Calcul Matriciel

Exercice 1. Pour chacune des matrices M suivantes, donner leur ordre et calculer leur transposée M^T.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
5. $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction exercice 1. Facile.

Exercice 2. Montrer que si M est une matrice carrée, $M + M^T$ est symétrique et $M - M^T$ est antisymétrique.

Correction exercice 2. On a $(M+M^T)^T = M^T + (M^T)^T = M + M^T$. De même, $(M - M^T)^T = M^T - (M^T)^T = -M + M^T = -(M + M^T)$.

Exercice 3. Trouver les valeurs du paramètre k pour lequelles $C = A + B$ est une matrice symétrique, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ k^2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -k \\ 8 & k+4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 3. Après calcul, on a $(A+B)^T = A+B$ ssi $k^2+3 = 12$ et $k+6 = -k$, donc la seule solution est $k = -3$.

Exercice 4. Trouver les matrices A et B telles que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 4. En calculant somme et différence on trouve que

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \; 2B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix},$$

donc on a

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soient A et B telles que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA.

Correction exercice 5. On trouve $AB = BA = 0$

Exercice 6. Soient A et B telles que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer $(A+B)^2$. Comparer avec $A^2 + 2AB + B^2$.

Correction exercice 6. On trouve

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 121 & 99 \\ 88 & 88 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soient A et B telles que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(AB)^T = B^T A^T$.

Correction exercice 7. Il n'y a qu'à calculer.

Exercice 8. Calculer l'inverse des matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 8. Pour inverser A on se ramène à résoudre le système linéaire suivant, d'inconnues x, y et x', y' sont des paramètres.

$$\begin{cases} x + 2y = x' \\ x + y = y' \end{cases}.$$

En résolvant par substitution on trouve

$$\begin{cases} x = -x' + 2y \\ y = x' - y' \end{cases},$$

et donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour inverser B, on fait la même chose (plus long), on résoud

$$\begin{cases} x + 3y + 3z &= x' \\ x + 4y + 3z &= y' \\ x + 3y + 4z &= z' \end{cases}.$$

On trouve alors

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A(\theta)A^T(\theta) = I$. En déduire A^{-1}. Montrer ensuite que

$$A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2).$$

Correction exercice 9. L'identité $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ montre directement que

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

donc $A^{-1}(\theta) = A^T(\theta) = A(-\theta)$. Un calcul donne

$$A(\theta_1)A(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ -\cos\theta_1\sin\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix},$$

Les formules d'addition donnent alors

$$A(\theta_1)A(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = A(\theta_1 + \theta_2).$$

Exercice 10. Calculer le déterminant des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ces matrices sont-elles inversibles ?

Correction exercice 10.

1. On utilise la définition du déterminant d'une matrice 2×2 : pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\det(M) = ad - cb$. On a donc $\det(A) = -1$. Le déterminant est différent de 0 donc la matrice A est inversible.
2. Comme précédemment : $\det(B) = 0$. Cette matrice n'est donc pas inversible. Au passage, on remarque que la deuxième colonne correspond à la première colonne multipliée par -2.
3. Pour une matrice 3×3, on développe par rapport à une ligne ou colonne presque vide. Ici, on développe par rapport à la première ligne :
$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -13$$
Cette matrice est inversible.
4. Dans ce cas, on va d'abord injecter -2 fois la deuxième colonne dans la troisième colonne pour introduire un zéro supplémentaire. Puis, ensuite seulement, on va développer par rapport à la première ligne
$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9$$
5. Pour une matrice 4×4, on itère la méthode utilisée pour les matrices 3×3
$$\det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Exercice 11. Calculer les valeurs propres des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Correction exercice 11. Pour calculer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices, on calcule d'abord son polynôme caractéristique, puis on le factorise. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

1. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1 \\ &= (X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

   Cette factorisation étant trouvée grâce au calcul du discriminant. Les valeurs propres de A sont donc $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

2. Polynôme caractéristique :

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 4-X & -8 \\ 2 & -4-X \end{vmatrix} = (4-X)(-4-X) + 16 = X^2$$

   La matrice B possède 0 comme seule valeur propre (double). On retrouve le fait que B n'est pas inversible.

3. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_C(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 2 & 1-X & 3 \\ 3 & 5 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 5 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\Big((1-X)(2-X) - 15\Big) = (1-X)(X^2 - 3X - 13) \\ &= (1-X)(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) \end{aligned}$$

   avec $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{3\pm\sqrt{61}}{2}$ les racines de $X^2 - 3X - 13$. Les valeurs propres de C sont donc 1, λ_1 et λ_2.