Examen

Exercice 1 *Discrétisation par éléments finis (environ 10 pts)*

On note $\Omega =]0,1[$. On s'intéresse au problème

$$-u'' = f \text{ dans } \Omega \tag{1}$$
$$u'(0) = u(0), \tag{2}$$
$$u'(1) = -u(1), \tag{3}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée.

(a) Prouver que toute solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (1)–(3) est aussi solution de la formulation variationnelle suivante:

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } a(u,v) = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{4}$$

où $a(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + u(0)v(0) + u(1)v(1)$.

(b) On se donne l'inégalité de Poincaré suivante: il existe $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 (v(x))^2 dx \le C\Big(v(0)^2 + v(1)^2 + \int_0^1 (v'(x))^2 dx\Big).$$

On se donne également l'inégalité de trace : il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall v \in H^1(0,1), |v(0)| + |v(1)| \le C\|v\|_{H^1}$. En déduire que si $f \in L^2(\Omega)$, alors le problème (4) admet une unique solution.

(c) Proposer une discrétisation éléments finis du problème considéré. On rappelera la définition des points de discrétisation et de l'espace de fonctions utilisé.

(d) Montrer que le problème éléments finis admet une unique solution (on suppose à nouveau $f \in L^2(\Omega)$).

(e) Donner l'écriture algébrique du problème éléments finis (le système linéaire à résoudre pour trouver la solution). On ne vous demande **pas** de calculer les coefficients de la matrice.

Exercice 2 *Discrétisation par différences finies (environ 10 pts)*

On se place dans le domaine temporel $]0,T[$ $(T>0)$ et spatial $]0,1[$. On veut discrétiser l'équation de la chaleur avec conditions aux limites périodiques

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=0 \qquad \text{sur }]0,T[\times]0,1[,\\ u(t,0)=u(t,1)& \qquad \forall t\in[0,T],\\ u(0,x)=u_0(x)& \qquad \forall x\in[0,1].\end{aligned}$$

Pour cela, on discrétise l'espace par $M+1$ points $x_j=jh_x$ $(h_x=1/M)$ et le temps par $N+1$ points $t_n=nh_t$ $(h_t=T/N)$. On considère le schéma donné par

$$\begin{aligned}&u_j^{n+1}=u_j^n+\frac{h_t}{2h_x^2}(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}+u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n),\\ &u_0^n=u_M^n \qquad \text{pour tout } n\in[\![0,N]\!]\\ &u_j^0=u_0(x_j) \qquad \text{pour tout } j\in[\![0,M]\!]\end{aligned}$$

(a) Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

(b) **Stabilité :** On s'intéresse à la stabilité de Von Neumann de ce schéma.

- Donner l'expression de $\mathcal{A}_j(k)$ tel que $u_j^{n+1}=\mathcal{A}_j(k)u_j^n$ (en supposant que $u_j^n=e^{2i\pi kx_j}$ et $u_j^{n+1}=\mathcal{A}_j(k)e^{2i\pi kx_j}$)
- Calculer $|\mathcal{A}_j(k)|^2$. En déduire que le schéma est stable au sens de Von Neumann. A-t-on besoin d'une condition de CFL ?

(c) **Consistance :** On va montrer que ce schéma est consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace.

Pour simplifier, on note $\partial_t u=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\partial_{xx}^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

- Donner l'expression de l'erreur de consistance.
- Montrer que $u(t,x_{j+1})-2u(t,x_j)+u(t,x_{j-1})=h_x^2\partial_{xx}^2u(t,x_j)+O(h_x^4)$ pour $t\in\{t_n,t_{n+1}\}$.
- Montrer que $u(t_{n+1},x_j)-u(t_n,x_j)=h_t\partial_t u(t_n+\frac{h_t}{2},x_j)+O(h_t^3)$.
- Montrer que $\partial_{xx}^2u(t_{n+1},x_j)+\partial_{xx}^2u(t_n,x_j)=2\partial_{xx}^2u(t_n+\frac{h_t}{2},x_j)+O(h_t^2)$.
- En déduire que le schéma est d'ordre 2 en espace et en temps.

Corrigé 1

(a) Soit u une solution $C^2(\overline{\Omega})$ de (1)–(3). Pour $v \in H^1(\Omega)$, on multiplie l'équation par v et on intègre sur le domaine. On a

$$\int_\Omega -u''v = \int_\Omega fv.$$

Puis en intégrant par parties (et en utilisant $u'(0) = u(0)$ et $u'(1) = -u(1)$) on obtient

$$\int_\Omega u'v' - [u'v]_0^1 = \int_\Omega fv,$$
$$\int_\Omega u'v'dx + u(0)v(0) + u(1)v(1) = \int_\Omega fv.$$

De plus, toute fonction fortement dérivable est aussi faiblement dérivable, et toute fonction continue sur un compact K est dans $L^2(K)$. On a donc $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. On a donc montré que u est solution du problème (4).

[2 pts]

(b) Montrons que toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées:

• On rappelle que $V = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(u, v)_{H^1} = \int_\Omega (u'v' + uv)$.

• $\ell(v) = \int_0^1 fv$ est bien une forme linéaire sur V (pas besoin de détailler cette partie). Si $f \in L^2(0, 1)$, alors ℓ est continue car

$$|\ell(v)| = \left|\int_\Omega fv\right| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1},$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• a est une forme bilinéaire sur V. Elle est continue car

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left|\int_\Omega u'v'dx + u(0)v(0) + u(1)v(1)\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega u'v'\right| + |u(0)||v(0)| + |u(1)||v(1)| \\
&\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + 2C^2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \leq (1 + 2C^2)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de trace.

• a est coercive car pour $v \in H^1(0,1)$, on a $a(v,v) = \int_0^1 (v')^2 dx + v(0)^2 + v(1)^2$. Donc $\|v'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (v')^2 \leq a(v,v)$. De plus, l'inégalité de Poincaré correspond à

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq Ca(v,v).$$

On a donc

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 \leq (1+C)a(v,v).$$

La forme bilinéaire a est donc coercive.

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, le problème (4) admet une unique solution.

[4 pts]

(c) Le problème éléments finis associé est

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

avec

$$V_h := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_{[x_{j-1},x_j]} \text{ est affine pour } j \in [\![1, M]\!]\},$$

et les points de discrétisation sont définis par $x_j = jh$ et $h = 1/M$ avec M le nombre de sous-intervalles considérés.

[1 pt]

(d) On rappelle que V_h est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $H^1(0,1)$, c'est donc un Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^1}$. On a déjà montré les autres hypothèses du théorème de Lax-Milgram dans les questions précédentes. Le problème éléments finis admet donc une unique solution.

[1 pt]

(e) On a $u_h \in V_h$, on peut donc décomposer

$$u_h = \sum_{j=0}^{M} u_h(x_j)\Phi_j,$$

avec $(\Phi_j)_{0\leq j\leq M}$ la base canonique de V_h définie par $\Phi_j(x_k) = \delta_{jk}$.

On a donc, par linéarité,

$$\sum_{j=0}^{M} u_h(x_j)a(\Phi_j, v_h) = \ell(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h.$$

En prenant $v_h = \Phi_i$, on obtient

$$\sum_{j=0}^{M} u_h(x_j)a(\Phi_j, \Phi_i) = \ell(\Phi_i) \qquad \forall i \in [\![0, M]\!].$$

Ceci revient à résoudre le système linéaire

$$AU = F,$$

avec $a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i)$ et $F_i = \ell(\Phi_i)$ pour déterminer les coefficients de u_h dans la base : $U_i = u_h(x_i)$.

[2 pts]

Corrigé 2

(a) Plusieurs termes au temps t_{n+1} sont présents dans la définition du schéma. Ainsi, pour calculer $(u_j^{n+1})_{0\leq j\leq M}$ à partir de $(u_j^n)_{0\leq j\leq M}$, il faut résoudre une équation. Le schéma est donc implicite.

[1 pt]

(b) • Pour simplifier, on ne considère pas les $j \in \{0, M\}$. En supposant $u_j^n = e^{2i\pi k x_j}$ et $u_j^{n+1} = \mathcal{A}_j(k)e^{2i\pi k x_j}$, on a

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(u_j^{n+1}e^{2i\pi k h_x} - 2u_j^{n+1} + u_j^{n+1}e^{-2i\pi k h_x} + u_j^n e^{2i\pi k h_x} - 2u_j^n + u_j^n e^{-2i\pi k h_x}\Big),\\
u_j^{n+1}\Big[1 - \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(e^{2i\pi k h_x} - 2 + e^{-2i\pi k h_x}\Big)\Big] = u_j^n\Big[1 + \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(e^{2i\pi k h_x} - 2 + e^{-2i\pi k h_x}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

On obtient donc $u_j^{n+1} = \mathcal{A}_j(k)u_j^n$ avec

$$\mathcal{A}_j(k) = \frac{1 + \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(e^{2i\pi k h_x} - 2 + e^{-2i\pi k h_x}\Big)}{1 - \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(e^{2i\pi k h_x} - 2 + e^{-2i\pi k h_x}\Big)} = \frac{1 + \frac{h_t}{h_x^2}\Big(\cos(2\pi k h_x) - 1\Big)}{1 - \frac{h_t}{h_x^2}\Big(\cos(2\pi k h_x) - 1\Big)}.$$

[2 pts]

• Montrons maintenant que $|\mathcal{A}_j(k)| \leq 1$ sans aucune condition. On a $-1 \leq \cos(2\pi k h_x) \leq 1$ donc $-2 \leq \cos(2\pi k h_x) - 1 \leq 0$. Ainsi, $-\frac{2h_t}{h_x^2} \leq \frac{h_t}{h_x^2}(\cos(2\pi k h_x) - 1) \leq 0$.

En utilisant $\frac{h_t}{h_x^2}(\cos(2\pi k h_x) - 1) \leq 0$, on obtient

$$1 - \frac{h_t}{h_x^2}(\cos(2\pi k h_x) - 1) \geq 1 \geq 1 + \frac{h_t}{h_x^2}(\cos(2\pi k h_x) - 1).$$

donc

$$\mathcal{A}_j(k) \leq 1.$$

Il reste à prouver $\mathcal{A}_j(k) \geq -1$. Pour cela, on étudie $\mathcal{A}_j(k) + 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j(k) + 1 &= \frac{1 + \frac{h_t}{h_x^2}\Big(\cos(2\pi k h_x) - 1\Big)}{1 - \frac{h_t}{h_x^2}\Big(\cos(2\pi k h_x) - 1\Big)} + 1 \\ &= \frac{2}{1 - \frac{h_t}{h_x^2}\Big(\cos(2\pi k h_x) - 1\Big)} \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\mathcal{A}_j(k) \geq -1$. Et donc $|\mathcal{A}_j(k)| \leq 1$.

Le schéma est donc inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

[2 pts]

(c) • L'erreur de consistance est définie par

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{n+1} = u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) - \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(&u(t_{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j-1}) \\ &+ u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})\Big).\end{aligned}$$

[1 pt]

• Pour $t \in \{t_{n+1}, t_n\}$, on considère les développements de Taylor suivants

$$u(t, x_{j+1}) = u(t, x_j) + h_x \partial_x u(t, x_j) + \frac{h_x^2}{2} \partial_{xx}^2 u(t, x_j) + \frac{h_x^3}{6} \partial_{xxx}^3 u(t, x_j) + O(h_x^4),$$
$$u(t, x_{j-1}) = u(t, x_j) - h_x \partial_x u(t, x_j) + \frac{h_x^2}{2} \partial_{xx}^2 u(t, x_j) - \frac{h_x^3}{6} \partial_{xxx}^3 u(t, x_j) + O(h_x^4).$$

En combinant ces deux lignes, on obtient

$$u(t, x_{j+1}) - 2u(t, x_j) + u(t, x_{j-1}) = h_x^2 \partial_{xx}^2 u(t, x_j) + O(h_x^4).$$

[1 pt]

• On note $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h_t}{2}$. On utilise les développements de Taylor

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h_t}{2}, x_j) = u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + \frac{h_t}{2} \partial_t u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + \frac{h_t^2}{8} \partial_{tt}^2 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^3),$$
$$u(t_n, x_j) = u(t_{n+\frac{1}{2}} - \frac{h_t}{2}, x_j) = u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) - \frac{h_t}{2} \partial_t u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + \frac{h_t^2}{8} \partial_{tt}^2 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^3).$$

En soustrayant ces deux lignes, on obtient

$$u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) = h_t \partial_t u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^3).$$

[1 pt]

• De façon similaire,

$$\partial_{xx}^2 u(t_{n+1}, x_j) = \partial_{xx}^2 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + \frac{h_t}{2} \partial_{xxt}^3 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^2),$$
$$\partial_{xx}^2 u(t_n, x_j) = \partial_{xx}^2 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) - \frac{h_t}{2} \partial_{xxt}^3 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^2).$$

Et en sommant ces deux lignes

$$\partial_{xx}^2 u(t_{n+1}, x_j) + \partial_{xx}^2 u(t_n, x_j) = 2\partial_{xx}^2 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^2).$$

[1 pt]

• Pour conclure sur l'ordre du schéma, combinons les résultats de toutes les étapes précédentes.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j^{n+1} &= u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) - \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(\quad u(t_{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j-1}) \\
&\qquad\qquad + u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j-1})\Big) \\
&= u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) - \frac{h_t}{2h_x^2}\Big(\quad h_x^2 \partial_{xx}^2 u(t_{n+1}, x_j) + h_x^2 \partial_{xx}^2 u(t_n, x_j) + O(h_x^4)\Big) \\
&= h_t \partial_t u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^3) - \frac{h_t}{2}\Big(\quad \partial_{xx}^2 u(t_{n+1}, x_j) + \partial_{xx}^2 u(t_n, x_j) + O(h_x^2)\Big) \\
&= h_t \partial_t u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t^3) \qquad - h_t \partial_{xx}^2 u(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(h_t h_x^2) \\
&= O(h_t^3 + h_t h_x^2).
\end{aligned}$$

Le schéma est donc d'ordre deux en temps et en espace.

[1 pt]