Sorbonne Université - Université Paris Cité | Année 2024-2025
Préparation à l'agrégation | Vendredi 28 mars 2025

---

# Examen option B

---

L'examen comporte deux exercices indépendants.
**Merci de rédiger les deux exercices sur deux copies séparées.**

**Exercice 1.** On considère la fonction suivante :

$$J : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 - xy \end{cases}$$

## Optimisation sans contraintes

1. Montrer que $J$ est une fonction deux fois différentiable et donner son gradient ainsi que sa hessienne.
2. Montrer que $J$ est une fonction $\alpha$-convexe.
3. Montrer que le problème d'optimisation $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} J(x,y)$ admet une unique solution.
4. Déterminer la solution au problème d'optimisation de la question précédente.

## Optimisation avec contraintes

On s'intéresse au problème d'optimisation avec contraintes

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ | \ xy=1} J(x,y). \tag{1}$$

5. En utilisant la contrainte $y = \frac{1}{x}$, montrer que le problème d'optimisation (1) est équivalent à minimiser la fonction $x \mapsto x^2 + \frac{2}{x^2} - 1$.
6. Montrer que $x \mapsto x^2 + \frac{2}{x^2} - 1$ est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$. En déduire les solutions au problème d'optimisation (1).
7. Montrer que les équations d'Euler-Lagrange (ou extrema liés) associées au problème (1) s'écrivent

$$\begin{cases} 2x + (\lambda - 1)y = 0 \\ (\lambda - 1)x + 4y = 0 \end{cases}$$

   et que la qualification des contraintes correspond à $(x,y) \neq (0,0)$.
8. En déduire que le système a une solution non nulle si et seulement si $\det \begin{bmatrix} 2 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 4 \end{bmatrix} = 0$.
9. Écrire les solutions des équations d'Euler-Lagrange et vérifier que l'on retrouve parmis ces solutions la solution du problème d'optimisation sous contraintes (1).

**Exercice 2.** A) Déterminer les solutions $t \mapsto y(t)$ ainsi que l'intervalle maximal d'existence $I_{\max}$ des équations différentielles suivantes :
a) $y'(t) = \exp(-y(t))$, avec pour donnée initiale $y(0) = 0$.
b) $y' = -2y + t$ avec pour donnée initiale $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = (y(t))^2$, avec pour donnée initiale $y(0) = 1$.
d) $y'(t) = (y(t))^3$, avec pour donnée initiale $y(0) = 0$.

B) Soit $a > 0, b > 0$ des constantes positives et $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -(b+1)x(t) + x^2(t)y(t) + a, \forall t \in [0, T[ \\ y'(t) = bx(t) - x^2(t)y(t) \\ x(0) = x_0 \text{ et } y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

B.I.1) Le système (2) est-il autonome ?
B.I.2) Justifier le fait que la solution de $t \mapsto (x(t), y(t))$ du problème (2) existe et est unique sur un intervalle maximal $[0, T_{\max}[$.

B.II.1) On pose $A = \{t \in [0, T_{\max}[, \text{ tels que } x(t) \leq 0\}$. Montrer que $A$ est fermé dans $[0, T_{\max}[$.
B.II.2) On suppose (*par l'absurde*) que $A$ est non vide. Montrer qu'il existe $t_0 \in A$ tel que $t_0 = \inf\{t \in A\}$, que $t_0 > 0$ et que $x(t_0) = 0$.
B.II.3) Montrer que $x'(t_0) > 0$. En déduire une contradiction et que $A$ est vide.
B.II.4) Montrer que $x(t) > 0$ , pour tout $t \in [0, T_{\max}[$.
B.II.5) Montrer de même que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_{\max}[$.

B.III.1) Montrer que pour tout $t \in [0, T_{\max}[$, $(x + y)'(t) \leq a$.
B.III.2) En déduire que $T_{\max} = +\infty$.

B.IV.1) Montrer que $x'(t) \geq -(b + 1)x(t) + a$, et que $(x(t) \exp((b + 1)t)' \geq a \exp((b + 1)t, \forall t \geq 0$.
B.IV.2) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$0 < \gamma < \frac{a}{b+1}. \tag{3}$$

Montrer, en utilisant BIV1), qu' il existe $T_\gamma > 0$ tel que $x(t) \geq \gamma$, pour $t \geq T_\gamma$.
*B.IV.3)Montrer que, si $\gamma$ vérifie (3), alors, $y'(t) < 0$, si $t \geq T_\gamma$ et $y(t) > b/\gamma$.
*B.IV.4) Montrer que, si $\gamma$ vérifie (3), alors $y(t) \leq S_\gamma = \max\{y(T_\gamma), b/\gamma\}$, pour $t \geq T_\gamma$.
*B.IV.5)Montrer que, si $\gamma$ vérifie (3), alors $(x + y)'(t) \leq -(x + y)(t) + S_\gamma + a$ pour $t \geq T_\gamma$.
*B.IV.6) En déduire que la solution est bornée.
**=hors barême*

Corrigé examen option B

## 0 Correction exercice d'optimisation

**Solution 1.**

1. $\nabla J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-y \\ 4y-x \end{bmatrix}$ et $HJ(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
2. on vérifie que la hessienne est définie-positive donc $J$ est $\alpha$-convexe.
3. $J$ est $\alpha$-convexe donc elle admet un unique minimiseur qui est aussi l'unique point critique de $J$
4. on résout $\nabla J(x,y) = 0$, et on a $(x,y) = (0,0)$.
5. immédiat
6. $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont convexes sur $]0,\infty[$ et $]-\infty,0[$ donc par somme (et addition d'une constante), $x \mapsto x^2 + \frac{2}{x^2} - 1$ est convexe. On résout $\min_{x\neq 0}(x^2 + \frac{2}{x^2} - 1)$ donc par convexité, on résout $2x - \frac{4}{x^3} = 0$ qui a pour solutions réelles $x = \pm 2^{\frac{1}{4}}$. Le problème (1) a pour solution $(2^{\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}})$ et $(-2^{\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}})$
7. En notant, $g(x,y) = xy - 1$, on a $\nabla g(x,y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ donc la qualification des contraintes correspond à $(x,y) \neq (0,0)$. L'équation d'Euler-Lagrange est immédiate.
8. on a un système linéaire dont on cherche des solutions non nulles, donc le déterminant de la matrice doit s'annuler.
9. L'équation $\det \begin{bmatrix} 2 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 4 \end{bmatrix} = 0$ a 2 solutions pour $\lambda$ : $\lambda = 1 + 2\sqrt{2}$ et $\lambda = 1 - 2\sqrt{2}$

   Pour $\lambda = 1 - 2\sqrt{2}$, on obtient $x = -\sqrt{2}y$ en réinjectant dans le système linéaire donc $y$ vérifie $-\sqrt{2}y^2 = 1$ dans la contrainte. Donc pour cette valeur de $\lambda$, il n'y a pas de solution.

   Pour $\lambda = 1 + 2\sqrt{2}$, on obtient $x = \sqrt{2}y$, donc dans la contrainte, $y$ vérifie $\sqrt{2}y^2 = 1$. En finissant les calculs, on retrouve bien les 2 solutions du problème de minimisation avec contraintes.

**Correction exercice équations différentielles**

A) Pour toutes les équations, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique car le second membre est $C^1$ par rapport à la variable d'état, ce qui garantit l'existence et l'unicité sur un intervalle maximal $I_{\max}$ contenant le temps initial $t_0 = 0$. Pour chacun des exemples, on utilise ou bien la méthode de séparation des variables ou la méthode de variation de la constante.

Aa) L'équation s'écrit $y' = f(y,t)$, avec $f(u,t) = \exp(-u)$. Le second membre ne s'annule pas en $(u,t) = (0,0)$ on peut donc utiliser la méthode de séparation de variable. On écrit $\exp(y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$, d'où il résulte que, pour $t \in I_{\max}$, on a $\int_{y(0)}^{y(t)} \exp u \mathrm{du} = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{dt} = \mathrm{t}$, soit $[\exp u]_0^{y(t)} = t$, ou encore $\exp(y(t)) = \exp 0 + t = t+1$. On en déduit la solution $y(t) = \log(t+1)$, pour $t \in I_{\max}$. Cette solution est bien définie sur $]-1, +\infty[$, et elle tend vers $-\infty$ en $-1$. On a donc $I_{\max} = ]-1, +\infty[$.

Ab) Ici le second membre est $f(u,t) = -2u + t$, on peut donc utiliser la méthode de variation de la constante. L'équation homogène associée est $w' = -2w$, dont une solution est donnée par $w(t) = \exp(-2t)$. On écrit $y = cw$, ce qui conduit à $y' = c'w + cw' = c'w - 2cw = c'w - 2y$. L'équation donne alors $c'w = t$, ou encore $c' = t\exp(2t)$. On intègre cette équation par parties

$c(t) = \dfrac{t}{2}\exp(2t) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \exp(2t) = \dfrac{t\exp(2t)}{2} - \dfrac{1}{4}\exp(2t) + K$. Ainsi

$y(t) = c(t)w(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + K\exp(-2t)$. Comme $y(0) = 0$, on a $\frac{1}{4} = K$, d'où

$y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\exp(-2t)$ pour $t \in I_{\max} = \mathbb{R}$.

Ac) L'équation s'écrit $y' = f(y,t)$, avec $f(u,t) = u^2$. Le second membre ne s'annule pas en $(u,t) = (1,0)$ on peut donc utiliser la méthode de séparation de variable. On écrit $y^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$, d'où il résulte que, pour $t \in I_{\max}$, on a $\int_{y(0)}^{y(t)} u^2 \mathrm{du} = \int_0^{\mathrm{y}} \mathrm{dt} = \mathrm{t}$, soit $-\left[\dfrac{1}{u}\right]_1^{y(t)} = t$, on encore $\dfrac{1}{y(t)} = 1 - t$. Ainsi $y(t) = \frac{1}{1-t}$, pour $t \in I_{\max}$. Cette solution est bien définie sur $]-\infty, 1[$, et elle tend vers $-\infty$ en 1. On a donc $I_{\max} = ]-\infty, 1[$.

Ad) L'équation s'écrit $y' = f(y,t)$, avec $f(u,t) = u^3$. Le second membre s'annule en $(u,t) = (0,0)$. L'unique solution est donc $y(t) = 0$, pour tout $t \in I_{\max} = \mathbb{R}$.

BI1) Le systeme est de la forme $V'(t) = F(V(t), t)$ avec $F(U,t) = (-(b+1)u_1 + u_1^2 u_2 + a, bu_1 - u_1^2 u_2)$, pour $U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$, et $v(t) = (x(t), y(t))$. Le système est donc autonome puisque $F$ ne dépend pas de $t$.

BI2) La fonction $F$ est de classe $C^1$ par rapport à la variable d'état $U \in \mathbb{R}^2$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui donne le résultat.

BII1) $A$ est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $x : [0, T_{\max}[\to \mathbb{R}$. L'ensemble $A$ est donc fermé dans $[0, T_{\max}[$.

BII2) Si l'ensemble $A$ est non vide, et minorée, sa borne inférieure $t_0$ existe et est finie. Comme $A$ est fermé $t_0 \in A$, et donc $x(t_0) \leq 0$ par définition de $A$. Supposons par l'absurde que $x(t_0) < 0$. Alors, par continuité, il existerait $t_1 < t_0$, tel que $x(t_1) < 0$. ceci contredit la définition de $t_0$.

BII3) On a par l'équation (1), $x'(t_0) = -(b+1)x(t_0) + x(t_0)^2 y(t_0) + a = a > 0$, car $x(t_0) = 0$. Comme $x'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} h^{-1}(x(t_0) - x(t_0 - h)) = -h^{-1}x(t_0 - h) > 0$, on en déduit que, pour $h > 0$ petit, $x(t_0 - h) < 0$, ce qui contredit la définition de $t_0$, et ainsi l'hypothèse de départ que $A$ est non vide.

BII4) Ceci découle immédiatement du fait que $A$ est vide.

BII5) Pour $y$, on reprend le même raisonnement : on introduit

$B = \{t \in [0, T_{\max}[, y(t) \leq 0[\}$, et on suppose par l'absurde que $B$ est non vide. On montre comme dans BII2) que la borne inférieur $t_0'$ est atteinte, avec $y(t_0') = 0$. Par l'équation $y'(t_0') = b(x(t_0')) > 0$, (par BII4). On conclut comme dans BII4).

BIII1) En additionnant les deux équations de (1), on obtient $(x+y)'(t) = -x(t) + a \leq a$, la dernière inégalité provient de BII4).
BIII2) En intégrant l'inégalité précédente, on obtient $x(t)+y(0) \leq x_0+y_0+at$. Supposons par l'absurde que $T_{\max} < +\infty$. On aurait alors $x(t)+y(t) \leq x_0+y_0+aT_{\max}$, et donc $0 < x(t) \leq x_0+y_0+aT_{\max}$ et $0 < y(t) \leq x_0+y_0+aT_{\max}, \forall t \in [0, T_{\max}[$, ce qui contredit le fait que la solution sort de tout compact lorsque $T_{\max}$ est fini.

BIV1) Comme $y > 0$, $x > 0$, on a $x^2 y > 0$ et donc $x' = -(b+1)x + x^2 y + a \geq -(b+1)x + a$. Par ailleurs $(x(t)\exp(b+1)t)' = [x'(t) + (b+1)x(t)]\exp(b+1)t = [(x^2(t)y(t) + a]\exp[(b+1)t] \geq a\exp(b+1)t$.
BIV2) On intègre la dernière équation entre $t$ et $0$ :
$x(t)\exp(b+1)t \geq x_0 + a\int_0^t \exp[(b+1)s]\mathrm{d}s$. Il vient donc
$x(t) \geq x_0\exp(-(b+1)(t) + \frac{a}{b+1} - \frac{a}{b}\exp(-(b+1)t) \geq \frac{a}{b+1} - \frac{a}{b+1}\exp(-(b+1)t)$, et donc $x(t) \geq \gamma$, pour $t \geq T_\gamma = \frac{1}{b+1}\log(1 - \frac{(b+1)\gamma}{a})$.
*BIV3) On a $y'(t) = x(t)(b - x(t)y(t) < x(t)[b - x(t)\frac{b}{\gamma}] \leq x(t)[b - \gamma.\frac{b}{\gamma}] \leq 0$, pour $t \geq T_\gamma$, et $y(t) \geq \frac{b}{\gamma}$, en utilisant le fait que $x(t) \geq \gamma$.
*BIV4) On raisonne, comme en BII). On introduit $\epsilon > 0$, et on suppose par l'absurde que $C_\epsilon = \{t \geq T_\gamma, y(t) \geq S_\gamma + \epsilon\}$ est non vide. On montre alors qu'il possède un plus petit élement $t_\epsilon \geq T_\gamma$, tel que $y(t_\epsilon) = S_\gamma + \epsilon$. Par définition de $S_\gamma$, on a $t_\epsilon > T_\gamma$. Par la question BIV3) $y'(t_\epsilon) < 0$. En raisonnant, comme en BII, on montre alors qu'il existe un élément $T_\gamma < t'_\epsilon < t_\epsilon$ tel que $y(t'_\epsilon) > y(t_\epsilon) \geq S_\gamma + \epsilon$,et donc $t'_\epsilon \in C_\epsilon$, ce qui est absurde, car $t_\epsilon$ est le plus petit élément. On a donc $C_\epsilon = \emptyset$, pour tout $\epsilon > 0$, ce qui donne le résultat.
*BIV5) On a, par BIII1) $(x+y)'(t) \leq -(x(t)+a) \leq -(x(t)+y(t)) + S_\gamma + a$, si $t \geq T_\gamma$, par BIV4), car $y(t) \leq S_\gamma$.
*BIV6) On raisonne comme dans BIV1). posons $w = x+y$ et $R_\gamma = S_\gamma + a$. Alors $w' \leq -w + R_\gamma$, pour $t \geq T_\gamma$ de sorte que $(w(t)\exp t)' \leq R_\gamma \exp t$, pour $t \geq T_\gamma$, et on conclut comme dans BIV2) en intégrant entre $T_\gamma$ et $t$ que $w(t)\exp t \leq w(T_\gamma)\exp T_\gamma + R_\gamma \exp T_\gamma - \exp T_\gamma$. On obtient ainsi $w(t) \leq w(T_\gamma) + R_\gamma \exp T_\gamma$, pour $t \geq T_\gamma$.