Sorbonne Université - Université Paris Cité | Année 2022-2023
Préparation à l'agrégation | Vendredi 14 avril 2023

Examen option B

Merci de rédiger les deux exercices sur deux copies séparées.

Exercice 1. Dans cet exercice, on s'intéresse au système différentiel suivant

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) - u^3(t) + 3u(t)v^2(t), \\ v'(t) = -v(t) + v^3(t) - 3v(t)u^2(t), \end{cases} \tag{1}$$

et $u(0) = u_0, v(0) = v_0$ avec $u_0 \geq 0$ et $v_0 \geq 0$.

1. Montrer que le système différentiel (1) admet une unique solution maximale (u, v).
2. Montrer que si $u_0 > 0$ alors $u(t) > 0$ pour tout t où u est définie.
3. Déterminer les points d'équilibre $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ $\underline{(u, v \geq 0)}$ du système différentiel (1). Étudier leur stabilité.
4. Calculer les isoclines et dessiner le portrait de phase dans le cadran $\mathbb{R}_+^2$.
5. Montrer que si $(u_0, v_0) \in II$ où II est la zone définie par

$$II = \left\{(u_0, v_0) \in [0, \infty[^2 \text{ tel que } \frac{1}{3}(u_0^2 + 1) \leq v_0^2 \leq 3u_0^2 + 1\right\}$$

alors la solution maximale tend vers $(0, 0)$ et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Indication : on pourra remarquer que v décroissante sur son domaine de définition.
6. À partir de maintenant et jusqu'à la fin, on suppose que $u_0 = 0$. On pose $\tilde{v} = v^2$. Montrer que $\tilde{v}$ est solution de $\frac{1}{2}\tilde{v}'(t) = -\tilde{v} + \tilde{v}^2$ et montrer que si $v_0 < 1$ (respectivement $v_0 > 1$) alors $\tilde{v} < 1$ (respectivement $\tilde{v} > 1$) sur son domaine de définition.
7. [**Bonus**] Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $\tilde{v}$.
8. [**Bonus**] En déduire la solution maximale v et montrer qu'il existe une solution qui tend vers l'infini en temps fini.

Exercice 2. Soient m et n deux entiers non nuls, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. On s'intéresse à déterminer le ou les minimiseur(s) de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$.
On rappelle que f est dite *coercive* (ou *infinie à l'infinie*) si

$$f(x) \to +\infty \text{ lorsque } \|x\| \to +\infty.$$

On rappelle aussi le résultat suivant (qui poura être utilisé sans le démontrer) : pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et A^t sa matrice transposée :

$$\ker(A) = \ker(A^t A) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(A^t) = \mathrm{Im}\,(A^t A).$$

I. Existence d'un minimiseur

1. Montrer que f est coercive si et seulement si A est injective. Que peut-on en déduire ?
2. Après avoir justifié que f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$, calculer la différentielle de f en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire que le gradient de f et sa matrice hessienne en x sont

$$\nabla f(x) = A^t A x - A^t b \qquad \text{et} \qquad H_f(x) = A^t A.$$

3. Déterminer si f est convexe.
4. Donner une condition nécessaire pour que $x^* \in \mathbb{R}^n$ soit un minimiseur local de f. Cette condition est-elle suffisante ? Le minimum est-il global ?
5. Donner une condition suffisante sur A pour que f admette un unique minimiseur global. Dans ce cas, exprimer le minimiseur global.
6. On suppose ici A quelconque. Montrer qu'il existe au moins un minimiseur global à f, et caractériser un tel minimiseur.

II. Approximation du minimiseur

On suppose dans cette partie que f possède un unique minimiseur global noté x^*. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ donné, on définit la fonction

$$\varphi_x(t) = f(x - t\nabla f(x)).$$

7. Soit $x \neq x^*$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,

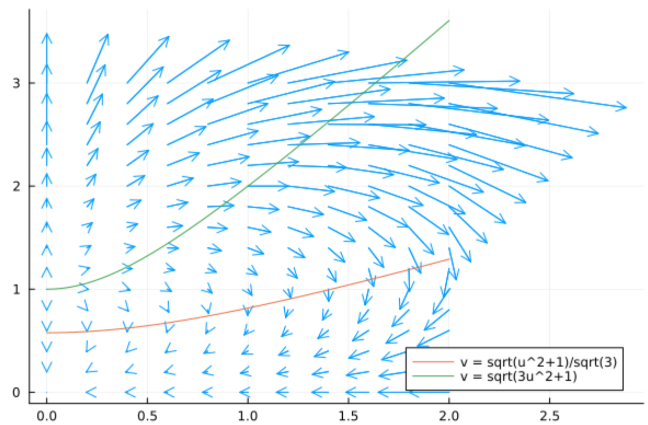
$$f(x - t\nabla f(x)) < f(x).$$

   Comment interpréter cela ?
8. Étant donné $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la méthode du gradient (à pas variable t_n) pour approcher x^*. Écrire l'expression de la relation de récurrence donnant x_{n+1} en fonction de x_n.
9. On suppose dans cette question que $t_n = \tau > 0$ ne dépend pas de n.
   (a) Écrire explicitement la relation de récurrence donnant les itérés de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer qu'en choisissant τ suffisament petit $x_n \to x^*$ lorsque $n \to +\infty$.
10. (a) **[Bonus]** Montrer que pour $x \neq x^*$, φ_x admet un unique minimiseur, noté t_x^* sur $\mathbb{R}$.
   (b) **[Bonus]** On choisit maintenant $t_n = t_{x_n}^*$. Quelle méthode numérique reconnaissez-vous ?
   (c) **[Bonus]** À l'aide d'un théorème du cours, justifiez la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'on prend $t_n = t_{x_n}^*$ (la preuve n'est pas demandée).

Corrigé examen option B

Solution 1. 1. Application de Cauchy-Lipschitz local.

2. Si $u(t) = 0$ pour un certain temps t, alors $u = 0$ est solution globale de l'EDO sur u.
3. Les points d'équilibre tels que $u, v \geq 0$ sont $(0, 0)$ et $(0, 1)$ (la condition $-1-u^2+3v^2 = 0$ et $-1+v^2-3u^2 = 0$ donne par différence $u^2+v^2 = 0$). Le Jacobien $JF(u, v) = \begin{bmatrix} -1-3u^2+3v^2 & 6uv \\ 6uv & -1-3v^2+3u^2 \end{bmatrix}$, donc $JF(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $JF(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. (0,0) est stable et (0,1) est instable.
4. Les isoclines sont
   — $u(-1-u^2+3v^2) = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $v = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{u^2+1}$
   — $v(-1+v^2-3u^2) = 0 \Rightarrow v = 0$ ou $v = \sqrt{3u^2+1}$



5. v est décroissante et (u, v) doit atteindre la zone $I = \left\{(u_0, v_0) \in [0, \infty[^2 \text{ tel que } v_0^2 \leq \frac{1}{3}(u_0^2+1)\right\}$ (sinon il existerait un point d'équilibre avec $u > 0$). Une fois dans I, u est décroissante et le seul point d'équilibre dans la zone est $(0, 0)$. La solution maximale est bornée donc définie sur $\mathbb{R}_+$
6. $u = 0$ est solution globale de l'EDO sur $\mathbb{R}$, d'où l'EDO sur $\tilde{v}$. De même qu'avant $\tilde{v} = 1$ est solution globale.

7. Par séparation de variables, on a (la constante C n'est pas la même de ligne en ligne) si $v_0 < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}^2 - \tilde{v}} &= 2dt \\
\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} + \frac{d\tilde{v}}{1-\tilde{v}} &= -2dt \\
\log(\tilde{v}) - \log(1-\tilde{v}) &= -2t + C \\
\frac{\tilde{v}}{1-\tilde{v}} &= C\exp(-2t) \\
-1 + \frac{1}{\tilde{v}} &= C\exp(2t) \\
\tilde{v} &= \frac{1}{1 + C\exp(2t)}, C > 0
\end{aligned}$$

   et la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.
   Si $v_0 > 1$ alors

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}^2 - \tilde{v}} &= 2dt \\
\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} + \frac{d\tilde{v}}{1-\tilde{v}} &= -2dt \\
\log(\tilde{v}) - \log(\tilde{v}-1) &= -2t + C \\
\frac{\tilde{v}}{\tilde{v}-1} &= C\exp(-2t) \\
1 - \frac{1}{\tilde{v}} &= C\exp(2t) \\
\tilde{v} &= \frac{1}{1 - C\exp(2t)},
\end{aligned}$$

   où $0 < C < 1$ pour satisfaire la condition initiale. $\tilde{v}$ explose en temps fini.

8. Puisque $v > 0$, on a $v = \sqrt{\tilde{v}}$ qui n'est définie que si $\tilde{v}$ est bien définie. Pour $v_0 > 1$, on a explosion en temps fini.