Sorbonne Université - Université Paris Cité — Année 2021-2022
Option B
Préparation à l'agrégation de mathématiques

TP : Equations différentielles

Dans ce TP, on aura besoin des modules suivants :

```
import numpy as np
import scipy as sc
import numpy.linalg as LA
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integrate
```

Le dernier module sera utilisé pour résoudre des équations différentielles avec la commande `odeint`.

Exercice 1 Schéma d'Euler, calcul d'erreur

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) & = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = 2x(t) + y(t) \end{array} \right.$$

sur l'intervalle $[0, 1]$ avec la condition initiale $x(0) = 5$ et $y(0) = 0$.

1. Faire un programme afin de déterminer la solution approchée de ce système à l'aide d'un schéma d'Euler explicite.
2. En prenant un pas de temps $\Delta t = 0.01$, tracer la solution approchée de ce système en fonction du temps.
3. On rappelle que la solution exacte de ce système est donnée par $x(t) = \frac{5}{2}(e^{-t} + e^{3t})$ et $y(t) = \frac{5}{2}(-e^{-t} + e^{3t})$. Comparer graphiquement la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs de Δt.
4. Pour $0 \leq n \leq N$, on note $t_n = n\Delta t$ les points de discrétisation et X_n la solution approchée au temps t_n. Écrire une routine calculant l'erreur $\max_{0\leq n\leq N} \|X(t_n) - X_n\|_\infty$. On pourra utiliser la commande `norm` du module `numpy.linalg` (avec l'option `np.inf`).
5. Tracer l'erreur en fonction de Δt en échelle logarithmique.
6. Utiliser la commande `np.polyfit` pour déterminer la droite qui approche au sens des moindres carrés les points de la courbe tracée à la question précédente (il s'agit de la droite de régression).
7. On observe que la pente de la droite est proche de 1. Comment l'interpréter ?
8. Reprendre les trois dernières questions pour le schéma du point milieu défini dans l'exercice 4.

Exercice 2 Étude d'un pendule : Portrait de phase

On considère un pendule de longueur l. L'évolution de θ l'angle du pendule par rapport à la verticale est donnée par l'équation suivante :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0.$$

On définit $\omega = \theta'$, on a ainsi le système

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\dfrac{g}{l}\sin(\theta(t)). \end{cases}$$

On suppose que $\theta(0)$ et $\omega(0)$ sont donnés. On veut tracer le portrait de phase de ce problème pour les paramètres $l = 5$ et $g = 9.81$.

1. Tracer la solution de ce problème dans le plan des phases pour la donnée initiale $(\theta(0), \omega(0)) = (\theta_0, 0)$ avec $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ (prendre de nombreuses valeurs de θ_0 et tracer toutes les solutions sur le même graphe). On pourra résoudre le système en utilisant la commande `odeint` du module `scipy.integrate`.

   > La syntaxe pour la commande `odeint` est :
   > ```
   > sol=integrate.odeint(f,X0,t)
   > ```
   > où
   > • `f` a été définie de la façon suivante :
   > ```
   > def f(X,t): ...
   > ```
   > (même si `f` ne dépend pas de `t`, il faut que l'argument apparaisse en seconde position en entrée).
   > • `X0` correspond à la condition initiale
   > • `t` est le vecteur contenant les temps en lesquels la solution est évaluée (le premier cœfficient du vecteur est le temps initial)
   > • `sol` est le vecteur contenant les valeurs prises par la solution évaluée aux temps du vecteur `t`.

2. Pour compléter le portrait de phase, ajouter plusieurs courbes issues des données initiales $(-\pi, \omega_0)$ avec $\omega_0 > 0$ et $(3\pi, \omega_0)$ avec $\omega_0 < 0$.
3. Ajouter les points critiques sur cette figure.
4. Faisons maintenant un zoom près du point $(0, 0)$. Sur une autre figure, représenter le diagramme des phases près du point $(0, 0)$. Ajouter les isoclines.
5. Enfin, nous allons représenter f sur cette figure. Pour cela, on pourra utiliser les commandes `np.meshgrid`, `np.hypot` et `plt.quiver`.

   NB : si vous essayez de représenter f comme ici sur la première figure, vous pourriez avoir des difficultés dues au fait que ω et θ n'ont pas le même ordre de grandeur.

Exercice 3 Schémas implicites

Dans cet exercice, nous allons utiliser les schémas d'Euler implicite et de Crank–Nicolson pour résoudre le problème de l'exercice 1.

1. Coder une routine `Newton(F,dF,X0,tol,maxiter)` qui renvoie la solution $X \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $F(X) = 0$ calculée par la méthode de Newton (`dF` est la jacobienne de `F`).
2. En utilisant la question précédente, coder le schéma d'Euler implicite donné par $X_{n+1} = X_n + hf(t_{n+1}, X_{n+1})$.
3. Coder le schéma de Crank–Nicolson donné par $X_{n+1} = X_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, X_{n+1}) + f(t_n, X_n))$.
4. Retrouver numériquement les taux de convergence de ces deux schémas (voir la fin de l'exercice 1).

Exercice 4 Étude d'un pendule : simulations numériques.

Reprenons le système considéré dans l'exercice 2. Pour résoudre ce problème sur $[0, T]$, on prend $N \in \mathbb{N}^*$, puis on définit le pas de discrétisation $h = \frac{T}{N}$ et les temps de discrétisation $t_n = nh$ pour $0 \leq n \leq N$.

1. Déterminer la solution approchée de ce système à l'aide d'un schéma d'Euler explicite :
$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + h\omega_n \\ \omega_{n+1} = \omega_n - h\dfrac{g}{l}\sin(\theta_n). \end{cases}$$
On prendra $T = 12,\ N = 200,\ l = 5,\ g = 9.81$ et les conditions initiales $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$, $\omega(0) = 0$.
2. Tracer θ et ω en fonction du temps.
3. Mettre en œuvre le schéma du point-milieu.

   Le **schéma du point-milieu** pour approcher l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ est donné par :
$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$$
4. Comparer la solution donnée par la fonction `odeint` et les solutions données par ces deux méthodes (on présentera θ et ω sur deux graphes différents).
5. Comparer les solutions sur le portrait de phases.
6. Refaire les questions précédentes avec la méthode d'Euler implicite (et comparer).

Exercice 5 Système de Lotka-Volterra

On considère le système de Lotka-Volterra sur l'intervalle $[0, 30]$:
$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)(2 - y(t)/10) \\ y'(t) &= y(t)(x(t)/10 - 4) \end{cases}$$
avec les conditions initiales $x(0) = 100$ et $y(0) = 70$.

1. Tracer x et y en fonction du temps.
2. Tracer la solution dans le plan de phase.
3. Tracer les isoclines dans le plan de phase.
4. Ajouter d'autres orbites dans le plan de phase.
5. Représenter f pour compléter le diagramme de phase.