Sorbonne Université - Université Paris Cité — Année 2023-2024
Préparation à l'agrégation — Vendredi 29 mars 2024

Examen option B

L'examen comporte deux exercices indépendants.
Merci de rédiger les deux exercices sur deux copies séparées.

Exercice 1. Dans cet exercice, on s'intéresse au système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(-1+x). \end{cases} \tag{1}$$

A l'instant initial, on suppose que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

1. Discuter l'existence et l'unicité de solution au système (1).
2. Montrer que, pour $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ donnés, la solution maximale vérifie $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t dans son intervalle de définition.
3. Soit $H(\tilde{x}, \tilde{y}) := \tilde{y} + \tilde{x} - \ln(\tilde{y}) - \ln(\tilde{x})$. Montrer que $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante où x, y sont les solutions maximales du système (1).
4. A l'aide de la question précédente, montrer que x et y sont bornées. En déduire que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.
5. Dans cette question, nous allons tracer le portrait de phase du système différentiel (1).
   (a) Donner les points stables de (1).
   (b) Calculer les isoclines de (1).
   (c) Dessiner un portrait de phase.
   (d) En utilisant le portrait de phase de (1), montrer que les solutions parcourent successivement les 4 zones délimitées par les isoclines. (il n'est pas nécessaire de justifier tous les cas possibles)
   (e) En utilisant que $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante, montrer que les solutions sont périodiques.

Exercice 2. Soient n un entier non nul, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique définie-positive. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ et $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ la norme associée.

On s'intéresse au problème d'optimisation sous contrainte

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, g(x)=1} f(x) \tag{2}$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle$ et la contrainte $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donnée par $g(x) = \frac{1}{2}\langle x, Sx \rangle$.

1. Montrer que le problème d'optimisation sous contrainte (2) a une solution.
   Indication : on pourra montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 1\}$ est compact.

I. Caractérisation de la solution

2. Calculer le gradient de f et celui de g et montrer que

$$\nabla f(x) = Ax \qquad \text{et} \qquad \nabla g(x) = Sx.$$

3. Donner une condition nécessaire pour que $x_* \in \mathbb{R}^n$ soit une solution du problème d'optimisation sous contrainte (2) grâce aux multiplicateurs de Lagrange.
4. Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le facteur de la décomposition Cholesky de S. On rappelle que L est une matrice inversible triangulaire inférieure vérifiant $L^T L = S$.
   Montrer que l'équation d'Euler Lagrange peut se réécrire

$$Bx_* = \lambda x_*,$$

   où B est une matrice que l'on donnera en fonction de A et L.
5. Montrer que la solution x_* du problème d'optimisation sous contrainte (2) est un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice B.

II. Approximation du minimiseur

Pour $\mu > 0$, soit $J_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$J_\mu(x) = f(x) + \mu g(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle + \frac{\mu}{2}(\langle x, Sx \rangle - 1)^2.$$

Soit x_* une solution du problème d'optimisation (2).

On cherche à approcher x_* par le problème de minimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} J_\mu(x). \tag{3}$$

6. Montrer que J_μ est coercive.
   On rappelle que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si $\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = \infty$
7. Montrer que le problème de minimisation (3) a une solution.
8. Soit x_μ une solution du problème (3). Montrer que $J_\mu(x_\mu) \leq J(x_*)$.

9. Soit $(\mu_n)_n$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty$. En déduire que $(x_{\mu_n})_n$ est compacte et qu'il existe une valeur d'adhérence $\overline{x}$.

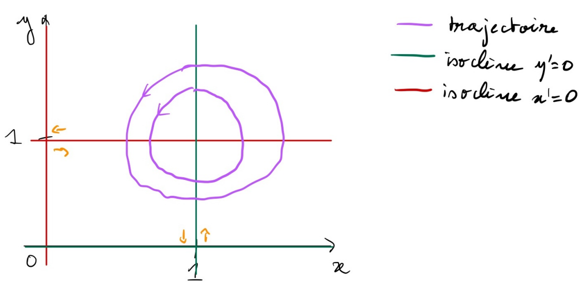
10. Pour $\mu > 0$, soit x_μ une solution du problème de minimisation (3). Pour $(\mu_n)_n$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty$, soit $\overline{x}$ une valeur d'adhérence de $(x_{\mu_n})_n$. On note $p(x) = (\langle x, Sx\rangle - 1)^2$.
Soit $0 < \mu < \nu$.
    (a) Montrer que
    $$J_\mu(x_\mu) \leq J_\mu(x_\nu), \quad \text{et} \quad J_\nu(x_\nu) \leq J_\nu(x_\mu).$$
    (b) En déduire que $(\nu - \mu)(p(x_\mu) - p(x_\nu)) \geq 0$ et que $\mu \mapsto p(x_\mu)$ est décroissante. En utilisant la question 8, montrer que $p(\overline{x}) = 0$.
    (c) En déduire que $\overline{x}$ est une solution du problème d'optimisation sous contrainte (2).

Corrigé examen option B

0 Correction exercice EDO

Solution 1. 1. Cauchy-Lipschitz local.

2. si x devient négatif, alors par continuité il existe t tel que $x(t) = 0$. Or $x = 0$ est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy avec $x(t) = 0$.
3. Calcul direct.
4. Par 2., x ou y ne peuvent tendre que vers $+\infty$. S'il existe une suite (t_n) croissante, telle que $x(t_n) + y(t_n) \to \infty$, alors $H(x(t_n), y(t_n)) \to \infty$: contradiction.
5. solutions bornées + $f(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ donc par Cauchy-Lipschitz local, on a existence sur $\mathbb{R}$ des solutions de l'EDO.
6. (a) $(1, 1)$ et $(0, 0)$.
   (b) pour $x' = 0$, on a deux droites $x = 0$ et $y = 1$. Pour $y' = 0$, on a $y = 0$ et $x = 1$.



   (c)
   (d) si on part du cadran nord ouest, x et y sont décroissants. Si on reste dans ce cadran, x et y tendent vers une limite, or par passage à la limite dans l'EDO, les seuls points stables sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$ contradiction. Donc on passe dans le cadran sud-ouest. Par un raisonnement similaire, on fait le tour.
   (e) quand on revient, on doit repasser par le même point (parce que H est monotone là où il faut)

Solution 2.

1. S définit un produit scalaire, donc l'ensemble admissible est fermé, borné et f est continue donc le problème admet une solution
2. Calcul direct.
3. Les équations d'Euler Lagrange nous disent qu'une solution du problème d'optimisation sous contrainte s'écrit
$$\nabla f(x) + \lambda g(x) = 0.$$
4. $B = L^{-T} A L^T$.
5. on a $\lambda = \langle x, Ax \rangle = f(x)$ par la contrainte, donc la solution est donnée par un vecteur propre associé à la plus petite vp de B. On a unicité que si la plus petite vp de B est de multiplicité 1.
6. S est SDP et J_μ est quartique
7. par coercivité et continuité de J_μ
8. on a $p(x_*) = 0$ et par optimalité de x_μ, nécessairement $J_\mu(x_\mu) \leq J(x_*)$.
9. (a) par définition des x_μ
   (b) en additionnant les deux équations. Si $p(x_{\mu_n}) = P > 0$, $J_{\mu_n}(x_{\mu_n})$ tend vers l'infini ce qui contredit Q8.
   (c) en passant à la limite, $\overline{x}$ satisfait la contrainte et $J(\overline{x}) \leq J(x_*)$ donc $\overline{x} = x_*$ par unicité du minimiseur.