Sorbonne Université - Université Paris Cité | Année 2021-2022
Préparation à l'agrégation | Vendredi 15 avril 2022

Corrigé examen option B

Exercice 1 : un portrait de phase ($\sim$11 pts)
On considère l'équation de Van der Pol :

$$y'' + (y^2 - 1)y' + y = 0, \tag{1}$$

complétée par les conditions initiales $(y(0), y'(0)) = Y_0 \in \mathbb{R}^2$.

1. Réécrire ce problème de Cauchy sous la forme d'un système d'ordre 1 : $Y' = F(t, Y(t))$, $Y(0) = \tilde{Y}_0$.
2. Prouver qu'il existe une unique solution maximale $Y(t)$ à ce système.
3. Donner les points d'équilibre de ce système. Étudier leur stabilité.
4. Calculer les isoclines et les tracer sur le portrait de phase.
5. Tracer le portrait de phase dans la région la plus en bas à droite (délimitée par une isocline).
6. Montrer que si $(y_1(0), y_2(0))$ est dans la région
$$\left\{(y_1, y_2) \mid y_2 < \min\left(0, \frac{y_1}{1-y_1^2}\right) \mid |y_1| < 1\right\} \cup \left\{(1, y_2) \mid y_2 < 0\right\} \cup \left\{(y_1, y_2) \mid \frac{y_1}{1-y_1^2} < y_2 < 0 \mid y_1 > 1\right\},$$
alors la solution atteint une isocline en temps fini. Tracer le portrait de phase dans cette région.
7. Montrer que si $(y_1(0), y_2(0))$ est dans la région la plus en bas à gauche du portrait de phase (délimitée par deux isoclines), alors la solution atteint une isocline en temps fini. Tracer le portrait de phase dans cette région.
8. Montrer que F est impaire. Compléter le portrait de phase en utilisant la symétrie par rapport à $(0, 0)$.
9. En utilisant le portrait de phase, justifier que, pour toute condition initiale, la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 : méthode de Newton ($\sim$3 pts)
On considère la fonction $f(x) = x^2 - 1$.

1. Écrire la méthode de Newton pour la recherche de zéros de cette fonction, en partant de x_0 donné.
2. On prend $x_0 = 1 + \varepsilon$. Donner un équivalent de $(x_1 - 1)$ en fonction de ε lorsque $\varepsilon \to 0$ si on applique l'algorithme de Newton à x_0 pour calculer x_1. En déduire un équivalent de $(x_n - 1)$.

Exercice 3 : méthode du gradient ($\sim$8 pts)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|A\|_2 = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ la norme matricielle induite par la norme vectorielle $\|.\|_2$.

1. Soit une matrice orthogonale $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($U^T U = I_n$).
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$.
   (b) Montrer que si V est un matrice orthogonale, on a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$.
   (c) En déduire que si la matrice A est symétrique, on a $\|A\|_2 = \varrho(A)$, le rayon spectral de A.
2. On pose $u(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que le problème $\min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$ a une solution et une seule qu'on note x^*.
   (b) On considère la méthode du gradient pour calculer x^* ($\alpha \in \mathbb{R}$) : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et

   $$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla u(x_k)$$

   Écrire la méthode sous la forme $x_{k+1} = Bx_k + c$, où B est une matrice et c un vecteur. En déduire que $x_k - x^* = B^k(x_0 - x^*)$. Puis que la méthode converge si et seulement si $\alpha \in I =]0, 2/\varrho(A)[$.
   (c) Montrer que pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on a

   $$u(y) = u(x) + \frac{1}{2}\langle A(y-x), y-x\rangle + \langle \nabla u(x), y-x\rangle.$$

   En déduire que si $x_k \neq x^*$, on a pour tout $\alpha \in I$,

   $$u(x_{k+1}) < u(x_k).$$

Correction de l'exercice 1 :

1. En posant $Y(t) = (y(t), y'(t))$, on peut réécrire le système comme $Y'(t) = F(Y(t))$ avec $F(Y) = (y_2, -y_1 - (y_1^2 - 1)y_2)$ où on a posé $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. La donnée de Cauchy devient $Y(0) = Y_0$.

2. La fonction F ne dépend pas de t et est dérivable (donc localement Lipschitzienne en Y, uniformément en t). Elle est aussi continue. Le théorème de Cauchy-Lipschitz local nous donne donc l'existence d'une unique solution maximale à ce problème de Cauchy.

3. Les points d'équilibre (x_1, x_2) du système sont les points vérifient le système

$$\begin{aligned} y_2 &= 0, \\ -y_1 - (y_1^2 - 1)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

   Le seul point d'équilibre du système est donc $(0, 0)$.

   Pour étudier sa stabilité, on calcule la matrice jacobienne de F :

$$J_F(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2y_1y_2 & 1 - y_1^2 \end{pmatrix}$$

   En $(0, 0)$, on a

$$A = J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Le polynôme caractéristique de cette matrice est $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$. Les valeurs propres de A sont donc $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Le point d'équilibre $(0, 0)$ est donc instable.

4. Les isoclines sont données par $y_2 = 0$ ($y_1' = 0$) et $y_2 = \dfrac{y_1}{1 - y_1^2}$ ($y_2' = 0$).

5. Voir portrait de phase. Cette région est appelée $\mathcal{I}$ dans la suite.

6. Cette région est appelée $\mathcal{II}$ dans la suite. Si $(y_1(0), y_2(0))$ est dans $\mathcal{II}$, alors, comme $y_1'(t) < 0$ et $y_2'(t) < 0$: soit il existe un temps $t_1 > 0$ tel que $(y_1(t_1), y_2(t_1))$ atteigne l'isocline $y_2' = 0$, soit la solution $(y_1(t), y_2(t))$ reste dans la zone $\mathcal{II}$ et $y_2(t) \to -\infty$.

   Dans cette région, $y_1(t)$ reste borné car décroissant et minoré. Et $y_2'(t) = -y_1 - (y_1^2 - 1)y_2(t) \geq A + By_2(t)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. Ainsi $y_2(t)$ se comporte au pire comme une exponentielle et ne peut donc pas exploser en temps fini. De plus, $y_2(t)$ est décroissante et $y_1'(t) = y_2(t) \leq y_2(0)$; ce qui implique $y_1(t) \leq y_2(0)t$. Donc $(y_1(t), y_2(t))$ atteint en temps fini l'isocline définissant la frontière gauche de $\mathcal{II}$.

7. On note cette région $\mathcal{III}$ (voir le portrait de phase). On a $y_1(t)$ décroissante et $y_2(t)$ croissante. Ainsi, soit on atteint l'isocline d'équation $y_2 = 0$, soit $y_1(t) \to -\infty$. Si, pour $t_1 > 0$, $y_1(t_1) < -1$, alors $y_2'(t) \geq -y_1(t) \geq 1$ et $y_2(t) \geq y_2(0) + t$. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'on atteint l'isocline d'équation $y_2 = 0$ et ceci ne peut se faire qu'en temps fini puisque le point d'équilibre $(0, 0)$ est répulsif (toutes les VP de la jacobienne sont de partie réelle > 0).

   Toujours dans le cas $y_1(t_1) < -1$, $y_1'(t) = y_2(t) \geq y_2(0)$. Ainsi y_1 n'explose pas en temps fini tandis que $y_2(t) \geq y_2(0) + t$ implique que $(y_1(t), y_2(t))$ atteint l'isocline d'équation $y_2 = 0$ en temps fini.

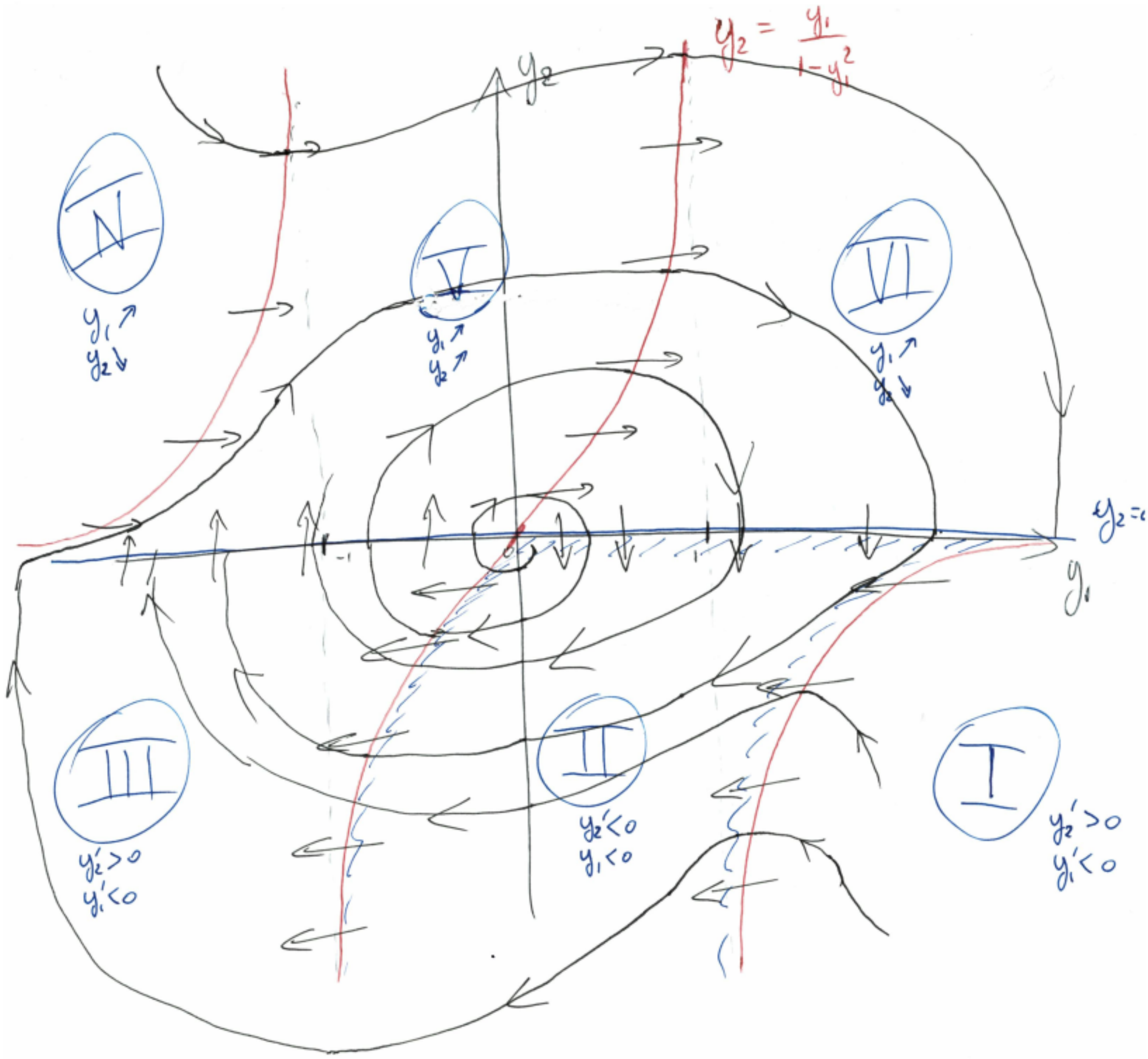
8. Tout simplement, $F(-Y) = (-y_2, y_1 - ((-y_1)^2 - 1)(-y_2)) = -F(Y)$. Voir le portrait de phase pour le tracé.

9. On montre que pour toute donnée initiale, la solution maximale est bornée sur tout intervalle J de $\mathbb{R}_+$ ce qui implique qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ entier.

   Pour montrer qu'elle est bornée, utilisons le portrait de phase. Il est extrêmement important de noter ici que les orbites du portrait de phase ne peuvent pas se croiser (à part au point d'équilibre) sinon on obtient localement deux solutions distinctes, ce qui n'est pas possible puisque l'on est toujours sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local.

   Toute solution de la zone $\mathcal{I}$ passe dans la zone $\mathcal{II}$, puis dans la zone $\mathcal{III}$, puis dans les zones $\mathcal{V}$ et $\mathcal{VI}$ avant de revenir dans la zone $\mathcal{II}$. Comme les orbites ne peuvent pas se croiser, la solution doit rester en dessous de toute solution provenant de la zone $\mathcal{IV}$, et ce dans les zones $\mathcal{V}$ et $\mathcal{VI}$. De même, quand elle revient dans les zones $\mathcal{II}$ et $\mathcal{III}$, elle doit rester au-dessus de toute orbite provenant directement de la zone $\mathcal{I}$. La solution est donc bornée sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$.

   Le même raisonnement s'applique si on prend la condition initiale dans une autre zone. La solution maximale est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.



Correction de l'exercice 2 :

1. La méthode de Newton pour la recherche d'un zéro d'une fonction dérivable f s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'x_n)}. \end{cases}$$

Donc ici

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 1}{2x_n} = \dfrac{x_n^2 + 1}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right). \end{cases}$$

2. On écrit le développement limité suivant (aller jusqu'à l'ordre 2 est nécessaire !) :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

d'où, en utilisant l'expression de la question a) :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1+\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\Big(1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2))\Big) = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

donc $x_1 - 1 \approx \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

On peut itérer ce raisonnement : on voit que si on pose $x_1 = 1 + \eta$, avec $\eta = \dfrac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$, alors

$$x_2 = 1 + \frac{\eta^2}{2} + o(\eta^2) = 1 + \frac{\varepsilon^4}{8} + o(\varepsilon^4) \quad \text{et} \quad x_2 - 1 \approx \frac{\varepsilon^4}{8} = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4.$$

Au vu de ce calcul, faisons l'hypothèse que

$$x_n = 1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2^n} + o(\varepsilon^{2^n})$$

Nous allons montrer l'estimation ci-dessus par récurrence :

• Initialisation : on a bien $x_0 = 1 + 2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^1$.

• Induction : supposons $x_n = 1 + 2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{2^n} + o(\varepsilon^{2^n})$.

Montrons que cela entraîne $x_{n+1} = 1 + 2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{2^{n+1}} + o(\varepsilon^{2^{n+1}})$:

On pose $\eta = x_n - 1 = 2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^{2^n} + o(\varepsilon^{2^n})$. On a alors

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \eta + \frac{1}{1+\eta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \eta + (1 - \eta + \eta^2 + o(\eta^2))\right) = 1 + \frac{\eta^2}{2} + o(\eta^2)) \\ &= 1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2^{n+1}} + o(\varepsilon^{2^{n+1}}). \end{aligned}$$

La récurrence est bien vérifiée et on en déduit l'équivalent :

$$x_n - 1 \approx 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2^n} \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0.$$

On a ainsi démontré "manuellement", pour cette fonction f particulière, la convergence quadratique de la méthode de Newton.

Correction de l'exercice 3 :

1. (a) On note que $\|Ux\|_2^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^T x, x\rangle = \|x\|_2$.
   (b) Pour le calcul de $\|UA\|_2$, on écrit $\|UAx\|_2^2 = \langle UAx, UAx\rangle = \langle U^T UA, Ax\rangle = \|Ax\|_2$. Pour le calcul de $\|AV\|_2$, on effectue un changement de variable bijectif $\|AVx\|_2 = \|Ay\|_2$ avec $y = Vx$. On a donc $\|UAV\|_2 = \|AV\|_2 = \|A\|_2$.
   (c) Si A est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Ce qui s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec P orthogonale et D la matrice diagonale composée des valeurs propres de A. On a donc $\|A\|_2 = \|D\|_2$. Or $\|D\|_2 = \max_i |D_{i,i}|$ (exercice !). D'où le résultat.

2. On pose $u(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$.

   (a) L'existence d'un minimum est assurée par le fait que u soit coercive ("tend vers l'infini à l'infini")
   $$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\lambda_{min}\|x\|_2^2 - \|b\|_2\,\|x\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\to} +\infty.$$
   L'unicié est assurée par la stricte convexité de la hessienne de u, qui est égale à la matrice sdp A.

   (b) On a $\nabla u(x) = Ax - b$ et $\nabla u(x^*) = 0$. La méthode du gradient s'écrit aussi $x_{k+1} = Bx_k + c$ avec $BI - \alpha A$ et $c = \alpha b$. Comme $x^* = Bx^* + c$, on en déduit que $x_{k+1} - x^* = B(x_k - x^*)$ et donc $x_k - x^* = B^k(x_0 - x^*)$. La convergence a lieu donc si et seulement si la suite $(B^k)_k$ tend vers 0. Ce qui est le cas si et seulement si $\boxed{\text{je détaillerai plus plus tard}}$ $\varrho(B) < 1$. Or le spectre de B est formé des $1 - \alpha\lambda$ avec λ dans le spectre de A. Le condition
   $$|1 - \alpha\lambda| < 1, \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$$
   conduit au résultat : la méthode converge si et seulement si $\alpha \in I =]0, 2/\varrho(A)[$.

   (c) Montrer que pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on a
   $$u(y) = u(x) + \frac{1}{2}\langle A(y - x), y - x\rangle + \langle \nabla u(x), y - x\rangle.$$
   On prend $y = x - \alpha\nabla u(x)$ dans l'inégalité :
   $$u(x - \alpha\nabla u(x)) = u(x) + \frac{\alpha^2}{2}\langle A\nabla u(x), \nabla u(x)\rangle - \alpha\langle \nabla u(x), \nabla u(x)\rangle.$$
   On en déduit que
   $$u(x - \alpha\nabla u(x)) \leq u(x) + \alpha(\frac{\alpha}{2}\|A\|_2 - 1)\|\nabla u(x)\|_2^2.$$
   En déduire que si $x_k \neq x^*$, on a pour tout $\alpha \in I$,
   $$u(x_{k+1}) < u(x_k).$$