Calcul littéral, racines et équations

Exercice 1. Factoriser les expressions suivantes :

1. $6x^2 + 9x$
2. $12x^2y + 8xy^2$
3. $15x - 20xy^2$
4. $xy^2 - x^2y$
5. $x^2y - xy^3$
6. $5x^2y - 25xy + 3yx^2$

Correction exercice 1.

1. $3x(2x + 3)$
2. $4xy(3x + 2y)$
3. $5x(3 - 4y^2)$
4. $xy(y - x)$
5. $xy(x - y^2)$
6. $xy(5x - 25 + 3y)$

Exercice 2. Développer les expressions suivantes :

1. $7(x - 2) + 3(x + 4) - 6(x - 2)$
2. $4x(x + 3) - 2x(3x - 7)$
3. $3x^2 - x(3 - 4x) + 9$
4. $2x^2(3x + 1) - 4x^2(5x - 3)$

Correction exercice 2.

1. $4x + 10$
2. $4x^2 + 12x - 6x^2 + 14x = -2x^2 + 26x$
3. $3x^2 + 4x^2 - 3x + 9 = 7x^2 - 3x + 9$
4. $6x^3 + 2x^2 - 20x^3 + 12x^2 = -14x^3 + 14x^2$

Exercice 3. Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2 + 8x + 12$
2. $x^2 - 8x + 12$
3. $x^2 - 3x - 10$
4. $x^2 - x - 6$
5. $x^2 + 5x + 6$
6. $2x^2 + 5x + 2$
7. $2x^2 - 2x - 24$
8. $2x^2 + 7x - 15$

Correction exercice 3.

1. On calcule le discriminant $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 12 = 64 - 48 = 16 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes $\frac{-8\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ qui valent -6 et -2. La version factorisée est donc
$$x^2 + 8x + 12 = (x + 6)(x + 2)$$
(vous pouvez développer cette expression pour vérifier l'égalité)

2. Par un changement de variable $y = -x$, on revient au polynôme $y^2 - 8y + 12 = (y+6)(y+2)$ de la question précédente. La forme factorisée est donc

$$x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$$

(on peut aussi à nouveau calculer le discriminant)

3. On calcule le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes données par $\frac{+3 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ qui valent -2 et 5. La forme factorisée est donc

$$x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$$

4. Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4 \times (-6) = 25 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes données par $\frac{1 \pm 5}{2}$. La forme factorisée est donc

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$$

5. Le discriminant vaut $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Ce polynôme admet deux racines réelles -2 et -3. Sa forme factorisée est donc

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

6. Le discriminant vaut $\Delta = 9 > 0$, ce polynôme admet deux racines réelles $\frac{-5 \pm 3}{2 \times 2}$ (ne pas oublier $\times 2$ au dénominateur) qui valent -2 et $-\frac{1}{2}$ Le polynôme vaut donc

$$2x^2 + 5x + 2 = 2(x+2)(x+\frac{1}{2})$$

(ne pas oublier de tout multiplier par le coefficient de plus haut degré, ici 2)

7. Ici, on peut simplifier un peu avec $2x^2 - 2x - 24 = 2(x^2 - x - 12)$ et on factorise directement $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$. La forme factorisée du polynôme est donc

$$2x^2 - 2x - 24 = 2(x-4)(x+3)$$

8. Le discriminant vaut $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-15) = 169 = 13^2$ Les racines valent $\frac{-7 \pm 13}{2 \times 2}$ donc -5 et $\frac{3}{2}$. La forme factorisée du polynôme est donc

$$2x^2 + 7x - 15 = 2(x+5)(x-\frac{3}{2})$$

Exercice 4. Simplifier les expressions suivantes :

1. $2\sqrt{18} - 4\sqrt{72} - \sqrt{50} + 3\sqrt{98}$
2. $4\sqrt{8} - 2\sqrt{75} + \sqrt{200} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{45}$
3. $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$
4. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

5. $\frac{1}{4\sqrt{11}-5\sqrt{7}}$
6. $\frac{5x^2-125}{x^2+5x} \div \frac{10x^2+40x-50}{3x^2}$
7. $\frac{3}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$
8. $\frac{2}{x-2} - \frac{3x+1}{x^2-7x+10} - \frac{1}{x-5}$

Correction exercice 4.

1. Ici, on veut réduire les nombres sous les racines. On utilise $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{72} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{98} = \sqrt{2} \times \sqrt{49} = 7\sqrt{2}$. On a

$$\begin{aligned} 2\sqrt{18} - 4\sqrt{72} - \sqrt{50} + 3\sqrt{98} &= 6\sqrt{2} - 24\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} \\ &= -16\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. De même $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{5}$, $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ et $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} 4\sqrt{8} - 2\sqrt{75} + \sqrt{200} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{45} &= 8\sqrt{2} - 10\sqrt{5} + 10\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 15\sqrt{5} \\ &= 18\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

3. Ici, on veut retirer les racines carrées des dénominateurs. On va multiplier le numérateur et le dénominateur par le "conjugué" du dénominateur (cf nombres complexes) : le conjugué de $\sqrt{5} - 2$ est $\sqrt{5} + 2$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}^2 - 2^2} = \sqrt{5} + 2$$

4. Comme précédemment

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

5. Comme précédemment

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sqrt{11}-5\sqrt{7}} &= \frac{4\sqrt{11}+5\sqrt{7}}{(4\sqrt{11}-5\sqrt{7})(4\sqrt{11}+5\sqrt{7})} \\ &= \frac{4\sqrt{11}+5\sqrt{7}}{16 \times 11 - 25 \times 7} \\ &= \frac{4\sqrt{11}+5\sqrt{7}}{176-175} \\ &= 4\sqrt{11} + 5\sqrt{7} \end{aligned}$$

6. Ici, on simplifie en écrivant tout avec une seule fraction. Puis, on simplifie cette fraction en factorisant et en simplifiant les facteurs communs entre numérateur et dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{5x^2-125}{x^2+5x} \div \frac{10x^2+40x-50}{3x^2} &= \frac{(5x^2-125)3x^2}{(x^2+5x)(10x^2+40x-50)}\\ &= \frac{15(x^2-25)x^2}{10x(x+5)(x^2+4x-5)}\\ &= \frac{3(x-5)(x+5)x^2}{2x(x+5)(x^2+4x-5)}\\ &= \frac{3(x-5)x}{2(x^2+4x-5)}\end{aligned}$$

On peut encore simplifier un peu en factorisant le dénominateur. Le discriminant de x^2+4x-5 est $\Delta = 36 > 0$ On a donc $x^2+4x-5 = (x-5)(x+1)$. Finalement

$$\frac{5x^2-125}{x^2+5x} \div \frac{10x^2+40x-50}{3x^2} = \frac{3(x-5)x}{2(x-5)(x+1)} = \frac{3x}{2(x+1)}$$

7. Dans ce cas, on simplifie en regroupant les différentes fractions en une seule fraction. Il faut donc tout mettre sous le même dénominateur. On peut ensuite développer le numérateur pour obtenir un seul monome de chaque degré.

$$\begin{aligned}\frac{3}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} &= \frac{3(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)^2} - \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2}\\ &= \frac{3(x-1)^2-(x-1)(x^2+1)+2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2}\\ &= \frac{3(x^2-2x+1)-(x^3-x^2+x-1)+2x^2+2}{(x^2+1)(x-1)^2}\\ &= \frac{-x^3+6x^2-7x+6}{(x^2+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

A ce stade, on se demande si on ne pourrait pas factoriser le numérateur. Pour un polynôme de degré 3 ou plus, on ne sait pas faire autrement qu'en cherchant une racine évidente (essayer -2, -1, 0, 1 et 2). Aucun de ces nombres n'est racine. On ne peut donc pas simplifier davantage.

8. On applique la même méthode qu'à la question précédente. De plus, pour simplifier, on va factoriser le polynôme qui ne l'est pas au dénominateur. On a

$$x^2-7x+10 = (x-5)(x-2)$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-2}-\frac{3x+1}{x^2-7x+10}-\frac{1}{x-5} &= \frac{2}{x-2}-\frac{3x+1}{(x-5)(x-2)}-\frac{1}{x-5} \\
&= \frac{2(x-5)}{(x-2)(x-5)}-\frac{3x+1}{(x-5)(x-2)}-\frac{x-2}{(x-2)(x-5)} \\
&= \frac{2(x-5)-(3x+1)-(x-2)}{(x-2)(x-5)} \\
&= \frac{-2x-9}{(x-2)(x-5)}
\end{aligned}$$

Exercice 5. Trouver les solutions réelles (éventuelles) des équations suivantes :

1. $x^2-4x-8=0$
2. $x^2+2x-5=0$
3. $x^2+2x+1=0$
4. $3x^2+3x+1=0$

Correction exercice 5.

1. Les solutions de cette équation sont les racines réelles du polynôme. Le discriminant vaut $\Delta=50>0$. Cette équation admet donc deux solutions réelles $x_1=\frac{4-\sqrt{50}}{2}=\frac{4-5\sqrt{2}}{2}$ et $x_2=\frac{4+\sqrt{50}}{2}=\frac{4+5\sqrt{2}}{2}$.
2. Le discriminant vaut $\Delta=24>0$. L'équation admet donc deux solutions réelles : $x_1=\frac{-2-\sqrt{24}}{2}=-1-\sqrt{6}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{24}}{2}=-1+\sqrt{6}$.
3. Dans ce cas, le discriminant vaut $\Delta=0$. L'équation admet une unique solution réelle : $x=-1$.
4. Dans ce cas, le discriminant vaut $\Delta=-3<0$ et l'équation n'admet pas de solution réelle.

Exercice 6. Trouver les solutions des systèmes linéaires suivants :

1. $\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=5 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=5 \\ x+3y=7 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} 5x+2y=11 \\ -x-4y=5 \end{array}\right.$

Correction exercice 6.

1. On note (a) et (b) les deux lignes du système. On injecte (a) dans (b) (combinaison) dans le but d'éliminer les y, on trouve la valeur de x puis on utilise cette valeur pour trouver y.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x=7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ x=\frac{7}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=2-x=2-\frac{7}{2}=-\frac{3}{2} \\ x=\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

2. On applique la même méthode (on injecte $-3\times$ (a) dans (b))

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+y=5 \\ x+3y=7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3x+y=5 \\ -8x=-8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3x+y=5 \\ x=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=5-3x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

3. On applique la même méthode (on injecte $2\times$ (a) dans (b))

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} 5x+2y=11 \\ -x-4y=5 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l} 5x+2y=11 \\ 9x=27 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 5x+2y=11 \\ x=3 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} 2y=11-5x=-4 \\ x=3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{aligned}$$