度，记为 $d^{-}(v)$。

出度：设 $G=<P,L>$是有向图，$v\in P$，称与 v 关联且以 v 为起点的边的个数为 v 的出度，记为 $d^{+}(v)$。

可达：设 $G=<P,L>$是有向图，$u,v\in P$，若在 G 中存在从 u 到 v 的路，则称从 u 可达 v。

强连通：如果有向图 G 中任意两个顶点都是相互可达的，则称 G 为强连通图。

单侧连通：如果对于有向图 G 中任意两个顶点 u 和 v，或者从 u 可达 v，或者从 v 可达 u，则称 G 是单侧连通图。

弱连通：如果在有向图 G 中去掉边的方向后，所得到的无向图是连通的，则称 G 是弱连通图。

强分图：在简单有向图中，具有强连通性质的最大子图，称为强分图。

单侧分图：在简单有向图中，具有单侧连通性质的最大子图，称为单侧分图。

弱分图：在简单有向图中，具有弱连通性质的最大子图，称为弱分图。

邻接矩阵：设 $G=<P,L>$是简单有向图，$P=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & v_i \text{ 邻接 } v_j \\ 1, & v_i \text{ 不邻接 } v_j \text{ 或 } i=j\end{cases} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

可达性矩阵：设 $G=<P,L>$是简单有向图，$P=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 $\boldsymbol{P}(G)=(p_{ij})_{n\times n}$ 为 G 的可达性矩阵，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少存在一条路} \\ 0, & \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 不存在路}\end{cases} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

完全关联矩阵：设 $G=<P,L>$是简单有向图，$P=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$L=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，称 $\boldsymbol{M}(G)=(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的完全关联矩阵，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \\ 0, & \text{从 } v_i \text{ 到 } e_j \text{ 不关联}\end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$$

定理 4.6.1：在任何一个有向图中 $G=<P,L>$中，所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，且都等于边的个数，即

$$\sum_{v\in P} d^{-}(v)=\sum_{v\in P} d^{+}(v)=m$$

其中 $m=|L|$。

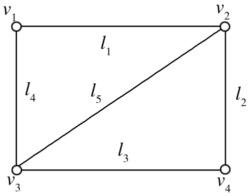
定理 4.6.2：有向图 G 是强连通的，当且仅当存在一条经过 G 中所有顶点的回路。

定理 4.6.3：有向图中的任何一个顶点位于且只位于一个强分图中。

定理 4.6.4：设 $\boldsymbol{A}(G)$是图 G 的邻接矩阵，则$(\boldsymbol{A}(G))^k$ 中的第 i 行第 j 列元素 $a_{ij}{}^{(k)}$ 等于 G 中从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的路的数目。

二、习题与解

1. 写出如图所示的关联矩阵及邻接矩阵。



解：$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$

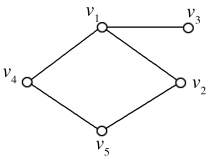
2. 设 $P=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，画出图 $G=<P,L>$，其中

(1)　$L=\{v_1v_2,v_1v_4,v_2v_5,v_1v_3,v_4v_5\}$ ；

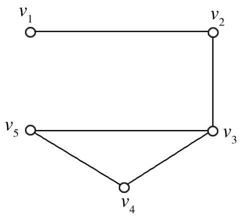
(2)　$L=\{v_2v_1,v_2v_3,v_3v_4,v_3v_5,v_4v_5\}$。

解：

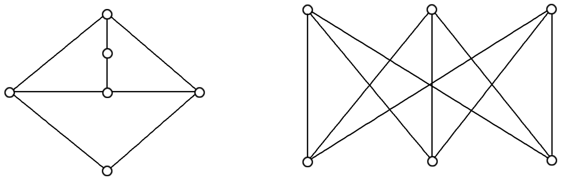
(1)



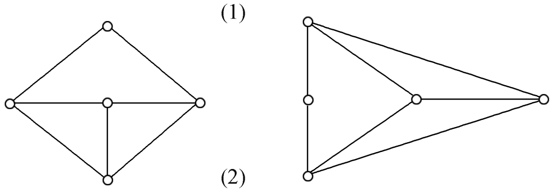
(2)



3. 问下列两组图是否同构？



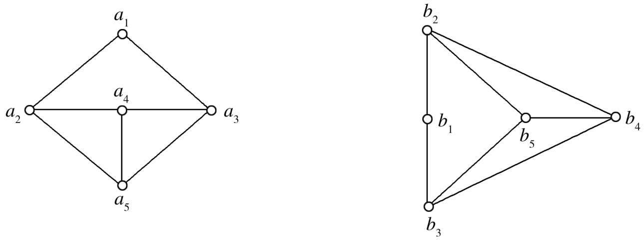
(1)



(2)

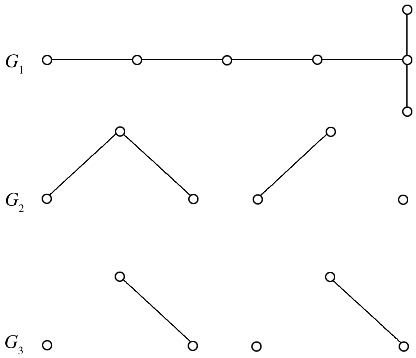
解：(1)　在左图中有一个二度顶点，而在右图中无二度顶点，所以不可能建立同构关系。

(2)　同构。



有双射函数 $f(a_i)=b_i(i=1,2,3,4,5)$,且保持关联关系不变。

4. 说明下列各图是否连通,如果不连通,说明连通分支数。



解:(1)　连通,$W(G_1)=1$;

(2)　不连通,$W(G_2)=3$;

(3)　不连通,$W(G_3)=4$。

5. 一公司在六个城市 $C_1,C_2,\cdots,C_6$ 中每一个都有分公司,从 c_i 到 c_j 的班机旅费由下列矩阵中的第 i 行第 j 列的元素给出。公司所关心的是计算两城市间费用最低的路线,对上述六城市中任意一对城市,计算两城市间费用最低的路线。

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$(∞表示没有直接班机)

解:C_1 与 C_2 之间费用最低路线:$C_1-C_6-C_2$;

C_1 与 C_3 之间费用最低路线:$C_1-C_5-C_3$;

C_1 与 C_4 之间费用最低路线:$C_1-C_6-C_4$;

C_1 与 C_5 之间费用最低路线：C_1-C_5；

C_1 与 C_6 之间费用最低路线：C_1-C_6；

C_2 与 C_3 之间费用最低路线：C_2-C_3；

C_2 与 C_4 之间费用最低路线：C_2-C_4；

C_2 与 C_5 之间费用最低路线：$C_2-C_4-C_5$；

C_2 与 C_6 之间费用最低路线：C_2-C_6；

C_3 与 C_4 之间费用最低路线：C_3-C_4；

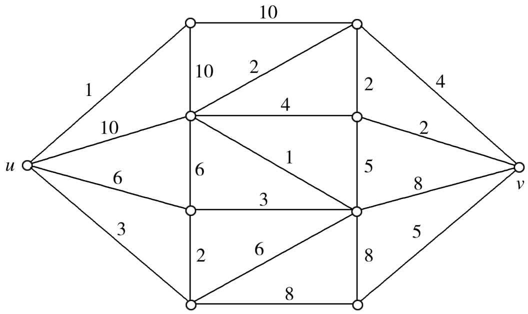
C_3 与 C_5 之间费用最低路线：C_3-C_5；

C_3 与 C_6 之间费用最低路线：$C_3-C_4-C_6$；

C_4 与 C_5 之间费用最低路线：C_4-C_5；

C_4 与 C_6 之间费用最低路线：C_4-C_6；

C_5 与 C_6 之间费用最低路线：$C_5-C_4-C_6$。



6. 求右面有限权图中点 u 到点 v 间的最短路。

解：最短路 15。

7. 设有 5 个城市 $v_1,\cdots,v_5$，任意两城市之间铁路造价如下：(以百万元计算)

$w(v_1,v_2)=4, w(v_1,v_3)=7, w(v_1,v_4)=16$

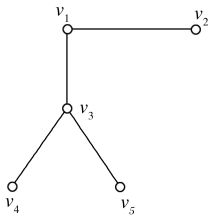
$w(v_1,v_5)=10, w(v_2,v_3)=13, w(v_2,v_4)=8$

$w(v_2,v_5)=17, w(v_3,v_4)=3, w(v_3,v_5)=10$

$w(v_4,v_5)=12$

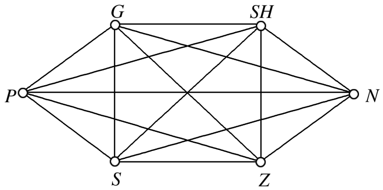
试求出连接 5 个城市且造价最低的铁路网。

解：所求铁路网为：

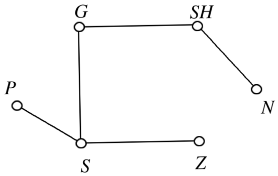


8. 试用克鲁斯卡尔算法求下列权图 7 中的最小支撑树。

	北京(*P*)	济南(*G*)	上海(*SH*)	南昌(*N*)	郑州(*Z*)	石家庄(*S*)
北京	/	479	1463	2007	695	283
济南	479	/	966	1567	666	301
上海	1463	966	/	837	998	1267
南昌	2007	1567	837	/	1312	1724
郑州	695	666	998	1312	/	412
石家庄	283	301	1267	1724	412	/

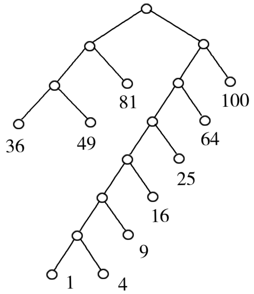


解：所求最小支撑树为



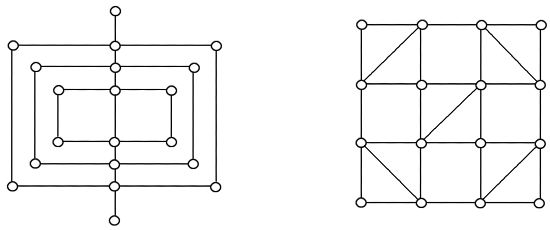
9. 给定树叶的权为 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,试构造一棵最优树。

解：所求最优树为



10. 判断下列图能否一笔画出。

解：(1) 能　　　　(2) 能



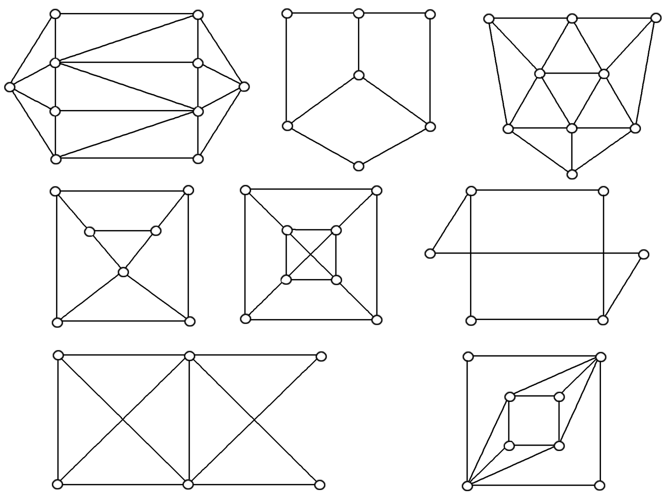
11．试证明：最优树必为完全二叉树。

证明：假设最优树 T 不是完全二叉树，则必有一分支点只有一个儿子，设为 v。

（1） v 的儿子为树叶，带权 w，现将 v 的儿子删掉，使 v 带权 w，所得树为 T'，则 $w(T')<w(T)$，矛盾。

（2） v 的儿子不是树叶，是一分支点 v_1，设 v 的父亲为 v_2，现将 v 删除，使 v_2 的儿子为 v_1，得树 T''，则 $w(T'')<w(T)$，矛盾。

12．判断下列各图是否为汉密尔顿图，并说明原因，如果是汉密尔顿图，请画出汉密尔顿回路。



解：（1） 是

（2） 不是，删除三个顶点后，可以得到 4 个连通分支。

（3） 是　　　（4） 是　　　（5） 是

（6） 不是，删除两个顶点后，可以得到 3 个连通分支。

（7） 不是，删除两个顶点后，可以得到 3 个连通分支。

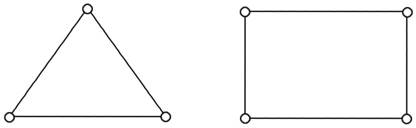
（8） 不是，删除两个顶点后，可以得到 3 个连通分支。

13．构造欧拉图，使其顶点数 v 与边数 ε 满足下列条件：

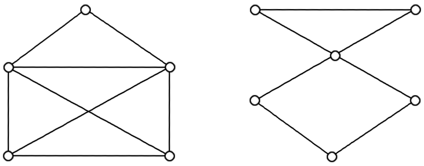
（1）　v 和 ε 的奇偶性相同；

（2）　v 和 ε 的奇偶性相反。

解：（1）



（2）



14．举出满足下列要求的具有 5 个点的图：

（1）　没有汉密尔顿回路，也不能适当指定各边的方向使其具有欧拉路。

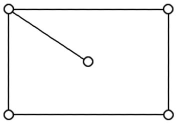
（2）　有汉密尔顿回路，但没有欧拉路。

（3）　没有汉密尔顿路，但又欧拉路。

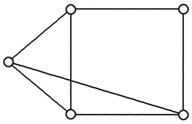
（4）　既有汉密尔顿路，又有欧拉路。

解：

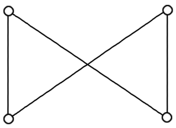
（1）



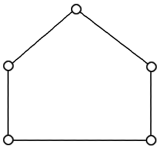
（2）



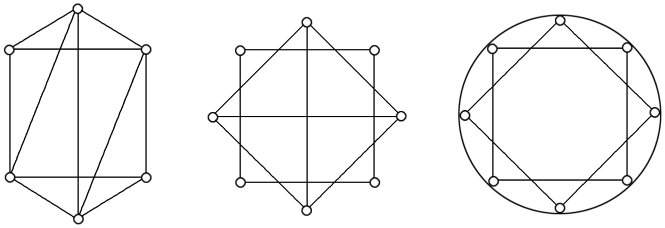
（3）



（4）



15．根据下图动手画出平面图。

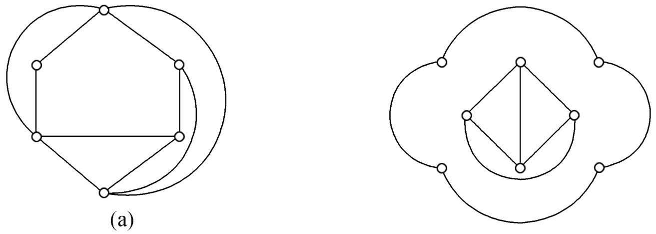


(a) (b) (c)

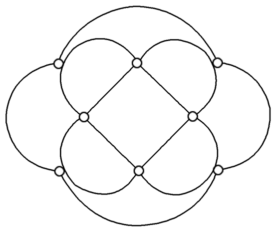
（1） 如果是可平面图，画出平面图；

（2） 如果不是可平面图，画出其中同胚与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的部分。

解：都是平面图。



(a) (b)



(c)

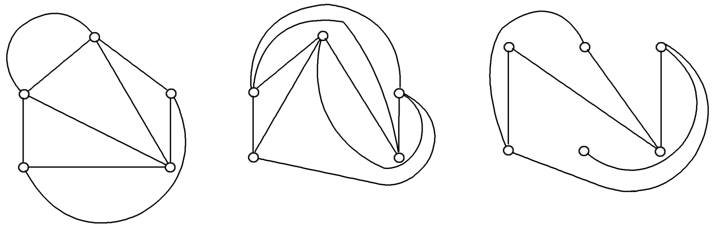
16．试证明：

（1） 若 e 是 K_5 的任意一条边，则 K_5-e 是可平面图；

（2） 若 e 是 $K_{3,3}$ 的任意一条边，则 $K_{3,3}-e$ 是可平面图。

证明：（1） 图(a)给出了缺少的边 e 为对角线的平面图，图(b)给出了缺少的边 e 为非对角线的平面图。

（2） 图(c)给出了缺少边 e 的平面图。



(a) (b) (c)

17. 证明一个有向图是单侧连通的，当且仅当它有一条经过每一顶点的路。

证明：充分性是显然的，现证必要性。

设图 $G=\langle P,L\rangle$ 是单侧连通的，则对任意的 $u,v\in P$，不妨设从 u 到 v 有一条路，记为 $v_1v_2\cdots v_k$，$v_1=u$，$v_k=v$。

此路若已经过所有的顶点，则证毕，现设顶点 $w\in P$ 不在此路上，由 G 是单侧连通的，则 w 和路上每个顶点皆有路，令

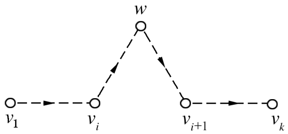
$$i=\max\{s\mid 从\ v_s\ 到\ w\ 有路\}$$

$$j=\min\{s\mid 从\ w\ 到\ v_s\ 有路\}$$

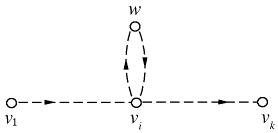
于是有 $j\leqslant i+1$。

假设 $j>i+1$，则存在整数 t，使 $i<t<j$，且顶点 w 和 v_t 之间有路，若是从 w 到 v_t 有路，与 j 的定义矛盾，若是从 v_t 到 w 有路，与 i 的定义矛盾，所以有 $j\leqslant i+1$。

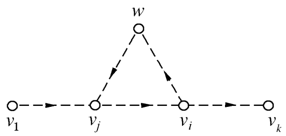
(1)　$j=i+1$，则有路 $v_1\cdots v_i\cdots w\cdots v_{i+1}\cdots v_k$。



(2)　$j=i$，则有路 $v_1\cdots v_i\cdots w\cdots v_i\cdots v_k$。

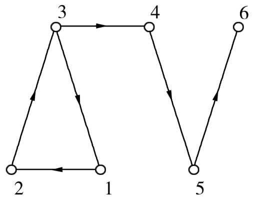


(3)　$j<i$，则有路 $v_1\cdots v_j\cdots v_i\cdots w\cdots v_j\cdots v_i\cdots v_k$。



总之，将顶点 w 扩充到路中，若还有不在此路上的 G 中的顶点，重复上述过程，总可将不在路上的顶点扩充进去，最后得到一条经过每一个顶点的路。

18. 试求下图中的强分图、单侧分图和弱分图。



解：强分图为$\{v_1, v_2, v_3\}$，$\{v_4\}$，$\{v_5\}$，$\{v_6\}$。

单侧分图与弱分图都是$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$。

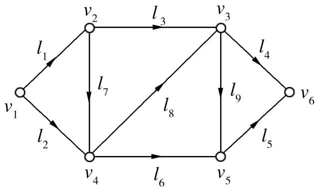
19. 试证明图的每一个顶点和每一条边，都只包含于一个弱分图中。

证明：对任意的顶点 u，令 S 是图中略去边的方向后与 u 连通的所有顶点的集合，当然 v 也在 S 中，而 S 是 G 的一个弱分图，所以图中每个顶点都必位于一个弱分图中。

设 G_1，G_2 都是包含顶点 u 的弱分图，略去边的方向后，G_1 中的所有顶点与 u 连通，G_2 中所有顶点也与 u 连通，故 G_1 与 G_2 中所有顶点连通，这与 G_1，G_2 是弱分图矛盾，故 G 的顶点只位于一个弱分图中。

如果一条边包含于两个弱分图中，该边所关联的两个顶点也包含于两个弱分图中，这是不可能的，所以任一条边也只能包含于一个弱分图中。

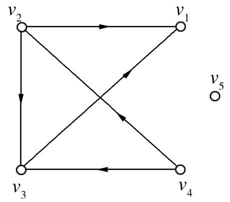
20. 设图 G 如下图所示，求邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 和关联矩阵 $\boldsymbol{M}(G)$。



解：邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

关联矩阵　$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

21. G 如下图所示，求 G 的邻接矩阵和可达性矩阵。



解：邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

可达性矩阵 $\boldsymbol{P}(G)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. 设 $G=<P,L>$，$|P|=n$，$|L|=m$，证明：

$$\delta(G)\leqslant\frac{2m}{n}\leqslant\Delta(G)$$

证明：因为 $\sum\limits_{v\in P}d(v)=2m$，且对任意的 $v\in P$，有

$$\delta(G)\leqslant d(v)\leqslant\Delta(G)$$

于是 $n\cdot\delta(G)\leqslant\sum\limits_{v\in P}d(v)\leqslant n\cdot\Delta(G)$，

即 $n\cdot\delta(G)\leqslant 2m\leqslant n\cdot\Delta(G)$，

所以 $\delta(G)\leqslant\dfrac{2m}{n}\leqslant\Delta(G)$。

23. 证明：在任何有向完全图中，所有顶点入度的平方之和等于所有顶点出度的平方之和。

证明：设有向完全图有 n 个顶点。对任一顶点 v 均有

$$d^+(v)+d^-(v)=n-1$$

又因边数$=\frac{1}{2}n(n-1)=\sum_{i=1}^{n}d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n}d^-(v_i)$，

故有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(d^-(v_i))^2\\
=&\sum_{i=1}^{n}(n-1-d^+(v_i))^2\\
=&\sum_{i=1}^{n}(n-1)^2-\sum_{i=1}^{n}2(n-1)d^+(v_i)+\sum_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2\\
=&n(n-1)^2-2(n-1)\sum_{i=1}^{n}d^+(v_i)+\sum_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2\\
=&n(n-1)^2-2(n-1)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+\sum_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2\\
=&\sum_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2。
\end{aligned}$$

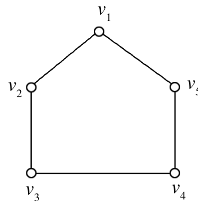
24. 一个图如果同构于它的补图，则称该图为自补图。

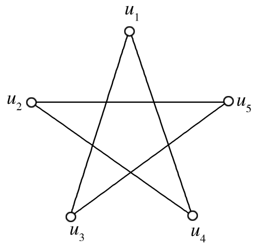
(1) 试给出一个 5 个顶点的自补图；

(2) 一个图是自补图，其对应的完全图的边数必为偶数；

(3) 是否有 3 个顶点或 6 个顶点的自补图？

证明：(1) 5 个顶点的图 G 与其补图 $\overline{G}$ 如图所示。在 G 与 $\overline{G}$ 之间建立双射：$v_1\rightarrow u_1$，$v_2\rightarrow u_3$，$v_3\rightarrow u_5$，$v_4\rightarrow u_2$，$v_5\rightarrow u_4$。显然这两个图保持对应点边之间对应的关联关系，故 $G\simeq\overline{G}$，所以，G 是 5 个顶点的自补图。





(2) 设图 G 是自补图，G 有 m 条边，G 对应的完全图边数为 k。G 的补图 $\overline{G}$ 的边数为 $k-m$。因为 $G\simeq\overline{G}$，故边数相等，有 $m=k-m$，即 $k=2m$，所以 G 对应的完全图的边数为偶数。

(3) 由(2)可知，自补图对应的完全图的边数为偶数，n 个顶点的完全图 K_n 的边数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$，当 $n=3$ 或 $n=6$，K_n 的边数为奇数，因此不存在 3 个顶点或 6 个顶点的自补图。

25. 至少有两个顶点的简单图有两个相同度数的顶点。

证明：设 G 是具有 n 个顶点的简单图($n\geqslant 2$)。因为是简单图，所以每个顶点的度数$\leqslant$

$n-1$。因此，在 G 中顶点可能出现的度数是：$0,1,2,\cdots,n-1$。

而在 G 中度数为 0 的顶点与度数为 $n-1$ 的顶点不可能同时存在。因此，在 G 中可以出现的度数应该分成以下两种情况：

(1)　$0,1,2,\cdots,n-2$；

(2)　$1,2,3,\cdots,n-1$。

无论是哪一种情况都最多有 $n-1$ 种不同的度数，因为 G 中有 n 个顶点，由鸽巢原理，至少两个顶点具有相同的度数。

26. 对于任何一个具有 6 个顶点的简单图，或者它包含一个三角形，或者它的补图包含一个三角形。

证明：设 G 为具有 6 个顶点的简单图。在 G 中任取一个顶点 u，则另外 5 个顶点或者在 G 中与 u 相邻，或者在 $\overline{G}$ 中与 u 相邻，由鸽巢原理，则至少有 3 个顶点同在 G 中或同在 $\overline{G}$ 中与 u 相邻，不妨设其中 3 个顶点为 a,b,c。

(1)　如果 a,b,c 中至少有一对顶点在 G 中或 $\overline{G}$ 中相邻，则在 G 中或 $\overline{G}$ 中存在一个三角形。

(2)　如果 a,b,c 三个顶点在 G 中或 $\overline{G}$ 中两两皆不相邻，一定在补图 $\overline{G}$ 或 G 中相邻，则在 $\overline{G}$ 或 G 中存在一个三角形。

27. 若图 G 的直径大于 3，则 G 的补图 $\overline{G}$ 的直径小于 3。

证明：图的直径是图中两个顶点之间的最大距离。

对 $\overline{G}$ 中任意一对顶点 u,v，

(1)　若 u,v 在 G 中不相邻，则 u,v 在 $\overline{G}$ 中相邻，故 u,v 在 $\overline{G}$ 中的距离为 1；

(2)　若 u,v 在 G 中相邻，则 u,v 在 $\overline{G}$ 中不相邻。

对其他任意两个顶点 a,b：

①　若 a 和 b 在 G 中与 u(或 v)都相邻，则 a 与 b 在 G 中的距离 $d_G(a,b)\leqslant 2$，由 a,b 的任意性，图 G 的直径 $\leqslant 2$，矛盾。

②　若 a 和 u，b 和 v 在 G 中相邻，则 $d_G(a,b)\leqslant 3$，由 a,b 的任意性，图 G 的直径 $\leqslant 3$，矛盾。

③　存在顶点 w，使 u 与 w，v 与 w 在 G 中皆不相邻，则必有 u 与 w，v 与 w 在 $\overline{G}$ 中皆相邻，于是 u 与 v 在 $\overline{G}$ 中的距离 $=2$。

综上，由 u 与 v 的任意性可知，$\overline{G}$ 的直径必小于 3。

28. 证明简单图的最大度小于顶点数。

证明：设简单图 G 有 n 个顶点，对任意顶点 u，由于 G 是简单图，u 至多与其余 $n-1$ 个顶点相邻，即 $d(u)\leqslant n-1$，而

$$\Delta(G)=\max\{d(u)\mid u\in P(G)\}$$

所以由 u 的任意性，有 $\Delta(G)\leqslant n-1$。

29. 在一个旅行团中共有 14 人，在山上休息时，他们想打桥牌，而每个人都曾参与其中的 5 个人合作过，现规定只有 4 个人中任两个人都未合作过，才能在一起打一局牌，这样，打了三

局就没法再打下去了。这时,来了另一位旅游者,他当然没有与该旅行团中的任何人合作过。如果他也参加打牌,证明一定可以再打一局桥牌。

证明:画一个具有 14 个顶点的简单图,如果每个顶点代表旅行团中的一个人,如果相应于 u,v 的两个人未合作过,则连接一条边,这样,对于每个顶点,其度数皆为 8。

每打过一局牌,就要去掉两条边,三局牌共要去掉 6 条边,即使这 6 条边关联不同的 12 个顶点,那么至少还有 2 个顶点的度数仍为 8,设这两个顶点之一为 u_0,那么与 u_0 相邻的 8 个顶点中至少有一个顶点的度数不小于 7,否则,如果这 8 个顶点的度数均$\leqslant 6$,则由于每个顶点至少去掉 2 条边,故至少失去掉$\dfrac{8\times 2}{2}=8$ 条边,这与仅去掉 6 条边矛盾。

设 v_0 是与 u_0 相邻且 $d(v_0)\geqslant 7$ 的顶点,那么 v_0 必至少与上述 8 个顶点中的其余 7 个顶点之一相邻,否则 $d(v_0)\leqslant 13-7=6$ 矛盾。

设 w_0 是与 v_0 相邻的顶点,则 u_0,v_0,w_0 构成一个三角形,这表示相应的三个人是两两未合作过的,这三个人与新来的旅游者一定可以再打一局牌。

30. 考察 $2n$ 所电话局,如果每一所电话局至少可以与另外 n 所电话局通话,那么,在这 $2n$ 所电话局中的任何两所电话局之间都可以通话(也可能要通过另外的电话局)。

证明:设 $2n$ 所电话局为 $2n$ 个顶点,能通话的电话局之间连一条边,这样就得到一个简单图 G,由题意可知,每个顶点的度数$\geqslant n$,那么,就要证明每两个顶点之间必有一条路存在,即 G 是连通的。

假设不是连通的,则至少有 2 个连通分支,G 共有 $2n$ 个顶点,故必存在一个最多有 n 个顶点的连通分支,又由于是简单图,故该连通分支中每个顶点的度数$\leqslant n-1$,与题设矛盾。因此 G 是连通的。

31. 如果在 n 个电话局中的任何两个电话局总是可以通话的,则至少存在 $n-1$ 条直通线路。

证明:设 n 个电话局为 n 个顶点,如果两个电话局可以直通电话,则在对应的两个顶点间连一条边。因为任何两个电话局可以通话,因此就构成一个简单连通图。

用数学归纳法证明:n 个顶点的简单连通图 G,至少存在 $n-1$ 条边。

当 $n=1$ 时,$m=0$,结论成立。

设 $n=k$ 时,G 至少有 $k-1$ 条边。

当增加一个顶点 u 时,由于是连通图,u 至少与 G 中的某个顶点相邻,即当 $n=k+1$ 时,结论成立。

32. 设 $G=\langle P,L\rangle$是图,对图中的每个顶点指定一种颜色,使得没有两个相邻的顶点用同一种颜色,证明按上述方法对图 G 进行着色且只用了两种颜色,当且仅当它不包含长度为奇数的回路。

证明:充分性,设 G 中不包含长度为奇数的回路,对任意的 $u\in P$,令

$$P_1=\{v\mid 从\ u\ 到\ v\ 存在一条长度为偶数的简单路\}$$
$$P_2=\{v\mid 从\ u\ 到\ v\ 存在一条长度为奇数的简单路\}$$

显然，$P=P_1\cup P_2$，且 $P_1\cap P_2=\varnothing$。如若不然，设 $v\in P_1\cap P_2$，则从 u 到 v 既有一条长度为偶数的简单路，又有一条长度为奇数的简单路，这两条路合起来就是一条长度为奇数的回路，与题设矛盾。

对于 $P_i(i=1,2)$中任何两个顶点不相邻。如若不然，存在 $v,w\in P_i$，v 与 w 是相邻的，则 u 到 v 长度为偶(奇)数的简单路，u 到 w 长度为偶(奇)数的简单路，与边 vw 合起来构成一条长度为奇数的回路，与题设矛盾。这样图 G 中的每一条边，它所关联的两个顶点，一个在 P_1 中，另一个在 P_2 中。现将 P_1 中所有顶点着上 C_1 色，P_2 中所有顶点着上 C_2 色，则满足要求。

必要性，设图 G 能用两种颜色 C_1 和 C_2，令

$$P_1=\{u\mid u\in P,u\ 着上\ C_1\ 色\}$$
$$P_2=\{u\mid u\in P,u\ 着上\ C_2\ 色\}$$

对于图 G 的任一条回路 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$，其中 $v_1=v_n$，长度为 $n-1$。

由于相邻的顶点颜色不同，不妨设 $v_1\in P_1,v_2\in P_2,v_3\in P_1,\cdots,v_{n-1}\in P_2,v_n=v_1\in P_1$，故 $n-1$ 为偶数，即 G 中任一条回路的长度皆是偶数，不存在长度为奇数的回路。

33.若无向图中恰有两个奇数度的顶点，则这两个顶点之间必有一条路。

证明：设 u 和 v 是图 G 中两个奇数度顶点。

从 u 开始构造一条迹，从 u 出发经关联于 u 的边 e_1 到达顶点 u_1，若 $d(u_1)$为奇数，则证完；若 $d(u_1)$为偶数，则必可由 u_1 再经关联于 u_1 的边 e_2 到达顶点 u_2，如此下去，每边只取一次，直到另一个奇数度顶点停止，由于图 G 中只有两个奇数度顶点，故该顶点或是 u 或是 v。如果是 v，则证完；如果仍是 u，此路是闭迹，闭迹上每个顶点都关联偶数条边，而 $d(u)$为奇数，所以至少还有一条关联 u 的边不在此闭迹上。继续从 u 出发，沿着该边到达另一顶点 u_1'，依次下去直到另一个奇数度顶点停止。这样经有限次后必可到达顶点 v，这就是一条从 u 到 v 的路。

34.若图 G 是不连通的，则 G 的补图 $\overline{G}$ 是连通的。

证明：由于图 $G=\langle P,L\rangle$是不连通的，设 G 的连通分支为 $G(P_1),G(P_2),\cdots,G(P_k)$ $(k\geqslant 2)$。对于任意的 $u,v\in P$，有以下两种情况：

(1) u,v 同属于一个连通分支 $G(P_i)$中，在另一个连通分支 $G(P_j)(i\neq j)$中任取一个顶点 w，则 u 与 w，v 与 w 在 G 中皆不相邻，于是 u 与 w，v 与 w 在 $\overline{G}$ 中相邻，所以 u 与 v 在 $\overline{G}$ 中是连通的。

(2) u,v 不属于同一个连通分支，则 u 与 v 在 G 中必不相邻，可是 u 与 v 在 $\overline{G}$ 中相邻，所以 u 与 v 在 $\overline{G}$ 中是连通的。

35.每个顶点的度数至少为 2 的图必包含一个回路。

证明：设 L 是图 G 中最长路中的一条，端点为 u，则与 u 相邻的顶点必在 L 上，否则，将

这个顶点加进 L 中就可得到一条更长的路。

如果 u 在 L 中重复出现，则回路找到；如果 u 在 L 中只出现一次，而 G 中每个顶点度数至少是 2，则 u 关联的一条边 e 不在 L 上，且 e 关联的另一个顶点 v 在 L 上，于是 L 中从 u 到 v 的子路与边 e 就形成一个回路。

36. 设 $G=\langle P,L\rangle$ 为简单图，$|P|=n$，$|L|>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则 G 是连通的。

证明：假设 G 不连通，不妨设 G 有两个连通分支 G_1 和 G_2，其顶点数分别为 n_1 和 n_2，则 $n_1+n_2=n$，又 $n_1,n_2\geqslant 1$，所以 $n_1,n_2\leqslant n-1$，则

$$
\begin{aligned}
|L| &\leqslant \frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)\\
&\leqslant \frac{1}{2}(n-1)(n_1+n_2-2)\\
&=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)
\end{aligned}
$$

与题设矛盾，因此，G 是连通的。

37. 当且仅当 G 的一条边 e 不包含在 G 的回路中时，e 才是 G 的割边。

证明：设 $e=(u,v)$。

必要性，假设 e 包含在 G 的一个回路中，那么除边 e 外，还有一条以 u 和 v 为端点的路，所以删除边 e 后，G 仍是连通的，这与 e 是割边矛盾。

充分性，如果边 e 不包含在 G 的任一回路中，那么连接顶点 u 和 v 只有边 e，而不会有其他连接 u 和 v 的任何路。因为如果连接 u 和 v 还有不同于边 e 的路，此路与边 e 就组成一条包含边 e 的回路，矛盾。所以删去边 e 后，u 和 v 就不连通，故边 e 是割边。

38. 若 $G=\langle P,L\rangle$ 是一个简单图，且 $\delta(G)\geqslant|P|-2$，则 $k(G)=\delta(G)$。

证明：因为 G 是简单图，所以每个顶点的度数 $\leqslant|P|-1$，又 $\delta(G)\geqslant|P|-2$，故只要讨论以下两种情况即可。

(1) $\delta(G)=|P|-1$，则 G 是完全图，因此 $k(G)=\delta(G)=|P|-1$。

(2) $\delta(G)=|P|-2$，则必有两个顶点不相邻，设为 v_1,v_2，于是对任意的 $v\in P$，都有 $vv_1,vv_2\in L$。因此，对于 G 中任意的 $|P|-3$ 个顶点的集合 P_1，$G-P_1$ 必是连通的，故有 $k(G)\geqslant|P|-2=\delta(G)$，又 $k(G)\leqslant\delta(G)$ ，所以 $k(G)=\delta(G)$。

39. 设无向图 $G=\langle P,L\rangle$，$|P|\geqslant 3$，G 是连通的简单图但不是完全图，则 G 中存在三个不同的顶点 u,v,w，使得 $uv\in L$，$vw\in L$，而 $vw\notin L$。

证明：因为 G 不是完全图，故存在顶点 $v_i,v_j\in P$，而 $v_iv_j\notin L$，由 G 的连通性可知，v_i 到 v_j 存在路，且此路不经过重复的顶点（若有重复顶点，可将重复的一段路删除），设此路为

$$v_iv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v_j$$

若 $k=1$，则 v_i, v_{i_1}, v_j 三点为所求。

若 $k\geqslant 2$，如果存在 $2\leqslant r\leqslant k$，使 $v_i v_{i_r}\notin L$，而对一切 $s(1\leqslant s\leqslant r-1)$，有 $v_i v_{i_s}\in L$，则 v_i，$v_{i_{r-1}}, v_{i_r}$ 三点为所求；如果对于一切 $s(1\leqslant s\leqslant k)$，有 $v_i v_{i_s}\in L$，则 v_i, v_{i_k}, v_j 三点为所求。

40.(1)　一个完全图 K_6 的边涂上红色或蓝色。证明对于任何一种涂边的方法，总有一个完全图 K_3 的所有边被涂上红色，或者一个 K_3 的所有边被涂上蓝色。

(2)　证明六个人的人群中，或者有三个人相互认识或者有三个人彼此陌生。

(3)　对于 n 个顶点的完全图 K_n 的边，随意涂上红色或蓝色，证明如果有 6 条或更多条红色的边关联于一个顶点，则存在一个各边都是红色的 K_4 或者一个蓝色的 K_3；如果有 4 条或更多条蓝色的边关联于一个顶点，则存在一个红色的 K_4 或者一个蓝色的 K_3。

证明：(1)　任取 K_6 中的一个顶点 u，与 u 关联的边有 5 条，这 5 条边被涂上红色或蓝色，由鸽巢原理，其中必有 3 条边被涂上同一色，不妨设这 3 条边涂上红色，设这 3 条边的另一端点为 v_1, v_2, v_3，这 3 个顶点也是两两相连，如果有一条边被涂上红色，例如边 v_1v_2 涂上红色，则顶点 u, v_1, v_2 就组成一个红色的 K_3，如果边 v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1 都涂上蓝色，那么顶点 v_1, v_2, v_3 便组成一个蓝色的 K_3。因此在 K_6 中必有一个红色的 K_3 或蓝色的 K_3。

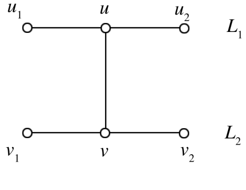
(2)　设 6 个人用 6 个顶点表示，若顶点 u, v 代表的人彼此认识，则边 uv 上涂上红色；若顶点 u, v 代表的人彼此不认识，则边 uv 涂上蓝色。由(1)可知，或者有一个红色的 K_3 或者有一个蓝色的 K_3，即或者有 3 个人彼此认识，或者有 3 个人彼此不认识。

(3)　设在图 K_n 中，有 6 条或更多边关联于同一个顶点 u 且涂上红色，取其中任意 6 条边，这 6 条边除 u 以外的另一端点构成一个 K_6。由(1)可知，K_6 中有一个蓝色的 K_3，或一个红色的 K_3。如果有一个蓝色的 K_3，则此 K_n 中就有一个蓝色的 K_3；如果有一个红色的 K_3，则此 K_3 与顶点 u 及其 u 所关联的边就组成一个红色的 K_4，则 K_n 中就有一个红色的 K_4。

在 K_n 中，如果有 4 条或更多条边关联于同一顶点 u 且涂上蓝色，取其中任意 4 条边，这 4 条边除 u 以外的另一端点构成一个 K_4。如果 K_4 中有一条边涂上蓝色，则这条边与顶点 u 及其所关联的边就组成一个蓝色的 K_3，此时 K_n 中就有一个蓝色的 K_3。如果 K_4 的各条边都涂上红色，此时 K_n 中就有一个红色的 K_4。

41. 证明在一个连通无向图中，任何两条最长的简单路必有公共点。

证明：设 L_1, L_2 是连通图 G 中两条最长的简单路，假设 L_1 与 L_2 无公共点，由于 G 是连通的，则 L_1 中顶点与 L_2 中的顶点必是连通的，因此在 G 中总可以找到一条路 L，L 中除两个端点外既无 L_1 中顶点也无 L_2 中顶点，且 L 将 L_1 与 L_2 连接起来，如图所示。



设 L_1,L_2 的长度为 m,L 的长度为 m',在 L_1,L_2 中分别选取长度$\geqslant\frac{m}{2}$的一段路,不妨设为 $u_1\cdots u$ 与 $v\cdots v_1$,则路 $u_1\cdots u\cdots v\cdots v_1$ 的长度$\geqslant\frac{m}{2}+m'+\frac{m}{2}=m+m'>m$,与 L_1,L_2 是最长的简单路矛盾,故 L_1 与 L_2 必有公共点。

42. 设 $G=\langle P,L\rangle$是简单图,$|P|=n$,证明:

(1) 如果对任意的 $u,v\in P$,都有 $d(u)+d(v)\geqslant n-1$,则 G 中存在一条汉密尔顿路;

(2) 如果对任意的 $u,v\in P$,都有 $d(u)+d(v)\geqslant n$,则 G 中存在一条汉密尔顿回路。

证明:(1) 首先证明 G 是连通图。假设 G 有 k 个连通分支,$k\geqslant 2$。设一个连通分支中有 n_1 个顶点,任取一个顶点 v_1。设另一个连通分支中有 n_2 个顶点 ,任取一个顶点 v_2。

因为 G 是简单图,则 $d(v_1)\leqslant n_1-1$,$d(v_2)\leqslant n_2-1$,故 $d(v_1)+d(v_2)\leqslant n_1+n_2-2\leqslant n-2<n-1$,与题设矛盾。所以 G 是连通图。

其次证明 G 中存在汉密尔顿路。

设 $v_1v_2\cdots v_p$ 是 G 中的一条简单路,且与 v_1,v_p 相邻的顶点都在此路上。如若不然,如果有与 v_1 或 v_p 相邻的顶点不在此路上,则可扩展这条路,使它包含这一个顶点。

设 $p<n$,则存在一条回路包含顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$。设与 v_1 相邻的 k 个顶点为:$v_l,v_m,\cdots,v_t$,其中 $2\leqslant l,m,\cdots,t\leqslant p$,则 v_p 必与 $v_{l-1},v_{m-1},\cdots,v_{t-1}$ 中之一相邻。如若不然,假设 v_p 与 $v_{l-1},v_{m-1}\cdots,v_{t-1}$ 皆不相邻,则 v_p 至多与 $p-1-k$ 个顶点相邻,即 $d(v_p)\leqslant p-1-k$,$d(v_1)=k$,所以 $d(v_1)+d(v_p)\leqslant p-1<n-1$,与题设矛盾。

不妨设 v_p 与 v_{m-1} 相邻,则 $v_1v_2\cdots v_{m-1}v_pv_{p-1}\cdots v_{m-1}v_mv_1$ 是所求的包含顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 的回路。

由 $p<n$,则存在不在上述回路中的顶点 u,因为 G 是连通的,则 u 必与 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 中的某一个顶点 v_i 相邻,则得到包含顶点 $u,v_1,v_2,\cdots,v_p$ 的路,为

$$uv_iv_{i+1}\cdots v_{m-1}v_pv_{p-1}\cdots v_{m-1}v_mv_1v_2\cdots v_{i-1}$$

重复上述过程,直到得到经过 G 中所有顶点的路,即汉密尔顿路。

(2) 由(1)可知,G 中存在一条汉密尔顿路,设为 $v_1v_2\cdots v_n$。

设与 v_1 相邻的 k 个顶点为 $v_1,v_m,\cdots,v_t$,其中 $2\leqslant l,m,\cdots,t\leqslant n$,则 v_n 必与 $v_{l-1},v_{m-1}\cdots,v_{t-1}$ 其中之一相邻。如若不然,假设 v_n 与 $v_{l-1},v_{m-1},\cdots,v_{t-1}$ 皆不相邻,则 v_n 至多与 $n-1-k$ 个顶点相邻,即 $d(v_n)\leqslant n-1-k$,$d(v_1)=k$,所以 $d(v_1)+d(v_n)\leqslant n-1<n$,与题设矛盾。

不妨设 v_1 与 v_{m-1} 相邻,则得到汉密尔顿回路:

$$v_1v_2\cdots v_{m-1}v_nv_{n-1}\cdots v_{m-1}v_1$$

43. 设简单图 $G=\langle P,L\rangle$,且$|P|=n$,$|L|=m$,若 $m\geqslant C_{n-1}^2+2$,则 G 是汉密尔顿图。

证明:假设 G 不是汉密尔顿图,由 42 题知,存在 $u,v\in P$,使 $d(u)+d(v)\leqslant n-1$,在 G

$-\{u,v\}$中，顶点数为 $n-2$，故它的边数 $\leqslant \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$，$G$ 中边数 $\leqslant \frac{1}{2}(n-2)(n-3)+n-1<\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+n=C_{n-1}^{2}+2$；与题设矛盾，所以 G 是汉密尔顿图。

44. 证明有限图 $G=\langle P,L\rangle$ 的闭包 $C(G)$ 是唯一确定的。

证明：设 G_1，G_2 是 G 的两个闭包，$\{l_1,l_2,\cdots,l_m\}$，$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$分别是加入 G 中得到 G_1，G_2 的边序列，往证 $l_i\in L(G_2)(i=1,2,\cdots,m)$，$f_j\in L(G_1)(j=1,2,\cdots,n)$。假设 $l_{k+1}=uv$ 是第一条（从左向右看）属于$\{l_1,l_2,\cdots,l_m\}$而不属于 $L(G_2)$ 的边，令 $H=G\cup\{l_1,l_2,\cdots,l_k\}$，因为

$$d_H(u)+d_H(v)\geqslant |P|$$

而 H 是 G_2 的子图，所以有

$$d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\geqslant |P|$$

而 u，v 在 G_2 中不相邻，则与 G_2 的定义矛盾，故所有的 $l_i(i=1,2,\cdots,m)$都在 $L(G_2)$中。

同理可证，所有 $f_j(j=1,2,\cdots,n)$都在 $L(G_1)$中。

因此，$G_1=G_2$。

45. 设 $G=\langle P,L\rangle$ 是简单图，$|P|=n$，u，v 是 G 中不相邻的两点，并且满足：$d(u)+d(v)\geqslant n$，则 G 是汉密尔顿图的充要条件是 $G\cup\{uv\}$ 是汉密尔顿图。

证明：必要性是显然的。

充分性，因为 $G\cup\{uv\}$ 是汉密尔顿图，故在 $G\cup\{uv\}$ 中存在一条汉密尔顿回路，在此回路中删除边 uv，得到 G 中一条汉密尔顿路，设此路为 $v_1v_2\cdots v_n$，，其中 $v_1=u$，$v_n=v$。

设与 u 相邻的所有顶点为 v_i，v_j，$\cdots$，v_k，则 v 必与 v_{i-1}，v_{j-1}，$\cdots$，v_{k-1} 其中之一相邻，如若不然，v 与 v_{i-1}，v_{j-1}，$\cdots$，v_{k-1}，皆不相邻，则

$$d(v)\leqslant n-1-d(u)$$

即 $d(u)+d(v)\leqslant n-1<n$，与 $d(u)+d(v)\geqslant n$ 矛盾。

不妨设 v 与 v_{i-1} 相邻，于是得到 G 中的一条汉密尔顿回路 $v_1v_2\cdots v_{i-1}v_nv_{n-1}\cdots v_{i+1}v_iv_1$，所以 G 是汉密尔顿图。

46. 有限图 G 是汉密尔顿图的充要条件是其闭包 $C(G)$ 是汉密尔顿图。

证明：设图 G 加入边序列$\{l_1,l_2,\cdots,l_k\}$后，得到闭包 $C(G)$，由 45 题知，

G 是汉密尔顿图 $\Leftrightarrow G\cup\{l_1\}$ 是汉密尔顿图

$\Leftrightarrow G\cup\{l_1\}\cup\{l_2\}$ 是汉密尔顿图

$\Leftrightarrow\cdots\cdots$

$\Leftrightarrow G\cup\{l_1,l_2,\cdots,l_m\}$ 是汉密尔顿图

因此，G 是汉密尔顿图当且仅当 $C(G)$ 是汉密尔顿图。

47. 设 $G=\langle P,L\rangle$ 是图，X，$Y\subseteq P$，且满足：

(1)　$X\cup Y=P$；

(2) $X \cap Y = \varnothing$;

(3) 只允许 X 中的顶点与 Y 中的顶点相邻;

(4) $|X| \neq |Y|$ 。

则 G 一定不是汉密尔顿图。

证明:因为$|X| \neq |Y|$,所以不妨设$|X| < |Y|$,由已知条件,则有

$$W(G - X) = |Y| > |X|$$

由定理 4.4.2 可知,G 不是汉密尔顿图。

48. 设图 G 是具有 n 个顶点的简单无向图,$n \geqslant 3$,设 G 的顶点表示 n 个人,若两个顶点被一条边连接,当且仅当对应的人是朋友。

(1) 顶点的度数能作怎样的解释?

(2) G 是连通图能作怎样的解释?

(3) 假定任意两个人合起来认识留下的 $n-2$ 个人,证明 n 个人能站成一排,使得中间每个人两旁站着自己的朋友,而两端的两个人,他们每个人旁边站着他的一个朋友;

(4) 证明对于 $n \geqslant 4$,(3)中的条件保证 n 个人能站成一圈,使每一个人的两旁站着自己的朋友。

证明:(1) 顶点的度数表示顶点对应的人所认识的朋友的数目。

(2) 任何两个人可以通过朋友的一次或多次介绍而相互认识。

(3) 由题设,对任意的两个顶点 u,v,有

$$d(u) + d(v) \geqslant n - 2$$

往证 $d(u)+d(v) \geqslant n-1$。

① 若 u 与 v 相邻,则 $d(u)+d(v) \geqslant 2+(n-2)=n>n-1$。

② 若 u 与 v 不相邻,假设 $d(u)+d(v)=n-2$,而 $G-\{u,v\}$中恰有 $n-2$ 个顶点($n \geqslant 3$,故 $G-\{u,v\} \neq \varnothing$,其中每一个顶点只能与 u,v 中的一个顶点相邻,设 w 与 u 相邻,w 与 v 不相邻,此时对于顶点 u,w 来说,都不与 v 相邻,与题设矛盾。

所以对于任意的 u,v,必有 $d(u)+d(v)>n-2$,即 $d(u)+d(v) \geqslant n-1$,由 42 题知,图 G 存在一条汉密尔顿路,于是 n 个人能站成一排,使中间的每个人两边都是朋友,而两端的两个人一边站着的也是自己的朋友。

(4) 由(3)可知任一对顶点 u,v,有 $d(u)+d(v) \geqslant n-1$,往证 $d(u)+d(v) \geqslant n$。

① 若 u 与 v 相邻,则 $d(u)+d(v) \geqslant 2+n-2=n$。

② 若 u 与 v 不相邻,假设 $d(u)+d(v)=n-1$,因为 $n \geqslant 4$,则在 $G-\{u,v\}$中至少有两个顶点,设为 w 和 z,其中 w 与 u,v 都相邻,而 z 只与 u,v 中一个,譬如与 u 相邻,此时 u,z 与 v 都不相邻,与题设矛盾,所以 $d(u)+d(v) \geqslant n$,由 42 题知,图 G 存在一条汉密尔顿回路,于是 n 个人能站成一圈,使每个人的两旁站着自己的朋友。

49. 若 G 是每一个面至少由 $k(k\geqslant3)$ 条边围成的连通平面图，则 $m\leqslant\frac{k(n-2)}{k-2}$，其中 n,m 分别是图 G 的顶点和边数。

证明：因为 $2m=\sum_{i=1}^{r}d(r_i)$，而 $d(r_i)\geqslant k(1\leqslant i\leqslant r)$，故 $2m\geqslant kr$，即 $r\leqslant\frac{2m}{k}$，而 $n-m+r=2$，故 $n-m+\frac{2m}{k}\geqslant2$，即 $m\leqslant\frac{k(n-2)}{k-2}$。

50. 小于 30 条边的连通简单平面图有一个顶点的度数小于等于 4。

证明：假设每个顶点的度数 >4，即 $d(v_i)\geqslant5$，因为 $2m=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)$，故 $2m\geqslant5n$，即 $n\leqslant\frac{2}{5}m$，由 $m\leqslant3n-6$，得 $m\leqslant\frac{6}{5}m-6$，有 $m\geqslant30$，与题设 $m<30$ 矛盾。

51. 在 6 个顶点 12 条边的连通简单平面图中，每个面用 3 条边围成。

证明：$n=6,m=12$，由 Euler 公式

$$r=2+m-n=8$$

因为 $\sum_{i=1}^{8}d(r_i)=2m=24$，而 $d(r_i)\geqslant3(1\leqslant i\leqslant8)$，故必有 $d(r_i)=3$，即每个面用 3 条边围成。

52. 设 G 是有 11 个或更多顶点的图，证明 G 或 $\overline{G}$ 是非平面图。

证明：假设 G 和 $\overline{G}$ 都是平面图，设 G 的顶点数为 n，边数为 m，$\overline{G}$ 的顶点数为 n'，边数为 m'，则有

$$n=n',m+m'=\frac{1}{2}n(n-1)$$

由 $m\leqslant3n-6,m'\leqslant3n'-6$，两不等式相加得

$$\frac{1}{2}n(n-1)\leqslant6n-12$$

$$n^2-13n+24\leqslant0$$

得 $n<11$，与题设 $n\geqslant11$ 矛盾。

53. 当且仅当连通图的每条边均为割边时，该连通图才是一棵树。

证明：必要性，如果图 G 是树，则删去任一边后，就成为不连通图，故任一边都是 G 的割边。

充分性，任取两个顶点 u 和 v，因为图 G 是连通的，所以 u 和 v 之间有路。假设 u 和 v 之间有两条路，该两条路就组成一个回路，删去此回路上任一条边，图仍是连通的，与图中每条边皆是割边矛盾，因此，任两个顶点之间有且只有一条路，故图 G 是树。

54. 一棵树有两个度数为 2 的顶点，一个度数为 3 的顶点，三个度数为 4 的顶点，问它有

几片树叶？

解：设有 x 片树叶，则有：

$2m=2(x+2+1+3-1)$

$\quad=x+2\cdot 2+1\cdot 3+3\cdot 4$，

得 $x=9$。

55. 一棵树有 n_2 个顶点度数为 2，n_3 个顶点度数为 3，……，n_k 个顶点度数为 k，问它有几片树叶？

解：设有 x 片树叶，

$2m=2(x+n_2+n_3+\cdots+n_k-1)$

$\quad=x+2\cdot n_2+3\cdot n_3+\cdots+k\cdot n_k$，

得 $x=n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$。

56. 设 $G=\langle P,L\rangle$是连通图，$e\in L$，证明当且仅当 e 是 G 的割边时，e 才在 G 的每棵支撑树中。

证明：充分性，假设 G 的某棵支撑树不包含边 e，这说明删除 e 后，G 仍是连通的，与 e 是割边矛盾。

必要性，假设 e 不是割边，则删除 e 后，G 仍是连通的，则必存在一棵支撑树，而该支撑树不包含 e，与题设矛盾。

57. 证明在完全二叉树中，边的总数等于 $2(n_t-1)$，其中 n_t 是树叶数。

证明：由于是完全二叉树，所以分支点数$=n_t-1$，顶点数$=n_t-1+n_t=2n_t-1$，故边数$=2n_t-1-1=2(n_t-1)$。

58. 设树 T 的最大度为 $\Delta(T)$，证明：T 中至少有 $\Delta(T)$ 片树叶。

证明：设树 T 有 n 个分支点，x 片树叶，则有

$$2(n+x-1)=\sum_{v\in T}d(v)$$

$$\geqslant x+\Delta(T)+2(n-1),$$

从而得到 $x\geqslant(T)$，即 T 中至少有 $\Delta(T)$ 片树叶。

59. 设 $G=\langle P,L\rangle$，$|P|=n$，$|L|=m$，且 $m=n-1$，证明：下列三个命题是等价的：

(1) G 是连通的；

(2) G 中无回路；

(3) G 是树。

证明：

要证下列三个命题是等价的，可证(1)⇒(2)，(2)⇒(3)，(3)⇒(1)⇒(2)

对顶点数 n 作数学归纳法。

当 $n=1$ 时，$m=n-1=0$，则无回路。

设 $n=k$ 时，G 中无回路。

当 $n=k+1$ 时，由 $m=n-1$，G 中至少有一个 1 度顶点。如若不然，设对任意的 $u\in P$，$d(u)\geqslant 2$，则

$$2m=\sum_{u\in P}d(u)\geqslant 2n$$

即 $m\geqslant n$，由 $m=n-1$，有 $n-1\geqslant n$，矛盾。

设其中的一个 1 度顶点为 u_0，现将 u_0 删除，所得到的图为 G'，G'是连通的且 G'中有 k 个顶点，由归纳假设，G'中无回路。再将 u_0 及所关联的一条边添加到 G'中，得到 G，则 G 中无回路。

(2)⇒(3)

要证 G 是树，关键是证明 G 是连通的。

对顶点数 n 作数学归纳法。

当 $n=1$ 时，$m=n-1=0$，G 中无回路且是连通的。

设 $n=k$ 时，无回路的图 G 是连通的。

当 $n=k+1$ 时，由 $m=n-1$，可知 G 中至少存在一个 1 度顶点，设其中之一为 u_0。在 G 中，将 u_0 删除，所得到的图记为 G'，则 G'中有 k 个顶点，由归纳假设，G'是连通的。再将 u_0 及所关联的一条边添加到 G'中，得到 G，且 G 中无回路。G'是连通的，加入 1 度顶点 u_0 后，由连通的传递性可知，G 也是连通的。

(3)⇒(1)，由树的定义，显然 G 是连通的。

60. 设 T 是一棵完全 m 叉树，E 表示 T 中所有树叶的路长之和，I 表示 T 中所有分支点的路长之和，则

$$E=(m-1)I+mk$$

其中 k 为分支点数。

证明：对分支点数 k 作数学归纳法。

当 $k=1$ 时，$E=m$，$I=0$ 等式成立。

设 $k=n-1$ 时，等式成立，即

$$E'=(m-1)I'+m(n-1)$$

当 $k=n$ 时，设 v 是分支点，v 的儿子为树叶。现将 T 中 v 的 m 个儿子删除，得树 T'，在 T'中 v 是树叶，故在 T'中有 $n-1$ 个分支点，由归纳假设，有

$$E'=(m-1)I'+m(n-1)$$

设 v 的路长为 t，则有

$$E'=E-m(t+1)+t,\quad I'=I-t$$

代入上式中，得到

$$E-m(t+1)+t=(m-1)(I-t)+m(n-1)$$

整理，得

$$E=(m-1)I+mn$$

61. 设 $G=<P,L>$ 是一个图，将 G 中的一条边 e 去掉，并且把 e 的两端点合并成一个顶点，而把原来关联于这两个端点的边变成关联于新顶点的边，这样所得的图记为 $G\circ e$。用 $G-e$ 表示在 G 中除掉边 e 所得的图，用 $t(G)$ 表示图 G 上树的个数。证明：若 $e\in L$，则 $t(G)=t(G-e)+t(G\circ e)$。

证明：因为 G 的每一棵不含 e 的树，也是 $G-e$ 的树，反之，$G-e$ 的每棵树，也是 G 中不含 e 的树，所以 $t(G-e)$ 是 G 中不含 e 的树的棵数。

又因 G 上包含 e 的树与 $G\circ e$ 上的树一一对应，所以，$t(G\circ e)$ 是 G 中含 e 的树的个数，因此

$$t(G)=t(G-e)+t(G\circ e)$$

自测题及答案(第二篇)

自测题一

(一) 填空题。(14 分)

1. 设 G 是一个具有 m 个顶点的无向完全图，则 G 有边数_____条，顶点度数之和_____度，每一个顶点的度数_____度。

2. 设图 G 的邻接矩阵为 $\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$，

则 G 的顶点数为_____，边数为_____。

3. 任何一个无向图 G 可一笔画出的充要条件是_____。

*4. 设 G 是完全二叉树，G 有 15 个顶点，其中 8 个叶点，则 G 有_____条边，G 的总度数是_____，G 的分支点数是_____，G 中度数为 3 的顶点数是_____。

5. 若 G 是汉密尔顿图，且 G 有 n 个顶点，则 G 的汉密尔顿路有_____条边，G 的汉密尔顿回路有_____条边。

6. G 为任意图，则 G 中奇数度顶点个数为_____。

(二) 判断题。判断下列说法是否正确，如不正确加以改正，如果正确说明理由。(36 分)

1. 由 m 个顶点组成的完全图 K_m，删去 $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$ 条边后即可得到树。

2. $K_{3\times 3}$ 是欧拉图。

3. 设 G 是有 6 个顶点，12 条边的连通简单平面图，则它的面数为 8。

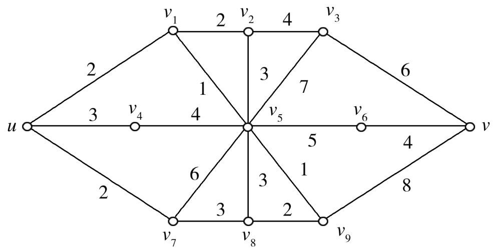
4. 已知图 G 的关联矩阵

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

则 G 的边数为 5，顶点数为 8。

（三） 计算题。（50 分）

＊1. 求如图所示权图中从 u 到 v 的最短路径。



2. 求上图所示的最小支撑树。

3. 国内六个城市间的铁路距离表如下（单位：100 km），求连接这六个城市的最短距离的铁路网。

	北京	秦皇岛	太原	烟台	济南	天津
北京	—	2	3	7	5	1
秦皇岛	2	—	6	∞	8	2
太原	3	6	—	8	3	4
烟台	7	∞	8	—	3	6
济南	5	8	3	3	—	5
天津	1	2	4	6	5	—

注：该试卷中标有＊号的试题仅供选学该内容的学员参考。

自测题二

（一） 填空题。（14 分）

1. 设 G 是一棵树，顶点度数的和为 12，则这棵树的边数为_____。

2. 设图 G 的关联矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则 G 的顶点数为_____,边数为_____,顶点最小度 $\delta(G)=$_____,最大度 $\Delta(G)=$_____ 。

3. 判断一个图是否是平面图的充要条件是_____。

4. 设 G 是一棵树,有 n 个顶点,则 G 的边数为_____。

5. 设 G 中无回路,且 G 可一笔画出,则 G 中奇数度顶点的个数是_____。

6. 设 G 是平面图,G 的顶点数为 υ,面数为 ϕ,则边 $\varepsilon=$_____。

（二） 多项选择题。(36 分)

1. 设 G 是具有 n 个顶点的完全图,则下列说法正确的是_____。

A. G 的边数为$\dfrac{n(n-1)}{2}$

B. G 的顶点度数之和为$\dfrac{n(n-1)}{2}$

C. 每一个顶点的度数为 $n(n-1)$

D. 删去$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$条边得到树

2. 对于 $K_5, K_{3,3}$,下列说法正确的是_____。

A. $K_5, K_{3,3}$ 不是平面图　　B. K_5 不是欧拉图

C. K_5 是汉密尔顿图　　D. K_5 去掉一边是平面图

3. 设 G 是连通简单平面图,每个面至少由 k 条边围成,边数为 ε,顶点数为 υ,则下面说法正确的是 _____。

A. $\varepsilon \leqslant 3\upsilon-6$　　B. $\phi=\upsilon-\varepsilon-2$

C. 面数 $\phi \geqslant \dfrac{2}{k}\varepsilon$　　D. $\upsilon-\varepsilon=2-\phi$

4. 已知图 G 的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

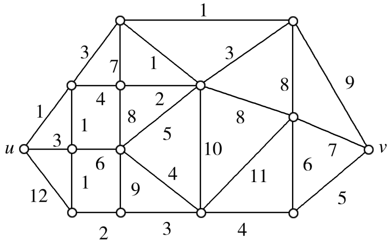
则下列结果正确的有_____。

A. $\varepsilon=6$　　B. $\upsilon=5$　　C. 度数之和为 12　　D. $\delta=1$

(三)　计算题。(30 分)

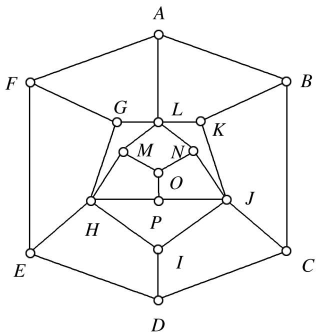
1. 求如图所示权图的最小支撑树。

2. 求如图所示权图中从 u 到 v 的最短路径。



(四)　证明题。(20 分)

1. 试证明如图所示之图不是汉密尔顿图。



2. 若 G 是简单平面图,则顶点最小度<6。

【自测题一答案】

(一)　填空题

1. $m(m-1)/2, m(m-1), m-1$

2. 4,3

3. 恰有 0 个或 2 个奇数度顶点

4. 14,28,7,6

5. $n-1, n$

6. 偶数

（二） 判断题

1. 正确。因为 m 个顶点的完全图 K_m，共有 $\frac{m(m-1)}{2}$ 条边，而 m 个顶点的树 $m-1$ 有条边，故 $\frac{m(m-1)}{2}-(m-1)=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ 为需删除的边数。

2. $K_{3,3}$ 不是欧拉图，因为欧拉图没有奇数度顶点，而 $K_{3,3}$ 的每一个顶点的度都是 3。

3. 正确。由欧拉公式：$\upsilon-\varepsilon+\phi=2$，得 $6-12+\phi=2$，因此 $\phi=8$（υ 为顶点数，ε 为边数）。

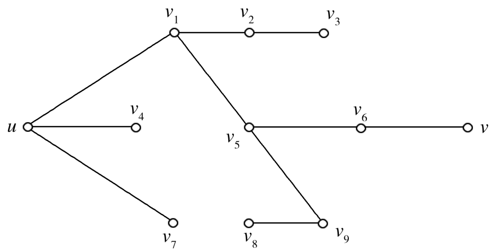
4. 不正确。关联矩阵指出顶点数为 5，边数为 8。

（三） 计算题

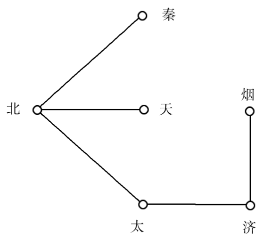
* 1. 从 u 到 v 的最短路为：

$$u \to v_1 \to v_5 \to v_9 \to v \text{ 或 } u \to v_1 \to v_5 \to v_6 \to v$$

2. 最小支撑树如图所示。



3. 最短距离铁路网如图所示。



【自测题二答案】

（一） 填空题

1. 6

2. 5，6，0，4

3. 它不包含与 K_5 和 $K_{3,3}$ 的同胚的子图

4. $n-1$

5. 2

6. $\upsilon+\phi-2$

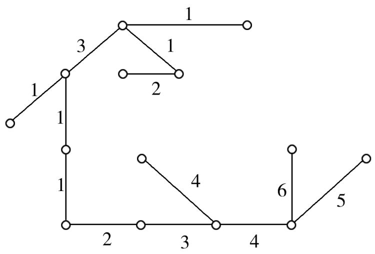
（二） 多项选择题

1. A、D　　　　2. A、C、D

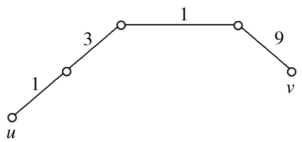
3. D　　　　4. A、B、C、D

（三） 计算题

1.



2.



（四） 证明题

1. 证明：假设存在汉密尔顿回路，则仅用以 L 为端点的两边，其余 3 边不要，对点 H 和 J 也有类似的情况，则共有 9 条边不在汉密尔顿回路中。

点 F 的度是 3，则以 F 为端点的一条边不在回路中，对点 B，O，D 也有类似的情况，则共有 4 条边不在汉密尔顿回路中。

综上所述，图中共有 13 条边不在汉密尔顿回路中。而图中有 27 条边，因此，汉密尔顿回路中最多包含 $27-13=14$ 条边，但是，图中有 16 个顶点，汉密尔顿回路应该有 16 条边，矛盾，所以图中无汉密尔顿回路。

2. 证明：设图 G 共有 n 个顶点，当 $1\leqslant n\leqslant 6$ 时，由于 G 是简单图，故 $\delta(G)\leqslant\Delta(G)\leqslant n-1\leqslant 5<6$。

设 $n>6$，且 G 中所有顶点度数都大于等于 6，则

$$2m=\sum_{u\in P}d(u)\geqslant 6n$$

即 $m\geqslant 3n$，而由推论 4.5.1，$m\leqslant 3n-6$，矛盾，所以 G 中顶点的最小度<6。

第三篇　代数系统

第五章　代数结构

一、内容提要

1. **运算**

n 元运算：设 A 是集合，一个从 A^n 到 A 的映射，称作 A 上的 n 元运算。

可结合性：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果对任意的 $x,y,z\in A$，有 $(x*y)*z=x*(y*z)$，则称 $*$ 是可结合的。

可交换性：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果对任意的 $x,y\in A$，有 $x*y=y*x$，则称 $*$ 是可交换的。

可分配性：设 $*$，Δ 是定义在集合 A 上的两个二元运算，如果对任意的 $x,y,z\in A$，有

$$x*(y\Delta z)=(x*y)\Delta(x*z)$$

$$(y\Delta z)*x=(y*x)\Delta(z*x)$$

则称 $*$ 对 Δ 是可分配的。

吸收律：设 $*$，Δ 是定义在集合 A 上的两个可交换的二元运算，如果对任意的 $x,y\in A$，都有

$$x*(x\Delta y)=x$$

$$x\Delta(x*y)=x$$

则称 $*$ 和 Δ 满足吸收律。

等幂律：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果对任意的 $x\in A$，有 $x*x=x$，则称 $*$ 是等幂的。

幺元：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果存在 $e_l\in A$，使得对任意的 $x\in A$，都有 $e_l*x=x$，则称 e_l 为 A 中关于运算 $*$ 的左幺元；如果存在 $e_r\in A$，使得对任意的 $x\in A$，都有 $x*e_r=x$，则称 e_r 为 A 中关于运算 $*$ 的右幺元；如果存在 $e\in A$，e 既是左幺元又是右幺元，则称 e 为 A 中关于运算 $*$ 的幺元。

零元：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果存在 $\theta_l\in A$，使得对任意的 $x\in A$，有 $\theta_l*x=\theta_l$，则称 θ_l 为 A 中关于运算 $*$ 的左零元；如果存在 $\theta_r\in A$，使得对任意的 $x\in A$，有

$x * \theta_r = \theta_r$，则称 θ_r 为 A 中关于运算 $*$ 的右零元；如果存在 $\theta \in A$，θ 既是左零元又是右零元，则称 θ 为 A 中关于运算 $*$ 的零元。

定理 5.1.1：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果在 A 中关于运算 $*$ 既存在左幺元 e_l 又存在右幺元 e_r，则 $e_l = e_r = e$，且 A 中的幺元是唯一的。

定理 5.1.2：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果在 A 中关于运算 $*$ 既存在左零元 θ_l 又存在右零元 θ_r，则 $\theta_l = \theta_r = \theta$，且 A 中的零元是唯一的。

2. **代数系统的概念及性质**

代数系统：一个非空集合 A 连同若干个定义在该集合上的运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 所组成的系统就称为一个代数系统，记作 $<A, f_1, f_2, \cdots, f_k>$。

逆元：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，e 是 A 中关于运算 $*$ 的幺元，如果对于 $a \in A$，存在 $a_l \in A$，使得 $a_l * a = e$，则称 a_l 为 a 的左逆元；如果存在 $a_r \in A$，使得 $a * a_r = e$，则称 a_r 为 a 右逆元；如果存在 $b \in A$，b 既是左逆元又是右逆元，则称 b 是 a 的逆元，将 a 的逆元记为 a^{-1}。

定理 5.2.1：设 $<A, *>$ 是一个代数系统，且 A 中至少有两个元素，如果 A 中存在幺元 e 和零元 θ，则 $\theta \neq e$。

定理 5.2.2：设 $<A, *>$ 是一个代数系统，A 中存在幺元 e，且每一个元素都存在左逆元。如果运算 $*$ 是可结合的，则 A 中任何一元素的左逆元也是右逆元，且每个元素的逆元是唯一的。

3. **半群和独异点**

广群：设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果运算 $*$ 是封闭的，则称代数系统 $<A, *>$ 是广群。

半群：若 $<A, *>$ 是广群，且运算 $*$ 是可结合的，则称 $<A, *>$ 是半群。

子半群：设 $<A, *>$ 是半群，$B \subseteq A$，如果运算 $*$ 在 B 上是封闭的，则称 $<B, *>$ 是 $<A, *>$ 的子半群。

独异点：含有幺元的半群称为独异点。

定理 5.3.1：设 $<A, *>$ 是半群，如果 A 是有限集，则存在 $a \in A$，有 $a * a = a$。

定理 5.3.2：设 $<A, *>$ 是独异点，则在关于运算 $*$ 的运算表中任何两行或两列都是不相同的。

定理 5.3.3：设 $<A, *>$ 是独异点，对任意的 $a, b \in A$，如果 a, b 都存在逆元，则

（1）　$(a^{-1})^{-1} = a$；

（2）　$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$。

4. **群与子群**

群：设 $<G, *>$ 是一个代数系统，其中 G 是非空集合，$*$ 是定义在 G 上的二元运算，如果

（1）　运算 $*$ 是封闭的；

（2）　运算 $*$ 是可结合的；

（3）　存在幺元 e；

(4) 对于任意的 $x \in G$,存在 $x^{-1} \in G$。
则称$<G,*>$是一个群。

交换群：如果群$<G,*>$的运算 $*$ 是可交换的,则称$<G,*>$是交换群或阿贝尔(Abel)群。

置换：设 S 是非空有限集合,从 S' 到 S 的一个双射,称为 S 的一个置换。

有限群和无限群:设$<G,*>$是一个群,如果 G 是有限集,则称$<G,*>$为有限群,称$|G|$为 G 的阶;如果 G 是无限集合,则称$<G,*>$是无限群。

等幂元：设$<A,*>$是一个代数系统,$a \in A$,如果 $a * a = a$,则称 a 为等幂元。

子群：设$<G,*>$是群,S 是 G 的非空子集,如果$<S,*>$也构成群,则称$<S,*>$是$<G,*>$的子群。

平凡子群：称$<\{e\},*>$和$<G,*>$是群$<G,*>$的平凡子群。

循环群：设$<G,*>$是群,如果存在 $a \in A$,使得对任意的 $x \in G$,有 $x = a^n$,$n \in \mathbf{Z}$,则称$<G,*>$为循环群,称 a 为循环群的生成元,记为 $G=(a)$。

定理 5.4.1：群中不可能存在零元。

定理 5.4.2：设$<G,*>$是群,对任意的 $a,b \in G$,

(1) 存在唯一的 $x \in G$,使得 $a * x = b$;

(2) 存在唯一的 $y \in G$,使得 $y * a = b$。

定理 5.4.3：设$<G,*>$是群,对任意的 $a,b,c \in G$,

(1) 如果 $a * b = a * c$,则 $b = c$;

(2) 如果 $b * a = c * a$,则 $b = c$。

定理 5.4.4：群$<G,*>$的运算表中的每一行或每一列都是 G 的元素的一个置换。

定理 5.4.5：在群$<G,*>$中,除幺元 e 外,不可能有任何别的等幂元。

定理 5.4.6：设$<G,*>$是群,S 是 G 的非空子集,如果对任意的 $a,b \in S$,有 $a * b^{-1} \in S$,则$<S,*>$是$<G,*>$的子群。

定理 5.4.7：循环群必是交换群。

定理 5.4.8：设$<G,*>$是由元素 $a \in G$ 生成的有限循环群,$|G|=n$,则 $a^n = e$,且

$$G = \{a, a^2, \cdots, a^{n-1}, a^n = e\}$$

其中,e 是$<G,*>$中的幺元,n 是使 $a^n = e$ 的最小正整数(称 n 为元素 a 的阶)。

5.**陪集与拉格朗日定理**

右陪集(左陪集)：设$<H,*>$是群$<G,*>$的子群,$a \in G$,称

$$aH = \{a * h \mid h \in G\} (Ha = \{h * a \mid h \in H\})$$

为由 a 所确定的 H 在 G 中的右陪集(左陪集),称元素 a 为陪集 $aH(Ha)$的代表元素。

正规子群：设$<H,*>$是群$<G,*>$的子群,如果对任意的 $g \in G$,都有 $gH = Hg$,则称 H 为正规子群。

定理 5.5.1：设$<H,*>$是群$<G,*>$的有限子群，则$|H|=|aH|$，其中$a\in G$。

定理 5.5.2(**拉格朗日定理**)：设$<H,*>$是群$<G,*>$的子群，则

(1)　$R=\{(a,b)|a,b\in G$，且$a^{-1}*b\in H\}$是G上的等价关系。对于$a\in G$，令$[a]_R=\{x|x\in G$，且$(a,x)\in R\}$，则$[a]_R=aH$。

(2)　如果G是有限群，$|G|=n$，$|H|=m$，则$m|n$。

推论 5.5.1：任何质数阶的群不可能有非平凡子群。

6. **同态与同构**

同态：设$<A,☆>$和$<B,*>$是两个代数系统，☆和$*$是分别定义在A和B上的二元运算，f是从A到B的映射，如果对任意的$a,b\in A$，有

$$f(a☆b)=f(a)*f(b)$$

则称f为由$<A,☆>$到$<B,*>$的同态映射，$<A,☆>$同态于$<B,*>$，记作$A\sim B$，称$<f(A),*>$为$<A,☆>$的同态象，其中

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$$

同构：设f是由$<A,☆>$到$<B,*>$的同态，如果f是满射，则称f为满同态；如果f是单射，则称f为单一同态；如果f是双射，则称f为同构映射，称$<A,☆>$和$<B,*>$是同构的，记作$A\cong B$。

同态核：设f是从群$<G_1,☆>$到$<G_2,*>$的同态映射，e_2是G_2中的幺元，记

$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\mid x\in G_1,\text{且 } f(x)=e_2\}$$

称Ker(f)是同态映射f的核，简称f的同态核。

同余关系与同余类：设$<A,*>$是代数系统，R是A上的等价关系，如果当(a_1,a_2)，$(b_1,b_2)\in R$时，就有$(a_1*a_2,b_1*b_2)\in R$，则称R为A上关于$*$的同余关系。由这个同余关系将A划分成的等价类称为同余类。

自同态与自同构：设$<A,*>$是代数系统，如果f是从$<A,*>$到$<A,*>$的同态，则称f为自同态；如果f是从$<A,*>$到$<A,*>$的同构，则称f为自同构。

定理 5.6.1：设G是代数系统的集合，则G中代数系统之间的同构关系是等价关系。

定理 5.6.2：设f是从代数系统$<A,☆>$到代数系统$<B,*>$的同态映射，如果$<A,☆>$是半群(或独异点，或群)，则在f的作用下，同态象$<f(A),*>$也是半群(或独异点，或群)。

定理 5.6.3：设f是从群$<G,☆>$到$<G',*>$的同态映射，则f的同态核Ker(f)是G的子群。

定理 5.6.4：设$<A,☆>$是代数系统，R是A上的同余关系，$B=\{A_1,A_2,\cdots,A_r\}$是由R诱导的A的一个划分，则必存在新的代数系统$<B,*>$，它是$<A,☆>$的同态象。

定理 5.6.5：设f是从$<A,☆>$到$<B,*>$的同态映射，在A上定义二元关系R如下：

$$(a,b)\in R\text{ 当且仅当 }f(a)=f(b)$$

则R是A上的同余关系。

7. **环**

环：设<A,☆,$*$>是代数系统，如果满足：

(1)　<A,☆>是交换群；

(2)　<A,$*$>是半群；

(3)　运算$*$对运算☆是可分配的。

则称<A,☆,$*$>是环。

交换环：设<A,☆,$*$>是环，如果运算$*$是可交换的，则称<A,☆,$*$>是交换环。

含幺环：设<A,☆,$*$>是环，如果<A,$*$>含有幺元，则称<A,☆,$*$>是含幺环。

子环：设<A,☆,$*$>是环，S 是 A 的非空子集，如果<S,☆,$*$>也构成环，则<S,☆,$*$>是<A,☆,$*$>的子环。

无零因子环：设<A,☆,$*$>是环，如果对任意的 $a,b\in A$，$a\neq 0$，$b\neq 0$，但 $ab\neq 0$，则称<A,☆,$*$>是无零因子环。

整环：无零因子的含幺交换环称作整环。

体：设<A,☆,$*$>是环，如果<$A-\{0\}$,$*$>构成群，则称<A,☆,$*$>是体。

域：设<A,☆,$*$>是环，如果<$A-\{0\}$,$*$>构成交换群，则称<A,☆,$*$>是域。

二、习题与解

1. 对于实数集合 **R**，下表所列的二元运算是否具有左边一列中的那些性质，请在相应的位置上填写“是”或“否”。

	$+$	$-$	$\cdot$	max	min	$\|x-y\|$
可结合性						
可交换性						
存在玄元						
存在零元						

解：

	$+$	$-$	$\cdot$	max	min	$\|x-y\|$
可结合性	是	否	是	是	是	否
可交换性	是	否	是	是	是	是
存在玄元	是	否	是	否	否	否
存在零元	否	否	是	否	否	否

2. 设 $A=\{a,b,c\}$，$*$是 A 上的一个二元运算。对于以下几个表所确定的运算，试分别讨论它们的交换性、等幂性以及在 A 中关于$*$是否有幺元。

(a)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

(b)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

(c)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

(d)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

解：(a)具有交换性，存在幺元 a。

(b)具有交换性，存在幺元 a，零元 c。

(c)具有等幂性，a，b，c 既是左幺元又是右零元。

(d)具有交换性，存在幺元 a。

3. 定义 $\mathbf{Z}^+$ 上的两个二元运算为：

$$a * b = a^b$$
$$a \Delta b = a \cdot b \quad a, b \in \mathbf{Z}^+$$

试证明 $*$ 对 Δ 是不可分配的。

证明：对于 $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$，有

$$\begin{aligned} a * (b \Delta c) &= a * (b \cdot c) \\ &= a^{bc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a * b) \Delta (a * c) &= a^b \Delta a^c \\ &= a^{b+c} \end{aligned}$$

而一般地，$a^{bc} \neq a^{b+c}$，所以 $*$ 对 Δ 是不可分配的。

4. 在下列 $\mathbf{N}$ 的子集中，哪些在加法下是封闭的？证明你的回答。

(1) $\{n \mid n$ 的某一次幂可被 16 整除$\}$；

(2) $\{n \mid n$ 与 5 互素$\}$；

(3) $\{n \mid 6$ 整除 n，而 24 整除 $n^2\}$；

(4) $\{n \mid 9$ 整除 $21n\}$。

解：(1) 封闭 (2) 不封闭 (3) 封闭 (4) 封闭

5. 证明在减法下封闭的整数的集合在加法下一定也是封闭的。

证明：设 A 为在减法下封闭的整数的集合，对任意的 $a \in A$，有 $a - a \in A$，即 $0 \in A$，于是 $0 - a \in A$，即 $-a \in A$，则对任意的 $a, b \in A$，有 $a + b = a - (-b) \in A$，所以 A 在加法下也是封

闭的。

6.判断如下说法的正误并说明原因：

(1) 加法是自然数集合中的运算。

(2) 自然数集合在减法下构成一个代数系统。

(3) 除法是有理数集合中的运算。

(4) 取倒数是实数集合中的运算。

(5) 取倒数是正有理数集合中的运算。

(6) 在自然数集合中，取两个数的最大公约数是一种二元运算。

(7) 设 S 是所有偶数构成的集合，规定一元运算 $*x=5x$，则 $(S,*)$ 构成一个代数系统。

(8) 有理数集合在除法下构成一个代数系统。

(9) 非零有理数集合在除法下构成一个代数系统。

(10) 有理数集合在取绝对值运算下是一个代数系统。

解：(1) 正确。　　(2) 错误，运算不封闭。

(3) 错误，0 不能作分母。　　(4) 错误，原因同(3)。

(5) 正确。　　(6) 正确。

(7) 正确。　　(8) 错误，原因同(3)。

(9) 正确。　　(10) 正确。

7.下面是实数集合 $\mathbf{R}$ 上的二元运算 $*$ 的不同定义。在每一情况下，判定 $*$ 是否可交换的，是否可结合的。$\mathbf{R}$ 对于 $*$ 是否有幺元？如果有幺元的话，$\mathbf{R}$ 中的每一元素对于 $*$ 是否都是可逆的？

(1) $r_1 * r_2=|r_1-r_2|$；

(2) $r_1 * r_2=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$；

(3) $r_1 * r_2=r_1+2r_2$；

(4) $r_1 * r_2=\frac{1}{2}(r_1+r_2)$。

解：(1) 是可交换的。　　(2) 是可交换的，可结合的。

(3) 无任何性质。　　(4) 是可交换的。

8.$<A,*>$是一个代数系统，这里 $*$ 是可结合的二元运算，并且对于所有的 $a_i,a_j\in A$，由 $a_i * a_j=a_j * a_i$，可推得 $a_i=a_j$。试证明对于任意的 $a\in A$，$a * a=a$。

证明：对任意的 $a\in A$，由于运算 $*$ 是可结合的，则有 $(a * a) * a=a *(a * a)$，根据题设，于是 $a * a=a$。

9.设二元运算 $*$ 是可交换的和可结合的。试证明，对于任何正整数 $n\in \mathbf{Z}^+$，都有

$$(x_1 * x_2)^n=x_1{}^n * x_2{}^n$$

证明：反复利用运算 $*$ 的结合性和交换性，有

$$(x_1 * x_2)^n=(x_1 * x_2)^{n-1} * (x_1 * x_2)$$
$$=(x_1 * x_2)^{n-2} * (x_1 * x_2) * (x_1 * x_2)$$
$$=(x_1 * x_2) * (x_1 * x_2) * \cdots * (x_1 * x_2)$$
$$=(x_1 * x_1 * \cdots * x_1) * (x_2 * x_2 * \cdots * x_2)$$
$$=x_1{}^n * x_2{}^n。$$

10. 对于正整数 k，$N_k=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，设 $*_k$ 是 N_k 上的一个二元运算，使得 $a*b=$ 用 k 除 $a\cdot b$ 所得的余数，这里 $a,b\in N_k$。

(1)　当 $k=4$ 时，试造出 $*_k$ 的运算表。

(2)　对于任意正整数 k，证明 $<N_k;*_k>$ 是一个半群。

解：(1)

$*_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(2)　对任意的 $x,y,z\in N_k$，有

$$x *_k (y *_k z)=x *_k (y\cdot z(\bmod k))$$
$$=x\cdot(y\cdot z)(\bmod k)$$
$$=x\cdot y\cdot z(\bmod k)。$$

又 $(x *_k y) *_k z=(x\cdot y(\bmod k)) *_k z$

$$=(x\cdot y)\cdot z(\bmod k)$$
$$=x\cdot y\cdot z(\bmod k),$$

于是($(x *_k y) *_k z=x *_k (y *_k z)$，

即 $*_k$ 是可结合的，所以 $<N_k,*_k>$ 是半群。

11. 设 $<S;*>$ 是一个半群，$a\in S$，在 S 上定义一个二元运算□，使得对于 S 中的任意元素 x 和 y，都有 $x\Box y=x*a*y$，证明二元运算□是可结合的。

证明：对任意的 $x,y,z\in S$，

$$(x\Box y)\Box z=(x\Box y)*a*z$$
$$=(x*a*y)*a*z$$
$$=(x*a)*(y*a*z)$$
$$=x*a*(y\Box z)$$
$$=x\Box(y\Box z),$$

所以运算□是可结合的。

12. 设$<\mathbf{R};*>$是一个代数系统，$*$是$\mathbf{R}$上的一个二元运算，使得对于$\mathbf{R}$中的任意元素a,b都有

$$a*b=a+b+a\cdot b$$

证明0是幺元且$<R;*>$是独异点。

证明：由$*$的定义可知，$*$是封闭的。

对任意的$a,b,c\in R$，有

$a*(b*c)=a*(b+c+bc)$

$\qquad=a+b+c+b\cdot c+a\cdot b+a\cdot c+a\cdot b\cdot c$，

$(a*b)*c=(a+b+a\cdot b)*c$

$\qquad=a+b+a\cdot b+c+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$，

所以$(a*b)*c=a*(b*c)$，即运算$*$是结合的。

对任意的$a\in A$，有

$$a*0=a+0+a\cdot 0=a$$

$$0*a=0+a+0\cdot a=a$$

所以0是幺元。

综上可得，$<R;*>$是独异点。

13. 设$X\neq\varnothing$，令$S=t(X)=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}X_n$，在$S$上定义二元运算$\Delta$，对任意$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_p)\in X^p$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_q)\in X^q$，有

$$\alpha\Delta\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q)\in X^{p+q}$$

证明$<S;\Delta>$是一个独异点。

证明：由运算Δ的定义可知，Δ是封闭的。

对任意的$\alpha,\beta,\gamma\in S$，令

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$$

$$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_q)$$

$$\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_t)$$

于是$(\alpha\Delta\beta)\Delta\gamma=(x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q)\Delta\gamma$

$\qquad=(x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q,z_1,z_2,\cdots,z_t)$，

$\alpha\Delta(\beta\Delta\gamma)=\alpha\Delta(y_1,y_2,\cdots,y_q,z_1,z_2,\cdots,z_t)$

$\qquad=(x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q,z_1,z_2,\cdots,z_t)$，

即$(\alpha\Delta\beta)\Delta\gamma=\alpha\Delta(\beta\Delta\gamma)$，所以运算$\Delta$是可结合的。

对任意的$\alpha\in S$，空集$\varnothing$是幺元，因为有$\alpha\Delta\varnothing=\varnothing\Delta\alpha=\alpha$。

综上可得，$<S,\Delta>$是独异点。

14. 设$<A;*>$是一个半群，而且对于A中的元素a和b，如果$a\neq b$必有$a*b\neq b*a$，

试证：

(1) 对于 A 中每个元素 a，有 $a*a=a$；

(2) 对于 A 中任何元素 a 和 b，有 $a*b*a=a$；

(3) 对于 A 中任何元素 a,b 和 c，有 $a*b*c=a*c$。

证明：由已知得，对任意的 $a,b\in A$，若 $a*b=b*a$，必有 $a=b$。

(1) 对任意的 $a\in A$，由结合性，有 $a*(a*a)=(a*a)*a$，所以 $a*a=a$。

(2) 利用(1)，$(a*b*a)*a=a*b*a*a$

$$=a*b*a,$$

$a*(a*b*a)=a*a*b*a$

$$=a*b*a,$$

于是有

$$(a*b*a)*a=a*(a*b*a)$$

所以 $a*b*a=a$。

(3) 利用(2)，$(a*b*c)*(a*c)=a*b*c*a*c$

$$=a*b*c,$$

$(a*c)*(a*b*c)=a*c*a*b*c=a*b*c$，

于是有

$$(a*b*c)*(a*c)=(a*c)*(a*b*c)$$

所以 $a*b*c=a*c$。

15. 如果 $<S;*>$ 是半群，且 $*$ 是可交换的，称 $<S;*>$ 是可交换半群。证明：如果 S 中所有元素 a,b，使得 $a*a=a$ 和 $b*b=b$，则

$$(a*b)*(a*b)=a*b$$

证明：由运算 $*$ 是可交换的和可结合的，有

$(a*b)*(a*b)=a*b*a*b$

$=a*a*b*b$

$=a*b$。

16. 设 $<G;*>$ 是一个独异点，并且对于 G 中的每一个元素 x 都有 $x*x=e$，其中 e 是幺元，证明 $<G;*>$ 是一个阿贝尔群。

证明：由题设，对任意的 $x\in G$，有 $x*x=e$，所以 G 中每个元素都以自身为逆元，故 G 是群。

对任意的 $x,y\in G$，有 $x*y=(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}=y*x$，所以 G 是交换群。

17. 设 $X=\mathbf{R}-\{0,1\}$，在 X 上定义 6 个函数如下：对任意 $x\in X$，

$f_1(x)=x$；$f_2(x)=x^{-1}$；$f_3(x)=1-x$；$f_4(x)=(1-x)^{-1}$；

$f_5(x)=(x-1)x^{-1}$；$f_6(x)=x(x-1)^{-1}$。

试证明$<F;\cdot>$是一个群。其中$F=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$，$\cdot$是函数的复合运算。

证明：

$\cdot$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

由运算表知，运算是封闭的，又函数的复合运算是可结合的。

f_1是幺元，$f_2^{-1}=f_2$，$f_3^{-1}=f_3$，$f_4^{-1}=f_5$，$f_5^{-1}=f_4$，$f_6^{-1}=f_6$，所以$<F;\cdot>$是群。

18. 设$<A;*>$是半群，e是左幺元且对每一个$x\in A$，存在$\hat{x}\in A$，使得$\hat{x}*x=e$。

(1) 证明：对任意的$a,b,c\in A$，如果$a*b=a*c$，则$b=c$；

(2) 通过证明e是A中的幺元，证明$<A;*>$是群。

证明：(1) 对任意的$a,b,c\in A$，存在$\hat{a}\in A$，使得$\hat{a}*a=e$，若$a*b=a*c$，则$\hat{a}*(a*b)=\hat{a}*(a*c)$，于是$(\hat{a}*a)*b=(\hat{a}*a)*c$，$e*b=e*c$，$b=c$。

(2) 对任意的$a\in A$，有$\hat{a}*a*e=e*e=e=\hat{a}*a$，由(1)，有$a*e=a$，所以$e$是幺元。

对任意的$a\in A$，存在$\hat{a}\in A$，使得$\hat{a}*a=e$，有$\hat{a}*a*\hat{a}=e*\hat{a}=\hat{a}*e$，由(1)，有$a*\hat{a}=e$，所以$\hat{a}$是$a$的逆元。

综上，$<A,*>$是群。

19. 设$<G;*>$是群，对任一$a\in G$，令

$$H=\{y\mid y*a=a*y,y\in G\}$$

试证明$<H;*>$是$<G;*>$的子群。

证明：对任意的$x,y\in H$，有

$$x*a=a*x,y*a=a*y$$

则$y^{-1}*y*a*y^{-1}=y^{-1}*a*y*y^{-1}$，$a*y^{-1}=y^{-1}*a$，

$$\begin{aligned}于是(x*y^{-1})*a&=x*(y^{-1}*a)\\&=x*(a*y^{-1})\\&=(x*a)*y^{-1}\\&=a*(x*y^{-1}),\end{aligned}$$

所以$x*y^{-1}\in H$，故H是G的子群。

20. 设$<H;\cdot>$和$<K;\cdot>$都是群$<G;\cdot>$的子群，令

$$HK=\{h\cdot k\mid h\in H,k\in K\}$$

证明 $<HK;\cdot>$ 是 $<G;\cdot>$ 的子群的充要条件是 $HK=KH$。

证明：必要性，对任意的 $h\cdot k\in HK$，因为 HK 是子群，所以 $(h\cdot k)^{-1}\in HK$，令 $(h\cdot k)^{-1}=h_1\cdot k_1$，则 $h\cdot k=((h\cdot k)^{-1})^{-1}=(h_1\cdot k_1)^{-1}=k_1{}^{-1}\cdot h_1{}^{-1}\in KH$，故 $HK\subseteq KH$。

对任意的 $k\cdot h\in KH$，因为 H,K,HK 是子群，有 $h^{-1}\in H,k^{-1}\in K,h^{-1}\cdot k^{-1}\in HK$，$(h^{-1}\cdot k^{-1})^{-1}\in HK$，所以 $k\cdot h=(k^{-1})^{-1}\cdot(h^{-1})^{-1}=(h^{-1}\cdot k^{-1})^{-1}\in HK$，故 $KH\subseteq HK$，所以 $HK=KH$。

充分性，对任意的 $h_1\cdot k_1,h_2\cdot k_2\in HK$，$(h_1\cdot k_1)\cdot(h_2\cdot k_2)^{-1}=h_1\cdot k_1\cdot k_2{}^{-1}\cdot h_2{}^{-1}$，由 H,K 是子群，所以 $k_1\cdot k_2{}^{-1}\cdot h_2{}^{-1}\in KH$，而 $KH=HK$，令 $k_1\cdot k_2{}^{-1}\cdot h_2{}^{-1}=h_3\cdot k_3$，即 $(h_1\cdot k_1)\cdot(h_2\cdot k_2)^{-1}=h_1\cdot h_3\cdot k_3\in HK$，故 HK 是子群。

21. 设 $<A;*>$ 是群，且 $|A|=2n,n\in\mathbf{Z}^+$。证明：在 A 中至少存在 $a\neq e$，使得 $a*a=e$。其中 e 是幺元。

证明：在 A 中，除了幺元 e 之外，还有 $2n-1$ 个元素，这 $2n-1$ 个元素中的每个元素与其逆元是成双成对出现的，故必存在 $a\in A,a\neq e$，有 $a*a=e$。

22. 设 S 为非负整数做成的集合，在 S 中定义运算"$*$"如下：任意 $a,b\in S$，

$$a*b=\max(a,b)$$

判断 $<S;*>$ 是否是群。

证明：$<S,*>$ 是独异点，不是群。

由 $*$ 的定义可知，$*$ 满足封闭性。对任意的 $a,b,c\in S$，有

$$\begin{aligned}(a*b)*c&=\max(a,b)*c\\&=\max((a,b),c)\\&=\max(a,b,c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=\max(b,c)\\&=\max(a,(b,c))\\&=\max(a,b,c)\end{aligned}$$

于是 $(a*b)*c=a*(b*c)$，即 $*$ 满足结合性。

对任意的 $a\in A$，有 $a*0=0*a=\max(0,a)=a$，所以 0 是幺元。

例如，对于 $1\in A$，对任意的 $x\in A$，都不可能有 $1*x=x*1=0$。

综上，$<S,*>$ 是独异点，不是群。

23. 设 $\mathbf{R}$ 是实数集合，$S=\{(a,b)|a\neq 0,a,b\in\mathbf{R}\}$，利用通常的加法和乘法在相定义运算"$*$"如下：对 S 中任意元素 $(a,b),(c,d)$，

$$(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b),$$

证明 S 对"$*$"运算构成群。

证明：对任意的 $(a,b),(c,d)\in S$，则 $a\neq 0,c\neq 0,(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$，故 $ac\neq 0$，因此 $(a,b)*(c,d)\in S$，即运算 $*$ 是封闭的。

对任意的$(a,b),(c,d),(e,f)\in S$，有

$$
\begin{aligned}
&(a,b)*((c,d)*(e,f))\\
=&(a,b)*(ce,cf+d)\\
=&(ace,acf+ad+b),((a,b)*(c,d))*(e,f)\\
=&(ac,ad+b)*(e,f)\\
=&(ace,acf+ad+b),
\end{aligned}
$$

故运算$*$是可结合的。

对任意的$(a,b)\in S$，存在$(1,0)\in S$，有

$$
\begin{aligned}
(a,b)*(1,0)&=(1,0)*(a,b)\\
&=(a,b),
\end{aligned}
$$

所以$(1,0)$是幺元。

对任意的$(a,b)\in S$，存在$\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)\in S$，有

$$
\begin{aligned}
(a,b)*\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)&=\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)*(a,b)\\
&=(1,0),
\end{aligned}
$$

即$\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)$是$(a,b)$的逆元。

综上，$<S,*>$是群。

24. 如果对群G中任意的两个元素a,b都有$(ab)^2=a^2b^2$，试证G是交换群。

证明：对任意的$a,b\in G$，由$(ab)^2=a^2b^2$，有$abab=a^2b^2$，由消去律，有$ba=ab$，所以G是交换群。

25. 设G是由3个元素构成的群，证明G是交换群。

证明：不妨设$G=\{e,a,b\}$，由消去律，有$a*b\neq a$，$a*b\neq b$，所以$a*b=e$，同理$b*a=e$，因此G是交换群。

26. 设$G=\{\varphi|\varphi:x\to ax+b$，其中$a,b\in\mathbf{R}$且$a\neq0,x\in\mathbf{R}\}$。二元运算·是映射的复合。

(1) 证明$<G;\cdot>$是一个群；

(2) 若S和T分别是由G中$a=1$和$b=0$的所有映射构成的集合，证明$<S;\cdot>$和$<T;\cdot>$都是子群；

(3) 写出S和T在G中所有的左陪集。

证明：(1) 对任意的$f,g\in G$，设$f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$，$a\neq0$，$c\neq0$，则$g\cdot f(x)=g(f(x))=g(ax+b)=acx+cb+d$，而$ac\neq0$，所以$g\cdot f\in G$，即运算·在$G$上是封闭的。

映射的复合是可结合的。

对任意的$f\in G$，令$f(x)=ax+b$，存在$I\in G$，$I(x)=x$，使得$f\cdot I(x)=f(x)=I\cdot f(x)$，

即 $f \cdot I = I \cdot f = f$，$I$ 是幺元。

对任意的 $f \in G$，设 $f(x) = ax + b$，$a \neq 0$，存在 $g \in G$，$g(x) = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}$，有 $f \cdot g(x) = g \cdot f(x) = I(x)$，即 $f \cdot g = g \cdot f = I$，$g$ 是 f 的逆元。

综上可得，$<G, \cdot>$是群。

(2)　对任意的 $f, g \in S$，设 $f(x) = x + b_1$，$g(x) = x + b_2$，则 $g^{-1}(x) = x - b_2$，$f \cdot g^{-1}(x) = f(x - b_2) = x + b_1 - b_2$，所以 $f \cdot g^{-1} \in S$，因此 S 是子群。

对任意的 $f, g \in T$，设 $f(x) = a_1 x$，$g(x) = a_2 x$，则 $g^{-1}(x) = \frac{1}{a_2}x$，$f \cdot g^{-1}(x) = f\left(\frac{1}{a_2}x\right) = \frac{a_1}{a_2}x$，所以 $f \cdot g^{-1} \in T$，因此 T 是子群。

(3)　S 的所有左陪集：$\{Sf \mid f(x) = ax + b, a \neq 0, a, b \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$。

T 的所有左陪集：$\{Tf \mid f(x) = ax + b, a \neq 0, a, b \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$。

27. 设$<Z_6; +_6>$是一个群，这里$+_6$ 是模 6 加法，$Z_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$，试写出$<Z_6; +_6>$中每个子群及其相应的左陪集。

解：子群分别是：$H_1 = \{[0]\}$，$H_2 = \{[0], [3]\}$，$H_3 = \{[0], [2], [4]\}$，Z_6。

$H_1[0] = \{[0]\}$，$H_1[1] = \{[1]\}$，$H_1[2] = \{[2]\}$，$H_1[3] = \{[3]\}$，$H_1[4] = \{[4]\}$，$H_1[5] = \{[5]\}$。

$H_2[1] = H_2[4] = \{[1], [4]\}$，$H_2[0] = H_2[3] = H_2$，$H_2[2] = H_2[5] = \{[2], [5]\}$。

$H_3[0] = H_3[2] = H_3[4] = H_3$，$H_3[1] = H_3[3] = H_3[5] = \{[1], [3], [5]\}$。

Z_6 的左陪集只有一个就是其自身，即对任意的 $a \in Z_6$ 有 $Z_6 a = Z_6$。

28. 设$<G; *>$是任一群，定义 $R \subseteq G \times G$ 为

$$R = \{<\sigma, \varphi> \mid \text{存在 } \theta \in G \text{ 使得 } \varphi = \theta * \sigma * \theta^{-1}\}$$

验证 R 是 G 上的等价关系。

证明：对任意的 $x \in G$，存在幺元 $e \in G$，使 $e * x * e^{-1} = x$，所以$(x, x) \in R$，R 是自反的。

对任意的$(x, y) \in R$，则存在 $\theta \in G$，使 $y = \theta * x * \theta^{-1}$，于是有

$$\begin{aligned} x &= \theta^{-1} * y * \theta \\ &= \theta^{-1} * y * (\theta^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

所以$(x, y) \in R$，R 是对称的。

对任意的(x, y)，$(y, z) \in R$，则存在 $\theta, \tau \in G$，使 $y = \theta * x * \theta^{-1}$，$z = \tau * y * \tau^{-1}$，于是有 $z = \tau * \theta * x * \theta^{-1} * \tau^{-1} = (\tau * \theta) * x * (\tau * \theta)^{-1}$，所以$(x, z) \in R$，$R$ 是传递的。

综上可得，R 是一个等价关系。

29. 设$<H; *>$是群$<G; *>$的子群，如果

$$A = \{x \mid x \in G, x * H * x^{-1} = H\}$$

证明$<A;*>$是$<G;*>$的一个子群。

证明：对任意的 $x,y\in A$，有 $x*H*x^{-1}=H$，$y*H*y^{-1}=H$，则 $y^{-1}*y*H*y^{-1}*y=y^{-1}*H*y$，即 $y^{-1}*H*y=H$，于是有

$$\begin{aligned}(x*y^{-1})*H*(x*y^{-1})^{-1}&=x*y^{-1}*H*y*x^{-1}\\&=x*H*x^{-1}=H,\end{aligned}$$

所以 $x*y^{-1}\in A$，故 A 是子群。

30.设 S_n 是一个对称群，G 是保持某一元素不变的置换群，求出 G 在 S_n 中所有左陪集。

证明：设 G 是使第 i 个元素不变的置换群，因为 $|S_n|=n!$，$|G|=(n-1)!$，所以由拉格朗日定理可知，G 在 S_n 中的左陪集共有 n 个，即为 G 以及

$\pi_k G=\{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k & \cdots & k_n\end{pmatrix}|k_1,k_2,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n$ 是 $1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$ 的任一置换排列，$(k=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)\}$

31.证明在由群$<G;*>$的一个子群$<S;*>$所确定的陪集中，只有一个陪集是子群。

证明：子群 S 本身也是一个陪集，现设陪集 aS 也是 G 的子群，则幺元 $e\in aS$，于是有 $S=eS=aS$，所以 S 的陪集中只有一个是子群，即 S 本身。

32.设 aH 和 bH 是 H 在 G 中的两个右陪集，证明：要么 $aH\cap bH=\varnothing$，要么 $aH=bH$。

证明：对于 aH 和 bH，只有以下两种情况：

(1) $aH\cap bH\neq\varnothing$，则必存在 $c\in aH\cap bH$，于是 $c\in aH$ 且 $c\in bH$，有 $cH=aH$ 且 $cH=bH$，所以 $aH=bH$。

(2) $aH\cap bH=\varnothing$。

33.证明：如果 f 是由$<A;☆>$到$<B;*>$的同态映射，g 是由$<B;*>$到$<C;\Delta>$的同态映射，那么，$g\cdot f$ 是由$<A;☆>$到$<C;\Delta>$的同态映射。

证明：对任意的 $x,y\in A$

$$\begin{aligned}g\cdot f(x☆y)&=g(f(x☆y))\\&=g(f(x)*f(y))\\&=g(f(x))\Delta g(f(y))\\&=g\cdot f(x)\Delta g\circ f(y),\end{aligned}$$

所以 $g\cdot f$ 是从 A 到 C 的同态映射。

34.设$<G;*>$是一个群，而 $a\in G$，如果 f 是从 G 到 G 的映射，使得对于每一个 $x\in G$，都有

$$f(x)=a*x*a^{-1}$$

试证明 f 是一个从 G 到 G 上的自同构。

证明：对任意的 $x\in G$，存在 $a^{-1}*x*a\in G$，使 $f(a^{-1}*x*a)=a*a^{-1}*x*a*a^{-1}=x$，所以 f 是满射。

对任意的 $x, y \in G$，若 $f(x)=f(y)$，即 $a*x*a^{-1}=a*y*a^{-1}$，由消去律，有 $x=y$，所以 f 是单射，因此 f 是双射。

对任意的 $x, y \in G$，$f(x*y)=a*x*y*a^{-1}=a*x*a^{-1}*a*y*a^{-1}=f(x)*f(y)$，所以 f 是同态映射。

综上可得，f 是 G 上的自同构。

35. 试证由表所给出的两个群＜G；☆＞和＜S；$*$＞是同构的。

☆	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_4	p_1	p_2
p_4	p_4	p_3	p_2	p_1

＜G；☆＞

☆	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	q_3	q_4	q_1	q_2
q_2	q_4	q_3	q_2	q_1
q_3	q_1	q_2	q_3	q_4
q_4	q_2	q_1	q_4	q_3

＜S；$*$＞

证明：设 $f: G \to S$，令 $f(p_1)=q_3$，$f(p_2)=q_2$，$f(p_3)=q_1$，$f(p_4)=q_4$，显然 f 是双射。

容易验证：$f(p_1 ☆ p_1)=f(p_1)=q_3=q_3*q_3=f(p_1)*f(p_1)$，

$f(p_1 ☆ p_2)=f(p_2)=q_2=q_3*q_2=f(p_1)*f(p_2)$，

$f(p_3 ☆ p_2)=f(p_4)=q_4=q_1*q_2=f(p_3)*f(p_2)$等等，其余可类似验证，所以＜$G$；☆＞$\cong$＜$S$；$*$＞。

36. 设 f_1, f_2 都是从代数系统＜A；☆＞到代数系统＜B；$*$＞的同态。设 g 是从 A 到 B 的一个映射，使得对 $a \in A$，都有

$$g(a)=f_1(a)*f_2(a)$$

证明：如果＜B；$*$＞是一个可交换半群，那么 g 是一个由＜A；☆＞到＜B；$*$＞的同态。

证明：对任意的 $x, y \in A$，有

$$\begin{aligned} g(x ☆ y) &= f_1(x ☆ y)*f_2(x ☆ y) \\ &= f_1(x)*f_1(y)*f_2(x)*f_2(y) \\ &= f_1(x)*f_2(x)*f_1(y)*f_2(y) \\ &= g(x)*g(y), \end{aligned}$$

所以 g 是同态映射。

37. ＜$\mathbf{R}$；$+$＞是实数集上的加法群，设

$$f: x \to x^{2\pi i x}, x \in \mathbf{R}$$

f 是否同态？如果是，请写出同态象和同态核。

解：对任意 $x, y \in \mathbf{R}$，有

$$f(x+y) = e^{2\pi i x(x+y)}$$
$$= e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y}$$
$$= f(x) \cdot f(y)$$

所以 f 是从 $<\mathbf{R};+>$ 到 $<\mathbf{C};\cdot>$ 的同态映射，其中，$<\mathbf{C};\cdot>$ 是复数集上的乘法群。

因为 $e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i\sin 3\pi x$，所以 f 的同态象为：

$$\{\cos 2\pi x + i\sin 2\pi x \mid x \in \mathbf{R}\}$$

$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = e^{2\pi i} = \cos 2\pi x + i\sin 2\pi x = 1\}$

$= \{x \in \mathbf{R} \mid \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0\} = \mathbf{Z}$。

38. 证明：循环群的同态象必定是循环群。

证明：设循环群 $<G;*>$ 的生成元为 a，f 为同态映射，$<f(G);☆>$ 为同态象，则 $<f(G);☆>$ 也是群，往证 $f(a)$ 是 $f(G)$ 的生成元。

对任意的 $f(x) \in f(G)$，其中 $x \in G$，设 $x = a^n$，则 $f(x) = f(a^n) = f(a^{a-1} * a) = f(a^{n-1}) ☆ f(a) = \cdots = f(a)^n$，故 $f(a)$ 是生成元，所以同态象 $<f(G);☆>$ 是循环群。

39. $<\mathbf{R}-\{0\};\times>$ 与 $<\mathbf{R};+>$ 同构吗？

解：不同构。

假设 f 是从 $<\mathbf{R};+>$ 到 $<\mathbf{R}-\{0\};\times>$ 的同构映射，则有 $f(0)=1$。

对于 $-1 \in \mathbf{R}-\{0\}$，存在 $a \in \mathbf{R}$，使得 $f(a) = -1$，有 $f(0) = 1 = -1 \cdot -1 = f(a) \cdot f(a) = f(a+a)$，因为是双射，所以 $a+a=0$，即 $a=0$，则有 $f(0)=1=-1$，矛盾。

因此 $<\mathbf{R};+>$ 与 $<\mathbf{R}-\{0\};\times>$ 不可能同构。

40. 证明：一个集合上任意两个同余关系的交也是同余关系。

证明：设 R_1, R_2 是 $<A;*>$ 上的两个同余关系，故 $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的等价关系。

对于任意的 $(a,b),(c,d) \in R_1 \cap R_2$，则 $(a,b),(c,d) \in R_1$ 且 $(a,b),(c,d) \in R_2$，由 R_1，R_2 是同余关系，有 $(a*c, b*d) \in R_1$ 且 $(a*c, b*d) \in R_2$，所以 $(a*c, b*d) \in R_1 \cap R_2$，因此，$R_1 \cap R_2$ 仍是同余关系。

41. 考察代数系统 $<\mathbf{Z};+>$，以下定义在 $\mathbf{Z}$ 上的二元关系 R 是同余关系吗？

(1) $<x,y> \in R$ 当且仅当 $(x<0 \wedge y<0) \vee (x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0)$；

(2) $<x,y> \in R$ 当且仅当 $|x-y|<10$；

(3) $<x,y> \in R$ 当且仅当 $(x=y=0) \vee (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$；

(4) $<x,y> \in R$ 当且仅当 $x \geqslant y$。

解：(1) 可以证明 R 是等价关系，但对于 $(-2,-4),(1,5) \in R$，有 $(-2+1,-4+5) = (-1,1) \notin R$，所以 R 不是同余关系。

(2) 对于 $(2,5) \in R$，$(5,13) \in R$，而 $(2,13) \notin R$，所以 R 不是等价关系，当然不是同余

关系。

(3) 可以证明 R 是等价关系，但对于$(-4,6),(6,-6)\in R$，有$(-4+6,6+-6)=(2,0)\notin R$，所以 R 不是同余关系。

(4) 对于$(2,1)\in R$，而$(1,2)\notin R$，所以 R 不是等价关系，当然不是同余关系。

42. 设 f 和 g 都是从群$<G_1;☆>$到群$<G_2;*>$的同态，证明$<C;☆>$是$<G_1;☆>$的一个子群，其中

$$C=\{x \mid x\in G_1 \text{ 且 } f(x)=g(x)\}$$

证明：对任意的 $x,y\in C$，有 $f(x)=g(x)$，$f(y)=g(y)$，

$$\begin{aligned}f(x☆y^{-1})&=f(x)*f(y^{-1})\\&=f(x)*f(y)^{-1}\\&=g(x)*g(y)^{-1}\\&=g(x)*g(y^{-1})\\&=g(x☆y^{-1}),\end{aligned}$$

所以 $x☆y^{-1}\in C$，故 C 是 G_1 的子群。

43. 设 f 是从群$<G_1;*>$到$<G_2;\Delta>$的同态映射，则 f 为入射当仅当 $\mathrm{Ker}(f)=\{e\}$。其中 e 是 G_1 中的幺元。

证明：必要性，因为 $f(e)=e'$，所以 $e\in\mathrm{Ker}(f)$，若存在 $a\in\mathrm{Ker}(f)$，则有 $f(a)=e'$，即 $f(a)=f(e)$，因为 f 是入射，所以 $a=e$，因此 $\mathrm{Ker}(f)=\{e\}$，

充分性，对任意的 $x,y\in G_1$，若 $f(x)=f(y)$，则有

$$\begin{aligned}e'&=f(x)\Delta f(y)^{-1}\\&=f(x)\Delta f(y^{-1})\\&=f(x*y^{-1})\end{aligned}$$

故 $x*y^{-1}\in\mathrm{Ker}(f)$，而 $\mathrm{Ker}(f)=\{e\}$，所以 $x*y^{-1}=e$，即 $x=y$，所以 f 是入射。

44. 设 $\mathbf{Z}(\sqrt{2})=\{m+\sqrt{2}\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$，其中 $\mathbf{Z}$ 是整数集合。试证：$\mathbf{Z}(\sqrt{2})$对数的通常加法和乘法构成一个环。

证明：对任意的 $m+n\sqrt{2},p+q\sqrt{2}\in\mathbf{Z}(\sqrt{2})$，有 $m+n\sqrt{2}+p+q\sqrt{2}=m+p+(n+q)\sqrt{2}\in\mathbf{Z}(\sqrt{2})$，$(m+n\sqrt{2})(p+q\sqrt{2})=mp+2nq+(mp+np)\sqrt{2}\in\mathbf{Z}(\sqrt{2})$，所以运算$+$和$\cdot$在$\mathbf{Z}(\sqrt{2})$上是封闭的。

又加法幺元 $0=0+0\cdot\sqrt{2}\in\mathbf{Z}(\sqrt{2})$。

对任意的 $m+n\sqrt{2}\in\mathbf{Z}(\sqrt{2})$，其加法逆元$-m-n\sqrt{2}\in\mathbf{Z}(\sqrt{2})$，而加法、乘法的结合律以及乘法对加法的分配律在整数集上成立，因此在其子集 $\mathbf{Z}(\sqrt{2})$上也是成立的。

综上可得，$\mathbf{Z}(\sqrt{2})$对数的通常加法和乘法构成一个环。

45. 设 $\mathbf{Z}(\mathrm{i})=\{m+n\mathrm{i}\mid m,n\in\mathbf{Z},\mathrm{i}^2=-1\}$，试证 $\mathbf{Z}(\mathrm{i})$ 对数的加法和乘法构成一个环。

证明： 对任意的 $m+n\mathrm{i},p+q\mathrm{i}\in\mathbf{Z}(\mathrm{i})$，有 $m+n\mathrm{i}+p+q\mathrm{i}=m+p+(n+q)\mathrm{i}\in\mathbf{Z}(\mathrm{i})$，$(m+n\mathrm{i})(p+q\mathrm{i})=mp-np+(mq+np)\mathrm{i}\in\mathbf{Z}(\mathrm{i})$，所以加法和乘法在 $\mathbf{Z}(\mathrm{i})$ 上是封闭的。

加法幺元 $0=0+0\mathrm{i}\in\mathbf{Z}(\mathrm{i})$。

对任意的 $m+n\mathrm{i}\in\mathbf{Z}(\mathrm{i})$，其加法逆元 $-m-n\mathrm{i}\in\mathbf{Z}(\mathrm{i})$。

而加法、乘法的结合律以及乘法对加法的分配律在复数集上成立，因此在其子集 $\mathbf{Z}(\mathrm{i})$ 上也成立。

综上可得，$\mathbf{Z}(\mathrm{i})$ 对数的加法和乘法构成一个环。

46. 若对所有 $a\in$ 环 R，$ea=a$，则 e 叫作 R 的一个左壹；若对所有 $a\in R$，$ae'=a$，则 e' 叫作 R 一个右壹。求证：若 R 有左壹也有右壹，则所有左壹右壹都相等，因而 R 有一个唯一确定的壹。

证明： 设 e_l,e_r 分别是环 R 的左壹和右壹，则由定义，有 $e_l\cdot e_r=e_l=e_r$，即左壹和右壹是相等的，是环 R 的壹。

设 e_1,e_2 都是环 R 的壹，则 $e_1\cdot e_2=e_1=e_2$，即环 R 的壹是唯一的。

47. 设环 R 有壹，若 $ab=1$，则 a 叫作 b 的左逆，b 叫作 a 的右逆。求证：若 a 有左逆又有右逆，则所有左逆右逆都相等，因而 a 有一个唯一确定的逆。

证明： 设 b_1,b_2 分别是 a 的左逆和右逆，则有 $b_1=b_1\cdot 1=b_1\cdot(a\cdot b_2)=(b_1\cdot a)\cdot b_2=1\cdot b_2=b_2$，即左逆和右逆是相等的，是 a 的逆元，且逆元是唯一确定的。

48. 设环中不止一个元素，求证任意无零因子的有限环必是一个体。

证明： 关键是证明环 R 中有壹，且任一非零元素皆存在逆元。

不妨设 $R=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，对任意的 $r\in R$，$r\neq 0$，令

$$Rr=\{a_1r,a_2r,\cdots,a_nr\}$$

则 $Rr\subseteq R$，要证 $Rr=R$，只需验证 Rr 中任意两个元素皆不相同，如若不然，存在 $a_ir,a_jr\in Rr(1\leqslant i<j\leqslant n)$，有 $a_ir=a_jr$，由于 R 是无零因子环，所以乘法消去律成立，又 $r\neq 0$，故 $a_i=a_j$（矛盾），因此 $Rr=R$，则存在 $a_i\in R$，使 $a_ir=r$，那么，a_i 是 R 的左壹。

对任意的 $a\in R$，同理可证 $rR=R$，则存在 $a_j\in R$，使 $a=ra_j$，于是 $a=ra_j=a_ira_j=a_ia$，即 a_i 为左壹。

同理可证，R 中亦有右壹，由习题 46 知，R 中有壹，设为 e。

对任意的 $r\in R$，由 $Rr=R$，存在 $r'\in R$，使 $r'r=e$，则 r' 是 r 的左逆，同理，r 亦有右逆，由习题 47 知，r 有逆。

综上可得，R 是一个体。

49. 设 $<A,☆,*>$ 是一个关于运算☆和 $*$ 分别具有幺元 e_1 和 e_2 的代数系统，并且运算☆和 $*$ 彼此之间是可分配的，证明：对任意的 $x\in A$，有 $x☆x=x*x=x$。

证明： 因为 $e_2=e_1☆e_2$

$=(e_1*e_2)☆e_2$

$=(e_1☆e_2)*(e_2☆e_2)$

$=e_2*(e_2☆e_2)$

$=e_2☆e_2$,

且 $e_1=e_2*e_1$

$=(e_2☆e_1)*e_1$

$=(e_2*e_1)☆(e_1*e_1)$

$=e_1☆(e_1*e_1)$

$=e_1*e_1$,

于是对任意的 $x\in A$,有

$x☆x=(x*e_2)☆(x*e_2)$

$=x*(e_2☆e_2)$

$=x*e_2=x$,

$x*x=(x☆e_1)*(x☆e_1)$

$=x☆(e_1*e_1)$

$=x☆e_1$

$=x$。

50.设 $<A,☆,x>$ 是代数系统,对任意的 $a\in A$,有 $a☆b=a$,证明:运算 $*$ 对于☆是可分配的。

证明:对任意的 $a,b,c\in A$,有 $a*(b☆c)=a*b=(a*b)☆(a*c)$,$(a☆b)*c=a*c=(a*c)☆(b*c)$,所以,运算 $*$ 对于☆是可分配的。

51.设 $<S,*>$ 是有限的可交换独异点,且对任意的 $a,b,c\in S$,若 $a*b=a*c$,则 $b=c$,证明 $<S,*>$ 是 Abel 群。

证明:关键是证明 S 中每个元素都存在逆元。

对任意的 $a\in S$,令 $S_a=\{a,a^2,a^3,\cdots,a^m,\cdots\}$,由运算的封闭性可知 $S_a\subseteq S$,又由 S 的有限性,可知 S_a 也是有限集。故必存在 $n,k>0$,使得 $a^n=a^{n+k}$,即 $a^n*e=a^n*a^k$,由题设,有 $a^k=e$,即有 $a^{k-1}*a=a*a^{k-1}=a^k=e$,可见,$a$ 的逆元 $a^{-1}=a^{k-1}$,因此,$<S,*>$ 是 Abel 群。

52.设 $<G,*>$ 是群,如果对任意的 $a,b\in G$,有 $a^3*b^3=(a*b)^3$,$a^4*b^4=(a*b)^4$,$a^5*b^5=(a*b)^5$,则 $<G,*>$ 是 Abel 群。

证明:对任意的 $a,b\in G$,由 $a^3*b^3=(a*b)^3$ 及消去律得 $a^3*b^3=a*b*a*b*a*b$,即 $a^2*b^2=(b*a)^2$。

同理,由 $a^4*b^4=(a*b)^4$,得 $a^3*b^3=(b*a)^3$,由 $a^5*b^5=(a*b)^5$,得 $a^4*b^4=(b*a)^4$。

由此可得，$a^4*b^4=(b*a)^4=(b*a)^3*b*a=a^3*b^3*b*a$，即 $a*b^4=b^4*a$，同理由 $a^3*b^3=(b*a)^3$，得 $a*b^3=b^3*a$，于是有 $b^4*a=a*b^4=a*b^3*b=b^3*a*b$，即 $b*a=a*b$，所以 G 是 Abel 群。

53. 设 $<G,*>$ 是群，$H\subseteq G$，$H\neq\varnothing$，且 H 中的元素都是有限阶的，运算在 H 中封闭，则 H 是 G 的子群。

证明：封闭性已知，结合律自然成立。

对任意的 $x\in H$，由题设，必存在正整数 n，使得 $x^n=e$，而 $x^n\in H$，故 $e\in H$。

对任意的 $x\in H$，$x\neq e$，必存在正整数 $n>1$，使得 $x^n=e$，则有 $x*x^{n-1}=x^{n-1}*x=e$，所以 $x^{-1}=x^{n-1}\in H$。

因此 H 是 G 的子群。

54. 设 $<H,*>$ 是群 $<G,*>$ 的有限子群，如果运算 $*$ 在 H 上封闭，则 H 是 G 的子群。

证明：要证 H 是 G 的子群，只需证明幺元 $e\in H$ 和 H 中任一元素的逆元也在 H 中。

对任意的 $a\in H$，由运算的封闭性，有 $a,a^2,\cdots,a^n,\cdots\in H$，而 H 是有限集，故必存在正整数 $i,j,i<j$，使得 $a^i=a^j$，故有 $a^{j-i}=e\in H$。

若 $j-i=1$，则 $a^{-1}=a^{j-i}\in H$；

若 $j-i>1$，则 $a^{-1}=a^{j-i-1}\in H$。

综上可得，H 是 G 的子群。

55. 证明：任意群都不等于它的两个真子群的并。

证明：设 H_1,H_2 是群 G 的两个真子群，则存在 $a,b\in G$，使得 $a\notin H_1,b\notin H_2$，假设 $G=H_1\cup H_2$，可分以下三种情况讨论：

(1)　$a\notin H_2$，则 $a\notin H_1\cup H_2=G$，矛盾。

(2)　$b\notin H_1$，则 $b\notin H_1\cup H_2=G$，矛盾。

(3)　$a\in H_2,b\in H_1$，对于 $ab\in G$，

若 $ab\in H_1$，则可令 $ab=h_1\in H_1$，于是 $a=h_1b^{-1}\in H_1$，与 $a\notin H_1$ 矛盾；

若 $ab\in H_2$，则可令 $ab=h_2\in H_2$，于是 $b=a^{-1}h_2\in H_2$，与 $b\notin H_2$ 矛盾；

所以 $ab\notin H_1\cup H_2=G$，矛盾。

综上所述，G 不可能等于它的两个真子群的并。

56. 设 $<G,*>$ 是群，$a\in G$ 且 a 的阶是 n，证明：$a^k=e$ 当且仅当 $n|k$。

证明：充分性，若 $n|k$，设 $k=mn$，则 $a^k=a^{mn}=(a^n)^m=e^m=e$。

必要性，设 $k=mn+r$，其中 $0\leqslant r<n$，则有 $a^k=a^{mn+r}=a^{mn}*a^r=e*a^r=a^r=e$，由于 n 是 a 的阶，故必有 $r=0$，即 $n|k$。

57. 设 $<G,*>$ 是一个 n 阶循环群，生成元为 a，则对于 n 的任一因子 d，存在唯一的一个 d 阶子群。

证明：设 H 为 G 的任一 d 阶子群。

若 $d=1$，则有唯一的平凡子群 $<\{e\},*>$。

若 $d>1$，则 H 中必有 a^s，其中 s 是 H 中元素的最小幂次，即

$$s=\min\{k \mid k\in\mathbf{Z}^+, a^k\in H\}$$

且 $s\neq 1$，因此，H 中的元素 a^n 都是由 a^s 所生成的。

设 $n=st+r$，$0\leqslant r<s$ 有 $a^r=a^n*a^{-st}=a^n*(a^5)^{-t}\in H$，由 s 的定义，有 $r=0$，即 $s\mid n$。因为 H 为 d 阶子群，故 a^s 的阶为 $d=\dfrac{n}{s}$，即 $d\mid n$。因此，H 就是以 a^s 为生成元的 d 阶子群，且 $d\mid n$。

58. 设 a 的阶为 n，则 a^r 的阶为 $\dfrac{n}{d}$，其中 $d=(r,n)$。

证明： 设 a^r 的阶为 k，由 $(a^r)^{\frac{n}{d}}=(a^n)^{\frac{r}{d}}=e^{\frac{r}{d}}=e$，故 $k\mid\dfrac{n}{d}$。

又 $a^{rk}=e$，有 $n\mid rk$，设 $n=dn_1$，$r=dr_1$，则 $(n_1,r_1)=1$，故 $dn_1\mid dr_1h$，即 $n_1\mid r_1k$，有 $n_1\mid k$，即 $\dfrac{n}{d}\mid k$，所以 $k=\dfrac{n}{d}$。

59. 设 a 的阶为 m，b 的阶为 n，且 $(m,n)=1$，$a*b=b*a$，则 $a*b$ 的阶为 mn。

证明： 设 $a*b$ 的阶为 k，由 $a*b=b*a$，则 $(a*b)^{mn}=a^{mn}*b^{mn}=(a^m)^n*(b^n)^m=e^n*e^m=e$，则 $k\mid mn$。

$(a*b)^{kn}=((a*b)^k)^n=e^n=e=a^{kn}*b^{kn}=a^{kn}*(b^n)^k=a^{kn}$，而 a 的阶为 m，故 $m\mid kn$，又 $(m,n)=1$，有 $m\mid k$。

同理 $(a*b)^{kn}=e=b^{kn}$，得 $n\mid k$，又 $(m,n)=1$，有 $mn\mid k$，所以 $k=mn$，即 $a*b$ 的阶为 mn。

60. 设 a 是 n 阶循环群 $<G;*>$ 的生成元，证明：a^r 是 G 的生成元当且仅当 $(r,n)=1$。

证明： 必要性，设 $d=(r,n)$，因为 a^r 是 G 的生成元，则存在 $k\in\mathbf{Z}$，使 $a=a^{rk}$，有 $a^{rk-1}=e=a^n$，故 $n\mid rk-1$，又 $d\mid n$，$d\mid r$，所以 $d\mid 1$，即 $(r,n)=1$。

充分性，令 $H=(a^r)=\{(a^r)^i \mid i\in\mathbf{Z}\}$，则 H 是由 a^r 生成的 G 的循环子群，且 H 的阶等于 a^r 的阶。

设 a^r 的阶为 k，则 $a^{rk}=e$，故 $n\mid rk$，又 $(r,n)=1$，有 $n\mid k$。

又 $(a^r)^n=(a^n)^r=e$，有 $k\mid n$，故 $k=n$，即 H 的阶也是 n，所以 $H=G$，故 a^r 也是 G 的生成元。

61. 证明：循环群的任何子群必定也是循环群。

证明： 设 $<G,*>$ 是循环群，生成元是 a，设 H 是 G 的子群，且 $H\neq\{e\}$，H 中的元素都可以表成 a 的整数幂，令

$$m=\min\{k \mid k\in\mathbf{Z}^+, 且\ a^k\in H\}$$

对于任意的 $a^n\in H$，设 $n=mq+r$，其中 $0\leqslant r<m$，则 $a^r=a^{n=mq}=a^n*a^{-mq}=a^n*$

$(a^m)^{-q} \in H$，由 m 的定义，有 $r=0$，即得 $a^n=(a^m)^q$，这说明 a^m 是子群 H 的生成元，所以 H 是循环群。

62. 设 $\langle G, \cdot \rangle$ 是群，对于 $a,b \in G$，$ab=ba$，a 的阶为 r，b 的阶为 s，且 $(a) \cap (b)=\{e\}$，证明：ab 的阶等于 r 和 s 的最小公倍数。

证明：设 p 是 r 和 s 的最小公倍数，d 是 r 和 s 的最大公因数，不妨设 $r=\alpha d$，$s=\beta d$，则 α 与 β 是互质的，故 $p=\alpha\beta d$，设 ab 的阶为 k。

由 $(ab)^p=a^p b^p=(a^{\alpha d})^{\beta}(b^{\beta d})^{\alpha}=e$，所以 $k \mid p$。

设 $k=mr+r_1$，$0 \leqslant r_1 < r$，$k=ns+s_1$，$0 \leqslant s_1 < s$，则 $e=(ab)^k=a^k b^k=(a^r)^m \cdot a^{r_1} \cdot (b^s)^n \cdot b^{s_1}=a^{r_1}b^{s_1}$，所以 b^{s_1} 是 a^{r_1} 的逆元，故 $b^{s_1} \in (a)$，又 $b^{s_1} \in (b)$，所以 $b^{s_1} \in (a) \cap (b)=\{e\}$，而 b 的阶为 s，则有 $s_1=0$。

同理可证，$r_1=0$。则 $k=mr=ns$，所以 $r \mid k$ 和 $s \mid k$，即 $\alpha d \mid k$，$\beta d \mid k$，因为 α 与 β 互质，必有 $\alpha\beta d \mid k$，即 $p \mid k$。因此 $k=p$。

63. 设 H，K 是群 G 的子群，$|H|=m$，$|K|=n$，且 $(m,n)=1$，则 $H \cap K=\{e\}$。

证明：由于 H，K 都是有限的，则 $H \cap K$ 也是有限的，设 $|H \cap K|=t$，因为 H，K 都是 G 的子群，同时既是 H 的子群，也是 K 的子群，由拉格朗日定理，有 $t \mid m$，$t \mid n$，而 $(m,n)=1$，故 $t=1$，由于 $H \cap K$ 是子群，故 $H \cap K=\{e\}$。

64. 设 p 是质数，证明：p^m 阶群中一定包含着一个 p 阶子群。

证明：设 $\langle G, * \rangle$ 为 p^m 阶群。

对于任意的 $a \in G$，$a \neq e$，设 a 的阶为 n，则由所 a 生成的循环子群的阶也是 n，由拉格朗日定理，有 $n \mid p^m$，因为 p 为质数，所以可设 $n=p^t$，其中 $t \geqslant 1$ 且 t 为正整数。

若 $t=1$，即 a 的阶为 p，于是由 a 所生成的循环子群就是 G 的一个 p 阶子群。

若 $t>1$，令 $b=a^{p^{t-1}}$，则 b 的阶为 p，于是由 b 所生成的循环子群就是 G 的一个 p 阶子群。

65. 设 $\langle G, * \rangle$ 是有限群，若 G 除了自身和 $\{e\}$ 之外没有别的子群，证明：G 是循环群且阶为素数。

证明：对任意的 $a \in G$，$a \neq e$，设 $H=\{a, a^2, \cdots\}$ 为由 a 所生成的循环子群，因为 G 是有限的，故 H 也是有限的，且由拉格朗日定理，有 $|H| \mid |G|$，由题设，有 $H=C=(a)$，所以 G 是循环群。

假设 $|G|=n$ 不是素数，令 $n=n_1 n_2$，$1<n_1$，$n_2<n$，由上面论述知 $G=H=(a)$，a 的阶也是 n，对于 $a^{n_1} \in G$，则 a^{n_1} 的阶为 n_2，设 a^{n_1} 所生成的循环子群为 H'，有 $H' \neq \{e\}$，$H' \neq G$，与题设条件矛盾，所以群 G 的阶为素数。

66. 设 G 是 mn 阶循环群，m 与 n 互质，H_1，H_2 分别是 G 的 m 阶、n 阶子群，证明：$G=H_1 H_2$。

证明：因为 G 是循环群，则 G 必是交换群，于是 $H_1 H_2=H_2 H_1$，由习题 20 知，$H_1 H_2$ 是

G 的子群，设 $|H_1H_2|=k$，则由拉格朗日定理，有 $k|mn$。

易证 H_1,H_2 也是 H_1H_2 的子群，由拉格朗日定理，有 $m|k,n|k$，而 m 与 n 是互质的，有 $mn|k$，所以 $k=mn$，而 $H_1H_2\subseteq G,|G|=mn$，所以 $G=H_1H_2$。

67. 设 G 是 6 阶群，则 G 一定有 3 阶子群。

证明：分以下几种情况讨论：

(1) 若 $g=(a)$ 是 6 阶循环群，则 a^2 的阶是 3，故 (a^2) 是 G 的一个 3 阶子群。

(2) 若 G 不是循环群，由拉格朗日定理，对任意的 $x\in G,x\neq e,x$ 的阶是 2 或 3。

①若 G 中存在一个 3 阶元素 x，则 (x) 是 G 的一个 3 阶子群。

②若 G 中每个非幺元的元素的阶都是 2，则对任意的 $x,y\in G,x\neq e,y\neq e$，有

$$x^2=y^2=(xy)^2=e$$

显然，$x^{-1}=x,y^{-1}=y,(xy)^{-1}=xy$，令

$$H=\{e,x,y,xy\}$$

因为 $xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$，所以 H 是 G 的子群，由 $x\neq e,y\neq e$，有 $xy\neq e,xy\neq x,xy\neq y$，故有 $|H|=4$，而 4 不能整除 6，矛盾。

68. 设 $<G,*>$ 是一个有限群，$|G|=mk$，$<H,*>$ 是 $<G,*>$ 的子群，且 $|H|=m$，证明：对于任意的 $a\in G$，必存在正整数 n，$1\leqslant n\leqslant k$，使得 $a^n\in H$。

证明：考察 H 的右陪集集合 $\{H,aH,a^2H,\cdots,a^kH\}$。

由拉格朗日定理可知，在 G 中有且只有 k 个 H 的右陪集，而上述集合中却有 $k+1$ 个 H 的右陪集，故必存在正整数 i,j，$0\leqslant i<j\leqslant k$，使得 $a^iH=a^jH$，则存在 $b\in H$，使 $a^i*b=a^j$，故有 $b=a^{j-i}$，令 $n=j-i$，就有 $1\leqslant n\leqslant k$，且有 $a^n\in H$。

69. 证明：阶为素数的群必是循环群。

证明：设 $<G,*>$ 是群，其阶是素数 p，对任意的 $a\in G,a\neq e$，令 H 是由 a 所生成的循环子群，由 $a\neq e$，有 $H\neq\{e\}$，由拉格朗日定理，有 $|H||p$，而 p 是素数，只能有 $|H|=p$，又 $H\subseteq G$，所以 $H=G=(a)$，因此 G 是循环群。

70. 设 $p<q$，q 是质数，则在 pq 阶的群中，q 阶子群一定是正规子群。

证明：设 $<G,\cdot>$ 是 pq 阶群，$<H,\cdot>$ 是 $<G,\cdot>$ 的 q 阶子群。

首先证明，对任意的 $g\in G,gHg^{-1}$ 也是 G 的 q 阶子群。

对任意的 $gh_1g^{-1},gh_2g^-1\in gHg^{-1}$，有

$$\begin{aligned}(gh_1g^{-1})\cdot(gh_2g^{-1})^{-1}&=gh_1g^{-1}\cdot gh_2g^{-1}\\&=gh_1h_2{}^{-1}g^{-1}\in gHg^{-1},\end{aligned}$$

所以，gHg^{-1} 是 G 的子群。

设 $f:H\rightarrow gHg^{-1}$，对任意的 $h\in H$，令

$$f(h)=ghg^{-1}$$

易证 f 是双射，则 $|H|=|gHg^{-1}|$，所以 gHg^{-1} 也是 G 的 q 阶子群。

其次证明,G 的 q 阶子群只有一个。

假设 H_1 和 H_2 是 G 的两个不同的 q 阶子群,由习题 69 知,H_1 和 H_2 都是循环群。设 $H_1=(a)$,$H_2=(b)$,则 $H_1=\{e,a,a^2,\cdots,a^{q-1}\}$,$H_2=\{e,a,a^2,\cdots,a^{q-1}\}$,令

$$H_3=H_1\cdot H_2=\{a^ib^j \mid i,j=0,1,2,\cdots,q-1\}$$

显然,$H_3\subseteq G$,且 $|H_3|=q^2$,而 $q^2>pq$,所以 H_3 中必有两个元素相同,不妨设 $a^ib^j=a^sb^t$,且 $i\neq s$,$j\neq t$ 即有 $a^{i-s}=b^{t-j}\neq e$,因此 $H_1\cap H_2\neq\{e\}$,且 $H_1\cap H_2$ 是 H_1 的子群,由拉格朗日定理,有 $|H_1\cap H_2|\mid|H_1|=q$,所以 $|H_1\cap H_2|=q$,故 $H_1\cap H_2=H_1$,同理可证 $H_1\cap H_2=H_2$,因此 $H_1=H_2$,与假设 H_1 和 H_2 不同矛盾,所以 G 的 q 阶子群只有一个。

综上所述,有 $H=gHg^{-1}$,所以 H 是正规子群。

71. 设 H 是群 G 的子群,若 H 在 G 中的右陪集的个数有限,证明:H 在 G 中的左陪集的个数也有限而且和右陪集的个数相等。

证明:设 H 在 G 中所有不同的右陪集是

$$a_1H,a_2H,\cdots,a_nH$$

往证 $Ha_1^{-1},Ha_2^{-1},\cdots,Ha_n^{-1}$ 是 H 在 G 中所有不同的左陪集。

首先证明 $G=Ha_1^{-1}\cup Ha_2^{-1}\cup\cdots\cup Ha_n^{-1}$

对任意的 $g\in G$,$g^{-1}\in G$ 则必存在 a_iH,使 $g^{-1}\in a_iH$,令 $g^{-1}=a_ih$,故 $g=(a_ih)^{-1}=h^{-1}a_i^{-1}\in Ha_i^{-1}\subseteq Ha_1^{-1}\cup Ha_2^{-1}\cup\cdots\cup Ha_n^{-1}$,所以 $G\subseteq Ha_1^{-1}\cup Ha_2^{-1}\cdots\cup Ha_n^{-1}$,显然有 $Ha_1^{-1}\cup Ha_2^{-1}\cup\cdots\cup Ha_n^{-1}\subseteq G$,故有

$$G=Ha_1^{-1}\cup Ha_2^{-1}\cup\cdots\cup Ha_n^{-1}$$

其次证明,对任意 a_i,a_j,$1\leqslant i<j\leqslant n$,有 $Ha_i^{-1}\neq Ha_j^{-1}$。

假设 $Ha_i^{-1}=Ha_j^{-1}$,则 $a_i^{-1}\in Ha_j^{-1}$,令 $a_i^{-1}=ha_j^{-1}$,即 $a_i=a_jh^{-1}\in a^jH$,故 $a_iH=a_jH$,矛盾。

72. 设 H 是群 G 的子群,如果 H 在 G 中的右陪集只有两个,则 H 是正规子群。

证明:设 H 的两个右陪集为 H,aH,要证 H 为正规子群,只需证 $aH=Ha$。

因为 $H\neq aH$,所以 $a\notin H$,易证 $aH=a^{-1}H$,$Ha=Ha^{-1}$。

对任意的 $x\in aH$,必有 $x^{-1}\in aH=a^{-1}H$,令 $x^{-1}=a^{-1}h$,故 $x=(x^{-1})^{-1}=(a^{-1}h)^{-1}=h^{-1}a\in Ha$,所以 $aH\subseteq Ha$。

对任意 $ha\in Ha\subseteq G$,而 $G=H\cup aH$,必有 $ha\in aH$。如若不然,设 $ha\in H$,可令 $ha=h_1$,故 $a=h^{-1}h_1\in H$,矛盾,所以 $Ha\in aH$。

综上所述,有 $aH=Ha$,所以 H 是正规子群。

73. 设 H 是群 G 的子群,证明:H 是 G 的正规子群的充分必要条件是 H 的任意两个右陪集的乘积还是 H 的一个右陪集。

证明:必要性,设 H 是正规子群,对任意的 aH,bH,往证 $aH\cdot bH=abH$。

对任意的 $ah_1bh_2 \in aH \cdot bH$，有 $h_1b \in Hb = bH$，令 $h_1b = bh_3$，则 $ah_1bh_2 = abh_3h_2 \in abH$，所以 $aH \cdot bH \subseteq abH$。

对任意的 $abh \in abH$，有 $abh = aebh \in aH \cdot bH$，所以 $abH \subseteq aH \cdot bH$，因此 $aH \cdot bH = abH$。

充分性，对任意的 aH, bH，由题设，可令 $aH \cdot bH = cH$，往证 $aH \cdot bH = abH$。

因为 $ab = ae \cdot be \in aH \cdot bH = cH$，故 $abH = cH$，即 $aH \cdot bH = abH$。

因为对任意的 aH, bH 都有 $aH \cdot bH = abH$，则对于 $aH, a^{-1}H$，亦有 $aH \cdot a^{-1}H = aa^{-1}H = H$。

对任意的 $ah \in aH$，因为 $aha^{-1}h \in aH \cdot a^{-1}H = H$，令 $aha^{-1}h = h_1$，则 $ah = h_1h^{-1}a \in Ha$，所以 $aH \subseteq Ha$。

对任意的 $ha \in Ha$，因为 $ha = ehae \in H \cdot aH = aH$，所以 $Ha \subseteq aH$，于是 $aH = Ha$，因此 H 是正规子群。

74. 设 $<G, *>$ 是群，$\Phi: G \to G$，对任意的 $x \in G$，有 $\Phi(x) = x^{-1}$，证明：Φ 是 G 的自同构的充要条件是 G 为交换群。

证明： 必要性，对任意的 $x, y \in G$，由 Φ 是 G 的自同构，有

$$
\begin{aligned}
x * y &= ((x * y)^{-1})^{-1} \\
&= (\Phi(x * y))^{-1} \\
&= (\Phi(x) * \Phi(y))^{-1} \\
&= \Phi(y)^{-1} * \Phi(x)^{-1} \\
&= \Phi(y^{-1}) * \Phi(x^{-1}) \\
&= (y^{-1})^{-1} * (x^{-1})^{-1} \\
&= y * x,
\end{aligned}
$$

所以 G 是交换群。

充分性，对任意的 $x, y \in G$，若 $\Phi(x) = \Phi(y)$，即 $x^{-1} = y^{-1}$，有 $x = y$，所以 Φ 是入射。

对任意的 $x \in G$，存在 $x^{-1} \in G$，有 $\Phi(x^{-1}) = (x^{-1})^{-1} = x$，所以 Φ 是满射。

对任意的 $x, y \in G$，$\Phi(x * y) = \Phi(y * x) = (y * x)^{-1} = x^{-1} * y^{-1} = \Phi(x) * \Phi(y)$。

综上，Φ 是从 G 到 G 的同构映射，即 Φ 是 G 上的自同构。

75. 设 $<G, *>$ 是群，且 G 只有有限个子群，Φ 是 G 的满自同态，证明：Φ 是 G 的自同构。

证明： 设 G 共有 k 个子群 $H_1, H_2, \cdots, H_k$，其中 $H_1 = \{e\}$，$H_k = G$，因为 Φ 是 G 的满自同态，有 $\Phi(G) = G$，则 $\Phi(G)$ 的全部子群也是 $H_1, H_2, \cdots, H_k$，令

$$T_i = \{x \mid x \in G, \Phi(x) \in H_i\} \ (i = 1, 2, \cdots, k)$$

显然 $e \in T_i$，故 T_i 是非空集合，且对任意的 $x, y \in T_i$，有 $\Phi(x), \Phi(y) \in H_i$，于是 $\Phi(x * y^{-1}) = \Phi(x) * \Phi(y^{-1}) \in H_i$，所以 $x * y^{-1} \in T_i$，因此 T_i 是 G 的子群，由于 G 只有 k 个子群，则子群集 $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\} = \{H_1, H_2, \cdots, H_k\}$。

因为 $T_1=\{x\mid x\in G,\Phi(x)\in H_1=\{e\}\}$，有 $T_1=\mathrm{Ker}(\Phi)$，显然，T_1 是 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 的子群，于是 T_1 是 $H_1,H_2,\cdots,H_k$ 的子群，故 $T_1=\mathrm{Ker}(\Phi)=\{e\}$，所以 Φ 是入射，因此 Φ 是 G 的自同构。

76. 设 $G=(a)$ 是 n 阶循环群，k 是正整数，规定 $\sigma:G\to G$，对任意的 $a^i\in G$，$\sigma(a^i)=a^{ik}$，证明：

(1) σ 是 G 的自同态；

(2) σ 是自同构的充分必要条件是 $(n,k)=1$。

证明：(1) 对任意的 $a^i,a^j\in G$，则

$$\begin{aligned}\sigma(a^i\cdot a^j)&=\sigma(a^{i+j})\\&=a^{(i+j)k}\\&=a^{ik+jk}\\&=a^{ik}\cdot a^{jk}\\&=\sigma(a^i)\cdot\sigma(a^j)\end{aligned}$$

所以 σ 是 G 的自同态。

(2) 必要性，设 $d=(n,k)$。由 σ 是自同构，则 $\sigma(a)$ 也是生成元，又由于 σ 是双射，G 的生成元只有 a 和 a^{-1}，所以 $\sigma(a)=a^k=a$ 或 a^{-1}，即 $a^{k\pm1}=e$，a 的阶为 n，故 $n\mid k\pm1$，所以有 $d\mid\pm1$，即 n 与 k 是互质的，$(n,k)=1$。

充分性，只需证 σ 是双射。

因为 $(n,k)=1$，a 的阶为 n，故 a^k 的阶也是 n，由习题 38 知，$\sigma(G)$ 是由 $\sigma(a)=a^k$ 生成的循环群，$\sigma(G)\subseteq G$，又 $|\sigma(G)|=|G|=n$，所以 $\sigma(G)=G$，故 σ 是满射，又 G 是有限集，则 σ 必是单射，从而 σ 是双射。

77. 试证 $<\mathbf{Z},☆,*>$ 是含幺交换环，其中 $\mathbf{Z}$ 是整数集，对任意的 $a,b\in\mathbf{Z}$，$a☆b=a+b-1$，$a*b=a+b-ab$。

证明：首先证明 $<\mathbf{Z},☆>$ 是交换群。

(1) 对任意的 $a,b\in\mathbf{Z}$，$a☆b=a+b-1\in\mathbf{Z}$，故运算☆在 $\mathbf{Z}$ 上是封闭的。

(2) 对任意的 $a,b\in\mathbf{Z}$，$a☆b=a+b-1=b+a-1=b☆a$，故运算☆是可交换的。

(3) 对任意的 $a,b,c\in\mathbf{Z}$，有

$$\begin{aligned}a☆(b☆c)&=a☆(b+c-1)\\&=a+b+c-1-1\\&=a+b-1+c-1\\&=(a☆b)+c-1\\&=(a☆b)☆c,\end{aligned}$$

故运算☆是可结合的。

(4) 存在 $1\in\mathbf{Z}$，对任意的 $a\in\mathbf{Z}$，有 $1☆a=a☆1=a+1-1=a$，故 1 是 $\mathbf{Z}$ 中关于运算☆

的幺元。

(5) 对任意的 $a\in\mathbf{Z}$,存在 $2-a\in\mathbf{Z}$,有 $a☆(2-a)=(2-a)☆a=a+2-a-1=1$,故 $2-a$ 是 a 在 $\mathbf{Z}$ 中关于运算☆的逆元。

因此,$<\mathbf{Z},☆>$是交换群。

其次证明$<\mathbf{Z},*>$是可交换独异点。

(1) 对任意的 $a,b\in\mathbf{Z}$,$a*b=a+b-ab\in\mathbf{Z}$,故运算 $*$ 在 $\mathbf{Z}$ 上是封闭的。

(2) 对任意的 $a,b\in\mathbf{Z}$,$a*b=a+b-ab=b+a-ba=b*a$,故运算 $*$ 是可交换的。

(3) 对任意的 $a,b,c\in\mathbf{Z}$,有

$$a*(b*c)=a*(b+c-bc)$$
$$=a+b+c-bc-ab-ac+abc,$$
$$(a*b)*c=(a+b-ab)*c$$
$$=a+b-ab+c-ac-bc+abc,$$

即 $a*(b*c)=(a*b)*c$,故运算 $*$ 是可结合的。

(4) 存在 $0\in\mathbf{Z}$,对任意的 $a\in\mathbf{Z}$,使 $a*0=0*a=a+0-a\cdot0=a$,故 0 是 $\mathbf{Z}$ 中关于运算 $*$ 的幺元。

因此,$<\mathbf{Z},*>$是可交换独异点。

最后证明运算 $*$ 对☆是可分配的。

对任意的 $a,b,c\in\mathbf{Z}$,有

$$a*(b☆c)=a*(b+c-1)$$
$$=a+b+c-1-ab-ac+a$$
$$=2a+b+c-1-ab-ac,$$
$$(a*b)☆(a*c)=(a+b-ab)☆(a+c-ac)$$
$$=a+b-ab+a+c-ac-1$$
$$=2a+b+c-ab-ac-1,$$

即 $a*(b☆c)=(a*b)☆(a*c)$,故运算 $*$ 对☆是可分配的。

综上可知,$<\mathbf{Z},☆,*>$是含幺交换环。

78. 设$<\mathbf{R},+,\cdot>$是环,并且对于任意的 $a\in\mathbf{R}$,有 $a\cdot a=a$,证明:

(1) 对于任意的 $a\in\mathbf{R}$,都有 $a+a=0$,其中 0 是加法幺元;

(2) $<\mathbf{R},+,\cdot>$是交换环。

证明:(1) 对任意的 $a\in\mathbf{R}$,有 $a+a\in\mathbf{R}$,故$(a+a)\cdot(a+a)=a+a$,于是 $a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a=a+a$,由 $a\cdot a=a$,有 $a+a+a+a=a+a$,得 $a+a=0$。

(2) 对任意的 $a,b\in\mathbf{R}$,有 $a+b\in\mathbf{R}$,故$(a+b)\cdot(a+b)=a+b$,于是 $a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a+b$,即 $a+a\cdot b+b\cdot a+b=a+b$,所以 $a\cdot b+b\cdot a=0$,由(1),$a\cdot b+a\cdot b=0$,有 $a\cdot b+b\cdot a=a\cdot b+a\cdot b$,所以 $a\cdot b=b\cdot a$,因此$<\mathbf{R},+,\cdot>$是交换环。

79. 设$<\mathbf{R},+,\cdot>$是含幺元,对任意的$a\in\mathbf{R}$,都有$a\cdot a=a$。试证:若环$\mathbf{R}$中有三个以上的元素,则$\mathbf{R}$不可能是整环。

证明:假设$\mathbf{R}$是整环,由于$\mathbf{R}$中存在三个以上的元素,则存在$a\in\mathbf{R}$,$a\neq 0$,$a\neq 1$,且$a\cdot a=a$,即$a\cdot a=a\cdot 1$,有$a\cdot(a-1)=0$,由$\mathbf{R}$是整环,于是$a=0$或者$a=1$,与$a\neq 0$,$a\neq 1$矛盾,因此$\mathbf{R}$不能是整环。

80. 设$<\mathbf{R},+,\cdot>$是环,e是$\mathbf{R}$中的乘法左幺元,如果$\mathbf{R}$中无零因子,那么e为乘法幺元。

证明:对任意的$x\in\mathbf{R}$,若$x=0$,则$e\cdot 0=0\cdot e=0$;若$x\neq 0$,由于e是乘法左幺元,有$e\cdot x=x$,于是有$x\cdot e\cdot x=x\cdot x$,即$(x\cdot e-x)\cdot x=0$,因为R中无零因子且$x\neq 0$,有$x\cdot e-x=0$,即$x\cdot e=x$,因此e为乘法幺元。

81. 设$<\mathbf{R},+,\cdot>$是环,如果$<\mathbf{R},+>$是循环群,证明:$\mathbf{R}$是交换环。

证明:由$<\mathbf{R},+>$是循环群,设a是生成元,对任意的$x,y\in\mathbf{R}$,令$x=na$,$y=ma$,$m,n\in\mathbf{Z}$,于是$x\cdot y=na\cdot ma=nma^2=mna^2=ma\cdot na=y\cdot x$,所以$\mathbf{R}$是交换环。

82. 设$<G,+>$是Abel群,在G中定义一个乘法:对任意的$a,b\in G$,$a\cdot b=0$,其中0为$<G,+>$中的幺元,证明:$<G,+,\cdot>$是一个交换环。

证明:对任意的$a,b\in G$,$a\cdot b=0\in G$,即乘法是封闭的,且$a\cdot b=b\cdot a=0$,所以乘法是可交换的。

对任意的$a,b,c\in G$,$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot 0=0$,$(a\cdot b)\cdot c=0\cdot c=0$,故$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$,所以乘法是可结合的。

对任意的$a,b,c\in G$,$a\cdot(b+c)=0$,$(a\cdot b)+(a\cdot c)=0+0=0$,故$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$,由于乘法是可交换的,有$(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a)$,所以乘法对运算+是可分配的。

综上可得,$<G,+,\cdot>$是一个交换环。

83. 设$<\mathbf{R},+,\cdot>$是无零因子环,若$x^2=x$在$\mathbf{R}$中有非零解,则$<\mathbf{R},+,\cdot>$是含幺环。

证明:由$x^2=x$在$\mathbf{R}$中有非零解,存在$e\in\mathbf{R}$,$e\neq 0$,使$e^2=e$,往证e是乘法幺元。

对任意的$a\in\mathbf{R}$,由$e^2=e$,有$a\cdot e^2=a\cdot e$,$(a\cdot e-a)\cdot e=0$,因为$\mathbf{R}$是无零因子环及$e\neq 0$,得$a\cdot e-a=0$,即$a\cdot e=a$,同理可证$e\cdot a=a$,于是e是$\mathbf{R}$中的乘法幺元,所以$\mathbf{R}$是含幺环。

84. 含幺环不可能与不含幺元的环同构。

证明:设$<A,+,\cdot>$是含幺环,$<B,+,\cdot>$是不含幺元的环,$<A,+,\cdot>$中的幺元为e,假设A与B是同构的,设$\Phi:A\to B$是同构映射,于是,对任意的$y\in B$,因为Φ是双射,存在唯一的$x\in A$,使$y=\Phi(x)$,则$y\cdot\Phi(e)=\Phi(x)\cdot\Phi(e)=\Phi(x\cdot e)=\Phi(x)=y$,同理$\Phi(e)\cdot y=y$,即$\Phi(e)$是$B$中的幺元,矛盾。

85. 试证整数加法群与偶数加法群同构,但是整数环不可能与偶数环同构。

证明：设 I_E 表示偶数集合，$f:\mathbf{Z}\to I_E$，对任意的 $x\in\mathbf{Z}$，$f(x)=2x$，易证 f 是双射，且对任意的 $x,y\in\mathbf{Z}$，有

$$f(x+y)=2(x+y)=2x+2y=f(x)+f(y)$$

所以 f 是同构映射，故 $<\mathbf{Z},+>\cong<I_E,+>$。

假设 g 是 $<\mathbf{Z},+,\cdot>$ 与 $<I_E,+,\cdot>$ 之间的同构映射，则对任意的 $x,y\in\mathbf{Z}$，有

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

$$g(x\cdot y)=g(x)\cdot g(y)$$

设 n 是正整数，则

$$\begin{aligned}g(nx)&=g(x+x+\cdots+x)\\&=g(x)+g(x)+\cdots+g(x)\\&=ng(x)\\&=g(n)\cdot g(x)。\end{aligned}$$

对于 $x\neq0$，由上式有 $g(n)=n$，对于 $2n+1$，也应有 $g(2n+1)=2n+1\notin I_E$，矛盾。所以整数环与偶数环不可能是同构的。

第六章　格与布尔代数

一、内容提要

1. 格的概念

半序格：设$<L,\leqslant>$是半序集，如果对任意的 $a,b\in L$，子集$\{a,b\}$在 L 中都有最小上界和最大下界，则称$<L,\leqslant>$是半序格。

代数格：设$<L,\oplus,\times>$是代数系统，如果对任意 $a,b,c\in L$，有

(1)　$a\times b=b\times a, a\oplus b=b\oplus a$；

(2)　$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$，

　　$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$；

(3)　$a\times(a\oplus b)=a, a\oplus(a\times b)=a$。

则称$<L,\oplus,\times>$是代数格。

子格：设$<L,\oplus,\times>$是格，S 是 L 的非空子集，如果运算$\oplus$和$\times$在 S 上是封闭的，则称$<S,\oplus,\times>$是$<L,\oplus,\times>$的子格。

定理 6.1.1：一个半序格必然是一个代数格，反之亦然。

2. 有余格与分配格

有界格：设$<L,\leqslant>$是格，如果 L 中存在最大元和最小元，则称$<L,\leqslant>$是有界格。

余元素：设$<L,\leqslant>$是有界格，对于 $a\in L$，如果存在 $b\in L$，使得

$$a\times b=0, a\oplus b=1$$

则称 b 为元素 a 的余元素(或补元)。

有余格：设$<L,\leqslant>$是有界格，如果 L 中每个元素都至少有一个余元素，则称$<L,\leqslant>$为有余格(或有补格)。

模格：设$<L,\leqslant>$是格，对任意的 $a,b,c\in L$，当 $a\leqslant b$ 时，有

$$b\times(a\oplus c)=a\oplus(b\times c)$$

则称$<L,\leqslant>$是模格。

分配格：设$<L,\oplus,\times>$是格，如果对任意的 $a,b,c\in L$，恒有

$$a\times(b\oplus c)=(a\times b)\oplus(a\times c)$$

$$a\oplus(b\times c)=(a\oplus b)\times(a\oplus c)$$

则称$<L,\oplus,\times>$是分配格。

定理 6.2.1：设$<L,\leqslant>$是格，对任意的 $a,b\in L$，则下列诸式等价：

$$a\leqslant b\Leftrightarrow a\times b=a\Leftrightarrow a\oplus b=b$$

定理 6.2.2：设$<L,\leqslant>$是格，对任意的 $a,b,c\in L$ ，如果 $b\leqslant c$，则有

$$a\times b\leqslant a\times c, a\oplus b\leqslant a\oplus c$$

定理 6.2.3：设$<L,\leqslant>$是格，对任意的 $a,b,c\in L$，恒有

$$a\oplus(b\times c)\leqslant(a\oplus b)\times(a\oplus c)$$

$$(a\times b)\oplus(a\times c)\leqslant a\times(b\oplus c)$$

定理 6.2.4：在有界格中，1 是 0 唯一的余元素，反之亦然。

定理 6.2.5：任意一个链都是分配格。

定理 6.2.6：设$<L,\oplus,\times>$是分配格，对任意的 $a,b,c\in L$，如果

$$a\times c=b\times c, a\oplus c=b\oplus c$$

则有 $b=c$。

定理 6.2.7：在有余分配格中，每个元素的余元素是唯一的。

定理 6.2.8：设$<L,\oplus,\times>$是有界分配格，对任意的 $a,b\in L$，如果 a,b 有余元素 a'，b'，则

$$(a\times b)'=a'\oplus b'$$

$$(a\oplus b)'=a'\times b'$$

3. **布尔代数**

布尔代数：一个有余分配格称作布尔代数。

定理 6.3.1(**亨廷顿公理**)：设集合 B 中至少有两个元素，$\cdot$，$+$是定义在 B 上的两种运算，如果对任意的 $a,b,c\in B$，满足：

H_1　$a\cdot b=b\cdot a, a+b=b+a$；

H_2　$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$，

$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$；

H_3：存在 $0,1\in B$ ，有

$$a\cdot 1=a, a+0=a$$

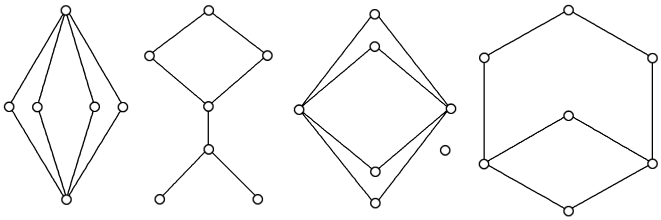
H_4：对任意的 $a\in B$ 存在 $\bar{a}\in B$，使得

$$a\cdot\bar{a}=0, a+\bar{a}=1$$

则$(B,+,\cdot,\overline{},0,1)$是一个布尔代数。

二、习题与解

1. 下图所示半序集是否为格？



（a）　　　　（b）　　　　（c）　　　　（d）

解：（1）　是　　（2）　不是　　（3）　不是　　（4）　不是

2. 设 S 是所有命题做成的集合，说明 S 在什么运算下构成代数格，在什么半序集上构成半序格。

解：在命题的析取运算、合取运算下构成代数格；在半序集 $<S,\leqslant>$ 上构成半序格，其中半序关系 $\leqslant$ 是蕴涵关系。

3. 设 $<L,\oplus,\times>$ 是一个格，$a,b\in L$。令

$$S=\{x\mid x\in L,且\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

其中 $\leqslant$ 是格中的半序关系，证明：$(S,\oplus,\times)$ 是 L 的子格。

证明：对任意的 $x,y\in S$，有 $a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$，因为 $x\leqslant x\oplus y$，又 $a\leqslant x$，所以 $a\leqslant x\oplus y$，由 $x\leqslant b$，$y\leqslant b$，得 b 是 x 与 y 的一个上界，故 $x\oplus y\leqslant b$，即 $a\leqslant x\oplus y\leqslant b$。

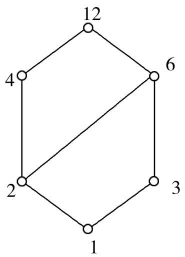
同理可证 $a\leqslant x\times y\leqslant b$，即运算 $\times$，$\oplus$ 在 S 上是封闭的，所以 S 是 L 的子格。

4. 证明：在格 $<L,\leqslant>$ 中，若 $a,b,c\in L$，且 $a\geqslant b$，$a\geqslant c$，则有 $a\times(b\oplus c)=(a\times b)\oplus(a\times c)$。

证明：若 $a\geqslant b$，$a\geqslant c$，有 $a\geqslant b\oplus c$，所以 $a\times(b\oplus c)=b\oplus c$，$a\times b=b$，$a\times c=c$，故 $a\times(b\oplus c)=(a\times b)\oplus(a\times c)$。

5. 求出 $n=12$ 时，格 (S_n,D) 的所有子格。

解：(S_{12},D) 的哈斯图如图所示



其子格分别为

$(\{1,2,3,6\},D)$，$(\{2,4,6,12\},D)$，$(\{1,2,4,12\},D)$，$(\{1,3,6,12\},D)$，$(\{1,3,4,12\},D)$，$(\{1,2,6,12\},D)$，$(\{1,2,3,6,12\},D)$，$(\{1,2,4,6,12\},D)$，$(\{1,2\},D)$，$(\{1,4\},D)$，$(\{1,6\},D)$，$(\{1,3\},D)$，$(\{1,12\},D)$，$(\{2,4\},D)$，$(\{2,6\},D)$，$(\{2,12\},D)$，$(\{3,6\},D)$($\{3$，

$12\}, D)$，$(4,12), D$，$(\{6,12\}, D)$，$(\{1,3,6\}, D)$，$(\{1,2,4\}, D)$，$(\{1,4,12\}, D)$，$(\{1,3,12\}, D)$，$(\{1,2,12\}, D)$，$(\{1,2,6\}, D)$，$(\{2,4,12\}, D)$，$(\{1,6,12\}, D)$，$(\{2,6,12\}, D)$，$(\{3,6,12\}, D)$，另外，由 S_n 中每一个元素自身以及 S_n 也可组成 S_n 的子格。

6. 证明：在格中，若 $a \leqslant b \leqslant c$，则有 $a \oplus b = b \times c$ 以及 $(a \times b) \oplus (b \times c) = b = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$。

证明：若 $a \leqslant b \leqslant c$，则有 $a \oplus b = b$，$b \times c = b$，所以 $a \oplus b = b \times c$。

又 $a \times b = a$，$b \times c = b$，所以 $(a \times b) \oplus (b \times c) = a \oplus b = b$，$a \oplus b = b$，$a \oplus c = c$，所以 $(a \oplus b) \times (a \oplus c) = b \times c = b$，故有 $(a \times b) \oplus (b \times c) = b = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$。

7. 证明：在格中，若 $a \leqslant b$，且 $c \leqslant d$，则有

$$a \times c \leqslant b \times d, a \oplus c \leqslant b \oplus d$$

证明：因为 $a \times c \leqslant a$，$a \times c \leqslant c$，又由 $a \leqslant b$，$c \leqslant d$，有 $a \times c \leqslant b$，$a \times c \leqslant d$，即 $a \times c$ 是 b 和 d 的下界，故 $a \times c \leqslant b \times d$。

同理可证 $a \oplus c \leqslant b \oplus d$。

8. 证明：在格中，对任意元素 a, b, c，有

$$(a \times b) \oplus (c \times d) \leqslant (a \oplus c) \times (b \oplus d)$$

$$(a \times b) \oplus (b \times c) \oplus (c \times a) \leqslant (a \oplus b) \times (b \oplus c) \times (c \oplus a)$$

证明：因为 $a \times b \leqslant a \leqslant a \oplus c$，$a \times b \leqslant b \leqslant b \oplus d$，即 $a \times b$ 是 $a \oplus c$ 与 $b \oplus d$ 的一个下界，故 $a \times b \leqslant (a \oplus c) \times (b \oplus d)$，同理 $c \times d \leqslant (a \oplus c) \times (b \oplus d)$，说明 $(a \oplus c) \times (b \oplus d)$ 是 $a \times b$ 与 $c \times d$ 的上界，于是有

$$(a \times b) \oplus (c \times d) \leqslant (a \oplus c) \times (b \oplus d)$$

因为 $a \times b \leqslant a \leqslant a \oplus b$，$a \times b \leqslant b \leqslant b \oplus c$，于是有 $a \times b \leqslant (a \oplus b) \times (b \oplus c)$，又 $a \times b \leqslant a \leqslant c \oplus a$ 故有

$$a \times b \leqslant (a \oplus b) \times (b \oplus c) \times (c \oplus a)$$

同理可证，

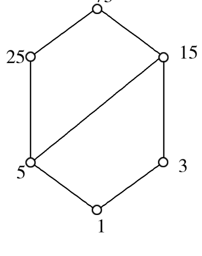
$$b \times c \leqslant (a \oplus b) \times (b \oplus c) \times (c \oplus a)$$

$$c \times a \leqslant (a \oplus b) \times (b \oplus c) \times (c \oplus a)$$

于是有

$(a \times b) \oplus (b \times c) \oplus (c \times a) \leqslant (a \oplus b) \times (b \oplus c) \times (c \oplus a)$。

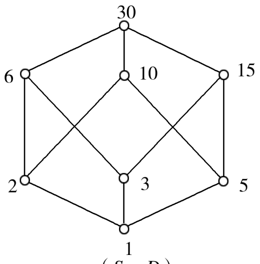
9. 设格为 (S_n, D)，当 $n = 75$ 时，求每个元素的余元素。



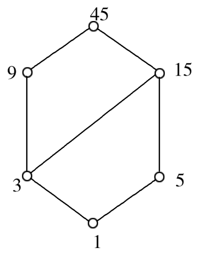
解：(S_{75}, D) 的哈斯图如右图所示，1 与 75 互为余元素，3 与 25 互为余元素，而 5，15 没有余元素。

10. 说明当 $n = 30$ 与 $n = 45$ 时，两个格 (S_{30}, D) 和 (S_{45}, D) 哪个是有余的，哪个是分配的。

解：(S_{30}, D)与(S_{45}, D)的哈斯图分别如下：



(S_{30}, D)



(S_{45}, D)

皆不是有余格，但皆是分配格。

11. 证明：在有余分配格$(L, \oplus, \times)$中，对任意 $a, b \in L$，有

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \times b' = 0$$

$$b' \leqslant a' \Leftrightarrow a' \oplus b = 1$$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow b' \leqslant a'$$

证明：(1) $\Rightarrow$ 由 $a \leqslant b$，有 $a \times b = a$，则

$$\begin{aligned} a \times b' &= (a \times b) \times b' \\ &= a \times (b \times b') \\ &= a \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ 由 $a \times b' = 0$ 及分配律，有

$$\begin{aligned} b &= b \oplus 0 \\ &= b \oplus (a \times b') \\ &= (b \oplus a) \times (b \oplus b') \\ &= (b \oplus a) \times 1 \\ &= b \oplus a \end{aligned}$$

则 $a \leqslant b$。

(2) $\Rightarrow$ 由 $b' \leqslant a'$及(1)，有 $b' \times (a')' = 0$，于是$(b' \times a)' = b \oplus a' = 0' = 1$，即 $b \oplus a' = 1$。

$\Leftarrow$ 由 $a' \oplus b = 1$，有$(b \oplus a')' = 1'$，即 $b' \times a = 0$，$b' \times (a')' = 0$，由(1)，有 $b' \leqslant a'$。

(3) $\Rightarrow$ 若 $a \leqslant b$，则 $a \times b = a$，故$(a \times b)' = a'$，即 $a' \oplus b' = a'$，所以 $b' \leqslant a'$。

$\Leftarrow$ 若 $b' \leqslant a'$，则 $b' \times a' = b'$，故$(b' \times a')' = (b')' = b$，即 $b \oplus a = b$，所以 $a \leqslant b$。

12. 证明三个元素以上的链不是有余格。

证明：设$(L, \leqslant)$是一个链，且$|L| \geqslant 3$。

对任意的 $x \in L$，$x \neq 1$，$x \neq 0$，如果 x 有余元，设 y 是 x 的余元，又因为 L 是链，故有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$。

若 $x \leqslant y$，则 $x \times y = x$，与 $x \times y = 0 \neq x$ 矛盾。

若 $y \leqslant x$，则 $x \oplus y = x$，与 $x \oplus y = 1 \neq x$ 矛盾。

因此元素 x 不存在余元，故$(L,\leqslant)$不是有余格。

13. 证明一个格是分配格的充要条件是：

$$(a\times b)\oplus(b\times c)\oplus(c\times a)=(a\oplus b)\times(b\oplus c)\times(c\oplus a)$$

证明：必要性，设$(L,\leqslant)$是分配格，则对任意的 $a,b,c\in L$，有

$$\begin{aligned}
&(a\times b)\oplus(b\times c)\oplus(c\times a)\\
=&(b\times(a\oplus c))\oplus(c\times a)\\
=&(b\oplus(c\times a))\times((a\oplus c)\oplus(c\times a))\\
=&(b\oplus c)\times(b\oplus a)\times(a\oplus c\oplus(c\times a))\\
=&(a\oplus b)\times(b\oplus c)\times(c\oplus a)。
\end{aligned}$$

充分性，对任意的 $a,b,c\in L$，令

$a'=(a\oplus b)\times(a\oplus c),b'=b\oplus c,c'=a$，

则有 $(a'\oplus b')\oplus(b'\times c')\oplus(c'\times a')$

$$\begin{aligned}
&=((a\oplus b)\times(a\oplus c)\times(b\oplus c))\oplus((b\oplus c)\times a)\oplus(a\times(a\oplus b)\times(a\oplus c))\\
&=(a\times b)\oplus(b\times c)\oplus(c\times a)\oplus((b\oplus c)\times a)\oplus a\\
&=(a\times b)\oplus(b\times c)\oplus(c\times a)\oplus a\\
&=a\oplus(b\times c),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a'\oplus b')\times(b'\oplus c')\times(c'\oplus a')\\
=&(((a\oplus b)\times(a\oplus c))\oplus b\oplus c)\times(b\oplus c\oplus a)\times(a\oplus((a\oplus b)\times(a\oplus c)))\\
=&(((a\oplus b)\times(a\oplus c))\oplus b\oplus c)\times(a\oplus b\oplus c)\times(a\oplus b)\times(a\oplus c)))\\
=&(((a\oplus b)\times(a\oplus c))\oplus(b\oplus c))\times((a\oplus b)\times(a\oplus c))\\
=&(a\oplus b)\times(a\oplus c),
\end{aligned}$$

所以 $a\oplus(b\times c)=(a\oplus b)\times(a\oplus c)$，因此$(L,\leqslant)$是分配格。

14. 在有界分配格中，证明所有有余元素的那些元素组成的集合形成一个子格。

证明：设在有界分配格中具有余元的元素所组成的集合为 S，对任意的 $a,b\in S$，有：

$$\begin{aligned}
&(a\oplus b)\oplus(a'\times b')\\
=&(a\oplus b\oplus a')\times(b\oplus a\oplus b')\\
=&(b\oplus 1)\times(a\oplus 1)\\
=&1\times 1=1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a\oplus b)\times(a'\times b')\\
=&(a\times a'\times b')\oplus(b\times a'\times b')\\
=&(0\times b')\oplus(0\times a')\\
=&0\oplus 0=0,
\end{aligned}$$

即 $a'\times b'$是 $a\oplus b$ 的余元，故 $a\oplus b\in S$。

同理可证，$a'\oplus b'$是 $a\times b$ 的余元，故 $a\times b\in S$，因此，S 是子格。

15. 证明下列布尔恒等式：

(1) $a+(\bar{a}\cdot b)=a+b$；

(2) $a\cdot(\bar{a}+b)=a\cdot b$；

(3) $(a\cdot b)+(a\cdot\bar{b})=a$；

(4) $(a\cdot b\cdot c)+(a\cdot b)=a\cdot b$。

证明：(1) $a+(\bar{a}\cdot b)=(a+\bar{a})\cdot(a+b)=1\cdot(a+b)=a+b$；

(2) $a\cdot(\bar{a}+b)=(a\cdot\bar{a})+(a\cdot b)=0+(a\cdot b)=a\cdot b$；

(3) $(a\cdot b)+(a\cdot\bar{b})=a\cdot(b+\bar{b})=a\cdot 1=a$；

(4) 由吸收律$(a\cdot b\cdot c)+(a\cdot b)=a\cdot b$。

16. 设$(B,+,\cdot,\overline{},0,1)$是布尔代数，$a,b,c\in B$，证明：

(1) $a=b\Leftrightarrow a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=0$；

(2) $a=0\Leftrightarrow a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=b$；

(3) $(a+\bar{b})\cdot(b+\bar{c})\cdot(c+\bar{a})=(\bar{a}+b)\cdot(\bar{b}+c)\cdot(\bar{c}+a)$；

(4) $(a+b)\cdot(\bar{a}+c)=a\cdot c+\bar{a}\cdot b+b\cdot c$；

(5) $a\leqslant b\Rightarrow a+b\cdot c=b(a+c)$。

证明：(1) $\Rightarrow$ 若$a=b$，则$a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=a\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot a=0+0=0$。

$\Leftarrow$ $a=a+0=a+a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=a+\bar{a}\cdot b=a+b$，

$b=b+0=b+a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=b+\bar{a}\cdot b+a\cdot\bar{b}=b+a\cdot\bar{b}=a+b$，所以$a=b$。

(2) $\Rightarrow$ 若$a=0$，则$a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=0\cdot\bar{b}+\bar{0}\cdot b=0+b=b$。

$\Leftarrow$ 若$a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=b$，则

$b\bar{b}=0=(a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b)\bar{b}$

$=a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{b}$

$=a\cdot\bar{b}$，

$ab=a\cdot(a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b)$

$=a\cdot\bar{b}+a\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}$

$=a\cdot\bar{b}$。

又$0=0+0=a\cdot\bar{b}+a\cdot b=a(b+\bar{b})=a\cdot 1=a$，即$a=0$。

(3) $(a+\bar{b})\cdot(b+\bar{c})\cdot(c+\bar{a})$

$=((a+\bar{b})\cdot b+(a+\bar{b})\cdot\bar{c})\cdot(c+\bar{a})$

$=(a\cdot b+\bar{b}\cdot b+a\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c})\cdot(c+\bar{a})$

$=a\cdot b\cdot c+a\cdot\bar{c}\cdot c+\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot c+a\cdot b\cdot\bar{a}+a\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}$

$=a\cdot b\cdot c+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$，

$(\bar{a}+b)\cdot(\bar{b}+c)\cdot(\bar{c}+a)$

$=((\bar{a}+b)\cdot\bar{b}+(\bar{a}+b)\cdot c)\cdot(\bar{c}+a)$

$=(\bar{a}\cdot\bar{b}+b\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot c+b\cdot c)\cdot(\bar{c}+a)$

$=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot c\cdot\bar{c}+b\cdot c\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot b\cdot a+\bar{a}\cdot c\cdot a+b\cdot c\cdot a$

$=a\cdot b\cdot c+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$,

故有$(a+\bar{b})\cdot(b+\bar{c})\cdot(c+\bar{a})=(\bar{a}+b)\cdot(\bar{b}+c)\cdot(\bar{c}+a)$。

(4) $(a+b)\cdot(\bar{a}+c)=(a+b)\cdot\bar{a}+(a+b)\cdot c$

$=a\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{a}+a\cdot c+b\cdot c$

$=b\cdot\bar{a}+a\cdot c+b\cdot c$。

(5) 若 $a\leqslant b$,则 $a+b=b$,于是有

$$a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c)=b\cdot(a+c)$$

17. 证明:设$<L,\leqslant>$是格,对任意的 $a,b,c\in L$,有$((a\times b)\oplus(a\times c))\times((a\times b)\oplus(b\times c))=a\times b$。

证明:对任意的 $a,b,c\in L$,有 $a\times b\leqslant(a\times b)\oplus(a\times c)$,$a\times b\leqslant(a\times b)\oplus(b\times c)$,所以 $a\times b\leqslant((a\times b)\oplus(a\times c))\times((a\times b)\oplus(b\times c))$。

$a\times b\leqslant a$,$a\times c\leqslant a$,故$(a\times b)\oplus(a\times c)\leqslant a$,同理可得$(a\times b)\oplus(b\times c)\leqslant b$,所以$((a\times b)\oplus(a\times c))\times((a\times b)\oplus(b\times c))\leqslant a\times b$,因此 $a\times b=((a\times b)\oplus(a\times c))\times((a\times b)\oplus(b\times c))$。

18. 设$\oplus$,$\times$是定义在集合 A 上的二元运算,若运算$\oplus$,$\times$满足吸收性,则$\oplus$,$\times$满足幂等性。

证明:对任意的 $a,b\in A$,由吸收性,有

$$a\oplus(a\times b)=a$$

$$a\times(a\oplus b)=a$$

于是有

$$a\oplus a=a\oplus(a\times(a\oplus b))=a$$

$$a\times a=a\times(a\oplus(a\times b))=a$$

19. 设$<L,\oplus,\times>$是有限格,$g:L\to L$ 且 g 为满射,若对任意的 $a,b\in L$,有 $g(a\oplus b)=g(a)\oplus g(b)$,则存在 $e\in L$,使得 $g(e)=e$。

证明:假设对任意的 $a\in L$,有 $g(a)\neq a$,由 L 是有限集和 g 为满射,则 g 为双射,不妨设 $L=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,且 $g(a_1)=a_2$,$g(a_2)=a_3$,$\cdots$,$g(a_{n-1})=g(a_n)$,$g(a_n)=a_1$,于是

$$\begin{aligned}g(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n)&=g(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_{n-1})\oplus g(a_n)\\&=\cdots\\&=g(a_1)\oplus g(a_2)\oplus\cdots\oplus g(a_n)\\&=a_2\oplus a_3\oplus\cdots\oplus a_n\oplus a_1\\&=a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n\end{aligned}$$

故存在 $a=a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n\in L$,有 $g(a)=a$,与假设矛盾,所以必存在 $e\in L$,使 $g(e)$

$=e$。

20. 设 f 是从 A 到 B 的入射，令 $S=\{y\mid y=f(x),x\in\rho(A)\}$，证明：$<S,\subseteq>$ 是 $<\rho(B),\subseteq>$ 的子格。

证明：对任意的 $A_1,A_2\in\rho(A)$，有 $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$，又由于 f 是入射，故 $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$。

对任意的 $S_1,S_2\in S$，存在 $A_1,A_2\in\rho(A)$，使得 $S_1=f(A_1)$，$S_2=f(A_2)$ 故有

$$S_1\cup S_2=f(A_1)\cup f(A_2)=f(A_1\cup A_2)$$
$$S_1\cap S_2=f(A_1)\cap f(A_2)=f(A_1\cap A_2)$$

则 $S_1\cap S_2,S_1\cup S_2\in S$，因此 $<S,\subseteq>$ 是 $<\rho(B),\subseteq>$ 的子格。

21. 证明：有限格必是有界格。

证明：设 $<L,\oplus,\times>$ 是有限格，不妨设

$$L=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

则对任意的 $a_i\in L(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$a_i\leqslant a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$$
$$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n\leqslant a_i$$

所以最大元为 $a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n$，最小元为 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$，故 $<L,\oplus,\times>$ 是有界格。

22. 证明：一个格 $<L,\leqslant>$ 是分配格当且仅当对任意的 $a,b,c\in L$，有 $(a\oplus b)\times c\leqslant a\oplus(b\times c)$。

证明：必要性，若 $<L,\leqslant>$ 是分配格，对任意的 $a,b,c\in L$，由 $a\times c\leqslant a$，有 $(a\oplus b)\times c=(a\times c)\oplus(b\times c)\leqslant a\oplus(b\times c)$。

充分性，对任意的 $a,b,c\in L$，有

$$\begin{aligned}(a\oplus b)\times c&=((b\oplus a)\times c)\times c\\&\leqslant(b\oplus(a\times c))\times c\\&=((a\times c)\oplus b)\times c\\&\leqslant(a\times c)\oplus(b\times c)。\end{aligned}$$

又 $a\leqslant a\oplus b$，$b\leqslant a\oplus b$，所以 $a\times c\leqslant(a\oplus b)\times c$，$b\times c\leqslant(a\oplus b)\times c$，于是 $(a\oplus b)\times c=(a\times c)\oplus(b\times c)$，由对偶原理，得 $(a\times c)\oplus(b\times c)\leqslant(a\oplus b)\times c$，故 $(a\oplus b)\times c=(a\times c)\oplus(b\times c)$，所以 $<L,\leqslant>$ 是分配格。

23. 证明：格 $<\mathbf{Z},\max,\min>$ 是分配格。

证明：对任意的 $a,b,c\in\mathbf{Z}$，

$$\max(a,\min(b,c))=\begin{cases}\max(a,b)=\begin{cases}a,b\leqslant c,b\leqslant a\\b,b\leqslant c,a\leqslant b\end{cases}\\\max(a,c)=\begin{cases}a,c\leqslant b,c\leqslant a\\c,c\leqslant b,a\leqslant c\end{cases}\end{cases}$$

$$\min(\max(a,b),\max(a,c))=\begin{cases}\min(a,c)=a, b\leqslant a, a\leqslant c\\ \min(a,a)=a, b\leqslant a, c\leqslant a\\ \min(b,c)=\begin{cases}b, a\leqslant b, a\leqslant c, b\leqslant c\\ c, a\leqslant b, a\leqslant c, c\leqslant b\end{cases}\\ \min(b,a)=a, a\leqslant b, c\leqslant a\end{cases}$$

所以 $\max(a,\min(b,c))=\min(\max(a,b),\max(a,c))$。

用对偶原理,有 $\min(a,\max(b,c))=\max(\min(a,b),\min(a,c))$。

24. 设$<L,\leqslant>$是格,则$<L,\leqslant>$是模格的充要条件是对任意的 $a,b,c\in L$,有 $a\oplus(b\times(a\oplus c))=(a\oplus b)\times(a\oplus c)$。

证明:必要性,对任意的 $a,b,c\in L$,若 $a\leqslant c$,则有

$$\begin{aligned}a\oplus(b\times(a\oplus c))&=a\oplus(b\times c)\\&=(a\oplus b)\times(a\oplus c)\\&=c\times(a\oplus b),\end{aligned}$$

即 $a\oplus(b\times c)=c\times(a\oplus b)$,所以$<L,\leqslant>$是模格。

充分性,若$<L,\leqslant>$是模格,则对任意的 $a,b,c\in L$,因为 $a\leqslant a\oplus c$,所以 $a\oplus(b\times(a\oplus c))=(a\oplus c)\times(a\oplus b)$。

25. 设$<L,\leqslant>$是模格,当且仅当 L 中不存在适合下述条件的元素 u,v,w

$$v<u, u\oplus w=v\oplus w, u\times w=v\times w$$

证明:必要性,假设 L 中存在满足上述条件的三个元素 u,v,w,因为 $v<u$,且

$$u\times(w\oplus v)=u\times(w\oplus u)=u$$

$$v\oplus(w\times u)=v\oplus(w\times v)=v$$

故有 $v\oplus(w\times u)<u\times(w\oplus v)$。

由 $v<u$ 及 L 是模格,应有

$$v\oplus(w\times u)=u\times(w\oplus v)$$

产生矛盾,假设不成立。

充分性,假设$<L,\leqslant>$不是模格,则存在 $a,b\in L$,满足 $a\leqslant b$,且 $a\oplus(b\times c)\neq b\times(a\oplus c)$

而由定理 6.2.3,有 $a\oplus(b\times c)\leqslant(a\oplus b)\times(a\oplus c)$

$$=b\times(a\oplus c),$$

即 $a\oplus(b\times c)<b\times(a\oplus c)$。

令 $v=a\oplus(b\times c), u=b\times(a\oplus c), w=c$,

$$\begin{aligned}\text{有 } u\times w&=(b\times(a\oplus c))\times c\\&=b\times((a\oplus c)\times c)\\&=b\times c=(b\times c)\times c\\&\leqslant((b\times c)\oplus a)\times c\end{aligned}$$

$= v \times w$,

即 $u \times w \leqslant v \times w$。

由 $v < u$,故有 $v \times w \leqslant u \times w$,所以 $u \times w = v \times w$。

同理可证,$u \oplus w = v \oplus w$。

即存在 $u, v, w \in L$,满足

$$v < u, u \times w = v \times w, u \oplus w = v \oplus w$$

与题设矛盾。所以$<L, \leqslant>$是模格。

26. 分配格一定是模格。

证明:设$<L, \leqslant>$是分配格,对任意的 $a, b, c \in L$,如果 $a \leqslant b$,则 $a \oplus b = b$,可是

$$\begin{aligned} a \oplus (b \times c) &= (a \oplus b) \times (a \oplus c) \\ &= b \times (a \oplus c) \end{aligned}$$

所以$<L, \leqslant>$是模格。

27. 证明:具有两个或两个以上元素的格中不存在以自身为余元的元素。

证明:设$<L, \oplus, \times>$是有界格,且 L 中至少有两个元素。

若$|L| = 2$,即 $L = \{0, 1\}$,而 $0' = 1, 1' = 0$,所以 L 中不存在以自身为余元的元素。

若 L 中至少有三个元素,假设存在元素 $a \in L, a \neq 0, a \neq 1$,使得 $a \oplus a = 1, a \times a = 0$。

而 $a = a \oplus a = a \times a$,则 $a = 0 = 1$,矛盾。

所以 L 中不存在以自身为余元的元素。

28. 设$<L, \leqslant>$是分配格,$a, b \in L, a < b, B = \{x \mid x \in L, a \leqslant x \leqslant b\}$,$f: L \to B$,对任意的 $x \in L$,$f(x) = (x \oplus a) \times b$,证明:$f$ 是从 L 到 B 的同态映射。

证明:对任意的 $x, y \in L$,

$$\begin{aligned} f(x \oplus y) &= ((x \oplus y) \oplus a) \times b \\ &= (x \oplus y \oplus a) \times b \\ &= (x \times b) \oplus (y \times b) \oplus (a \times b). \end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned} f(x) \oplus f(y) &= ((x \oplus a) \times b) \oplus ((y \oplus a) \times b) \\ &= (x \times b) \oplus (a \times b) \oplus (y \times b) \oplus (a \times b) \\ &= (x \times b) \oplus (y \times b) \oplus (a \times b), \end{aligned}$$

所以 $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$。

同理可证,$f(x \times y) = f(x) \times f(y)$,因此,$f$ 是从 L 到 B 同态映射。

29. 设$<L, \leqslant>$是模格,$a, b \in L$,令 $X = \{x \mid x \in L$,且 $a \times b \leqslant x \leqslant a\}$,$Y = \{y \mid y \in L$,且 $b \leqslant y \leqslant a \oplus b\}$,则下面的两个映射:$x \to x \oplus b (x \in X)$,$y \to y \times a (y \in Y)$,是 X 和 Y 之间的同构。

证明:设 $f: x \to x \oplus b (x \in X)$,$g: y \to y \times a (y \in Y)$,由于 $a \times b \leqslant x \leqslant a$,所以$(a \times b) \oplus b \leqslant x \oplus b \leqslant a \oplus b$,即 $b \leqslant f(x) \leqslant a \oplus b$,则 $f(x) \in Y$,故 f 是从 X 到 Y 的映射,同理可证,g 是从 Y 到 X 的映射。

对任意的 $x \in X$，有

$$
\begin{aligned}
g \cdot f(x) &= g(f(x)) \\
&= g(x \oplus b) \\
&= (x \oplus b) \times a \\
&= x \oplus (a \times b) \\
&= x = I_x(x),
\end{aligned}
$$

即 $g \cdot f = I_x$，所以 g 是 f 的左逆。

对任意的 $y \in Y$，则有

$$
\begin{aligned}
f \cdot g(y) &= f(g(y)) \\
&= f(y \times a) \\
&= (y \times a) \oplus b \\
&= y \times (a \oplus b) \\
&= y = I_Y(y),
\end{aligned}
$$

即 $f \cdot g = I_Y$，所以 g 是 f 的右逆，因此，f，g 都是双射，且 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$。

对任意的 $x_1, x_2 \in X$，

$$
\begin{aligned}
f(x_1 \oplus x_2) &= x_1 \oplus x_2 \oplus b \\
&= x_1 \oplus b \oplus x_2 \oplus b \\
&= f(x_1) \oplus f(x_2)。
\end{aligned}
$$

对任意的 $x_1, x_2 \in X$，因为 g 是双射，则存在唯一的 $y_1, y_2 \in Y$，有 $x_1 = g(y_1)$，$x_2 = g(y_2)$，于是 $y_1 = f(x_1)$，$y_2 = f(x_2)$，有

$$
\begin{aligned}
f(x_1 \times x_2) &= f(g(y_1) \times g(y_2)) \\
&= f(y_1 \times a \times y_2 \times a) \\
&= f(y_1 \times y_2 \times a) \\
&= f(g(y_1 \times y_2)) \\
&= f \circ g(y_1 \times y_2) \\
&= I_Y(y_1 \times y_2) \\
&= y_1 \times y_2 \\
&= f(x_1) \times f(x_2)。
\end{aligned}
$$

因此 f 是 X 到 Y 的同构映射，则 f 的逆映射 g 就是从 Y 到 X 的同构映射。

30. 设 f 是格 $<\rho(S), \cup, \cap>$ 上的一个格自同态，任取 $a \in \rho(S)$，令

$$R(a) = \{b \mid f(b) = a, b \in \rho(S)\}$$

证明 $<R(a), \cup, \cap>$ 是 $<\rho(S), \cup, \cap>$ 的子格。

证明：对任意的 $x, y \in R(a)$，有

$$f(x) = a, f(y) = a$$

则

$$f(x\cup y)=f(x)\cup f(y)=a\cup a=a$$
$$f(x\cap y)=f(x)\cap f(y)=a\cap a=a$$

于是 $x\cup y,x\cap y\in R(a)$，所以$<R(a),\cup,\cap>$是$<\rho(S),\cup,\cap>$的子格。

31. 设$<L,\oplus,\times>$和$<K,\vee,\wedge>$是两个格，g 是从 L 到 K 的映射，若对任意的 $x,y\in L$，当 $x\leqslant_L y$ 时，就有 $g(x)\leqslant_K g(y)$，则称 g 是保序映射。如果 g 是双射，证明 g 是同构映射的充要条件是 g 与 g^{-1} 是保序映射。

证明：必要性，对任意的 $x_1,x_2\in L$，若 $x_1\leqslant_L x_2$，则 $x_1\times x_2=x_1$，于是有

$$g(x_1)=g(x_1\times x_2)=g(x_1)\wedge g(x_2)$$

故 $g(x_1)\leqslant_K g(x_2)$，所以 g 是保序映射。

对任意的 $y_1,y_2\in K$，因为 g 是双射，则存在 $x_1,x_2\in L$，使得 $g(x_1)=y_1,g(x_2)=y_2$，于是有 $x_1=g^{-1}(y_1),x_2=g^{-1}(y_2)$，则

$$\begin{aligned}g^{-1}(y_1\wedge y_2)&=g^{-1}(g(x_1)\wedge g(x_2))\\&=g^{-1}(g(x_1\times x_2))\\&=g^{-1}g(x_1\times x_2)=x_1\times x_2\\&=g^{-1}(y_1)\times g^{-1}(y_2),\\g^{-1}(y_1\vee y_2)&=g^{-1}(g(x_1)\vee g(x_2))\\&=g^{-1}(g(x_1\oplus x_2))\\&=g^{-1}g(x_1\oplus x_2)\\&=x_1\oplus x_2\\&=g^{-1}(y_1)\oplus g^{-1}(y_2)。\end{aligned}$$

当 g 是双射时，g^{-1} 也是双射，所以 g^{-1} 是从$<K,\vee,\wedge>$到$<L,\oplus,\times>$的同构映射。

对任意的 $y_1,y_2\in K$，若 $y_1\leqslant_K y_2$，则 $y_1\wedge y_2=y_1$，于是有

$$g^{-1}(y_1)=g^{-1}(y_1\wedge y_2)=g^{-1}(y_1)\times g^{-1}(y_2)$$

故 $g^{-1}(y_1)\leqslant_L g^{-1}(y_2)$，所以 g^{-1} 是保序映射。

充分性，对任意的 $x_1,x_2\in L$，有 $x_1\leqslant_L x_1\oplus x_2,x_2\leqslant_L x_1\oplus x_2$，因为 g 是保序映射，故有

$$g(x_1)\leqslant_K g(x_1\oplus x_2),g(x_2)\leqslant_K g(x_1\oplus x_2)$$

所以 $g(x_1)\vee g(x_2)\leqslant_K g(x_1\oplus x_2)$。因为 $g(x_1)\vee g(x_2)\in K$，而 g 是双射，则存在 $x\in L$，使得

$$g(x_1)\vee g(x_2)=g(x)。$$

由上式，有 $g(x_1)\leqslant_K g(x),g(x_2)\leqslant_K g(x)$，而 g^{-1} 是保序映射，故有

$$g^{-1}(g(x_1))\leqslant_L g^{-1}(g(x)),g^{-1}(g(x_2))\leqslant_L g^{-1}(g(x))$$

即　$x_1\leqslant_L x,x_2\leqslant_L x$，

所以 $x_1\oplus x_2\leqslant_L x$，由 g 是保序映射，有

$$g(x_1\oplus x_2)\leqslant_K g(x)=g(x_1)\vee g(x_2)。$$

则 $g(x_1\oplus x_2)=g(x_1)\vee g(x_2)$。

同理可证：$g(x_1\times x_2)=g(x_1)\wedge g(x_2)$。所以 g 是同构映射。

32. 设 $<B,+,\cdot,\overline{},0,1>$ 是布尔代数，如果在 B 上定义二元算 $*$ 为：$a*b=(a\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot b)$，证明：$<B,*>$ 是 Abel 群。

证明：(1)　由于 $\cdot$，$+$，$\overline{}$ 这三个运算在 B 上都是封闭的，所以运算 $*$ 在 B 上也是封闭的。

(2)　对任意的 $a,b,c\in B$，

$(a*b)*c$

$=((a\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot b))*c$

$=(((a\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot b))\cdot\bar{c}+(\overline{((a\cdot\bar{b})+(\bar{a})}\cdot b\cdot c)$

$=(a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})+(\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c})+((\bar{a}+b)\cdot(a+\bar{b})\cdot c)$

$=(a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})+(\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c})+(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c)+(a\cdot b\cdot c)$，

同理可得 $a*(b*c)=(a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})+(\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c})+(a\cdot b\cdot c)+(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c)$，所以 $(a*b)*c=a*(b*c)$，即运算 $*$ 是可结合的。

(3)　对任意的 $a,b\in B$，$a*b=(a\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot b)=(b\cdot\bar{a})+(\bar{b}\cdot a)=b*a$，所以运算 $*$ 是可交换的。

(4)　对任意的 $a\in B$，有 $a*0=0*a=(a\cdot\bar{0})+(\bar{a}\cdot 0)=a\cdot 1+0=a$，故 0 是 B 中关于运算 $*$ 的幺元。

(5)　对任意的 $a\in B$，有 $a*a=(a\cdot\bar{a})+(\bar{a}\cdot a)=0+0=0$，即关于运算 $*$，a 的逆元是 a。

因此，$<B,*>$ 是 Abel 群。

33. 设 $<B,+,\cdot,\overline{},0,1>$ 是布尔代数，如果在 B 上定义二元运算 $*$ 为：$a*b=(a\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot b)$，证明：$<B,*,\cdot>$ 是含幺交换环。

证明：由习题 32 知，$<B,*>$ 是 Abel 群，而运算 $\cdot$ 是封闭的、可交换的和可结合的。

对任意的 $a,b,c\in B$，有

$a\cdot(b*c)=a\cdot((b\cdot\bar{c})+(\bar{b}\cdot c))$

$=(a\cdot b\cdot\bar{c})+(a\cdot\bar{b}\cdot c)$，$(a\cdot b)*(a\cdot c)$

$=((a\cdot c)\cdot\overline{(a\cdot c)})+(\overline{(a\cdot b)}\cdot(a\cdot c))$

$=(a\cdot b\cdot(\bar{a}+\bar{c}))+((\bar{a}+\bar{b})\cdot a\cdot c)$

$=(a\cdot b\cdot\bar{c})+(a\cdot\bar{b}\cdot c)$，

所以 $a\cdot(b*c)=(a\cdot b)*(a\cdot c)$，同理可证，$(b*c)\cdot a=(b\cdot a)*(c\cdot a)$，即运算 $\cdot$

对 $*$ 是可分配的。

对任意的 $a\in B$，有 $1\cdot a=a\cdot 1=a$，即 1 是关于运算 $\cdot$ 的幺元。

因此，$<B,*,\cdot>$ 是含幺交换环。

34. 设 $<B,\oplus,*>$ 是含幺环，且 $*$ 满足等幂律，在 B 中定义 $\cdot$，$+$，$\overline{}$ 如下：$a\cdot b=a*b$，$a+b=a\oplus b\oplus(a*b)$，$\bar{a}=a\oplus 1$，证明：$<B,+,\cdot,\overline{},0,1>$ 是布尔代数。

证明：(1) 对任意的 $a\in B$，由 $a*a=a$，有

$$
\begin{aligned}
(a\oplus a)*(a\oplus a)&=a\oplus a\\
&=(a*a)\oplus(a*a)\oplus(a*a)\oplus(a*a)\\
&=a\oplus a\oplus a\oplus a,
\end{aligned}
$$

故 $a\oplus a=0$。

对任意的 $a,b\in B$，有

$$
\begin{aligned}
a\oplus b&=(a\oplus b)*(a\oplus b)\\
&=(a*a)\oplus(a*b)\oplus(b*a)\oplus(b*b)\\
&=a\oplus(a*b)\oplus(b*a)\oplus b,
\end{aligned}
$$

故 $(a*b)\oplus(b*a)=0$，由 $a\oplus a=0$，又有 $(a*b)\oplus(a*b)=0$，即

$$(a*b)\oplus(b*a)=(a*b)\oplus(a*b)$$

所以 $a*b=b*a$，即运算 $*$ 是可交换的。

对任意的 $a,b\in B$，

$$
\begin{aligned}
a+b&=a\oplus b\oplus(a*b)\\
&=b\oplus a\oplus(b*a)\\
&=b+a,
\end{aligned}
$$

即运算 $+$ 是可交换的。

(2) 对任意的 $a,b,c\in B$，

$$
\begin{aligned}
a\cdot(b+c)&=a*(b\oplus c\oplus(b*c))\\
&=(a*b)\oplus(a*c)\oplus(a*b*c),(a\cdot b)+(a\cdot c)\\
&=(a*b)\oplus(a*c)\oplus(a*b*a*c)\\
&=(a*b)\oplus(a*c)\oplus(a*b*c),
\end{aligned}
$$

所以 $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$。

$$a+(b\cdot c)=a\oplus(b*c)\oplus(a*b*c),$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a+c)&=(a\oplus b\oplus(a*b))*(a\oplus c\oplus(a*c))\\
&=(a*a)\oplus(a*c)\oplus(a*a*c)\oplus(a*b)\oplus(b*c)\oplus(a*b*c)\oplus(a\\
&\quad *b*a)\oplus(a*b*c)\oplus(a*b*a*c)\\
&=a\oplus(b*c)\oplus(a*b*c),
\end{aligned}
$$

所以 $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$。

(3) 对任意的 $a\in B$，$a\cdot 1=a*1=a$，$a+0=a\oplus 0\oplus(a*0)=a\oplus 0=a$。

(4) 对任意的 $a\in B$，有 $\bar{a}=a\oplus 1\in B$，有

$$\begin{aligned} a\cdot\bar{a} &= a*(a\oplus 1)\\ &=(a*a)\oplus(a*1)\\ &=a\oplus a=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+\bar{a} &= a\oplus(a\oplus 1)\oplus(a*(a\oplus 1))\\ &=a\oplus a\oplus 1\oplus(a*a)\oplus(a*1)\\ &=1\oplus a\oplus a=1。 \end{aligned}$$

由亨廷顿公理，$<B,+,\cdot,\overline{\ \ },0,1>$是布尔代数。

35. 设 f 是从布尔代数$<A,+,\cdot,\overline{\ \ }>$到另一布尔代数$<B,\cup,\cap,\sim>$的映射，如果对任意的 $a,b\in A$，有 $f(a\cdot b)=f(a)\cap f(b)$（或 $f(a+b)=f(a)\cup f(b)$）和 $f(\bar{a})=\widetilde{f(a)}$，则 $f(a+b)=f(a)\cup f(b)$（或 $f(a\cdot b)=f(a)\cap f(b)$）。

证明：因为对任意的 $a,b\in A$，有 $f(a\cdot b)=f(a)\cap f(b)$，$f(\bar{a})=\widetilde{f(a)}$，所以

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(\overline{\overline{a+b}})=\widetilde{f(\overline{a+b})}\\ &=\widetilde{f(\bar{a}\cdot\bar{b})}=\widetilde{f(\bar{a})\cap f(\bar{b})}\\ &=\widetilde{f(\bar{a})}\cup\widetilde{f(\bar{b})}=f(\bar{\bar{a}})\cup f(\bar{\bar{b}})\\ &=f(a)\cup f(b)。 \end{aligned}$$

36. 设 $S=\{a,b,c\}$，$<\rho(S),\cup,\cap,\sim>$是一个布尔代数，$B=<\{0,1\},\vee,\wedge,\overline{\ \ }>$是一个两元素布尔代数，设 f 是从 $\rho(S)$到 B 的映射，使得对任意的 $A\in\rho(S)$，定义

$$f(A)=\begin{cases}1, & 若\ b\in A\\ 0, & 若\ b\notin A\end{cases}$$

证明 f 是一个同态映射。

证明：由习题 35 知，只要证明：对任意的 $A,B\in\rho(S)$，

$$f(A\cap B)=f(A)\wedge f(B)$$

$$f(\widetilde{A})=\overline{f(A)}$$

那么 f 就是一个同态映射了。

对任意的 $A,B\in\rho(S)$，若 $f(A\cap B)=1$，则 $b\in A$ 且 $b\in B$，于是 $f(A)=f(B)=1$，所以 $f(A)\wedge f(B)=1$，则有 $f(A\cap B)=f(A)\wedge f(B)$。

若 $f(A\cap B)=0$，则 $b\notin A\cap B$，有 $b\notin A$ 或 $b\notin B$，于是 $f(A)=0$ 或 $f(B)=0$，所以 $f(A)\wedge f(B)=0$，则有 $f(A\cap B)=f(A)\wedge f(B)$。

总之，有 $f(A\cap B)=f(A)\wedge f(B)$。

对任意的 $A\in\rho(S)$，若 $f(\widetilde{A})=1$ 则 $b\in\widetilde{A}$，即 $b\notin A$，于是 $f(A)=0$，故 $\overline{f(A)}=1$，所以 f

$(\widetilde{A})=\overline{f(A)}$。

若 $f(\widetilde{A})=0$ 则 $b\notin\widetilde{A}$，即 $b\in A$，于是 $f(A)=1$，故 $\overline{f(A)}=0$，所以 $f(\widetilde{A})=\overline{f(A)}$。

总之，有 $f(\widetilde{A})=\overline{f(A)}$。

综上所述，f 是同态映射。

37. 设 $<K,\wedge,\vee,'>$ $<L,\cup,\cap,\overline{}>$ 是两个布尔代数，f 是从 K 到 L 的满同态，即对于任意的 $x,y\in K$，有

$$f(x\vee y)=f(x)\cup f(y)$$
$$f(x\wedge y)=f(x)\cap f(y)$$
$$f(x')=\overline{f(x)}$$

证明：$f(0_K)=0_L$，$f(1_K)=1_L$，其中 0_K，0_L 和 1_K，1_L 分别是相应的布尔代数中的最小元和最大元。

证明：对任意的 $y\in L$，因为 f 是从 K 到 L 的满射，则必存在 $x\in K$，使得 $f(x)=y$，于是有

$$\begin{aligned} y\cup f(0_K)&=f(x)\cup f(0_K)=f(x\vee 0_K)\\ &=f(x)=y, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y\cap f(1_K)&=f(x)\cap f(1_K)=f(x\wedge 1_K)\\ &=f(x)=y, \end{aligned}$$

故有 $f(0_K)\leqslant y$ 和 $y\leqslant f(1_K)$。

由 y 的任意性，$f(0_K)$ 和 $f(1_K)$ 分别是 L 中的最小元和最大元。而布尔代数中的最小元和最大元是唯一的，因此，必有

$$f(0_K)=0_L,f(1_K)=1_L$$

自测题及答案(第三篇)

自测题一

(一) 判断题：每小题 2 分，共 20 分(判断下列各题是否正确，正确的在题后面的括号内画“√”号，错误的画“×”号)。

1. 设 S 是奇数的集合，则 S 关于数的乘法构成半群 。 (　　)

2. 设 S 是 4 的所有整数倍数集合，则 S 关于数的乘法是交换半群。 (　　)

3. 设 G 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的所有 n 阶对角阵做成的集合,则 G 关于矩阵的乘法是群。 (　　)

4. 有理数集合 $\mathbf{Q}$,关于数的乘法构成群。 (　　)

5. 设 S 是群 G 的非空子集,如果对任意 $x,y\in S$,都有 $xy\in S$,并且 $x^{-1}\in S$,则 S 是 G 是子群。 (　　)

6. 设 G 是非交换群,则对任意 $a,b\in G$,都有 $(ab)^3=a^3b^3$。 (　　)

7. 全体正有理数集合 $\mathbf{Q}^+$ 关于乘法是群。 (　　)

8. 设 G 是群,$a\in G$,则 a 的逆元的唯一的。 (　　)

9. 以 4 为模的剩余类加群 $(Z_4;+)$ 不是循环群。 (　　)

10. 设 a 是群 G 中的任一元素,a 的阶为 n,则 a 生成循环群为 H 为

$$H=\{a^0=e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$$ (　　)

(二)　单项选择题:每小题 2 分,共 12 分(从每小题给出的四个备选答案中,选出一个正确答案,并将正确答案的号码写在题后面的括号内)。

1. 设 G 是群,$a\in G$,a 的阶为无穷,k,l 是两个整数、当 $k\neq l$ 时,则(　　)。

A. $a^k\neq a^l$

B. 当 k 是 l 的倍数时,有 $a^k=a^l$

C. 仅当 k 与 l 不互质时,有 $a^k\neq a^l$

D. 上述情况均不一定

2. 设 H_1,H_2 都是 G 的子群,e_1,e_2,e 分别是 H_1,H_2,G 的单位元,则(　　)。

A. $e_1=e_2=e$　　　　B. $e_1\neq e_2$

C. $e_1=e_2\neq e$　　　　D. e_1,e_2,e 互不相同

3. 设 S 是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

的解向量的集合,关于 n 元向量的加法,则 S(　　)。

A. 不是群　　　　B. 是交换群

C. 是循环群　　　　D. 是非交换群

4. 设 S 是用 4 除余数是 1 的所有整数的集合,即

$$S=\{m\in\mathbf{Z}\mid m=4q+1,q\in\mathbf{Z}\}$$

关于数的乘法,则 S 是(　　)。

A. 群　　　　B. 无单位元的半群

C. 单位元的半群　　　　D. 既不是群,也不是半群

5. 在剩余类加群 $(Z_6;+)$ 中,3 的阶是(　　)。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

6. 剩余类加群(Z_8;+)的如下的4个子集,关于剩余类加法是(Z_8;+)的子群的有(　　)。

A. $\{\overline{0},\overline{4}\}$　　B. $\{\overline{1},\overline{3},\overline{5},\overline{7}\}$　　C. $\{\overline{0},\overline{3},\overline{5}\}$　　D. $\{\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{5}\}$

(三)　求出以6为模的剩余类加群(Z_6;+)中每个元素的阶,并找出它的一个2阶子群。(10分)

(四)　设n为任一自然数,$n\mathbf{Z}$表示n的一切整数倍组成的集合,即

$$n\mathbf{Z}=\{nl \mid l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$$

证明:($n\mathbf{Z}$;+)是整数加群的子群。(10分)

(五)　设$G=\left\{\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}\right\}$,

证明:G关于矩阵乘法是循环群。(10分)

(六)　设$G=\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$,则$G$关于数的乘法是群。(8分)

(七)　设$S=\left\{\begin{bmatrix}1 & \\ a & 1\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbf{R}\right\}$,

证明:S关于矩阵乘法是$\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$的子群。(10分)

(八)　指出置换群(S_3;·)的各元素的阶,并且找出S_3的所有2阶子群。(10分)

(九)　设G是群,$a\in G$,证明a与a^{-1}有相同的阶。(10分)

自测题二

(一)　判断题:每小题2分,共20分(判断下列各题是否正确,正确的在题后面的括号内画"√"号,错误的画"×"号)。

1. 设S是3的所有整数倍数的集合,则S关于数的加法是交换半群。　(　　)

2. 设$G=\{1,-1\}$,则G关于数的乘法是群。　(　　)

3. 设e是群G的单位元,$a\in G$,若$a^m=e$,则m是a的阶。　(　　)

4. 设G是群,则G中的消去律成立,即对任意$a,b,c\in G$,若$ab=ac$,则$b=c$,若$ba=ca$,则$b=c$。　(　　)

5. 设G是半群,如果G有单位元,则G一定是群。　(　　)

6. 设R表示非零实数组成的集合,则R关于数的乘法运算是群。　(　　)

7. 设e是群G的单位元,则e必在G的任一子群中,并且e也是G的任一子群的单位元群。　(　　)

8. 整数加群不是循环群。　(　　)

9. 用$\mathbf{N}$表示自然数的全体构成的集合,则$\mathbf{N}$关于数的乘法不是半群。　(　　)

10. 设 H 是群 G 的子群，$a\in H$，则 a 在 H 中的逆元就是 a 在 G 中的逆元。　　（　　）

（二）　单项选择题：每题 2 分，共 12 分（从每小题给出的四个备选答案中，选出一个正确答案，并将正确答案的号码写在题后面的括号内）。

1. 设 S 是非负整数集，则 S 关于数的乘法（　　）。

A. 是群　　B. 是有单位元的半群

C. 是无单位元的半群　　D. 不是群，也不是半群

2. 剩余类加群$(Z_8;+)$的生成元是（　　）。

A. $\bar{2}$　　B. $\bar{4}$　　C. $\bar{1}$　　D. 没有生成元

3. 设 $\mathbf{R}$ 为实数域，$S=\left\{\begin{bmatrix} a & \\ & a\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbf{R}\right\}$，则 S 关于矩阵乘法是（　　）。

A. 是群　　B. 是交换群

C. 非可换半群　　D. 有单位元的可换半群

4. 在置换群 S_3 中，元素 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$的阶是（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设 $S=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\mathbf{R}\}$，则 S 关于 n 元向量的加法（　　）。

A. 是非交换群　　B. 是交换群

C. 是循环群　　D. 是非可换半群

6. $\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$表示实数域 $\mathbf{R}$ 上的全体二阶方阵构成的集合，则 $\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$关于矩阵的乘法是（　　）。

A. 无单位元的半群　　B. 有单位元的半群

C. 群　　D. 可交换半群

（三）　在剩余类加群$(Z_8;+)$中，指出每个元素的逆元。(10 分)

（四）　设 $SL_2(\mathbf{R})=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})\mid \det\boldsymbol{A}=1\}$（$\det\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行列式），则 $SL_2(\mathbf{R})$关于矩阵的乘法是$(\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R});\cdot)$的子群。(10 分)

（五）　设 G 是群，$a,b\in G$，(1)若 $aa=ab$，则 $a=b$；　(2)若 $aa=a$ 则 $a=e$。(10 分)

（六）　设 G 是交换群，令

$$H=\{a\in G\mid a^5=e\}$$

证明：H 是 G 的子群。(10 分)

（七）　设 $A_3=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\right\}$，

证明：A_3 关于置换乘法是 S_3 的子群，并且是循环群。(10 分)

（八）　设 $S=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})\mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\}$，这里 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置，则 S 关于矩阵的加法是$(\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R});+)$的子群。(10 分)

（九） 设 e 是群 G 的单位元，$a\in G$，a 的阶为 k，若 $a^m=e$，则 k 整除 m。（8 分）

【自测题一答案】

（一） 判断题

1. √ 2. √ 3. × 4. × 5. √ 6. × 7. √ 8. √ 9. × 10. √

（二） 选择题

1. A 2. A 3. B 4. C 5. A 6. A

（三） $\bar{0}$ 的阶为 1； $\bar{1}$ 的阶为 6； $\bar{2}$ 的阶为 3；

$\bar{3}$ 的阶为 2； $\bar{4}$ 的阶为 3； $\bar{5}$ 的阶为 6。

$H=\{\bar{0},\bar{3}\}$是$(Z_6;+)$的一个 2 阶子群。

（四） 因为 $n=n\cdot 1\in n\mathbf{Z}$，故 $n\mathbf{Z}\neq\varnothing$，对任意 $nt_1,nt_2\in n\mathbf{Z}$，这里 $t_1,t_2\in\mathbf{Z}$，则有

$$nt_1+nt_2=n(t_1+t_2)\in n\mathbf{Z}$$

并且 nt_1 的逆元：$-nt_1=n(-t_1)\in n\mathbf{Z}$。由子群的充要条件知$(n\mathbf{Z};+)$是$(\mathbf{Z};+)$的子群。

（五） 设 $\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1\end{bmatrix}$，$G$ 的运算表如下

$\cdot$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{\sigma}$
$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{\sigma}$
$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{I}$

由表中知 G 关于矩阵乘法运算封闭，$\boldsymbol{I}$ 是单位元，$\boldsymbol{\sigma}$ 以自身为逆元，结合律成立，因此，G 关于矩阵乘法是群，并且是循环群，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 G 的生成元，即$(\boldsymbol{\sigma})=G=\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{\sigma}\}$。

（六） G 的运算表如下

$\cdot$	1	-1	i	$-$i
1	1	-1	i	$-$i
-1	-1	1	$-$i	i
i	i	$-$i	-1	1
$-$i	$-$i	i	1	-1

由运算表知 G 关于乘法运算封闭，1 是它的单位元，-1 的逆元是-1，i 的逆元是$-$i，$-$i 的逆元是 i，数的乘法适合结合律，故 G 是群，因为

$$\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1$$

因此 $G=(\mathrm{i})=\{\mathrm{i}^0=1,\mathrm{i},\mathrm{i}^2,\mathrm{i}^3\}$是循环群。

（七） 对任意 $\begin{bmatrix}1 & \\ a & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & \\ b & 1\end{bmatrix}\in S$，

$$\begin{bmatrix}1 & \\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ b & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \\ a+b & 1\end{bmatrix}\in S$$

$\begin{bmatrix}1 & \\ a & 1\end{bmatrix}$的逆元$\begin{bmatrix}1 & \\ -a & 1\end{bmatrix}\in S$，故 S 是$\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$的子群。

（八） $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$的阶为 1；$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$的阶为 2；

$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$的阶为 2；$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$的阶为 2；

$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$的阶为 3；$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$的阶为 3。

2 阶子群有：

$H_1\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\right\}$，

$H_2\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\right\}$，

$H_3\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\right\}$。

（九） 设 a 的阶为 k，

$$(a^{-1})^k=(a^{-1})^k a^k=(a^{-1}a)^k=e$$

假设有正整数 $t<k$，使$(a^{-1})^t=e$，那么

$$a^t=a^t\cdot(a^{-1})^t=(a\cdot a^{-1})^t=e$$

与 k 的最小性矛盾，因此 a^{-1} 的阶为 k。

【自测题二答案】

（一） 判断题

1.√ 2.√ 3.× 4.√ 5.× 6.√ 7.√ 8.× 9.× 10.√

（二） 单项选择题

1.B 2.C 3.D 4.C 5.B 6.B

（三） $\bar{0}$ 的逆元是 $\bar{0}$； $\bar{1}$ 的逆元是 $\bar{7}$；

$\bar{2}$ 的逆元是 $\bar{6}$； $\bar{3}$ 的逆元是 $\bar{5}$；

$\bar{4}$ 的负元是 $\bar{4}$； $\bar{5}$ 的逆元是 $\bar{3}$；

$\bar{6}$ 的逆元是 $\bar{2}$； $\bar{7}$ 的逆元是 $\bar{1}$；

（四） 因为$\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}\in SL_2(\mathbf{R})$，故$SL_2(\mathbf{R})\neq\varnothing$，对任意的$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in SL_2(\mathbf{R})$，由$\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}=1$，故$\boldsymbol{AB}\in SL_2(\mathbf{R})$，再由$\det\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det|\boldsymbol{A}|}=1$，故$\boldsymbol{A}^{-1}\in SL_2(\mathbf{R})$，因此$SL_2(\mathbf{R})$是$\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$的子群。

（五） （1）因为$aa=ab$，故$a^{-1}aa=a^{-1}ab$得$a=b$；

（2）由$aa=a=ae$及消去律知$a=e$。

（六） 因为$e^5=e$，所以$e\in H\neq\varnothing$。对任意$a,b\in H$，由$(ab)^5=a^5\cdot b^5=e$知$ab\in H$，再由

$$e=(a^{-1}a)^5=(a^{-1})^5\cdot(a^5)=(a^{-1})^5$$

知$a^{-1}\in H$，因此H是G的子群。

（七） 设$\boldsymbol{\sigma}_0=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\sigma}_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\sigma}_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$，列出它们的运算表如下：

	$\boldsymbol{\sigma}_0$	$\boldsymbol{\sigma}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_2$
$\boldsymbol{\sigma}_0$	$\boldsymbol{\sigma}_0$	$\boldsymbol{\sigma}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_2$
$\boldsymbol{\sigma}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_1$	$\boldsymbol{\sigma}_2$	$\boldsymbol{\sigma}_0$
$\boldsymbol{\sigma}_2$	$\boldsymbol{\sigma}_2$	$\boldsymbol{\sigma}_0$	$\boldsymbol{\sigma}_1$

由运算表知A_3中任意两个元素乘积还在A_3中，σ_0是单位元，$\boldsymbol{\sigma}_1$的逆元是$\boldsymbol{\sigma}_2$，$\boldsymbol{\sigma}_2$的逆元是$\boldsymbol{\sigma}_1$，因此A_3是S_3的子群。由$\boldsymbol{\sigma}_1^2=\boldsymbol{\sigma}_2$，$\boldsymbol{\sigma}_1^3=\boldsymbol{\sigma}_0$知$A_3=(\boldsymbol{\sigma}_1)=\{\boldsymbol{\sigma}_1^0=\boldsymbol{\sigma}_0,\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_1^2\}$，即$A_3$是循环群。

（八） 零阵$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\in S\neq\varnothing$，对任意$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in S$，由$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，知$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in S$，又由$(-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，故$-\boldsymbol{A}\in S$，因此$S$关于矩阵加法是$\boldsymbol{M}_2(\mathbf{R})$的子群。

（九） 用k除m得：$m=kq+r$，$0\leqslant r<k$，$q\in\mathbf{Z}$，因此$a^m=(a^k)^q\cdot a^r=a^r=e$，由$k$的最小性知$r=0$，即$k$整除$m$。

第四篇　数理逻辑

第七章　命题逻辑

一、内容提要

1. **命题及其表示法**

命题：具有确定真值的陈述句，称作命题。

真值：一个命题总具有一个"值"，称为真值，真值只有真和假两种，分别记为 T 和 F。

原子命题：不能分解为更简单命题的命题，称作原子命题。

复合命题：由原子命题、标点符号和联结词复合构成的命题，称作复合命题。

命题标识符：表示命题的符号。

命题常量：一个命题标识符表示确定的命题，该标识符称作命题常量。

命题变元：命题标识符如果仅是表示任意命题的位置标志，则称该标识符为命题变元。

原子变元：当命题变元表示原子命题时，该变元称作原子变元。

2. **联结词**

否定：设 P 为一个命题，P 的否定也是命题，记作$\neg P$。若 P 为 T，$\neg P$ 为 F；若 P 为 F，$\neg P$ 为 T。

合取：给定两个命题 P 和 Q，P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P \wedge Q$。$P \wedge Q$ 为 T 当且仅当 P 和 Q 同时为 T，在其他情况下，$P \wedge Q$ 为 F。

析取：给定两个命题 P 和 Q，P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P \vee Q$。$P \vee Q$ 为 F 当且仅当 P 和 Q 同时为 F，在其他情况下，$P \vee Q$ 为 T。

条件：给定两个命题 P 和 Q，其条件命题是一个复合命题，记作 $P \rightarrow Q$。$P \rightarrow Q$ 为 F 当且仅当 P 为 T，Q 为 F，在其他情况下，$P \rightarrow Q$ 为 T。

双条件：给定两个命题 P 和 Q，其双条件命题是一个复合命题，记作 $P \leftrightarrows Q$。$P \leftrightarrows Q$ 为 T 当且仅当 P 和 Q 的真值相同，在其他情况下，$P \leftrightarrows Q$ 为 F。

3. **命题公式**

命题公式(合式公式)：命题演算的合式公式规定为：

(1)　单个命题变元本身是一个合式公式；

(2) 如果 A 是合式公式，则$\neg A$ 是合式公式；

(3) 如果 A 和 B 是合式公式，则$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$和$(A \leftrightarrows B)$都是合式公式；

(4) 经过有限次使用规则(1)，(2)和(3)，所得到的由命题变元、联结词和圆括号所组成的字符串，是合式公式。

真值表：在命题公式中，对于分量指派真值的各种可能组合，就确定了这个命题公式的各种真值情况，把它汇列成表，就是命题公式的真值表。

优先次序：规定联结词运算的优先次序为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrows$。

重言式：给定一个命题公式，如果无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为 T，则称该命题公式为重言式或永真式。

矛盾式：给定一个命题公式，如果无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为 F，则称该命题公式为矛盾式或永假式。

4. **命题演算的等价式和蕴涵式**

逻辑相等：给定两个命题公式 A 和 B，设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为所有出现于 A 和 B 中的原子变元，若给 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 任一组真值指派，A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等价的或逻辑相等的，记作 $A \Leftrightarrow B$。

子公式：设 X 是合式公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式。

蕴涵式：设 P，Q 是合式公式，如果 $P \rightarrow Q$ 是一个重言式，则称 P 蕴涵 Q，记作 $P \Rightarrow Q$。

定理 7.4.1：设 X 是合式公式 A 的子公式，若 $X \Leftrightarrow Y$，将 A 中的 X 用 Y 来置换，所得到公式设为 B，则 $A \Leftrightarrow B$。

定理 7.4.2：设 A，B 是两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrows B$ 为重言式。

定理 7.4.3：设 A，B 是两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$。

5. **范式**

文字：原子或原子的否定称为文字。

子句：有限个文字的析取式称为子句。

短语：有限个文字的合取式称为短语。

析取范式：有限个短语的析取式称为析取范式。

合取范式：有限个子句的合取式称为合取范式。

极小项：设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 n 个原子，一个短语如果恰好包含所有这 n 个原子或其否定，且排列顺序与 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的顺序一致，则称此短语为关于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一个极小项。

极小项的性质：

(1) 每个极小项当其真值指派与编码相同时，其真值为 T，在其余 $2n-1$ 种指派下均为 F；

(2) 任意两个不同极小项的合取式永为 F；

(3) 全体极小项的析取式永为 T。

主析取范式：设公式 G 中所有不同原子为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，如果 G 的析取范式 G' 中的每个短语，都是关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一个极小项，则称 G' 为 G 的主析取范式。

定理 7.5.1：对于任意公式，都存在与之等价的析取范式和合取范式。

定理 7.5.2：对于任意公式 G，都存在与之等价的主析取范式。

定理 7.5.3：设公式 G,H 是关于原子 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的两个主析取范式，如果 G,H 不完全相同，则 G 与 H 不等价。

定理 7.5.4：对于任意公式，都存在唯一一个与之等价的主析取范式。

6. **推理理论**

有效结论：设 A,B 是两个命题公式，如果 $A\Rightarrow B$，则称 B 是 A 的有效结论，或称 B 可由 A 逻辑推出。

P 规则：前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

T 规则：在推导中，如果有一个或多个公式，重言蕴涵着公式 A，则公式 A 可以引入推导之中。

相容：设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为：$P_1,P_2,\cdots,P_n$，对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一些真值指派，如果能使 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值为 T，则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是相容的。

不相容：设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为：$P_1,P_2,\cdots,P_n$，如果对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的每一组真值指派，使得 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值均为 F，则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是不相容的。

直接证法：由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价式或蕴涵式，推演得到有效的结论。

间接证法：

(1) 要证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C$，只要证明 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 与 $\neg C$ 不相容。

(2) 要证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow(A\rightarrow B)$，如能证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\wedge A\Rightarrow B$，即证得 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow(A\rightarrow B)$ 称为 CP 规则。

二、习题与解

1. 判断下列语句哪些是命题，哪些不是命题，如果是命题，指出它的真值。

(1) 广东是中国的一个省。

(2) 秦皇岛是渤海湾的一个岛屿。

(3) 今天上午十点我到校上课，或去影院看电影。

(4) 我正在说谎。

(5) 我来上课,可你来干什么?

(6) 如果我掌握了英语、法语,那么学习其他欧洲语言就容易得多。

(7) $3+5\geqslant 9$。

(8) 她长得既不漂亮又不文雅。

(9) 天黑了,外面有狼,你还是在这里住一宿吧。

解:(1) 是,真值为 T。 (2) 是,真值为 T。

(3) 是,真值由具体情况唯一确定。 (4) 不是。

(5) 不是。 (6) 是,真值为 T。

(7) 是,真值为 F。 (8) 是,真值由具体情况唯一确定。

(9) 不是。

2.举例说明复合命题和原子命题。

解:上题中的(1),(2)是原子命题,(3)(6)是复合命题。

3.将下列复合命题分成若干原子命题。

(1) 天气炎热且正在下雨。

(2) 天气炎热但温度较低。

(3) 天正在下雨或温度较高。

(4) 老王或小李是革新者。

(5) 如果你不看电影,那么我也不看电影。

(6) 我既不看电视,也不外出,我在睡觉。

解:(1) P:天气炎热,Q:正在下雨,$P\wedge Q$。

(2) A:天气炎热,B:温度较低,$A\wedge B$。

(3) S:天正在下雨,T:温度较高,$S\vee T$。

(4) R:老王是革新者,L:小李是革新者,$R\vee L$。

(5) E:你看电影,F:我看电影,$\neg E\rightarrow\neg F$。

(6) A:我不看电视,B:我不外出,C:我在睡觉,$A\wedge B\wedge C$。

4.设命题 P,Q 的真值为 T,命题 R,S 的真值为 F,试确定下面命题的真值。

(1) $(P\wedge Q\wedge R)\vee\neg((P\vee Q)\wedge(R\vee S))$;

(2) $(\neg(P\wedge Q)\vee\neg R)\vee(((\neg R\wedge Q)\vee\neg R)\wedge S)$;

(3) $(\neg(P\wedge Q\vee\neg R))\vee((Q\leftrightarrows\neg R)\rightarrow(R\vee\neg S)$;

(4) $(P\vee(Q\rightarrow(R\wedge\neg P)))\leftrightarrows(Q\vee\neg S)$。

解:(1) T (2) T (3) T (4) T

5.设命题 P:天下雪;Q:我将去镇上;R:我有时间。以符号形式写出下列命题:

(1) 天不下雪;

(2) 天不下雪且我有时间;

(3) 如果天不下雪且我有时间,那么我将去镇上。

解:(1) $\neg P$ (2) $\neg P \wedge Q$ (3) $\neg P \wedge R \rightarrow Q$

6.将下列命题符号化:

(1) 李白一边看书,一边听音乐;

(2) 王强长得很高且很帅;

(3) 如果你不去北京,那么我就去;

(4) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,当且仅当它的对边平行;

(5) 张明和赵红是同学;

(6) 他可能是三好学生或优秀学生干部;

(7) 黄河不是世界上最长的河流;

(8) 他既是教师又是学生;

(9) 如果天不下雨,那么我就去钓鱼;

(10) 如果骗子讲真理,那么太阳就从西边出来。

解:(1) P:李白看书,Q:李白听音乐,$P \wedge Q$。

(2) A:王强长得很高,B:王强长得很帅,$A \wedge B$。

(3) P:你去北京,Q:我去北京,$\neg P \rightarrow Q$。

(4) R:四边形 $ABCD$ 是平行四边形,S:四边形 $ABCD$ 的对边平行,$R \leftrightarrows S$。

(5) P:张明是同学,Q:赵红是同学,$P \wedge Q$。

(6) U:他是三好学生,W:他是优秀学生干部,$U \vee W$。

(7) E:黄河是世界上最长的河流,$\neg E$。

(8) G:他是教师,H:他是学生,$G \wedge H$ 。

(9) I:天下雨,J:我去钓鱼,$\neg I \rightarrow J$。

(10) K:骗子讲真理,L:太阳从西边出来,$K \rightarrow L$。

7.判断下列公式哪些是合式公式,哪些不是。

(1) $Q \rightarrow R \wedge S$;

(2) $P \leftrightarrows (R \rightarrow S)$;

(3) $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$;

(4) $RS \rightarrow T$;

(5) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$。

解:(1) 是 (2) 是 (3) 是 (4) 不是 (5) 不是

8.求下列各命题公式的真值表,并说明哪些是永真式,哪些是永假式。

(1) $P \rightarrow (Q \vee R)$;

(2) $(P \vee R) \wedge (P \rightarrow Q)$;

(3) $(P \vee Q) \leftrightarrows (Q \vee P)$;

(4)　$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$；

(5)　$(P \vee \neg Q) \wedge R$；

(6)　$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$。

解：(1)

P	Q	R	$P \rightarrow (Q \vee R)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

(2)

P	Q	R	$(P \vee R) \wedge (P \rightarrow Q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

(3)　是永真式

P	Q	$(P \vee Q) \leftrightarrows (Q \vee P)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

(4)　是永真式

P	Q	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(5)

P	Q	R	$(P \vee \neg Q) \wedge R)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

(6) 是永真式

P	Q	R	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

9. 试求下列各命题公式的真值表并解释其结果。

(1) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$；

(2) $(P \wedge Q) \rightarrow P$；

(3) $Q \rightarrow (P \vee Q)$；

(4) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrows (\neg P \vee Q)$；

(5) $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg (P \wedge \neg Q))$。

解：(1) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow P \leftrightarrows Q$

P	Q	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(2) $(P \wedge Q) \rightarrow P$ 是永真式

P	Q	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

（3） $Q \to (P \vee Q)$是永真式

P	Q	$Q \to (P \vee Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

（4） $(P \to Q) \leftrightarrows (\neg P \vee Q)$是永真式

P	Q	$(P \to Q) \leftrightarrows (\neg P \vee Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

（5） $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg (P \wedge \neg Q)) \Leftrightarrow P \to Q$

P	Q	$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg (P \wedge \neg Q))$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

10.将下述语句翻译成命题公式。

（1） 没有共产党就没有新中国；

（2） 明天晴转多云西北风4级有时5级；

（3） 齐齐哈尔到北京的40次特快列车是早8点或8点10分开车；

（4） 天冷了要加衣服，否则会生病，生病了就不能去上课，不能去上课就会影响学习。今天天冷但我没加衣服，则我的学习会受到影响。

解：（1） P：有共产党，Q：有新中国，$\neg P \to \neg Q$。

（2） A：晴转多云，B：西北风4级，C：西北风5级，$A \wedge \neg (B \leftrightarrows C)$。

（3） R：齐齐哈尔到北京的40次特快列车是早8点开，S：齐齐哈尔到北京的40次特快列车是早8点10分开，$\neg (R \leftrightarrows S)$。

（4） A：天冷了加衣服，B：生病，C：上课，D：影响学习。

前提：$(\neg A \to B) \wedge (B \to \neg C) \wedge (\neg C \to D)$，结论：$\neg A \to D$。

11.不构造真值表证明下列各蕴涵式。

（1） $(P \to Q) \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$；

（2） $(P \to Q) \to Q \Rightarrow P \vee Q$；

（3） $P \Rightarrow (\neg P \to Q)$；

（4） $\neg A \wedge B \wedge A \Rightarrow C$；

（5） $C \Rightarrow A \vee B \vee \neg B$；

(6) $\neg(A\wedge B)\Rightarrow\neg A\vee\neg B$。

证明：(1) 设 $P\rightarrow(P\wedge Q)$为 F，则 P 为 T，$P\wedge Q$ 为 F，于是 Q 为 F，故 $P\rightarrow Q$ 为 F，因此 $P\rightarrow Q\Rightarrow P\rightarrow(P\wedge Q)$。

(2) 设 $P\vee Q$ 为 F，则 P 为 F 且 Q 为 F，有 $P\rightarrow Q$ 为 T，$(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$ 为 F，因此 $(P\rightarrow Q)\rightarrow Q\Rightarrow P\vee Q$。

(3) 设 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F，于是 $\neg P\rightarrow Q$ 为 T，因此 $P\Rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$。

(4) $\neg A\wedge B\wedge A\rightarrow C\Leftrightarrow\neg(\neg A\wedge B\wedge A)\vee C\Leftrightarrow A\vee\neg B\vee\neg A\vee C\Leftrightarrow A\vee\neg A\vee\neg B\vee C\Leftrightarrow T\vee\neg B\vee C\Leftrightarrow T$，因此 $\neg A\wedge B\wedge A\Rightarrow C$。

(5) $C\rightarrow(A\vee B\vee\neg B)\Leftrightarrow\neg C\vee A\vee B\vee\neg B\Leftrightarrow\neg C\vee A\vee T\Leftrightarrow T$，因此 $C\Rightarrow A\vee B\vee B$。

(6) 设 $\neg A\vee\neg B$ 为 F，则 $\neg A$ 为 F 且 $\neg B$ 为 F，于是 A 为 T 且 B 为 T，$A\wedge B$ 为 T，$\neg(A\wedge B)$为 F，因此，$\neg(A\wedge B)\Rightarrow\neg A\vee\neg B$。

12. 检验下列论证的有效性：

如果 6 是偶数，则 7 被 2 除不尽。

或 5 不是素数，或 7 被 2 除尽。

但 5 是素数，

所以 6 是奇数。

解：设 P：6 是偶数，Q：7 被 2 除整，R：5 是素数，则本题可表示为：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R\Rightarrow\neg P$。

验证：设 $(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R$ 为 T，则 $P\rightarrow\neg Q$ 为 T，$\neg R\vee Q$ 为 T，R 为 T，故 Q 为 T，再由 $P\rightarrow\neg Q$ 为 T，有 P 为 F，得到 $\neg P$ 为 T，故论证有效。

注意：结论“6 是奇数”与实际意义不符，因其前提中“或 5 不是素数，或 7 被 2 除尽”也不符合实际意义。

13. 证明下列等价式：

(1) $A\rightarrow(B\rightarrow A)\Leftrightarrow\neg A\rightarrow(A\rightarrow\neg B)$；

(2) $\neg(A\leftrightarrows B)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$；

(3) $\neg(A\rightarrow B)\Leftrightarrow A\wedge\neg B$；

(4) $\neg(A\leftrightarrows B)\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$；

(5) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$。

证明：(1)
$$\begin{aligned}A\rightarrow(B\rightarrow A)&\Leftrightarrow\neg A\vee(\neg B\vee A)\\&\Leftrightarrow A\vee(\neg A\vee\neg B)\\&\Leftrightarrow\neg\neg A\vee(A\rightarrow\neg B)\\&\Leftrightarrow\neg A\rightarrow(A\rightarrow\neg B)。\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\neg(A\leftrightarrows B)&\Leftrightarrow\neg((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))\\&\Leftrightarrow\neg(\neg(A\vee B)\vee\neg(\neg B\vee A)\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$,

$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow((A \vee B) \wedge \neg A) \vee ((A \vee B) \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow(B \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B)$,

所以$\neg(A \leftrightarrows B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$。

(3) $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$。

(4) $\neg(A \leftrightarrows B) \Leftrightarrow \neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A)$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$。

(5) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow \neg\neg B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$。

14. 化简下列各式:

(1) $((A \rightarrow B) \leftrightarrows (\neg B \rightarrow \neg A)) \wedge C$;

(2) $A \vee (\neg A \vee (B \wedge \neg B))$;

(3) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$。

解:(1) $((A \rightarrow B) \leftrightarrows (\neg B \rightarrow \neg A)) \wedge C$

$\Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \leftrightarrows (A \rightarrow B)) \wedge C$

$\Leftrightarrow T \wedge C$

$\Leftrightarrow C$。

(2) $A \vee (\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \Leftrightarrow (A \vee \neg A) \vee (B \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow T \vee F \Leftrightarrow T$。

(3) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C) \wedge (A \vee \neg A)$

$\Leftrightarrow (B \wedge C) \wedge T$

$\Leftrightarrow B \wedge C$。

15. 如果 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$,是否有 $A \Leftrightarrow B$? 如果 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$,是否有 $A \Leftrightarrow B$? 如果$\neg A \Leftrightarrow \neg B$,是否有 $A \Leftrightarrow B$?

解:如果 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$,未必有 $A \Leftrightarrow B$,例如 $A \Leftrightarrow T$,$B \Leftrightarrow F$,$C \Leftrightarrow T$,有 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$,但 $A \Leftrightarrow B$。

如果 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$,未必有 $A \Leftrightarrow B$,例如 $A \Leftrightarrow T$,$B \Leftrightarrow F$,$C \Leftrightarrow F$,有 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$,但 $A \Leftrightarrow B$。

如果$\neg A \Leftrightarrow \neg B$,必有 $A \Leftrightarrow B$。

16. 模仿主析取范式概念,引进主合取范式概念,并证明:对任意公式,存在唯一一个与其等价的主合取范式。

解:首先给出极大项的概念。

设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 n 个原子，一个子句如果恰好包含所有这 n 个原子或其否定，且排列顺序与 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的顺序一致，则称此子句为关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一个极大项。

其次给出主合取范式的概念。

设公式 G 中所有不同原子为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，如果 G 的合取范式 G' 中的每个子句，都是关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一个极大项，则称 G'' 为 G 的主合取范式。

最后证明：对任意公式 G，存在唯一一个与其等价的主合取范式。

对任意公式 G，都存在合取范式 G'，使得 $G\Leftrightarrow G'$，设 G 中所有不同原子为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$。对于 G' 中每一个子句 G'_i 进行检查，如果 G'_i 不是关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的极大项，则 G'_i 中必然缺少某些原子 $P_{j1},\cdots,P_{jk}$，而 $G'_i\Leftrightarrow G'_i\vee(P_{j1}\wedge\neg P_{j1})\vee\cdots\vee(P_{jk}\wedge\neg P_{jk})\Leftrightarrow M_{i1}\wedge\cdots\wedge M_{ik}$，于是 G' 中非极大项 G'_i 化成了一些极大项之合取。

对 G' 中其他非极大项也作如上处理，最后得等价于 G 的主合取范式。

设 G_1,G_2 都是 G 的主合取范式，则 $G\Leftrightarrow G_1,G\Leftrightarrow G_2$。

不妨设 G_1 中有一个极大项 M 不在 G_2 中，根据极大项的性质，设 I 是使 M 的真值为 F 的真值指派，则在 I 下除 M 外，其他极大项的真值皆为 T，故在 I 下，G_1 为 F，G_2 为 T，与 $G_1\Leftrightarrow G_2$ 矛盾，所以 G 的主合取范式是唯一的。

17. 试将下列公式化为析取范式和合取范式：

（1） $P\wedge(P\to Q)$；

（2） $\neg(P\vee Q)\to(P\wedge Q)$。

解：（1） $P\wedge(P\to Q)\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$ （合取范式）

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)$ （析取范式）

（2） $\neg(P\vee Q)\to(P\wedge Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow P\vee Q\vee(P\wedge Q)$ （析取范式）

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee P)\wedge(P\vee Q\vee Q)\Leftrightarrow P\vee Q$ （合取范式）

18. 试将下列公式化为主析取范式和主合取范式：

（1） $P\to((P\to Q)\wedge\neg(\neg Q\vee\neg P))$；

（2） $P\vee(\neg P\to(Q\vee(\neg Q\to R)))$。

解：（1） $P\to((P\to Q)\wedge\neg(\neg Q\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow\neg P\vee((\neg P\vee Q)\wedge Q\wedge P))$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ （主析取范式）

原式$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee Q$ （主合取范式）

（2） $P\vee(\neg P\to(Q\vee(\neg Q\to R)))$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee Q \vee R))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$ （主合取范式）

$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg R)) \vee (R \wedge (P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$ （主析取范式）

19. A，B，C，D 四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？

(1)　若 A 去则 C 和 B 要去一人；

(2)　B 和 C 不能都去；

(3)　C 去则 D 留下。

解：设 A：A 去出差，B：B 去出差，C：C 去出差，D：D 去出差，

按题意，$A \to \neg(C \leftrightarrows D)$，$\neg(B \wedge C)$，$C \to \neg D$ 必须同时成立。

$(A \to \neg(C \leftrightarrows D)) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge (C \to \neg D) \Leftrightarrow (\neg A \vee (\neg C \wedge D) \vee (\neg D \wedge C)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D) \Leftrightarrow \underline{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)} \vee \underline{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D)} \vee \underline{(\neg A \wedge \neg C \wedge \neg D)} \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee \underline{(\neg A \wedge D \wedge \neg B \wedge \neg D)} \vee \underline{(\neg C \wedge D \wedge \neg C \wedge \neg D)} \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg C) \vee \underline{(\neg D \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg C)} \vee (\neg D \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee \underline{(\neg D \wedge C \wedge \neg C \wedge \neg D)} \vee \underline{(\neg D \wedge C \wedge \neg C)}$

在上式中，有些项不合题意，如 $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ 表示三人都不出差，这不合理，又如 $(\neg C \wedge D \wedge \neg C \wedge \neg D)$ 属矛盾式，应舍去，故原式应为：$(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg C \wedge D) \vee (\neg D \wedge C \wedge \neg B)$，故派法为：$B$ 和 D 去，或 A 和 D 去，或 A 和 C 去。

20. 三人估计比赛结果，甲说："A 第一，B 第二"，乙说："C 第二，D 第四"，丙说："A 第二，D 第四"。结果三人估计得都不全对，但都对了一个，问 A，B，C，D 的名次。

解：设 P：A 是第一，Q：B 是第二，R：C 是第二，S：D 是第四，E：A 是第二，根据题意，有

$$\neg(P \leftrightarrows Q) \wedge \neg(R \leftrightarrows S) \wedge \neg(E \leftrightarrows S)$$

原式 $\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge ((R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S)) \Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \wedge (E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S))$

因为 $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)$ 与 $(\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)$ 不符题意，原式即为 $(P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E)$，因 R 与 S 矛盾，故 $\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E$ 为真，于是得到 C 第一，B 第二，A 第三，D 第四。

21. 用推理规则证明以下各式。

(1)　$\neg(P \wedge \neg Q)$，$\neg Q \vee R$，$\neg R \Rightarrow \neg P$

(2)　$J \to (M \vee N)$，$(H \vee G) \to J$，$H \vee G \Rightarrow M \vee N$

(3)　$B \wedge C$，$(B \leftrightarrows C) \to (H \vee G) \Rightarrow G \vee H$

(4)　$P \to Q$，$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$，$\neg(\neg P \wedge S) \Rightarrow \neg S$。

证明：(1)

1)	$\neg R$	P
2)	$\neg Q \vee R$	P
3)	$\neg Q$	$T(1)(2)I$
4)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	P
5)	$\neg P \vee Q$	$T(4)E$
6)	$\neg P$	$T(3)(5)I$

(2)

1)	$H \vee G$	P
2)	$H \vee G \rightarrow J$	P
3)	J	$T(1)(2)I$
4)	$J \rightarrow M \vee N$	P
5)	$M \vee N$	$T(3)(4)I$

(3)

1)	$B \wedge C$	P
2)	$(B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg G)$	$T(1)I$
3)	$B \leftrightarrows C$	$T(2)E$
4)	$(B \leftrightarrows C) \rightarrow (H \vee G)$	P
5)	$G \vee H$	$T(3)(4)I$

(4)

1)	$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$	P
2)	$\neg R$	$T(1)I$
3)	$\neg Q \vee R$	$T(1)I$
4)	$\neg Q$	$T(2)(3)I$
5)	$P \rightarrow Q$	P
6)	$\neg P$	$T(4)(5)I$
7)	$\neg(\neg P \wedge S)$	P
8)	$P \vee \neg S$	$T(7)E$
9)	$\neg S$	$T(6)(8)I$

22. 仅用规则 P 和 T，推证以下公式。

(1) $\neg A \vee B, C \rightarrow \neg B \Rightarrow A \rightarrow \neg C$；

(2) $A \rightarrow (B \rightarrow C), (C \wedge D) \rightarrow E, \neg F \rightarrow (D \wedge \neg E) \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow F)$；

(3) $A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F$；

(4) $A \rightarrow (B \wedge C), \neg B \vee D, (E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D, B \rightarrow (A \wedge \neg E) \Rightarrow B \rightarrow E$；

(5) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), (B \rightarrow E) \wedge (D \rightarrow F), \neg(E \wedge F), A \rightarrow C \Rightarrow \neg A$。

证明：(1)

1)	$\neg A \vee B$	P
2)	$A \rightarrow B$	$T(1)E$
3)	$C \rightarrow \neg B$	P

	4)	$B \to \neg C$	$T(3)E$
	5)	$A \to \neg C$	$T(2)(4)I$
(2)	1)	$A \to (B \to C)$	P
	2)	$(A \wedge B) \to C$	$T(1)E$
	3)	$(C \wedge D) \to E$	P
	4)	$C \to (D \to E)$	$T(3)E$
	5)	$(A \wedge B) \to (D \to E)$	$T(2)(4)I$
	6)	$\neg F \to (D \wedge \neg E)$	P
	7)	$\neg(D \wedge \neg E) \to F$	$T(6)E$
	8)	$(D \to E) \to F$	$T(7)E$
	9)	$(A \wedge B) \to F$	$T(5)(8)I$
	10)	$A \to (B \to F)$	$T(9)E$
(3)	1)	$(A \vee B) \to (C \wedge D)$	P
	2)	$(\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D)$	$T(1)E$
	3)	$\neg A \vee D$	$T(2)I$
	4)	$A \to D$	$T(3)E$
	5)	$D \vee E \to F$	P
	6)	$(\neg D \vee F) \wedge (E \to F)$	$T(5)F$
	7)	$\neg D \vee F$	$T(6)I$
	8)	$D \to F$	$T(7)E$
	9)	$A \to F$	$T(4)(8)I$
(4)	1)	$\neg B \vee D$	P
	2)	$(E \to \neg F) \to \neg D$	P
	3)	$D \to \neg(E \to \neg F)$	$T(2)E$
	4)	$B \to D$	$T(1)E$
	5)	$B \to \neg(E \to \neg F)$	$T(3)(4)I$
	6)	$\neg B \vee (E \wedge F)$	$T(5)E$
	7)	$(\neg B \vee E) \wedge (\neg B \vee F)$	$T(6)E$
	8)	$\neg B \vee E$	$T(7)I$
	9)	$B \to E$	$T(8)E$
(5)	1)	$(A \to B) \wedge (C \to D)$	P
	2)	$A \to B$	$T(1)I$
	3)	$(B \to E) \wedge (D \to F)$	P
	4)	$B \to E$	$T(3)I$

5)	$A \to E$	$T(2)(4)I$
6)	$\neg(E \wedge F)$	P
7)	$E \to \neg F$	$T(6)E$
8)	$A \to \neg F$	$T(5)(7)I$
9)	$C \to D$	$T(1)I$
10)	$D \to F$	$T(3)I$
11)	$C \to F$	$T(9)(10)I$
12)	$A \to C$	P
13)	$A \to F$	$T(11)(12)I$
14)	$\neg F \to \neg A$	$T(13)E$
15)	$A \to \neg A$	$T(8)(14)I$
16)	$\neg A \vee \neg A$	$T(15)E$
17)	$\neg A$	$T(16)E$

23. 用 CP 规则推证上题中的(1)、(2)、(3)、(4)各式。

证明：(1)

1)	A	P(附加前提)
2)	$\neg A \vee B$	P
3)	$A \to B$	$T(2)E$
4)	B	$T(1)(3)I$
5)	$C \to \neg B$	P
6)	$B \to \neg C$	$T(5)E$
7)	$\neg C$	$T(4)(6)I$
8)	$A \to \neg C$	CP

(2)

1)	A	P(附加前提)
2)	$A \to (B \to C)$	P
3)	$B \to C$	$T(1)(2)I$
4)	$(C \wedge D) \to E$	P
5)	$C \to (D \to E)$	$T(4)E$
6)	$B \to (D \to E)$	$T(3)(5)I$
7)	$\neg F \to (D \wedge \neg E)$	P
8)	$\neg(D \wedge \neg E) \to F$	$T(7)E$
9)	$(D \to E) \to F$	$T(8)E$
10)	$B \to F$	$T(6)(9)I$
11)	$A \to (B \to F)$	CP

(3)

1)	A	P(附加前提)

2) $A \vee B$ $T(1)I$

3) $A \vee B \to C \wedge D$ P

4) $C \wedge D$ $T(2)(3)I$

5) D $T(4)I$

6) $D \vee E$ $T(5)I$

7) $D \vee E \to F$ P

8) F $T(6)(7)I$

9) $A \to F$ CP

(4) 1) B P(附加前提)

2) $\neg B \vee D$ P

3) $B \to D$ $T(2)E$

4) D $T(1)(3)I$

5) $(E \to \neg F) \to \neg D$ P

6) $D \to \neg(E \to \neg F)$ $T(5)E$

7) $\neg(E \to \neg F)$ $T(4)(6)I$

8) $E \vee F$ $T(7)E$

9) E $T(8)I$

10) $B \to E$ CP

24. 证明下列各式。(如果必要,可用间接证法)

(1) $R \to \neg Q, R \vee S, S \to \neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$;

(2) $S \to \neg Q, S \vee R, \neg R, \neg P \leftrightarrows Q \Rightarrow P$;

(3) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S), ((Q \to P) \vee \neg R), R \Rightarrow P \leftrightarrows Q$。

证明:(1) 1) P P(附加前提)

2) $P \to Q$ P

3) Q $T(2)(3)I$

4) $R \to \neg Q$ P

5) $Q \to \neg R$ $T(4)E$

6) $\neg R$ $T(3)(5)I$

7) $R \vee S$ P

8) S $T(6)(7)I$

9) $S \to \neg Q$ P

10) $\neg Q$ $T(8)(9)I$

11) $Q \wedge \neg Q$(矛盾) $T(3)(10)I$

(2) 1) $\neg P$ P(附加前提)

2） $\neg R$ P

3） $S \vee R$ P

4） S $T(2)(3)I$

5） $S \to \neg Q$ P

6） $\neg Q$ $T(4)(5)I$

7） $\neg P \rightleftharpoons Q$ P

8） $(\neg P \to Q) \wedge (Q \to \neg P)$ $T(7)E$

9） $\neg P \to Q$ $T(8)I$

10） Q $T(1)(9)I$

11） $\neg Q \wedge Q$（矛盾） $T(6)(10)I$

（3） 1） R P

2） $(Q \to P) \vee \neg R$ P

3） $Q \to P$ $T(1)(2)I$

4） $R \vee S$ $T(1)I$

5） $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$ P

6） $(R \vee S) \to (P \to Q)$ $T(5)E$

7） $P \to Q$ $T(4)(6)I$

8） $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ $T(3)(7)I$

9） $P \rightleftharpoons Q$ $T(8)E$

25.对下面的每一组前提，写出可能导出的结论以及所应用的推理规则。

（1） 如果我跑步，那么，我很疲劳。

我没有疲劳。

（2） 如果他犯了错误，那么，他神色慌张。

他神色慌张。

（3） 如果我的程序通过，那么，我很快乐。

如果我快乐，那么，阳光很好。

现在是晚上十一点，天很暖。

解：（1） 设 P：我跑步，Q：我很疲劳，前提为：$P \to Q$，$\neg Q$

1） $P \to Q$ P

2） $\neg Q$ P

3） $\neg P$ $T(1)(2)I$

结论为：$\neg P$，我没有跑步

（2） 设 P：他犯了错误，Q：他神色慌张，前提为：$P \to Q$，Q

因为$(P \to Q) \wedge Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q \Leftrightarrow Q$，故本题没有确定的结论。

(3) 设 P:我的程序通过,Q:我很快乐,R:阳光很好,

前提为:$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \neg R$

1)	$\neg R$	P
2)	$Q \rightarrow R$	P
3)	$\neg Q$	$T(1)(2)I$
4)	$P \rightarrow Q$	P
5)	$\neg P$	$T(3)(4)I$

结论为:$\neg P$,我的程序没有通过。

26.求下列各式的析取范式。

(1) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$;

(2) $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S)$;

(3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$;

(4) $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (S \rightarrow T)$。

解:(1) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee \neg Q \vee R$。

(2) $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg(Q \wedge R) \vee S) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S$。

(3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$。

(4) $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (S \rightarrow T)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg S \vee T)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge T)$。

27.求下列各式的合取范式。

(1) $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$;

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$;

(3) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$;

(4) $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$。

解:(1) $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$。

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$。

(3) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P \vee Q) \Leftrightarrow P \vee Q$。

(4) $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee P) \wedge(\neg P \vee \neg Q) \wedge(Q \vee P) \wedge(Q \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee \neg Q) \wedge(P \vee Q)$。

28. 求$(A \rightarrow B \wedge C) \wedge(\neg A \leftrightarrows(\neg B \wedge \neg C))$的主析取范式与主合取范式。

解：对于给定的命题公式，通常采用以下两种方法求主合取范式与主析取范式。

(1) 列表法

列出给定公式的真值表，其真值为 T 的指派所对应的极小项析取，即为此公式的主析取范式。同理，其真值为 F 的指派所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

(2) 公式推导法

首先将公式中的条件和双条件联结词化去，进一步求出析取范式，删去其中所有的永假析取式，将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并，最后对合取项添加没有出现的命题变元，即合取 $P \vee \neg P$，经过化简整理，即可得到主析取范式。

对于求主合取范式的方法，基本与上述相同。只是在开始时，将公式化为合取范式，在添加项时，要析取矛盾式（$P \wedge \neg P$）。

此外，利用主范式的编码方法，在求出主析取范式的编码后，可立即写出主合取范式的编码。

给定公式的真值表如下：

$A\,B\,C$	$B \wedge C$	$A \rightarrow(B \wedge C)$	$\neg A$	$\neg B \wedge \neg C$	$\neg A \leftrightarrows(\neg B \wedge \neg C)$	原式
$T\,T\,T$	T	T	F	F	T	T
$T\,T\,F$	F	F	F	F	T	F
$T\,F\,T$	F	F	F	F	T	F
$T\,F\,F$	F	F	F	T	F	F
$F\,T\,T$	T	T	T	F	F	F
$F\,T\,F$	F	T	T	F	F	F
$F\,F\,T$	F	T	T	F	F	F
$F\,F\,F$	F	T	T	T	T	T

所以

原式 $\Leftrightarrow(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge(\neg A \vee B \vee C) \wedge(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge(A \vee \neg B \vee C) \wedge(A \vee B \vee \neg C)$

$\Leftrightarrow(A \wedge B \wedge C) \vee(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$。

原式$\Leftrightarrow(\neg A \vee(B \wedge C)) \wedge(\neg A \rightarrow(\neg B \wedge \neg C)) \wedge((\neg B \wedge \neg C) \rightarrow \wedge \neg A)$

$\Leftrightarrow(\neg A \vee(B \wedge C)) \wedge(A \vee(\neg B \wedge \neg C)) \wedge(B \vee C \vee \neg A)$

$\Leftrightarrow((\neg A \wedge A) \vee(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee(A \wedge B \wedge C) \vee(B \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg C)) \wedge(\neg A \vee B \vee C)$

$\Leftrightarrow((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee(A \wedge B \wedge C)) \wedge(\neg A \vee B \vee C)$

$\Leftrightarrow((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \wedge(\neg A \vee B \vee C)) \vee((A \wedge B \wedge C) \wedge(\neg A \vee B \vee C))$

$\Leftrightarrow(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee(A \wedge B \wedge C)$。

原式$\Leftrightarrow(\neg A \vee(B \wedge C)) \wedge(A \vee(\neg B \wedge \neg C)) \wedge((B \vee C) \wedge \neg A)$

$\Leftrightarrow(\neg A \vee B) \wedge(\neg A \vee C) \wedge(A \vee \neg B) \wedge(A \vee \neg C) \wedge(\neg A \vee B \vee C$

$\Leftrightarrow(\neg A \vee B \vee C) \wedge(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge(\neg A \vee B \vee C) \wedge(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge(A \vee \neg B \vee C) \wedge(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge(A \vee B \vee \neg C) \wedge(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge(\neg A \vee B \vee C)$

$\Leftrightarrow(\neg A \vee B \vee C) \wedge(\neg A \vee B \vee C) \wedge(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge(A \vee \neg B \vee C) \wedge(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge(A \vee B \vee \neg C)$。

29.求下列各式的主析取范式及主合取范式,并指出哪些是重言式。

(1) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow(P \rightleftharpoons \neg Q)$;

(2) $Q \wedge(P \vee \neg Q)$;

(3) $P \vee(\neg P \rightarrow(Q \vee(\neg Q \rightarrow R)))$;

(4) $(P \rightarrow(Q \wedge R)) \wedge(\neg P \rightarrow(\neg Q \wedge \neg R))$。

解:(1) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow(P \rightleftharpoons \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee(P \wedge \neg Q) \vee(\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow(P \wedge Q) \vee(P \wedge \neg Q) \vee(\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow P \vee Q$。

(2) $Q \wedge(P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow(P \wedge Q) \vee(Q \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge Q$

$\Leftrightarrow(P \vee Q) \wedge(P \vee \neg Q) \wedge(\neg P \vee Q)$。

(3)$P \vee(\neg P \rightarrow(Q \vee(\neg Q \rightarrow R)))$

$\Leftrightarrow P \vee(P \vee Q \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

$\Leftrightarrow(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee(P \wedge Q \wedge R) \vee(P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。

(4) $(P \rightarrow(Q \wedge R)) \wedge(\neg P \rightarrow(\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee(Q \wedge R)) \wedge(P \vee(\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee Q) \wedge(\neg P \vee R) \wedge(P \vee \neg Q) \wedge(P \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee Q \vee R) \wedge(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge(\neg P \vee Q \vee R) \wedge(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge(P \vee \neg Q \vee R) \wedge(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge(P \vee Q \vee \neg R) \wedge(P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow(\neg P \vee Q \vee R) \wedge(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge(P \vee \neg Q \vee R) \wedge(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge(P \vee Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow(P \wedge Q \wedge R) \vee(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。

30.用将公式化为范式的方法证明下列各题中两式是等价的。

(1)　$(A \to B) \wedge (A \to C)$, $A \to (B \wedge C)$；

(2)　$(A \to B) \to (A \wedge B)$, $(\neg A \to B) \wedge (B \to A)$；

(3)　$A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B)$, $\neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)$；

(4)　$A \vee (A \to (A \wedge B))$, $\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B)$。

证明：(1)　$(A \to B) \wedge (A \to C) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow \neg A \vee (B \wedge C)$，

$A \to (B \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \wedge C)$。

(2)　$(A \to B) \to (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow A \wedge (B \vee \neg B) \Leftrightarrow A \wedge T \Leftrightarrow A$，

$(\neg A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$\Leftrightarrow A \vee (B \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow A \vee F \Leftrightarrow A$。

(3)　$A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow (A \wedge B \wedge \neg A) \vee (A \wedge B \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow F \vee F \Leftrightarrow F$，

$\neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B) \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow F$。

(4)　$A \vee (A \to (A \wedge B)) \Leftrightarrow A \vee \neg A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow T$，

$\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow T$。

31. 证明：若 $A \vee B \Leftrightarrow A \vee C$，$\neg A \vee B \Leftrightarrow \neg A \vee C$，则 $B \Leftrightarrow C$。

证明：$B \Leftrightarrow B \vee (A \wedge \neg A)$

$\Leftrightarrow (B \vee A) \wedge (B \vee \neg A)$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$

$\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (\neg A \vee C)$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg A) \vee C$

$\Leftrightarrow F \vee C \Leftrightarrow C$。

32. 证明下列等价式

(1)　$((A \wedge B \wedge C) \to D) \wedge (C \to A \vee B \vee D) \Leftrightarrow (C \wedge (A \rightleftharpoons B)) \to D$；

(2)　$A \to (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \to C$；

(3)　$(A \to D) \wedge (B \to D) \Leftrightarrow (A \vee B) \to D$；

(4)　$((A \wedge B) \to C) \wedge (B \to (D \vee C)) \Leftrightarrow (B \wedge (D \to A)) \to C$。

证明：(1)　$((A \wedge B \wedge C) \to D) \wedge (C \to (A \vee B \vee D))$

$\Leftrightarrow (\neg(A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg C \vee A \vee B \vee D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg C \vee A \vee B \vee D$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee D) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$

$\Leftrightarrow(\neg C\lor D)\lor(\neg A\land B)\lor(A\land\neg B)$

$\Leftrightarrow(\neg C\lor\neg(A\lor\neg B)\lor\neg(\neg A\lor B))\lor D$

$\Leftrightarrow\neg(C\land(A\to B)\land(B\to A))\lor D$

$\Leftrightarrow(C\land(A\rightleftharpoons B))\to D$。

(2) $A\to(B\lor C)\Leftrightarrow\neg A\lor B\lor C$

$\Leftrightarrow\neg(A\land\neg B)\lor C$

$\Leftrightarrow(A\land\neg B)\to C$。

(3) $(A\to D)\land(B\to D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\lor D)\land(\neg B\lor D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\land\neg B)\lor D$

$\Leftrightarrow\neg(A\lor B)\lor D$

$\Leftrightarrow(A\lor B)\to D$。

(4) $((A\land B)\to C)\land(B\to(D\lor C))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\land B)\lor C)\land(\neg B\lor D\lor C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\lor\neg B\lor C)\land(\neg B\lor C\lor D)$

$\Leftrightarrow\neg B\lor C\lor(\neg A\land D)$

$\Leftrightarrow\neg B\lor\neg(A\lor\neg D))\lor C$

$\Leftrightarrow\neg(B\lor(A\lor\neg D))\lor C$

$\Leftrightarrow(B\land(D\to A))\to C$。

33.张三说李四在说谎,李四说王五在说谎,王五说张三、李四都在说谎,问张三、李四、王五三人,到底谁说真话,谁说假话?

解:设 A:张三说真话,B:李四说真话,C:王五说真话

依题意有 $A\Leftrightarrow\neg B$,$B\Leftrightarrow\neg C$,$C\Leftrightarrow\neg A\land\neg B$ 为真。

由定理 7.4.2,$A\Leftrightarrow\neg B$ 当且仅当$(A\rightleftharpoons\neg B)\Leftrightarrow(A\to\neg B)\land(\neg B\to A)$为 T 。

同理,$B\Leftrightarrow\neg C$ 成立,有$(B\to\neg C)\land(\neg C\to B)$为 T,$C\Leftrightarrow\neg A\land\neg B$ 成立,有$(C\to(\neg A\land\neg B))\land((\neg A\land\neg B)\to C)$ 为 T。则有

$$T\Leftrightarrow(A\to\neg B)\land(\neg B\to A)\land(B\to\neg C)\land(\neg C\to B)\land(C\to(\neg A\land\neg B))\land((\neg A\land\neg B)\to C)$$

$$\Leftrightarrow(\neg A\lor\neg B)\land(B\lor A)\land(\neg B\lor\neg C)\land(C\lor B)\land(\neg C\lor(\neg A\land\neg B))\land(A\lor B\lor C)$$

$$\Leftrightarrow((\neg A\land B)\lor(A\land\neg B))\land((\neg B\land C)\lor(B\land\neg C))\land((A\land\neg C)\lor(B\land\neg C)\lor(\neg A\land\neg B\land C))$$

$$\Leftrightarrow((\neg A\land B\land\neg C)\lor(A\land\neg B\land C))\land((A\land\neg C)\lor(B\land\neg C)\lor(\neg A\land\neg B\land C))$$

$$\Leftrightarrow(\neg\land B\land\neg C),$$

即:张三说假话,王五说假话,而李四说真话。

34. 甲、乙、丙、丁四个人有且只有两人参加围棋优胜比赛，关于谁参加竞赛，下列四种判断都是正确的：

(1) 甲和乙只有一人参加；

(2) 丙参加，丁必参加；

(3) 乙或丁至多参加一人；

(4) 丁不参加，甲也不会参加。

请推出哪两个人参加了围棋优胜比赛。

解：设 A：甲参加竞赛，B：乙参加竞赛，C：丙参加竞赛，D：丁参加竞赛，依题意，有

$T \Leftrightarrow \neg(A \rightleftharpoons \neg B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg D \to \neg A)$

$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \wedge (D \vee \neg A)$

$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge D)) \wedge ((\neg B \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg A) \vee (\neg D \wedge \neg A))$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$。

根据题设，只能去两个人，所以$\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D$ 为 F。

所以只有

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge D) \Leftrightarrow T$$

即甲、丁参加围棋比赛。

35. 证明：$P \to (Q \to R) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$。

证明：对于蕴涵式的证明，可以采用多种方法。首先是直接证法，就是在假设前提为真时推证结论为真。其次是反证法，就是假设结论为假，推证前提为假。还可以根据蕴涵式的定义，要证 $S \Rightarrow C$，即需要证明 $S \to C$ 为重言式。

下面给出本题的各种证明。

(Ⅰ) 直接证法。

设 $P \to (Q \to R)$为 T，则

(1) P 为 T，$Q \to R$ 为 T，有三种情况：

① P 为 T，Q 为 T，R 为 T，则$(P \to Q) \to (P \to R)$为 T。

② P 为 T，Q 为 F，R 为 T，则$(P \to Q) \to (P \to R)$为 T。

③ P 为 T，Q 为 F，R 为 F，则$(P \to Q) \to (P \to R)$为 T。

(2) P 为 F，$Q \to R$ 为 F，则 P 为 F，Q 为 T，R 为 F，所以 $P \to Q$ 为 T，$P \to R$ 为 T，则$(P \to Q) \to (P \to R)$为 T。

(3) P 为 F，$Q \to R$ 为 T，则

① P 为 F，Q 为 T，R 为 T，则$(P \to Q) \to (P \to R)$为 T。

② P 为 F，Q 为 F，R 为 F，则$(P \to Q) \to (P \to R)$为 T。

③ P 为 F，Q 为 F，R 为 T，则$(P \to Q) \to (P \to R)$为 T。

（Ⅱ） 间接证法。

设$(P\to Q)\to(P\to R)$为 F，则必有 $P\to Q$ 为 T，$P\to R$ 为 F，故得 P 为 T，R 为 F，Q 为 T，所以 $P\to(Q\to R)$为 F。

（Ⅲ） 等价变换。

$(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)\vee(\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee R))$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\vee R))$。

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee((P\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee\neg P\vee R))$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee\neg)(P\wedge Q\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow T$。

此外，还可以列真值表进行验证。

36. 用推理规则论证下述问题。

或者是天晴，或者是下雨，如果是天晴，我去看电影。如果我去看电影，我就不看书，所以，如果我在看书，则天下雨。

解：设 A：今天天晴，B：我去看书，R：今天下雨，E：我去看电影，

命题符号化为：

$$\neg(A\rightleftharpoons R),A\to E,E\to\neg B\Rightarrow B\to R$$

(1)	$\neg(A\rightleftharpoons R)$	P
(2)	$A\rightleftharpoons\neg R$	$T(1)E$
(3)	$(A\to\neg R)\wedge(\neg R\to A)$	$T(2)E$
(4)	$\neg R\to A$	$T(3)I$
(5)	$A\to E$	P
(6)	$\neg R\to E$	$T(4)(5)I$
(7)	$E\to\neg B$	P
(8)	$\neg R\to\neg B$	$T(6)(7)I$
(9)	$B\to R$	$T(8)E$

37. 证明：$(\neg A\to(B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n))\wedge(\neg B_1\wedge\neg B_2\wedge\cdots\wedge\neg B_n)\Rightarrow A$ 是一个正确的推理形式。

证明：要证本题为正确推理形式，即证：$(\neg A\to(B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n))\wedge(\neg B_1\wedge\neg B_2\wedge\cdots\wedge\neg B_n)\to A$ 是永真式。

令 $B\Leftrightarrow B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n$，$\neg B\Leftrightarrow\neg B_1\wedge\neg B_2\wedge\cdots\wedge\neg B_n$，

故原式$\Leftrightarrow((\neg A\to B)\wedge\neg B)\to A$

$\Leftrightarrow\neg((A\vee B)\wedge\neg B)\vee A$

$\Leftrightarrow \neg((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)) \vee A$

$\Leftrightarrow \neg((A \wedge \neg B) \vee F) \vee A$

$\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \vee A$

$\Leftrightarrow \neg A \vee B \vee A \Leftrightarrow T$。

38. 证明：$(A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B) \wedge \cdots \wedge (A_n \to B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \Rightarrow B$ 是一个正确的推理形式。

证明：要证本题是一个正确推理形式，即证：$(A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B) \wedge \cdots \wedge (A_n \to B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \to B$ 是一个永真式。

原式 $\Leftrightarrow (\neg A_1 \vee B) \wedge (\neg A_2 \vee B) \wedge \cdots \wedge (\neg A_n \vee B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \to B$

$\Leftrightarrow ((\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \cdots \wedge \neg A_n \vee B) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \to B$

$\Leftrightarrow (\neg (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \vee B \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \to B$

$\Leftrightarrow (\neg (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n)) \vee (B \wedge A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n)) \to B$

$\Leftrightarrow \neg (B \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n)) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg B \vee \neg (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) \vee B \Leftrightarrow T$。

39. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为命题公式，有一真值指派 I，使得 $A \to B$ 的真值为 $T(i=1,2,\cdots,n)$，$B_i \wedge B_j$ 为 $F(i,j=1,2,\cdots,n, i \neq j)$，$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ 为 T，证明：$B_i \to A_j$ 的真值为 $T(i=1,2,\cdots,n)$。

证明：假设存在 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，使 $B_i \to A_i$ 的真值为 F，不妨设 $B_1 \to A_1$ 为 F，则 B_1 为 T，A_1 为 F。

由 $B_i \wedge B_j$ 为 $F(i,j=1,2,\cdots,n,i,\neq j)$，则 B_j 为 $F(j=2,3,\cdots,n)$。再由 $A_j \to B_j$ 为 $T(j=2,3,\cdots,n)$，则 A_j 为 $F(j=2,3,\cdots,n)$，故 A_i 皆为 $F(i=1,2,\cdots,n)$，则 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ 为 F，与 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ 为 T 矛盾，因此，$B_i \to A_i$ 的真值为 $T(i=1,2,\cdots,n)$。

40. 试判断 n 为何值时，公式$(\cdots((A \to A) \to) \cdots) \to A$ 为重言式，并证明之（n 为公式中$\to$出现的数目）。

证明：为 n 为奇数时，公式$(\cdots((A \to A) \to A) \cdots) \to A$ 为重言式。

当 $n=1$ 时，有 $A \to A \Leftrightarrow \neg A \vee A \Leftrightarrow T$，结论成立。

设 $n=2k+1$ 时，结论成立，当 $n=2k+3$ 时，原公式$\Leftrightarrow (T \to A) \to A \Leftrightarrow \neg (F \vee A) \vee A \Leftrightarrow (T \wedge \neg A) \vee A \Leftrightarrow \neg A \vee A \Leftrightarrow T$。

41. 设 A 是命题公式，试求 A 的所有逻辑结果。

解：设 B 是重言式，有 $A \Rightarrow B$；

设 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 为公式 A 的主合取范式，则对任意的 $i(i=1,2,\cdots,n)$，有 $A \Rightarrow A_i$，对任意的 $i,j(i,j=1,2,\cdots,n,i \neq j)$，有 $A \Rightarrow A_i \wedge A_j, \cdots A \Rightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots A_n$。

因此从等价的意义上，A 共有 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ 个逻辑结果。

第八章　谓词逻辑

一、内容提要

1.**谓词与量词**

谓词：在反映判断的句子中,用以刻画客体的性质或关系的即是谓词。

谓词填式：单独一个谓词不是完整的命题,把谓词字母后填以客体所得的式子称为谓词填式。

n 元谓词：由 n 个客体插入到固定位置上的谓词填式。

命题函数：由一个谓词、一些客体变元组成的表达式称为简单命题函数。

个体域：命题变元(客体变元)的论述范围称作个体域(论域)。

全称量词：符号"$\forall$"称为全称量词,用来表达"对所有的""每一个""对任一个""凡"等词。

存在量词：符号"$\exists$"称为存在量词,用来表达"某个""存在一些""至少有一个"等词。

2. **谓词公式与翻译**

原子公式：将 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称作谓词演算的原子公式,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是客体变元。

合式公式：谓词演算的合式公式规定为：

(1)　原子谓词公式是合式公式。

(2)　若 A 是合式公式,则$\neg A$ 是一个合式公式。

(3)　若 A 和 B 是合式公式,则$(A\vee B)$,$(A\wedge B)$,$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrows B)$都是合式公式。

(4)　A 是合式公式,x 是 A 中出现的任意变元,则 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 都是合式公式。

(5)　只有经过有限次地使用规则(1),(2),(3)和(4)所得到的公式是合式公式。

3.**自由变元和约束变元**

辖域：给定谓词公式中,形式为$\forall xP(x)$,$\exists xP(x)$中的 $P(x)$称为相应量词的作用域,或辖域。

约束变元：在作用域中,x 的一切出现,称为 x 在公式中的约束出现,所有约束出现的变元,称作约束变元。

自由变元：在谓词公式中,除去约束变元以外出现的变元,称作自由变元。

换名：对公式中的约束变元,遵照一定规则更改名称符号,称为约束变元的换名。

指导变元：给定一个谓词公式,其中有一部分公式形式为$\forall xP(x)$,或$\exists xP(x)$,这里的$\forall$,$\exists$后面所限的 x,称为相应量词的指导变元。

换名规则：

（1） 只对约束变元换名；

（2） 更改变元名称的范围是量词中的指导变元，以及该量词作用域中所出现的该变元，在公式的其余部分不变；

（3） 换名时一定要用作用域中没有出现的变元名称。

4.**谓词演算的等价式与蕴涵式**

赋值：在谓词公式中常包含命题变元和客体变元，当客体变元由确定的客体所取代，命题变元用确定的命题所取代时，则称作对谓词公式的一个赋值。一个谓词公式经过赋值后，就成为具有确定真值的命题。

等价：给定任何两个谓词公式 A 和 B，设 A 和 B 有共同的个体域 D，若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值所得命题的真值相同，则称谓词公式 A 和 B 在 D 上是等价的，记作 $A \Leftrightarrow B$。

有效：给定谓词公式 A，其个体域为 D，对于 A 的所有赋值，A 的真值皆为 T，则称 A 在 D 上是有效的。

不可满足：给定谓词公式 A，其个体域为 D，对于 A 的所有赋值，A 的真值皆为 F，则称 A 是不可满足的。

可满足：给定谓词公式 A，如果至少在一种赋值下，A 的真值为 T，则称 A 是可满足的。

5. **谓词演算的推理理论**

全称指定规则：如果对论域中所有客体 x，$P(x)$成立，则对论域中某个任意客体 a，$P(a)$成立。这个规则可表示为：$\dfrac{\forall xP(x)}{P(a)}$，简记为 US。

全称推广规则：如果能够证明对论域中每一个客体 a，$P(a)$都成立，则 $\forall xP(x)$成立。这个规则可表示为：$\dfrac{P(x)}{\forall xP(x)}$，简记为 UG。

存在指定规则：如果对论域中某些客体 $P(x)$成立，则必有某个特定客体 a，使 $P(a)$成立。这个规则可表示为：$\dfrac{\exists xP(x)}{P(a)}$，简记为 ES。

存在推广规则：如果对论域中某个特定客体 a，有 $P(a)$成立，则在论域中，必存在 x，使得 $P(x)$成立，即 $\exists P(x)$成立。这个规则可表示为$\dfrac{P(a)}{\exists xP(x)}$，简记为 EG。

二、习题与解

1. 设下面所有谓词的个体域都是$\{a, b, c\}$，试将下面表达式中的量词消除，写成与之等价的命题公式。

(1) $\forall xR(x)\wedge\exists xS(x)$;

(2) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$;

(3) $\forall x\neg P(x)\vee\forall xP(x)$。

解:(1) $\forall xR(x)\wedge\exists xS(x)\Leftrightarrow R(a)\wedge R(b)\wedge R(c)\wedge(S(a)\vee S(b)\vee S(c))$。

(2) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\Leftrightarrow(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c))$。

(3) $\forall x\neg P(x)\vee\forall xP(x)\Leftrightarrow(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))$。

2. 指出下列命题的真值:

(1) $\forall x(P\rightarrow Q(x))\vee R(e)$

其中 P:"$3>2$",$Q(x)$:"$x\leqslant 3$",$R(x)$:"$x>5$",e:5;个体域 $D=\{-2,3,6\}$。

(2) $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$

其中:$P(x)$:"$x>3$",$Q(x)$:"$x=4$",定义域 $D=\{2\}$。

解:(1) F　　　(2) T

3. 用谓词表达式写出下列命题:

(1) 小张不是工人;

(2) 他是田径或球类运动员;

(3) 小莉是非常聪明和美丽的;

(4) 若 m 是奇数,则 $2m$ 不是奇数;

(5) 每一个有理数是实数。

解:(1) 设 a:小张,$P(x)$:x 是工人,则有

$$\neg P(a)$$

(2) 设 a:他,$P(x)$:x 是田径运动员,$Q(x)$:x 是球类运动员,则有

$$P(a)\vee Q(a)$$

(3) 设 b:小莉,$R(x)$:x 是非常聪明的,$S(x)$:x 是美丽的,则有

$$R(b)\wedge S(b)$$

(4) 设 $J(x)$:x 是奇数,则有

$$J(m)\rightarrow\neg J(2m)$$

(5) 设 $Q(x)$:x 是有理数,$R(x)$:x 是实数,则有

$$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))$$

4. 找出以下句子所对应的谓词表达式:

(1) 所有教练员是运动员。($J(x)$,$L(x)$)

(2) 不是所有运动员都是教练。

(3) 某些运动员都是大学生。($S(x)$)

(4) 某些教练是年老的,但是是健壮的。($O(x)$,$V(x)$)

(5) 金教练既不老但也不是健壮的。(j)

解：(1)设 $J(x)$：x 是教练员，$L(x)$：x 是运动员，则有

$$\forall x J(x) \rightarrow L(x)$$

(2) 设 $J(x)$：x 是教练员，$L(x)$：x 是运动员，则有

$$\neg \forall x(L(x) \rightarrow J(x))$$

(3) 设 $L(x)$：x 是运动员，$S(x)$：x 是大学生，则有

$$\exists x(L(x) \land S(x))$$

(4) 设 $J(x)$：x 是教练，$O(x)$：x 是年老的，$V(x)$：x 是健壮的，则有

$$\exists x(J(x) \land O(x) \land V(x))$$

(5) 设 j：金教练，$O(x)$：x 是年老的，$V(x)$：x 是健壮的，则有

$$\neg O(j) \land \neg V(j)$$

5. 用谓词公式写出下式：

若 $x<y$ 和 $z<0$，则 $xz>yz$。

解：$P(x,y)$：$x<y$，则 $P(x,y) \land P(z,0) \rightarrow P(yz,xz)$。

6. 用谓词公式刻画下述命题：

那位戴眼镜的用功的大学生在看这本大而厚的巨著。

解：设 $S(x)$：x 是大学生，$E(x)$：x 是戴眼镜的，$F(x)$：x 是用功的，$R(x,y)$：x 在看 y，$G(y)$：y 是大的，$K(y)$：y 是厚的，$J(y)$：y 是巨著，a：这本，b：那位，则有：

$$E(b) \land F(b) \land S(b) \land R(b,a) \land G(a) \land K(a) \land J(a)$$

7. 对下面每个公式指出约束变元和自由变元：

(1) $(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$；

(2) $(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \land (\exists x)S(x)$；

(3) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \land Q(y)) \rightarrow (\forall x)R(x)$；

(4) $(\exists x)(\exists y)(P(x,y) \land Q(z))$。

解：(1) x 是约束变元，y 是自由变元：

(2) x 是约束变元。

(3) x 与 y 都是约束变元。

(4) x 与 y 都是约束变元，z 是自由变元。

8. 如果论域是集合 $\{a,b,c\}$，试消去下面公式中的量词：

(1) $(\forall x)P(x)$；

(2) $(\forall x)R(x) \land (\forall x)S(x)$；

(3) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$；

(4) $(\forall x)\neg P(x) \lor (\forall x)P(x)$。

解：(1) $\forall x P(x) \Leftrightarrow P(a) \land P(b) \land P(c)$。

(2) $(\forall x)R(x) \land \forall x S(x) \Leftrightarrow R(a) \land R(b) \land R(c) \land S(a) \land S(b) \land S(c)$。

(3) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Leftrightarrow(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c))$。

(4) $\forall x\neg P(x)\vee\forall xP(x)\Leftrightarrow(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))$。

9. 寻求下列各式的真假值。

(1) $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$，其中 $P(x):x=1$，$Q(x):x=2$，而且论域是$\{1,2\}$；

(2) $(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)$其中 $P:2>1$，$Q(x):x\leqslant 3$，$R(x):x>5$ 而 $a:5$，论域是$\{-2,3,6\}$。

解：(1) T　　　　(2) F

10. 对下列谓词公式中的约束变元进行换名：

(1) $\forall x\exists y(P(x,z)\rightarrow Q(y))\leftrightarrows S(x,y)$；

(2) $(\forall x(P(x)\rightarrow R(x)\vee Q(x))\wedge\exists xR(x))\rightarrow\exists zS(x,z)$。

解：(1) $\forall u\exists v(P(u,z)\rightarrow Q(v))\leftrightarrows S(x,y)$。

(2) $(\forall x(P(u)\rightarrow R(u)\vee Q(u))\wedge\exists vR(v))\rightarrow\exists wS(x,w)$。

11. 对下列谓词公式中的自由变元进行代入：

(1) $(\exists yA(x,y)\rightarrow\forall xB(x,z))\wedge\exists x\forall zC(x,y,z)$；

(2) $(\forall yP(x,y)\wedge\exists zQ(x,z))\vee\forall xR(x,y)$。

解：(1) $(\exists yA(u,y)\rightarrow\forall xB(x,v)\wedge\exists x\forall zC(x,w,z)$。

(2) $(\forall y(P(u,y)\wedge\exists zQ(v,z))\vee\forall xR(x,w)$。

12. 试证明等价式 E_{31} 至 E_{35} 和蕴涵式 I_{15}。

证明：(1) $\forall xA(x)\rightarrow B\Leftrightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B)$，

$$\begin{aligned}\forall xA(x)\rightarrow B&\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee B\\&\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee B\\&\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B)\\&\Leftrightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B)。\end{aligned}$$

(2) $\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$，

$$\begin{aligned}\exists x(A(x)\rightarrow B(x))&\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B(x))\\&\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)\\&\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)\\&\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)。\end{aligned}$$

(3) $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$。

设$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$为 F，则存在 $x_0\in D$，使 $A(x_0)\rightarrow B(x_0)$为 F，故存在 $x_0\in D$，使$A(x_0)$为 T，$B(x_0)$为 F，于是有$\exists xA(x)$为 T，$\forall xB(x)$为 F，所以$\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$为$F$，因此有$\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$。

13. 试证明$(\exists x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$。

证明：设$\exists xP(x)\wedge\forall xQ(x)$为 T，则$\exists xP(x)$为 T 且$\forall xQ(x)$为 T，可是存在 $x_0\in$

D，使 $P(x_0)$ 为 T 且对任意的 $x \in D$，使 $Q(x)$ 为 T，则存在 $x_0 \in D$，使 $P(x_0)$ 为 T 且 $Q(x_0)$ 为 T，即存在 $x_0 \in D$，使 $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ 为 T，故 $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 为 T，因此 $\exists xP(x) \wedge \forall xQ(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$。

14．证明下列各式：

(1)　$(\forall x)(\neg A(x) \rightarrow B(x)), (\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$；

(2)　$(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$；

(3)　$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), (\forall x)(C(x) \rightarrow \neg B(x)) \Rightarrow (\forall x)(C(x) \rightarrow \neg A(x))$；

(4)　$(\forall x)(A(x) \vee B(x)), (\forall x)(B(x) \rightarrow \neg C(x)), (\forall x)C(x) \Rightarrow (\forall x)A(x)$。

证明：

(1) 1)	$\forall x \neg B(x)$	P
2)	$\neg B(a)$	$US(1)$
3)	$(\forall x)(\neg A(x) \rightarrow B(x))$	P
4)	$\neg A(a) \rightarrow B(a)$	$US(3)$
5)	$A(a)$	$T(2)(4)I$
6)	$\exists xA(x)$	$EG(5)$
(2) 1)	$\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	P（附加前提）
2)	$\exists x \neg(A(x) \rightarrow B(x))$	$T(1)E$
3)	$\neg(A(c) \rightarrow B(c))$	$ES(2)$
4)	$A(c) \wedge \neg B(c)$	$T(3)E$
5)	$A(c)$	$T(4)I$
6)	$\neg B(c)$	$T(4)I$
7)	$\exists xA(x)$	$EG(5)$
8)	$\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$	P
9)	$\forall xB(x)$	$T(7)(8)I$
10)	$B(c)$	$US(9)$
11)	$\neg B(c) \wedge B(c)$（矛盾）	$T(6)(10)I$
(3) 1)	$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$	P
2)	$A(b) \rightarrow B(b)$	$US(1)$
3)	$\neg B(b) \rightarrow \neg A(b)$	$T(2)E$
4)	$\forall x(C(x) \rightarrow \neg B(x))$	P
5)	$C(b) \rightarrow \neg B(b)$	$US(4)$
6)	$C(b) \rightarrow \neg A(b)$	$T(3)(5)I$
7)	$\forall x(C(x) \rightarrow \neg A(x))$	$UG(6)$
(4) 1)	$\forall xC(x)$	P

2) $C(u)$ $US(1)$

3) $\forall x(B(x) \to \neg C(x))$ P

4) $B(u) \to \neg C(u)$ $US(3)$

5) $\neg B(u)$ $T(2)(4)I$

6) $\forall x(A(x) \vee B(x))$ P

7) $A(u) \vee B(u)$ $US(6)$

8) $A(u)$ $T(5)(7)I$

9) $\forall x A(x)$ $UG(8)$

15. 用 CP 规则证明

(1) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$；

(2) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$。

解：

(1) 1) $\forall xP(x)$ P(附加前提)

2) $P(a)$ $US(1)$

3) $\forall x(P(x) \to Q(x))$ P

4) $P(a) \to Q(a)$ $US(3)$

5) $Q(a)$ $T(2)(4)I$

6) $\forall xQ(x)$ $UG(5)$

7) $\forall xP(x) \to \forall xQ(x)$ CP

(2) 原题为 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg \forall xP(x) \to \exists xQ(x)$

1) $\neg \forall xP(x)$ P(附加前提)

2) $\exists x \neg P(x)$ $T(1)E$

3) $\neg P(a)$ $ES(2)$

4) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ P

5) $P(a) \vee Q(a)$ $US(4)$

6) $Q(a)$ $T(3)(5)I$

7) $\exists xQ(x)$ $EG(6)$

8) $\neg \forall xP(x) \to \exists xQ(x)$ CP

16. 将下列命题符号化

(1) 每一个人都爱自己的孩子；

(2) 科学家都教育自己的孩子成为科学家，有一个为教育他的孩子去做官，证明：这个人一定不是科学家；

(3) 假设有一个人被每一个喜欢某些人的人喜欢，又假设没有不喜欢人的人，证明：有一个人被所有的人喜欢；

(4) 每一个人的外祖父都是他母亲的父亲；

(5) 不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫；

(6) 有些病人相信所有的医生，但是病人都不相信一个骗子，证明：医生都不是骗子。

(7) 每一个有理数都是实数；

(8) 某些实数是有理数；

(9) 不是每一个实数都是有理数；

(10) 对平面上任意两点，有且只有一条直线通过这两点；

(11) 在实数集中，任给一正实数，都存在大于该实数的实数。

解：(1) $P(x)$：x 是人，$G(x)$：x 是孩子，$I(x,y)$：x 属于 y，$L(x,y)$：x 爱 y，则有：

$$\forall x \forall y(P(y) \wedge G(x) \wedge I(x,y) \rightarrow L(y,x))$$

(2) $S(x)$：x 是科学家，$E(x)$：x 教育他的孩子成为科学家，则有：

$$\forall x(S(x) \rightarrow E(x)) \wedge \exists x \neg E(x) \Rightarrow \exists x \neg S(x)$$

(3) $L(x,y)$：x 喜欢 y，则有：

$$\exists y \forall x(\exists z L(x,z) \rightarrow L(x,y)) \wedge \neg \exists x \forall y \neg L(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y L(y,x)$$

(4) $P(x)$：x 是人，$O(x,y)$：x 是 y 的外祖父，$F(x,y)$：x 是 y 的父亲，$M(x,y)$：x 是 y 的母亲，则有：

$$\forall x \forall y \forall z(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge O(x,y) \wedge M(z,y) \rightarrow F(x,z))$$

(5) $C(x)$：x 是猫，$B(x)$：x 是黑的，$W(x)$：x 是白的，$G(x)$：x 是好的，$M(x)$：x 是老鼠，$K(x,y)$：x 抓住 y，则有：

$$\forall x \forall y(C(x) \wedge M(y) \wedge (B(x) \vee W(x)) \wedge K(x,y) \rightarrow G(x))$$

(6) $P(x)$：x 是病人，$D(x)$：x 是医生，$Q(x)$：x 是骗子，$L(x,y)$：x 相信 y，则有：

$\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)) \Rightarrow \neg \forall x(D(x) \rightarrow Q(x))$。

(7) 设 $Q(x)$：x 是有理数，$R(x)$：x 是实数，则有：$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$。

(8) 设 $Q(x)$：x 是有理数，$R(x)$：x 是实数，则有：$\exists x(R(x) \wedge Q(x))$。

(9) 设 $Q(x)$：x 是有理数，$R(x)$：x 是实数，则有：$\neg \forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$。

(10) $P(x)$：x 是一个点，$L(x)$：x 是一条直线，$R(x,y,z)$：z 通过 x,y，$E(x,y)$：x 等于 y，则有：

$\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow \exists z(L(z) \wedge R(x,y,z) \wedge \forall u(L(u) \wedge R(x,y,u) \rightarrow E(u,z))))$。

(11) $R(x)$：x 是实数，$G(x,y)$：x 大于 y，则有：

$\forall x(R(x) \wedge G(x,0) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge G(y,x)))$。

17. 利用谓词公式翻译下列命题：

(1) 如果有限个数的乘积为零，那么至少有一个因子等于零；

(2)　对于每一个实数 x，存在一个更大的实数 y；

(3)　存在 x，y 和 z；使得 x 与 y 之和大于 x 与 z 之积；

(4)　每个数都有唯一的个数是它的后继数；

(5)　设有一个数，使数 1 是它的后继数；

(6)　每个不等于 1 的数，都有唯一的一个数是它的直接先行者。

解：(1)　设 $N(x)$：x 是有限个数的乘积，$E(y)$：y 为 0，$P(x)$：x 的乘积为零，$F(y)$：y 是乘积中的一个因子，则有：

$$\forall x(N(x) \land P(x) \rightarrow \exists y(F(y) \land E(y)))$$

(2)　设 $R(x)$：x 是实数，$Q(x,y)$：y 大于 x，则有：

$$\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(Q(x,y) \land R(y)))$$

(3)　设 $R(x)$：x 是实数，$G(x,y)$：x 大于 y，则有：

$$x \exists y \exists z(R(x) \land R(y) \land R(z) \land G(x+y, x \cdot z))$$

设 $N(x)$：x 是一个数，$S(x,y)$：y 是 x 的后继数(即 x 是 y 的直接先行者，这里 2 的直接先行者是 1)，则有：

(4)　$\forall x(N(x) \rightarrow \exists!\, y(N(y) \land S(x,y)))$。

(5)　$\neg \exists x(N(x) \land S(x,1))$。

(6)　$\forall x(N(x) \land \neg S(x,2) \rightarrow \exists!\, y(N(y) \land S(y,x)))$。

18. 若 $\exists x(P(x) \land Q(x))$，$\exists y(P(y) \land R(y)$ 在某解释 I 下取 T 值，则 $\exists z(Q(z) \land R(z))$ 是否在 I 下取 T 值？其中 P，Q，R 的论域中有两个元素，若将存在量词都换成全称量词，结果怎样？

解：不妨设论域 $D=\{a,b\}$，则

$\exists x(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow (P(a) \land Q(a)) \lor (P(b) \land Q(b))$，

$\exists y(P(y) \land R(y)) \Leftrightarrow (P(a) \land R(a)) \lor (P(b) \land R(b))$，

$\forall x(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow P(a) \land Q(a) \land P(b) \land Q(b)$，

$\forall y(P(y) \land R(y)) \Leftrightarrow P(a) \land R(a) \land P(b) \land R(b)$。

由上述四个等价式可知，在 I 下，$\exists z(Q(z) \land R(z))$ 未必取 T 值，$\forall z(Q(z) \land R(z))$ 必取 T 值。

19. 改正下题证明中的错误：

$\forall x(\exists y(S(x,y) \land M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \land R(x,z))) \Rightarrow \neg \exists z P(z) \rightarrow \forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$

(1)	$\forall x(\exists y(S(x,y) \land M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \land R(x,z)))$	P
(2)	$\exists y(S(b,y) \land M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \land R(b,z))$	$US(1)$
(3)	$\neg \exists z P(z)$	P(附加前提)
(4)	$\forall z \neg P(z)$	$T(3)E$

(5) $\neg P(a)$ $US(4)$

(6) $\neg P(a) \vee \neg R(b,a)$ $T(5)I$

(7) $\forall z(\neg P(z) \vee \neg R(b,z))$ $UG(6)$

(8) $\neg \exists z(P(z) \wedge R(b,z))$ $T(7)E$

(9) $\neg \exists y(S(b,y) \wedge M(y))$ $T(2)(8)I$

(10) $\forall y(\neg S(b,y) \vee \neg M(y))$ $T(9)E$

(11) $\forall y\ (S(b,y) \rightarrow \neg M(y))$ $T(10)E$

(12) $\forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$ $UT(11)$

(13) $\neg \exists z P(z) \rightarrow \forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$ CP

解：带量词的谓词公式，在进行逻辑推证时，一般不能在量词后面的辖域内进行蕴涵推证或等价变换，如$\forall z(\neg P(z) \vee \neg R(b,z)) \Leftrightarrow \forall z \neg(P(z) \wedge \neg R(b,z))$，但在推理中不能作为公式引用，本题的正确证明如下：

(1) $\forall x(\exists y(S(x,y) \wedge M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \wedge R(x,z)))$ P

(2) $\exists y(S(b,y) \wedge M(y)) \rightarrow \exists z(P(z) \wedge R(b,z))$ $US(1)$

(3) $\neg \exists z P(z)$ P(附加前提)

(4) $\forall z \neg P(z)$ $T(3)E$

(5) $\neg P(a)$ $US(4)$

(6) $\neg P(a) \vee \neg R(b,a)$ $T(5)I$

(7) $\neg(P(a) \wedge R(b,a))$ $T(6)E$

(8) $\forall z\ (\neg P(z) \vee \neg R(b,z)$ $UG(7)$

(9) $\neg \exists z(P(z) \wedge R(b,z))$ $T(8)E$

(10) $\neg \exists y(S(b,y) \wedge M(y))$ $T(2)(9)I$

(11) $\forall y \neg(S(b,y) \wedge M(y))$ $T(10)I$

(12) $\neg(S(b,c) \wedge M(c))$ $US(11)$

(13) $\neg S(b,c) \rightarrow \neg M(c)$ $T(12)E$

(14) $S(b,c) \rightarrow \neg M(c)$ $T(13)E$

(15) $\forall y(S(b,y) \rightarrow \neg M(y))$ $UG(14)$

(16) $\forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$ $UG(15)$

(17) $\neg \exists z P(z) \rightarrow \forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow \neg M(y))$ CP

20. 用推理规则证明：$\exists x P(x) \rightarrow \forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)) \wedge \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x \exists y(R(x) \wedge R(y))$。

证明：

(1) $\exists x P(x) \rightarrow \forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$ P

(2) $\exists x P(x)$ P

(3) $\forall x((P(x) \vee Q(x)) \to R(x))$ $T(1)(2)I$

(4) $P(a)$ $ES(2)$

(5) $(P(a) \vee Q(a)) \to R(a)$ $US(3)$

(6) $P(a) \vee Q(a)$ $T(4)I$

(7) $R(a)$ $T(5)(6)I$

(8) $\exists x Q(x)$ P

(9) $Q(b)$ $ES(8)$

(10) $(P(b) \vee Q(b)) \to R(b)$ $US(3)$

(11) $Q(b) \vee P(b)$ $T(9)I$

(12) $R(b)$ $T(10)(11)I$

(13) $R(a) \wedge R(b)$ $T(7)(12)I$

(14) $\exists y(R(a) \wedge R(y))$ $EG(13)$

(15) $\exists x \exists y(R(x) \wedge R(y))$ $EG(14)$

21.用推理规则证明下式：

前提：$\exists x(F(x) \wedge S(x)) \to \forall y(M(y) \to W(y))$，

$\exists y(M(y) \wedge \neg W(y))$，

结论：$\forall (xF(x) \to \neg S(x))$。

证明：

(1) $\exists y(M(y) \wedge \neg W(y))$ P

(2) $M(c) \wedge \neg W(c)$ $ES(1)$

(3) $\neg M(c) \to W(c))$ $T(2)E$

(4) $\exists y \neg(M(y) \to W(y))$ $EG(3)$

(5) $\neg \forall y(M(y) \to W(y))$ $T(4)E$

(6) $\exists x(F(x) \wedge S(x)) \to \forall y(M(y) \to W(y))$ P

(7) $\neg \exists x(F(x) \wedge S(x))$ $T(5)(6)I$

(8) $\forall x \neg(F(x) \wedge S(x))$ $T(7)E$

(9) $\neg(F(a) \wedge S(a))$ $US(8)$

(10) $\neg F(a) \vee \neg S(a)$ $T(9)E$

(11) $F(a) \to \neg S(a)$ $T(10)E$

(12) $\forall x(F(x) \to \neg S(x))$ $UG(11)$

22.符号化下列命题，并推证其结论：

(1) 所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此，某些实数是整数。

(2) 任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车，每一个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

(3) 每个大学生，不是文科学生，就是理科学生，有的大学生是优等生，小张是理工科学生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科生。

解：(1) 设 $R(x)$：x 是实数，$Q(x)$：x 是有理数，$I(x)$：x 是整数，
本题符号化为：

$\forall x(Q(x)\rightarrow R(x))\wedge\exists x(Q(x)\wedge I(x))\Rightarrow\exists x(R(x)\wedge I(x))$

①	$\exists x(Q(x)\wedge I(x))$	P
②	$Q(a)\wedge I(a)$	ES①
③	$\forall x\ (Q(x)\rightarrow R(x))$	P
④	$Q(a)\rightarrow R(a)$	US③
⑤	$Q(a)$	T②I
⑥	$R(a)$	T④⑤I
⑦	$I(a)$	T②I
⑧	$R(a)\wedge I(a)$	T⑥⑦I
⑨	$\exists x(R(x)\wedge I(x))$	EG⑧

(2) 设 $P(x)$：x 喜欢步行，$Q(x)$：x 喜欢乘汽车，$R(x)$：x 喜欢乘自行车，
本题符号化为：

$\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))\wedge\forall x(Q(x)\vee R(x))\wedge\exists x\neg R(x)\Rightarrow\exists x\neg P(x)$

①	$\exists x\neg R(x)$	P
②	$\neg R(a)$	ES①
③	$\forall x(Q(x)\vee R(x))$	P
④	$Q(a)\vee R(a)$	US③
⑤	$Q(a)$	T②④I
⑥	$\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$	P
⑦	$P(a)\rightarrow\neg Q(a)$	US⑥
⑧	$\neg P(a)$	T ⑤⑦I
⑨	$\exists x\neg P(x)$	EG ⑧

(3) 设 $G(x)$：x 是大学生，$L(x)$：x 是文科学生，$P(x)$：x 是理工科学生，$S(x)$：x 是优秀生，a：小张，
本题符号化为：

$\forall x(G(x)\rightarrow L(x)\vee P(x))\wedge\exists x(G(x)\wedge S(x))\wedge\neg P(a)\wedge S(a)\Rightarrow G(a)\rightarrow L(a)$

①	$G(a)$	P(附加前提)
②	$\forall x(G(x)\rightarrow L(x)\vee P(x))$	P
③	$G(a)\rightarrow L(a)\vee P(a)$	US②
④	$L(a)\vee P(a)$	T①③I

⑤ $\neg P(a)$ P

⑥ $L(a)$ T④⑤I

⑦ $G(a)\rightarrow L(a)$ CP

注意：本题在推证过程中未用到前提$\exists x(G(x)\wedge S(x))$以及$S(a)$，主要是$S(x)$：$x$是优秀生，这个条件与其他前提的联系对证明结论没有影响，因$S(x)$与其他前提不矛盾，故本题推证仍是有效的。

23. 设$\exists x\forall yM(x,y)$是公式G的前束范式，其中$M(x,y)$是仅仅包含变量x,y的母式，设f是不出现在$M(x,y)$中的函数符号，证明：G是恒真的当且仅当$\exists xM(x,f(x))$是恒真的。

证明：充分性，要证G是恒真的，即证$\neg\exists x\forall yM(x,y)$是恒假的，假设$\neg\exists x\forall yM(x,y)\Leftrightarrow\forall x\exists y\neg(x,y)$不是恒假的，则存在某个解释$I$，使$\forall x\exists y\neg M(x,y)$的真值为$T$，则对每个$x_0\in D$，$\exists y\neg M(x_0,y)$为$T$，则对每个$x_0\in D$，存在$y_0\in D$，使$\neg M(x_0,y_0)$为$T$，由此可定义一个函数$f$：对每个$x_0\in D$，存在$y_0\in D$，使$\neg M(x_0,y_0)$为$T$，令$y_0=f(x_0)$，于是，对每个$x_0\in D$，$M(x_0,f(x_0))$为$F$，则$\exists xM(x,f(x))$为$F$，与$\exists xM(x,f(x))$为恒真的矛盾。

必要性，设I为任一解释，则在I下，$\exists x\forall yM(x,y)$为T，即存在$x_0\in D$，$\forall yM(x_0,y)$为T，故对每一个$y\in D$，$M(x_0,y)$为T，特别地，对于$y_0=f(x_0)\in D$，亦有$M(x_0,f(x_0))$为T，所以$\exists xM(x,f(x))$为T，由I的任意性，有$\exists xM(x,f(x))$为恒真的。

自测题及答案(第四篇)

(一) 填空题。(36分)

1. 我们规定逻辑连接符$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrows$的运算次序依次是_____，_____，_____。

2. 设G是公式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$是G中的所有变量，给$P_1,P_2,\cdots,P_n$任意指定一组真值，则称作的G一个_____，G在它的所有_____下的真值所成的表格称为_____。

3. 设G是恒假的当且仅且当G在其所有解释下均为_____，当且仅当G主析取范式为_____，主合取范式包含所有的_____。

4. 合取范式是恒真的当且仅当构成它的每一个_____都至少包含一个_____。析取范式是恒假的当且仅当构成它的每一个_____都至少包含一个_____。

5. 任意命题公式都存在与之等价的_____，都有唯一的与之等价的_____。

6. 设$A_1,A_2,\cdots,A_n,B$是公式，$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\rightarrow B$恒真，则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$_____$B$，$B$是$A_1,A_2,\cdots,A_n$的_____，也称从$A_1,A_2,\cdots,A_n$_____$B$，记为_____。

(二) 判断题。(36分)

1. 使用真值表判断下列公式是否是恒真式、恒假式或可满足式：

(1) $(P \leftrightarrows Q) \wedge (\neg Q \to R)$;

(2) $Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$;

(3) $\neg(P \to (Q \to P)) \leftrightarrows (\neg P \to (P \to \neg Q))$。

2. 使用真值表判断下列每组公式中前一个公式与后一个(或二个)公式是否是等价的,为什么?

(1) $P \to (Q \to R)$,$Q \to (P \to R)$,$\neg R \to (Q \to \neg P)$;

(2) $\neg(P \leftrightarrows Q)$,$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$,$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$;

(3) $P \to (Q \vee R)$,$(P \wedge \neg Q) \to R$。

3. 使用真值表判断下列每组公式中前一个公式是否可以推出后一个公式?为什么?

(1) $(P \to Q) \to (Q \to R)$,$(P \to R)$;

(2) $P \wedge Q \vee R$,$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;

(3) $Q \to R$,$(P \vee Q) \to (P \vee R)$。

4. 判断下列公式哪些是子句、短语、析取范式、合取范式、主析取范式、主合取范式?

① $P \vee \neg Q$; ② $\neg P \vee Q \vee \neg R$;

③ $\neg P \wedge \neg Q$; ④ $P \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$;

⑤ $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$;

⑥ $(P \vee \neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee R \vee \neg R)$;

⑦ $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg R)$;

⑧ $((\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg R \wedge Q) \vee (R \wedge \neg R)$;

⑨ $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$;

⑩ $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$。

5. 求$(\neg P \to R) \wedge (P \leftrightarrows Q)$的主合取范式和主析取范式。

6. 求范式判断公式$(P \to Q) \to P$是否是恒真式、恒假式或可满足式?

(三) 计算与证明题。(28 分)

1. 写出下列各式的真值表。

(1) $\neg P \wedge Q$; (2) $(P \to Q) \to (P \wedge Q)$。

2. 证明:命题 $P \vee \neg(P \wedge Q)$是恒真式。

3. 证明:德·摩根规则:

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

4. 证明:$Q \to (P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q \to P$。

【自测题答案】

（一） 填空题

1. $\neg$;$\wedge$、$\vee$;$\rightarrow$、$\leftrightarrows$

2. 解释;解释;真值表

3. 假;F;极大项

4. 子句;互补对;短语;互补对

5. 析取范式和合取范式;主析取范式和主合取范式

6. 蕴涵;逻辑结果;可以推出;$A_1, A_2, \cdots, A_n \Leftrightarrow B$

（二） 判断题

1.(1)

P	Q	R	$(P \leftrightarrows Q) \wedge (\neg Q \rightarrow R)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

是可满足的

(2)

P	Q	$Q \vee \neg((\neg P \vee Q) \wedge P)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	T	T
F	F	T

是恒真的

(3)

P	Q	$\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \leftrightarrows (\neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q))$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

是恒假的

2.(1)

P	Q	R	$\neg R\to(Q\to\neg P)$	$P\to(Q\to P)$	$Q\to(P\to R)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

是等价的

(2)

P	Q	$\neg(P\leftrightarrows Q)$	$(P\wedge Q)\wedge\neg(P\wedge Q)$	$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	F

是等价的

(3)

P	Q	R	$P\to(Q\vee R)$	$(P\wedge\neg Q)\to R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

是等价的

3.(1)

P	Q	R	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$	$P\to R$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

可以

(2)

P	Q	R	$P\wedge Q\vee R$	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

不可以

P	Q	R	$Q\rightarrow R$	$(P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

可以

4. ①②是子句，③④是短语，①②③④⑦⑧⑩是析取范式，①②③④⑤⑥⑨是合取范式，①②⑨是主合取范式，③⑩是主析取范式。

5.

P	Q	R	$(\neg P\rightarrow R)\wedge(P\leftrightarrows Q)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

主析取范式为：$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$。

主合取范式为：$(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$。

6. $(P\rightarrow Q)\rightarrow P\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee P\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee P\Leftrightarrow P$，是可满足的。

（三） 计算与证明题

1.（1） **解**：

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

（2） **解**：

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge Q$	$(P \to Q) \to (P \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

2. **证明**：构造 $P \vee \neg(P \wedge Q)$的真值表

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \vee \neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

3. **证明**:构造真值表：

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

4. **证明**:构造真值表：

P	Q	$Q \to (P \vee (P \wedge Q))$	$Q \to P$	$Q \to (P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrows (Q \to P)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

参考文献

[1] 赵树春. 离散数学[M]. 长春：吉林科学技术出版社，1992.

[2] 左孝凌. 离散数学[M]. 上海：上海科学技术文献出版社，1982.

[3] F 哈拉里. 图论[M]. 李慰萱，译. 上海：上海科学技术出版社，1980.

[4] R Z Norman，D Cartwright. Structural Model：an introduction to the theory of directed graphs[M]. New York：Wiley，1965.