TP EDP : Laplacien et équation de transport

1 Problème de Laplace et différentes conditions aux limites

On se place dans le cadre d'un domaine unidimensionnel $\Omega = (0,1)$. On s'intéresse à l'équation de Laplace

$$-u''(x) = f(x), \tag{1}$$

où on cherche u et f est une fonction connue. Cette équation est complétée par des conditions aux limites (on considérera plusieurs possibilités). Le domaine $(0,1)$ est maillé en $M > 0$ sous-divisions de longueur $h = 1/M$. On définit les points $x_j = jh$ ($0 \leq j \leq M$). On veut ensuite construire une suite (u_j) dont le terme général approche la valeur de u au point x_j. Le schéma de différences finies choisi consiste à approcher $u''(x_j) \simeq \frac{u(x_{j+1})-2u(x_j)+u(x_{j-1})}{h^2}$.

Pour chaque condition aux limites considérée ci-dessous, on vous demande de coder la matrice A et le vecteur F. On pourra ensuite calculer numériquement U et afficher sur un graphe la solution obtenue (u_j) (en ordonnées) en fonction de la position des points (x_j) (en abscisses). On pourra aussi comparer ce résultat aux valeurs exactes $(u(x_j))$ (sur le même graphe).

1.1 Conditions de Dirichlet homogènes

On considère les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \tag{2}$$

La méthode de différences finies consiste alors à résoudre le problème $AU = F$ avec

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La suite (u_j) est alors donnée par le vecteur U ainsi que $u_0 = u_M = 0$.

On pourra par exemple considérer $f(x) = x$ avec pour solution associée $u(x) = \frac{x}{6}(1 - x^2)$ (dans ce cas vérifier que l'on retrouve la solution exacte par la méthode des DF). On pourra aussi considérer $f(x) = x^2$ et $u(x) = \frac{x}{12}(1 - x^3)$ (dans ce cas vérifier que l'on n'obtient pas exactement la solution du problème mais que le schéma converge à l'ordre deux quand on raffine le maillage).

1.2 Conditions de Dirichlet non homogènes

On considère les conditions aux limites

$$u(0) = \alpha, \qquad u(1) = \beta, \tag{4}$$

où α et β sont des réels connus. On a vu (cf cours) que, dans ce cas, la solution exacte est celle du problème homogène à laquelle on ajoute le relèvement $\alpha(1 - x) + \beta x$.

La méthode des différences finies consiste à résoudre le problème $AU = F$ avec A et U donnés par (3) et F donné par

$$F = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-2}) \\ f(x_{M-1}) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Les valeurs de la suite sont alors celles de U que l'on complète par $u_0 = \alpha$ et $u_M = \beta$.

On pourra, par exemple, considérer $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{12}$, $f(x) = x^2$ et $u(x) = \frac{x}{12}(1 - x^3) + \frac{x}{12}$. (N'hésitez pas à essayer d'autres valeurs.)

1.3 Conditions mixtes

On considère les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \tag{6}$$

On parle de conditions mixtes car il y a une condition de Dirichlet à gauche et une condition de Neumann à droite. On impose $u_0 = 0$ et $\frac{u_{M-1} - u_M}{h} = 0$.

On résout le problème $AU = F$ avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-1} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{M-1}) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

La suite (u_j) est alors donnée par le vecteur U ainsi que $u_0 = 0$ et $u_M = u_{M-1}$.

On pourra, par exemple, considérer $f(x) = x^2$ et $u(x) = \frac{x}{3}(1 - \frac{x^3}{4})$.

2 Équation de transport

On s'intéresse au problème de transport-Dirichlet sur $(0,T) \times (0,1)$

$$\begin{cases} \partial_t u + a\partial_x u = 0 & \text{sur } (0,T) \times (0,1), \\ u(t,0) = \alpha, & \forall t \in (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall x \in (0,1), \end{cases} \tag{8}$$

où u est une fonction que l'on cherche à déterminer et $\alpha \in \mathbb{R}$ et u_0 (une fonction de $(0,1)$) sont donnés. On considère, de plus, que $a > 0$.

On se propose de comparer le comportement du schéma centré (instable) avec le schéma décentré amont (stable sous condition CFL). On pourra se reporter au cours pour plus d'informations.

Dans les deux cas, on divise l'intervalle d'espace $\Omega = (0,1)$ en M sous-intervalles (comme pour le Laplacien) et l'intervalle de temps $(0,T)$ en N sous-intervalles. On pose, de plus, $h_x = 1/M$, $x_j = jh_x$ ($0 \leq j \leq M$), $h_t = T/N$ et $t_n = nh_t$ ($0 \leq n \leq N$). On cherche à construire une suite (u_j^n) approchant $u(t_n, x_j)$. On initialise cette suite par $u_j^0 = u_0(x_j)$ ($0 \leq j \leq M$). On utilise ensuite l'un des deux schémas proposés ci-dessous pour calculer les pas de temps suivants.

Pour juger de la qualité du résultat, on affichera la solution au temps final T. Pour simplifier, on pourra par exemple considérer $\alpha = 0$, $a = 1$, $T = 1$ et $u_0(x) = x$ (n'hésitez pas à tester d'autres valeurs).

2.1 Schéma centré

Pour tout $n \geq 0$, on calcule la solution au pas de temps suivant par

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ah_t}{2h_x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \qquad 1 \leq j \leq M-1. \tag{9}$$

Ces valeurs sont complétées par $u_0^{n+1} = \alpha$ et $u_M^{n+1} = u_M^n - \dfrac{ah_t}{2h_x}(u_M^n - u_{M-1}^n)$.

Ce schéma est censé être instable. Vérifier que lorsque l'on rafine (h_t, h_x), la solution se dégrade.

2.2 Schéma décentré

Pour tout $n \geq 0$, on calcule la solution au pas de temps suivant par

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ah_t}{h_x}(u_j^n - u_{j-1}^n), \qquad 1 \leq j \leq M. \tag{10}$$

On complète avec $u_0^{n+1} = \alpha$.

Ce schéma est censé être stable sous la condition de CFL $c = \dfrac{ah_t}{h_x} \leq 1$. Vérifier que lorsque l'on rafine (h_t, h_x) en respectant cette condition, la solution converge vers la bonne valeur. Vérifier que si on ne respecte pas cette condition, alors la solution se dégrade.

Ce schéma est d'ordre 1 en espace et en temps. Lorsque vous multipliez N et M par deux, comment évolue l'erreur ? Est-ce que cela correspond à la théorie ? Reprenez cette question avec $u_0(x) = x^2$.