Polytech Sorbonne | Année universitaire 2023–2024
Analyse Numérique des EDP | MAIN4 | mercredi 15 mai 2024

Examen

Exercice 1 *Discrétisation par éléments finis (environ 9 pts)*

On note $\Omega =]0,1[$. On s'intéresse au problème

$$-u'' = f \text{ dans } \Omega \quad (1)$$
$$u'(0) = u(0), \quad (2)$$
$$u'(1) = -u(1), \quad (3)$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée.

(a) Prouver que toute solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (1)–(3) est aussi solution de la formulation variationnelle suivante:

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } a(u,v) = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (4)$$

où $a(u,v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + u(0)v(0) + u(1)v(1)$.

(b) On se donne l'inégalité de Poincaré suivante: il existe $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 (v(x))^2 dx \leq C\Big(v(0)^2 + v(1)^2 + \int_0^1 (v'(x))^2 dx\Big).$$

En déduire que si $f \in L^2(\Omega)$, alors le problème (4) admet une unique solution.

(c) Proposer une discrétisation éléments finis du problème considéré. On rappelera la définition des points de discrétisation et de l'espace de fonctions utilisé.

(d) Montrer que le problème éléments finis admet une unique solution.

(e) Donner l'écriture algébrique du problème éléments finis (le système linéaire à résoudre pour trouver la solution). On ne vous demande **pas** de calculer les coefficients de la matrice.

Exercice 2 *Discrétisation par différences finies (environ 11 pts)*

On se place dans le domaine temporel $]0, T[$ $(T > 0)$ et spatial $]0, 1[$. On veut discrétiser l'équation de la chaleur avec conditions aux limites périodiques

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad & \text{sur }]0, T[\times]0, 1[, \\ u(t, 0) = u(t, 1) \quad & \forall t \in [0, T], \\ u(0, x) = u_0(x) \quad & \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Pour cela, on discrétise l'espace par $M + 1$ points $x_j = jh_x$ $(h_x = 1/M)$ et le temps par $N + 1$ points $t_n = nh_t$ $(h_t = T/N)$. On considère le schéma donné par

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{h_t}{2h_x^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \\ u_0^n &= u_M^n \qquad \text{pour tout } n \in [\![0, N]\!] \\ u_j^0 &= u_0(x_j) \qquad \text{pour tout } j \in [\![0, M]\!] \end{aligned}$$

(a) Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

(b) **Stabilité :** On s'intéresse à la stabilité de Von Neumann de ce schéma.

- Donner l'expression de $\mathcal{A}_j(k)$ tel que $u_j^{n+1} = \mathcal{A}_j(k)u_j^n$ (en supposant que $u_j^n = e^{2i\pi kx_j}$ et $u_j^{n+1} = \mathcal{A}_j(k)e^{2i\pi kx_j}$)
- Calculer $|\mathcal{A}_j(k)|^2$. En déduire que le schéma est stable au sens de Von Neumann. A-t-on besoin d'une condition de CFL ?

(c) **Consistance :** On va montrer que ce schéma est consistant d'ordre 2 en temps et 2 en espace.

Pour simplifier, on note $\partial_t u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\partial^2_{xx} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

- Donner l'expression de l'erreur de consistance.
- Montrer que $u(t, x_{j+1}) - 2u(t, x_j) + u(t, x_{j-1}) = h_x^2 \partial^2_{xx} u(t, x_j) + O(h_x^4)$ pour $t \in \{t_n, t_{n+1}\}$.
- Montrer que $u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j) = \partial_t u(t_n + \frac{h_t}{2}, x_j) + O(h_t^3)$.
- Montrer que $\partial^2_{xx} u(t_{n+1}, x_j) + \partial^2_{xx} u(t_n, x_j) = 2\partial^2_{xx} u(t_n + \frac{h_t}{2}, x_j) + O(h_t^2)$.
- En déduire que le schéma est d'ordre 2 en espace et en temps.

Corrigé 1

(a) Soit u une solution $C^2(\overline{\Omega})$ de (1)–(3). Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on multiplie l'équation par v et on intègre sur le domaine. On a

$$\int_\Omega (-u'' + u' + u)v = \int_\Omega fv.$$

Puis en intégrant par parties (et en utilisant $u(0) = u(1) = 0$) on obtient

$$\int_\Omega \Big(u'v' + u'v + uv\Big) = \int_\Omega fv.$$

De plus, toute fonction fortement dérivable est aussi faiblement dérivable, et toute fonction continue sur un compact K est dans $L^2(K)$. On a donc $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. On a donc montré que u est solution du problème (4).

[2 pts]

(b) Pour $v \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\int_0^1 v'v = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}v^2\right)' = \left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^1 = 0,$$

où on a utilisé $v(0) = v(1) = 0$.

Montrons maintenant que toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées:

• On rappelle que $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(u,v)_{H^1} = \int_\Omega (u'v' + uv)$.

• $\ell(v) = \int_0^1 fv$ est bien une forme linéaire sur V (pas besoin de détailler cette partie). Si $f \in L^2(0,1)$, alors ℓ est continue car

$$|\ell(v)| = \left|\int_\Omega fv\right| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1},$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• a est une forme bilinéaire sur V. Elle est continue car

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega (u'v' + u'v + uv)\right| \leq \left|\int_\Omega (u'v' + uv)\right| + \left|\int_\Omega u'v\right|$$
$$\leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \left(\int_\Omega (u')^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• a est coercive car pour $v \in H_0^1(0,1)$, on a $a(v,v) = \int_0^1 (v')^2 + v'v + v^2 = \|v\|_{H^1}^2$.

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, le problème (4) admet une unique solution.

[3 pts]

(c) Le problème éléments finis associé est

$$\text{Trouver } u_h \in V_{h0} \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0},$$

avec

$$V_{h0} := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_{[x_{j-1},x_j]} \text{ est affine pour } j \in [\![1, M]\!] \text{ et } v_h(0) = v_h(1) = 0\},$$

et les points de discrétisation sont définis par $x_j = jh$ et $h = 1/M$ avec M le nombre de sous-intervalles considérés.

[1 pt]

(d) On rappelle que V_{h0} est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $H_0^1(0,1)$, c'est donc un Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^1}$. On a déjà montré les autres hypothèses du théorème de Lax-Milgram dans les questions précédentes. Le problème éléments finis admet donc une unique solution.

[1 pt]

(e) On a $u_h \in V_{h0}$, on peut donc décomposer

$$u_h = \sum_{j=1}^{M-1} u_h(x_j)\Phi_j,$$

avec $(\Phi_j)_{1\le j\le M-1}$ la base canonique de V_{h0} définie par $\Phi_j(x_k) = \delta_{jk}$.

On a donc, par linéarité,

$$\sum_{j=1}^{M-1} u_h(x_j) a(\Phi_j, v_h) = \ell(v_h) \qquad \forall v_h \in V_{h0}.$$

En prenant $v_h = \Phi_i$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{M-1} u_h(x_j) a(\Phi_j, \Phi_i) = \ell(\Phi_i) \qquad \forall i \in [\![1, M-1]\!].$$

Ceci revient à résoudre le système linéaire

$$AU = F,$$

avec $a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i)$ (attention : ici la matrice n'est pas symétrique) et $F_i = \ell(\Phi_i)$ pour déterminer les coefficients de u_h dans la base : $U_i = u_h(x_i)$.

[2 pts]

Corrigé 2

Dans toute la suite, on note $c = \frac{ah_t}{h_x}$ le nombre de cfl.

(a) Comme $u_0^n = u_M^n$, on s'intéresse aux u_j^n $(1 \le j \le M)$. Le schéma est défini par

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{c}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2} \\ &= \left(\frac{1-c}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+c}{2}\right) u_{j-1}^n \end{aligned}$$

Cette relation est vraie même pour $j \in \{1, M\}$, en posant $u_0^n = u_M^n$ et $u_{M+1}^n = u_1^n$. On obtient donc la relation $U^{n-1} = AU^n$ pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1-c}{2} & (0) & \frac{1+c}{2} \\ \frac{1+c}{2} & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ddots & \ddots & \frac{1-c}{2} \\ \frac{1-c}{2} & (0) & \frac{1+c}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(Ne pas oublier les conditions périodiques)

[2 pts]

(b) On se place dans le cas où $0 < c \leq 1$, donc $1 + c > 0$ et $1 - c \geq 0$ On a

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-c}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+c}{2}\right) u_{j-1}^n$$

donc

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &= \left(\frac{1-c}{2}\right) |u_{j+1}^n| + \left(\frac{1+c}{2}\right) |u_{j-1}^n| \\ &\leq \left(\frac{1-c}{2}\right) \|U^n\|_\infty + \left(\frac{1+c}{2}\right) \|U^n\|_\infty \\ &\leq \|U^n\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, $\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty$ donc $|||A|||_\infty \leq 1$ et le schéma est donc stable en norme $\|\cdot\|_\infty$.

[2 pts]

(c) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On considère une condition initiale de la forme $u_j^0 = e^{2i\pi k x_j}$. On a alors

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \frac{u_{j+1}^0 + u_{j-1}^0}{2} - \frac{c}{2}(u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0) \\ &= \frac{e^{2i\pi k h_x} + e^{-2i\pi k h_x}}{2} u_j^0 - \frac{c}{2}(e^{2i\pi k h_x} - e^{-2i\pi k h_x}) u_j^0 \\ &= (\cos(2\pi k h_x) - ci \sin(2\pi k h_x)) u_j^0 \end{aligned}$$

On peut donc écrire $u_j^1 = \mathcal{A}_j(k) u_j^0$ avec $\mathcal{A}_j(k) = \cos(2\pi k h_x) - ci \sin(2\pi k h_x)$.

Montrons maintenant que, pour $c > 1$, ce schéma n'est pas stable au sens de Von Neumann (i.e. $|\mathcal{A}_j(k)| > 1$ pour un certain j et un certain k). On a

$$|\mathcal{A}_j(k)|^2 = \cos^2(2\pi k h_x) + c^2 \sin^2(2\pi k h_x) = 1 + (c^2 - 1) \sin^2(2\pi k h_x).$$

Il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sin^2(2\pi k h_x) > 0$ (pour h_x assez petit) et alors, pour $c > 1$, $|\mathcal{A}_j(k)|^2 > 1$ et le schéma est instable au sens de Von Neumann.

[3 pts]

(d) On étudie l'erreur de consistance

$$\varepsilon_j^{n+1} = u(t_{n+1}, x_j) - \left[\frac{1}{2}u(t_n, x_{j+1}) + \frac{1}{2}u(t_n, x_{j-1}) - \frac{c}{2}(u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1}))\right]$$

On suppose que u est aussi régulière que l'on veut. On a les développements limités

$$u(t_n, x_{j+1}) = u(t_n, x_j) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{h_x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + O(h_x^3)$$
$$u(t_n, x_{j-1}) = u(t_n, x_j) - h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{h_x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + O(h_x^3)$$

et donc

$$\frac{u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1})}{2} = h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + O(h_x^3)$$
$$\frac{u(t_n, x_{j+1}) + u(t_n, x_{j-1})}{2} = u(t_n, x_j) + O(h_x^2)$$

De plus, on a aussi le développement limité

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + h_t \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + O(h_t^2)$$

En combinant tout, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{n+1} &= h_t \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + O(h_t^2 + h_x^2) + c\left(h_x \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + O(h_x^3)\right) \\ &= O(h_t^2 + h_t h_x^2 + h_x^2)\end{aligned}$$

En utilisant la condition $h_x \leq C h_t$, le $O(h_x^2)$ peut être réécrit comme un $O(h_t h_x)$. On perd un h_t en sommant toutes les erreurs de consistance. On a donc un schéma d'ordre 1 en temps et 1 en espace.

[3 pts]

(e) Ayant prouvé la stabilité et la consistance du schéma en norme $\|\cdot\|_\infty$, on peut invoquer le théorème de Lax. Sous la condition de CFL $a h_t \leq h_x$ et sous la condition $h_x \leq C h_t$ (pour n'importe quelle constante $C > 0$), on a l'estimée d'erreur

$$\max_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq j \leq M}} |u(t_n, x_j) - u_j^n| \leq \tilde{C}(h_t + h_x),$$

avec $\tilde{C} > 0$.

[1 pt]