Sorbonne Université - Université Paris Cité — Année 2021-2022
Option B
Préparation à l'agrégation de mathématiques

TP : Equations différentielles

Dans ce TP, on aura besoin des modules suivants :

```
import numpy as np
import scipy as sc
import numpy.linalg as LA
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integrate
```

Le dernier module sera utilisé pour résoudre des équations différentielles avec la commande `odeint`.

Exercice 1 Schéma d'Euler, calcul d'erreur
On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) & = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) & = 2x(t) + y(t) \end{array} \right.$$

sur l'intervalle $[0, 1]$ avec la condition initiale $x(0) = 5$ et $y(0) = 0$.

1. Faire un programme afin de déterminer la solution approchée de ce système à l'aide d'un schéma d'Euler explicite.
2. En prenant un pas de temps $\Delta t = 0.01$, tracer la solution approchée de ce système en fonction du temps.
3. On rappelle que la solution exacte de ce système est donnée par $x(t) = \frac{5}{2}(e^{-t} + e^{3t})$ et $y(t) = \frac{5}{2}(-e^{-t} + e^{3t})$. Comparer graphiquement la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs de Δt.
4. Pour $0 \leq n \leq N$, on note $t_n = n\Delta t$ les points de discrétisation et X_n la solution approchée au temps t_n. Écrire une routine calculant l'erreur $\max_{0 \leq n \leq N} \|X(t_n) - X_n\|_\infty$. On pourra utiliser la commande `norm` du module `numpy.linalg` (avec l'option `np.inf`).
5. Tracer l'erreur en fonction de Δt en échelle logarithmique.
6. Utiliser la commande `np.polyfit` pour déterminer la droite qui approche au sens des moindres carrés les points de la courbe tracée à la question précédente (il s'agit de la droite de régression).
7. On observe que la pente de la droite est proche de 1. Comment l'interpréter ?
8. Facultatif : reprendre les trois dernières questions pour le schéma du point milieu défini dans l'exercice 4.

Exercice 2 Portrait de phase, stabilité des points critiques
On considère le problème suivant sur l'intervalle $[0, 10]$:

$$\begin{cases} x'(t) & = -2x(t) - y(t) + 6 \\ y'(t) & = 3x(t) - 4y(t) - 7 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $(x(0), y(0)) = (3, 1)$.

1. Déterminer numériquement les solutions de ce système en utilisant la commande `odeint` du module `scipy.integrate`.

> La syntaxe pour la commande `odeint` est :
> `sol=integrate.odeint(f,X0,t)`
> où
> • `f` a été définie de la façon suivante :
> `def f(X,t): ...`
> (même si `f` ne dépend pas de `t`, il faut que l'argument apparaisse en seconde position en entrée).
> • `X0` correspond à la condition initiale
> • `t` est le vecteur contenant les temps en lesquels la solution est évaluée (le premier cœfficient du vecteur est le temps initial)
> • `sol` est le vecteur contenant les valeurs prises par la solution évaluée aux temps du vecteur `t`.

2. Tracer x et y en fonction du temps.
3. Tracer la solution dans le plan de phases.
4. Tester différentes conditions initiales.
5. Calculer à la main les points critiques de ce système. Etudier leur stabilité. Ce résultat est-il cohérent avec le comportement observé numériquement ?

Exercice 3 Système de Lotka-Volterra
On considère le système de Lotka-Volterra sur l'intervalle $[0, 30]$:

$$\begin{cases} x'(t) & = x(t)(2 - y(t)/10) \\ y'(t) & = y(t)(x(t)/10 - 4) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 100$ et $y(0) = 70$.

1. Tracer x et y en fonction du temps.
2. Tracer la solution dans le plan de phase.
3. Tracer les isoclines dans le plan de phase.
4. Tester d'autres conditions initiales.

Exercice 4 On considère un pendule de longueur l. L'évolution de θ l'angle du pendule par rapport à la verticale est donnée par l'équation suivante :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0.$$

On définit $\omega = \theta'$, on a ainsi le système

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{g}{l}\sin(\theta(t)). \end{cases}$$

On suppose que $\theta(0)$ et $\omega(0)$ sont donnés. Pour résoudre ce problème sur $[0, T]$, on prend $N \in \mathbb{N}^*$, puis on définit le pas de discrétisation $h = \frac{T}{N}$ et les temps de discrétisation $t_n = nh$ pour $0 \leq n \leq N$.

1. Déterminer la solution approchée de ce système à l'aide d'un schéma d'Euler explicite :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + h\omega_n \\ \omega_{n+1} = \omega_n - h\frac{g}{l}\sin(\theta_n). \end{cases}$$

   On prendra $T = 2,\ N = 200,\ l = 0.1,\ g = 9.81$ et les conditions initiales $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$, $\omega(0) = 0$.

2. Tracer θ et ω en fonction du temps.
3. Mettre en œuvre le schéma du point-milieu.

Le **schéma du point-milieu** pour approcher l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ est donné par : $$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$$

4. Comparer la solution donnée par la fonction `odeint` et les solutions données par ces deux méthodes (on présentera θ et ω sur deux graphes différents).
5. Comparer les solutions sur le portrait de phases.