Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 1. Montrer les identités suivantes.

1. $\frac{\cos(\theta)}{1+\cot(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{1+\tan(\theta)}$
2. $\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \sin(\theta),\ \theta \in]0, \pi/2[$
3. $\cos^8(\theta) - \sin^8(\theta) = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))(1 - 2\sin^2(\theta)\cos^2(\theta))$

Correction exercice 1.

1. Multiplier haut et bas par sin puis factoriser par cos.
2. Multiplier haut et bas par cos.
3. Poser $a = \cos^2(\theta)$, $b = \sin^2(\theta)$, on a alors

$$\cos^8(\theta) - \sin^8(\theta) = a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + ba^2 + b^2a + b^3)$$

puis utiliser plusieurs fois l'identité $a + b = 1$.

Exercice 2.

1. Montrer que si $\cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2}\sin(\theta)$ alors $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta)$.
2. Trouver l'image de la fonction $f(x) = a\cos^2(bx + c) + d$, en fonction des paramètres $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
3. Sachant que $\sin(\theta) = 3/5$ et $0 < \theta < \pi/2$, trouver $\cos(\theta)$ et $\tan(\theta)$.
4. Sachant que $\tan\theta + \cot\theta = 2$, trouver $\tan^n\theta + \cot^n\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Sachant que $\tan\theta + \cot\theta = 5$, trouver $\tan^4\theta + \cot^4\theta$.
6. Exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.
7. Montrer que si $\alpha + \beta \neq \pi/2\ [\pi]$, alors

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

8. Montrer que si $A + B = \pi/4$, alors $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$.

Correction exercice 2.

1. On a $\cos(\theta) = (1+\sqrt{2})\sin(\theta)$, donc
$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\cos(\theta),$$
en réduisant au même dénominateur et en multipliant par les quantités conjuguées on a cqfd.
2. Si $b = 0$ ou $a = 0$ c'est le singleton $\{a\cos(c) + d\}$, si $b \neq 0$ et $a \neq 0$, c'est l'intervale $[d, d+a]$ si $a > 0$ et $[d+a, d]$ si $a < 0$.
3. En utilisant $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \frac{16}{25}$ on en déduit $(0 < \theta < \pi/2)$ que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ puis $\tan\theta = \frac{3}{4}$.
4. Posons $x = \tan\theta$, on a
$$x + \frac{1}{x} = 2,$$
donc $x = 1$ puis $\tan^n\theta + \cot^n\theta = 2$ pour tout n.
5. En utilisant la même idée, on a $\tan\theta = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, $\cot\theta = \frac{5\mp\sqrt{21}}{2}$ et donc
$$\tan^4\theta + \cot^4\theta = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^4 + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^4.$$
6. On a par la formule d'addition $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, donc $\cos(4\theta) = 2\cos^2(2\theta) - 1$, puis en développant
$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1.$$
7. Découle des formules d'addition pour sin et cos.
8. Appliquer la question précédente.

Exercice 3. Simplifiez les expressions suivantes.

1. $z = (2-3i)(3i)$.
2. $z = (1+i)(2+i)$.
3. $z = (2+3i)^2 - i$.
4. $z = \frac{1-i}{2i}$.
5. $z = \frac{(1-i)}{(2+i)} - 2i$.
6. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculer $1 + j + j^2$.

Correction exercice 3.

1. $z = 9 + 6i$.
2. $z = 1 + 3i$.

3. $z = -5 - 11i$.
4. $z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.
5. $z = \frac{1}{5} - \frac{13i}{5}$.
6. On trouve $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 4. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle, simplifier.

1. $z = 3 + 3i$.
2. $z = 1 - i$.
3. $z = -2 + 2i$.
4. $z = 2\sqrt{3} - 2i$.
5. $z = \frac{\sqrt{2}}{(1-i)}$.
6. $z = (-1 + i)^3 e^{3i\pi/4}$.
7. $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

Correction exercice 4.

1. $z = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
2. $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.
3. $z = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$.
4. $z = 4e^{-i\pi/6}$.
5. $z = e^{i\pi/4}$.
6. $z = -2\sqrt{2}$.
7. $z = -i$.

Exercice 5. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes.

1. $z^3 = i$.
2. $z^4 = 4e^{i\pi/3}$.
3. $z^2 - z + 1 = 0$.
4. $2z^2 + z - 3 = 0$.
5. $z = 2\overline{z}$.
6. $z - \overline{z} = i$.
7. $z\overline{z} - z - \overline{z} = 3$.

Correction exercice 5.

1. $z \in \left\{e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}, e^{-i\pi/2}\right\}$.

2. $z \in \{\sqrt{2}e^{i\pi/12}, \sqrt{2}e^{i7\pi/12}, \sqrt{2}e^{i13\pi/12}, \sqrt{2}e^{-i5\pi/12}\}$.
3. $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
4. $z = 1$ ou $z = -3/2$.
5. En passant au module, on trouve $|z| = 2|z|$ et donc la seule solution est $z = 0$.
6. En posant $z = x + iy$ on trouve $y = 1/2$, donc l'ensemble des solutions est la droite horizontale d'équation $y = 1/2$.
7. En posant $z = x + iy$, on a

$$z\overline{z} - z - \overline{z} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4,$$

l'ensemble des solutions est le cercle centré en 1 et de rayon 2.

Exercice 6. Résoudre le système linéaire suivant dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} z_1 + iz_2 = 2 \\ -iz_1 + 2z_2 = 1 \end{cases}$$

Correction exercice 6.
En faisant $L_2 \leftarrow iL_1 + L2$, on trouve $z_2 = 1 + 2i$ puis $z_1 = 4 - i$.

Exercice 7. Utilisez la formule

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$$

pour prouver les formules d'addition suivantes :

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
2. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Correction exercice 7.
Utiliser la formule de De Moivre, développer et identifier partie réelle et imaginaire.