Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{1+x}$
2. $\frac{3}{1+x^2}$
3. $e^{\frac{1}{1-x}}$
4. $\ln(1-x)$
5. $\sqrt{-4x}$

Correction exercice 1.

1. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
4. $]-\infty, 1[$
5. $]-\infty, 0]$

Exercice 2. Calculer l'ensemble image des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 2$ avec $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $g(x) = x^2$ avec $D_g = [-5, 5]$

Correction exercice 2.

1. $\mathrm{Im}(f) = \{1, 4, 7, 10\}$
2. $\mathrm{Im}(g) = [0, 25]$

Exercice 3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$.

1. Calculer l'ensemble image de f.
2. Trouver $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = 35$.

Correction exercice 3.

1. Lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, $2x^2$ parcourt $[0, +\infty[$ et donc $2x^2 + 3$ parcourt $[3, +\infty[$. On a $\mathrm{Im}(f) = [3, +\infty[$.
2. Commençons par remarquer que $35 \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc au moins un $z \in \mathbb{R}$ satisfaisant $f(z) = 35$. On résout l'équation suivante :

   $$f(z) = 35 \iff 2z^2 + 3 = 35 \iff 2z^2 = 32 \iff z^2 = 16 \iff z = 4 \text{ ou } z = -4$$

   Il existe donc deux $z \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = 35$: $z = -4$ et $z = 4$.

Exercice 4. Soient les fonctions $f(x) = (x + 1)(x - 2)$ et $g(x) = 2x$.

1. Calculer $f \circ g$.
2. Calculer $g \circ f$.

Correction exercice 4.

1. On a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x)+1)(g(x)-2) = (2x+1)(2x-2)$
2. On a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) = 2(x+1)(x-2)$

Exercice 5. Soient les fonctions $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x + 2$, et $h(x) = \frac{1}{x}$. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $(f \circ g)(x) = 15$
2. $(g \circ g)(x) = h(x)$
3. $(g \circ h)(x) = -4$

Correction exercice 5.

1. On résout ce problème sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = 15 &\iff (g(x))^2 - 1 = 15 \iff (3x+2)^2 - 1 = 15\\ &\iff (3x+2)^2 = 16 \iff 3x+2 = -4 \text{ ou } 3x+2 = 4\\ &\iff 3x = -6 \text{ ou } 3x = 2 \iff x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   On a trouvé deux solutions à cette équation : $\{-2, \frac{2}{3}\}$. Vérifions ce résultat : $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-4) = 15$ et $(f \circ g)(\frac{2}{3}) = f(g(\frac{2}{3})) = f(4) = 15$

2. On résout ce problème sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car h non définie en 0).

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) = h(x) &\iff 3(3x+2) + 2 = \frac{1}{x} \iff 9x + 8 = \frac{1}{x}\\ &\iff (9x+8)x = 1 \iff 9x^2 + 8x - 1 = 0\end{aligned}$$

   Cherchons les racines éventuelles de ce polynôme. On calcule son discriminant : $\Delta = 64 - 4 \times 9 \times (-1) = 100 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{-8-10}{2\times 9} = -1$ et $x_2 = \frac{-8+10}{2\times 9} = \frac{1}{9}$. Ces racines sont non nulles (rappelez-vous qu'on cherche des solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), elles sont donc solutions de l'équation.

3. On cherche des solutions sur $\mathbb{R}^*$ (car h est définie sur $\mathbb{R}^*$)

$$(g \circ h)(x) = -4 \iff \frac{3}{x} + 2 = -4 \iff \frac{3}{x} = -6 \iff \frac{1}{x} = -2 \iff x = -\frac{1}{2}$$

   et $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$, donc cette équation admet pour unique solution $-\frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

1. Donner D_f.
2. Calculer $f^{-1}(x)$.

Correction exercice 6.

1. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est définie pour $y \geq 0$. Dans notre cas, $y = 2x - 1$ et $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$. Donc $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty[$.
2. Calculons maintenant (si elle existe) l'inverse de f. Pour $y \in \mathbb{R}$, cherchons $x \geq \frac{1}{2}$ tel que

$$y = f(x) \iff y = \sqrt{2x-1} \iff y^2 = 2x - 1 \iff x = \frac{y^2+1}{2}$$

De plus, on a bien $\frac{y^2+1}{2} \geq 0$. Ainsi, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{y^2+1}{2} \in D_f$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est donc inversible et son inverse a pour expression $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$.

Exercice 7. Soient les fonctions $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

1. (a) Donner $f^{-1}(x)$. (b) Donner $g^{-1}(x)$. (c) Donner $(g \circ f)^{-1}(x)$.
2. Vérifier que $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{x} - 2)$.

Correction exercice 7.

1. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$, cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = y \iff 3x + 2 = y \iff 3x = y - 2 \iff x = \frac{y-2}{3}$$

Pour chaque $y \in R$, il existe un unique $x = \frac{y-2}{3} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est donc inversible et on a $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}^*$, cherchons $x \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$y = g(x) \iff y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$$

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(x) = y$. La fonciton g est donc inversible et on a $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

(c) On calcule $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x+2}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on cherche $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ tel que

$$(g \circ f)(x) = y \iff \frac{1}{3x+2} = y \iff 3x + 2 = \frac{1}{y} \iff 3x = \frac{1}{y} - 2 \iff x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3}$$

Pour chaque $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe un unique $x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3}$ tel que $y = (g \circ f)(x)$. De plus, pour $y \neq 0$, on a bien $x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3} \neq -\frac{2}{3}$. La fonction $g \circ f$ est donc inversible et son inverse est donnée par $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}$.

2. Il ne reste qu'à vérifier $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}$. Le résultat vient rapidement.

Exercice 8. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\log(18) - \log(24) - \log(2)$
2. $\ln(2) + \ln(3x) - \ln(2x)$
3. $\ln(3x^2) + \ln(2x) - \ln(6x^3)$
4. $\log(5x^2) - \log(10x^2) + \log(4x)$

Correction exercice 8. Dans tout cet exercice, on utilise $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ et $\ln(a^n) = n \ln a$ (et les mêmes relations sont valables avec log à la place de ln).

1.

$$\begin{aligned}\log(18) - \log(24) - \log(2) &= \log(2 \times 3^2) - \log(2^3 \times 3) - \log(2)\\ &= \log 2 + \log(3^2) - \log(2^3) - \log 3 - \log 2\\ &= \log 2 + 2\log 3 - 3\log 2 - \log 3 - \log 2\\ &= -3\log 2 + \log 3\end{aligned}$$

2.

$$\ln(2) + \ln(3x) - \ln(2x) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(x) - \ln(2) - \ln(x) = \ln(3)$$

3.

$$\begin{aligned}\ln(3x^2) + \ln(2x) - \ln(6x^3) &= \ln(3) + 2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x) - \ln(6) - 3\ln(x)\\ &= \ln(3) + \ln(2) - \ln(2 \times 3)\\ &= 0\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\log(5x^2) - \log(10x^2) + \log(4x) &= \log(5) + 2\log(x) - \log(10) - 2\log(x) + \log(4) + \log(x)\\ &= \log(x) + \log(5) - \log(2 \times 5) + \log(2^2)\\ &= \log(x) + \log(2)\end{aligned}$$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes :

1. $2\ln(x) + 1 = 5$
2. $\ln(2x + 1) = 5$
3. $\frac{1}{4}\ln(4 - 3x) = 2$
4. $\ln(e^{2x-1}) = 36$
5. $e^{2x+3} = 4$
6. $e^{-2x} + 10 = 24$
7. $e^{4x+5} = -4$
8. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
9. $e^x + e^{-x} = 2$

Correction exercice 9.

1. Le domaine de définition de $2\ln(x) + 1$ est $\mathbb{R}_+^*$. On cherche donc x dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$2\ln(x) + 1 = 5 \iff 2\ln(x) = 4 \iff \ln(x) = 2 \iff x = e^2$$

(l'équivalence lors de l'application de exp vient du fait que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$)
Il existe une unique solution $e^2 \in \mathbb{R}_+^*$ à cette équation.

2. Le domaine de définition de $\ln(2x+1)$ est $]-\frac{1}{2},+\infty[$. On cherche donc $x > -\frac{1}{2}$ tel que

$$\ln(2x+1) = 5 \iff 2x+1 = e^5 \iff 2x = e^5 - 1 \iff x = \frac{e^5-1}{2}$$

(l'équivalence lors de l'application de exp vient du fait que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$)

3. La fonction $\frac{1}{4}\ln(4-3x)$ est définie sur $]-\infty,\frac{4}{3}[$. On cherche $x < \frac{4}{3}$ tel que

$$\frac{1}{4}\ln(4-3x) = 2 \iff \ln(4-3x) = 8 \iff 4-3x = e^8 \iff -3x = e^8 - 4 \iff x = \frac{4}{3} - \frac{e^8}{3}$$

4. e^{2x-1} est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ où ln est définie. La fonction $\ln(e^{2x-1})$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\ln(e^{2x-1}) = 2x-1$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(e^{2x-1}) = 36 \iff 2x-1 = 36 \iff x = \frac{37}{2}$$

5.

$$e^{2x+3} = 4 \iff 2x+3 = \ln(4) \iff x = \frac{\ln(4)-3}{2}$$

(l'équivalence lors de l'application de ln vient du fait que cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$)

6.

$$e^{-2x} + 10 = 24 \iff e^{-2x} = 14 \iff -2x = \ln(14) \iff x = -\frac{1}{2}\ln(14)$$

(l'équivalence lors de l'application de ln vient du fait que cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$)

7. La fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $-4 \notin \mathbb{R}_+^*$. Il n'existe donc aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{4x+5} = -4$: cette équation n'a pas de solution.

8. On effectue le changement de variables $t = e^x$.

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff t^2 - 5t + 6 = 0$$

On calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles $t_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{5+1}{2} = 3$. Donc

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff e^x = 2 \text{ ou } e^x = 3 \iff x = \ln(2) \text{ ou } x = \ln(3)$$

Cette équation admet deux solutions : $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

9. On effectue le changement de variables $t = e^x$.

$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \iff t^2 - 2t + 1 = 0$$

On calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta = 0$. Il admet donc une unique racine (double) : $t_0 = -1$. Donc

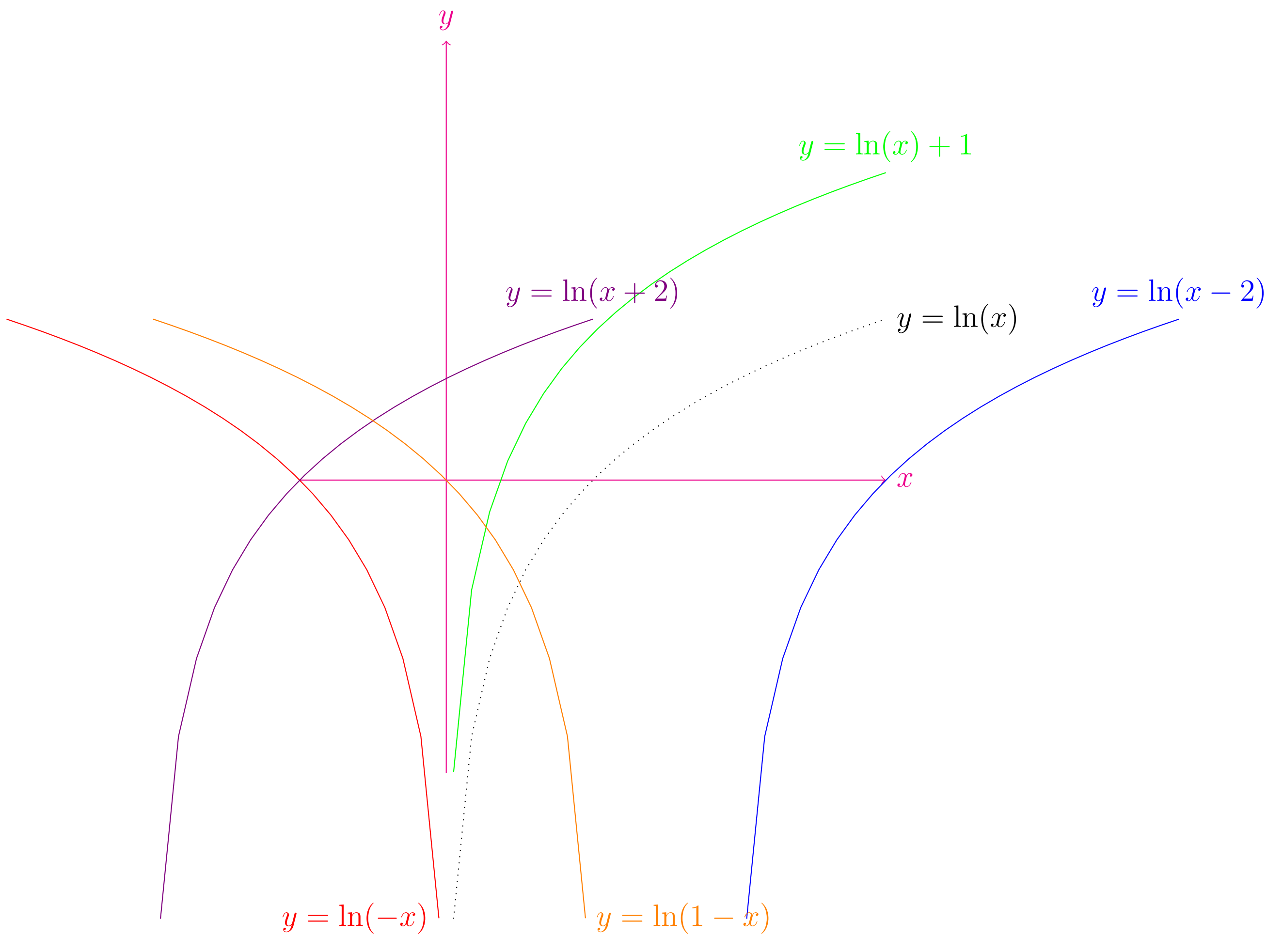
$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^x = -1$$

On a $e^x > 0$ et donc on ne peut pas avoir $e^x = -1$. Cette équation n'admet donc aucune solution.

Exercice 10. Tracer les graphes des fonctions suivantes :

1. $\ln(x) + 1$
2. $\ln(x-2)$
3. $\ln(-x)$
4. $\ln(x+2)$
5. $\ln(1-x)$

Correction exercice 10.



Exercice 11. Pour des réels a, b et β ($\beta \neq 0$), calculer la dérivée des fonctions suivantes (x est la variable) :

1. a^{x^2} $(a > 0)$
2. $(ax+b)^\beta$
3. $\ln(ax+b)$
4. e^{ax+b}
5. $\cos(ax+b)$
6. $\sin(ax+b)$
7. $\tan(x)$
8. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
9. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
10. $\arcsin(x)$
11. $\arccos(x)$
12. $\arctan(x)$

Correction exercice 11.

1. Il s'agit de la composée des fonctions $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$ et $g(x) = x^2$. Leurs dérivées valent $f'(x) = \ln(a)a^x$ et $g'(x) = 2x$. La dérivée de la fonction $a^{x^2} = (f \circ g)(x)$ vaut donc $f'(g(x)) \times g'(x) = 2\ln(a)xa^{x^2}$.
2. On a $(ax+b)^\beta = e^{\beta\ln(ax+b)} = (f \circ g)(x)$ avec $f(x) = x^\beta = e^{\beta\ln(x)}$ et $g(x) = ax+b$. Les dérivées de ces fonctions valent $f'(x) = \beta e^{\beta\ln(x)} \times \frac{1}{x} = \beta x^{\beta-1}$ et $g'(x) = a$. La dérivée de cette fonction vaut donc $f'(g(x)) \times g'(x) = \beta a(ax+b)^{\beta-1}$.
3. On note $f(x) = \ln(ax+b)$. Par dérivée d'une composée de fonctions, on a $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$.
4. On note $f(x) = e^{ax+b}$. Par derivée d'une composée de fonctions, on a $f'(x) = ae^{ax+b}$.
5. Idem : $-a\sin(ax+b)$
6. Idem : $a\cos(ax+b)$
7. On écrit la fonction tan comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. En dérivant le quotient de fonctions, on a
$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \tan^2(x).$$
8. Il s'agit de la fonction $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. On obtient facilement $\cosh'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x)$.
9. Il s'agit de la fonction $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. On obtient facilement $\sinh'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.
10. L'arcsinus est défini comme étant la fonction inverse du sinus (le sinus étant une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1,1]$). Pour tout x dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a donc $\arcsin(\sin(x)) = x$. En dérivant cette expression, on obtient $\arcsin'(\sin(x))\cos(x) = 1$ et donc $\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$. Notez que l'on a utilisé la formule de trigonométrie $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos(x) \geq 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par changement de variables, on a alors $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
Notez que l'on peut aussi utiliser la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ avec $f(x) = \sin(x)$. De plus, pour compléter cette démonstration, on peut montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$: ceci vient de $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ combiné avec le changement de variables $t = \arcsin(x)$.

11. L'arccosinus est défini comme étant l'inverse de la fonction cosinus (le cosinus étant une bijection de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$). On peut utiliser la même méthodologie qu'à la question précédente. Pour tout x dans $[0,\pi]$, on a $\arccos(\cos(x)) = x$. En dérivant : $-\sin(x)\arccos'(\cos(x)) = 1$ et donc $\arccos'(\cos(x)) = \frac{-1}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$ et donc $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Comme pour la question précédente, on peut aussi utiliser la formule de la dérivée de la fonction inverse.
12. De la même façon : $\arctan(\tan(x)) = x$ et donc $\arctan'(\tan(x))(1+\tan^2(x)) = 1$ et donc $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 12. Donner les DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $\frac{5x^4-4x^3-3x}{x}$
2. $\frac{\cos(x)-1}{x}$
3. $\frac{\sin(x)}{x+1}$
4. $\frac{\cos(x)e^x}{1-x}$

Correction exercice 12.

1. Cette expression peut se simplifier en $5x^3-4x^2-3$. En 0, le terme $5x^3$ est d'ordre strictement supérieur à 2. On a donc $5x^3-4x^2-3 = -3-4x^2+O(x^3)$.
2. Le terme $\cos(x)-1$ est divisé par x. Il faut donc un DL à l'ordre 3 de $\cos(x)-1$. Si on ne connait pas par coeur le DL de $\cos(x)$, on peut le retrouver avec la formule de Taylor-Young (en utilisant le fait que la fonction cos est C^∞) :
$$\cos(x) = \cos(0) + \cos'(0)x + \frac{\cos''(0)x^2}{2} + \frac{\cos^{(3)}(0)x^3}{3!} + O(x^4)$$
En calculant les différents termes, on a
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$
En soustrayant 1 et en divisant par x :
$$\frac{\cos(x)-1}{x} = -\frac{x}{2} + O(x^3)$$
3. Le DL de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 2 vaut
$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)x^2}{2} + O(x^3)\\ &= x + O(x^3)\end{aligned}$$
Le DL à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+x}$ en 0 vaut
$$\begin{aligned}f(x) = \frac{1}{1+x} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + O(x^3)\\ &= 1 - x + x^2 + O(x^3)\end{aligned}$$

En multipliant les deux DL :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{1+x} &= (x + O(x^3))(1 - x + x^2 + O(x^3)) \\ &= x - x^2 + O(x^3)\end{aligned}$$

4. On a déjà vu précédemment

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + O(x^3)\end{aligned}$$

En changeant, x en $-x$, on a immédiatement

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3)$$

De plus, on peut calculer le DL le e^x en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

En multipliant ces trois DL, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)e^x}{1-x} &= (1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3))(1 + x + x^2 + O(x^3))(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)) \\ &= (1 + x + x^2 - \frac{x^2}{2} + O(x^3))(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x + x^2 + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)\end{aligned}$$

Exercice 13. Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $3x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 1$
2. $\frac{3x^2-2x+1}{x+4}$
3. $\frac{x^3-4x^2+1}{x^5+2}$
4. $\frac{3x+\sqrt{x}}{x-1}$
5. $\sqrt{x^2+4x-1} - 2x$
6. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

Correction exercice 13.

1. La limite en l'infini d'un polynôme est donnée par son monôme de plus haut degré. Comme $\lim_{x\to+\infty} 3x^4 = +\infty$, alors on a $\lim_{x\to+\infty} 3x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 1 = +\infty$.
2. La limite en l'infini d'un quotient de polynômes est donnée par la limite du quotient des monômes de plus haut degré. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x} = +\infty$

3. Idem : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x^2+1}{x^5+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^5} = 0$.
4. Ici on peut séparer la fraction en deux : $\frac{3x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3x}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$. Ainsi, en sommant les deux limites : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\sqrt{x}}{x-1} = 3$.
5. On peut traiter ce cas en majorant la fonction. On a, pour x suffisamment grand, $x^2+4x-1 \leq \frac{9}{4}x^2$ et donc (par croissance de la racine carrée) $\sqrt{x^2+4x-1} \leq \frac{3}{2}x$. Ainsi, pour x suffisamment grand, $\sqrt{x^2+4x-1} - 2x \leq -\frac{x}{2}$. On a, de plus, $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$. Par majoration, on a donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x-1} - 2x = -\infty$.
6. Notons $f(x) = \sqrt{x}$. On cherche donc la limite en $+\infty$ de $f(x+1) - f(x-1)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour $x \geq a$, $|f(x+1)-f(x-1)| \leq 2\sup_{z\in[x-1,x+1]} |f'(z)|$. Or $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ et ainsi $\lim_{x\to+\infty} \sup_{z\in[x-1,x+1]} |f'(z)| = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x-1) = 0$.

Exercice 14. Calculer les limites suivantes :

1. de $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$ en $x = 1$
2. de $\frac{\cos(x)-1}{x}$ en $x = 0$

Correction exercice 14.

1. Si la fonction était définie en 1, il suffirait de l'évaluer pour obteir sa limite. Ici cette fonction est une fraction, le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers zéro quand $x \to 1$ (et ce sont des polynômes). On peut donc mettre $x-1$ en facteur et simplifier. On a $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$ et $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$. Ainsi, $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} = \frac{x-3}{x+4}$ et donc $\lim_{x\to1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to1} \frac{x-3}{x+4} = -\frac{2}{5}$.
2. Pour cette question, nous allons faire un développement limité du cosinus en 0 : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ et donc $\frac{\cos(x)-1}{x} = -\frac{x}{2} + O(x^3)$ et donc $\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

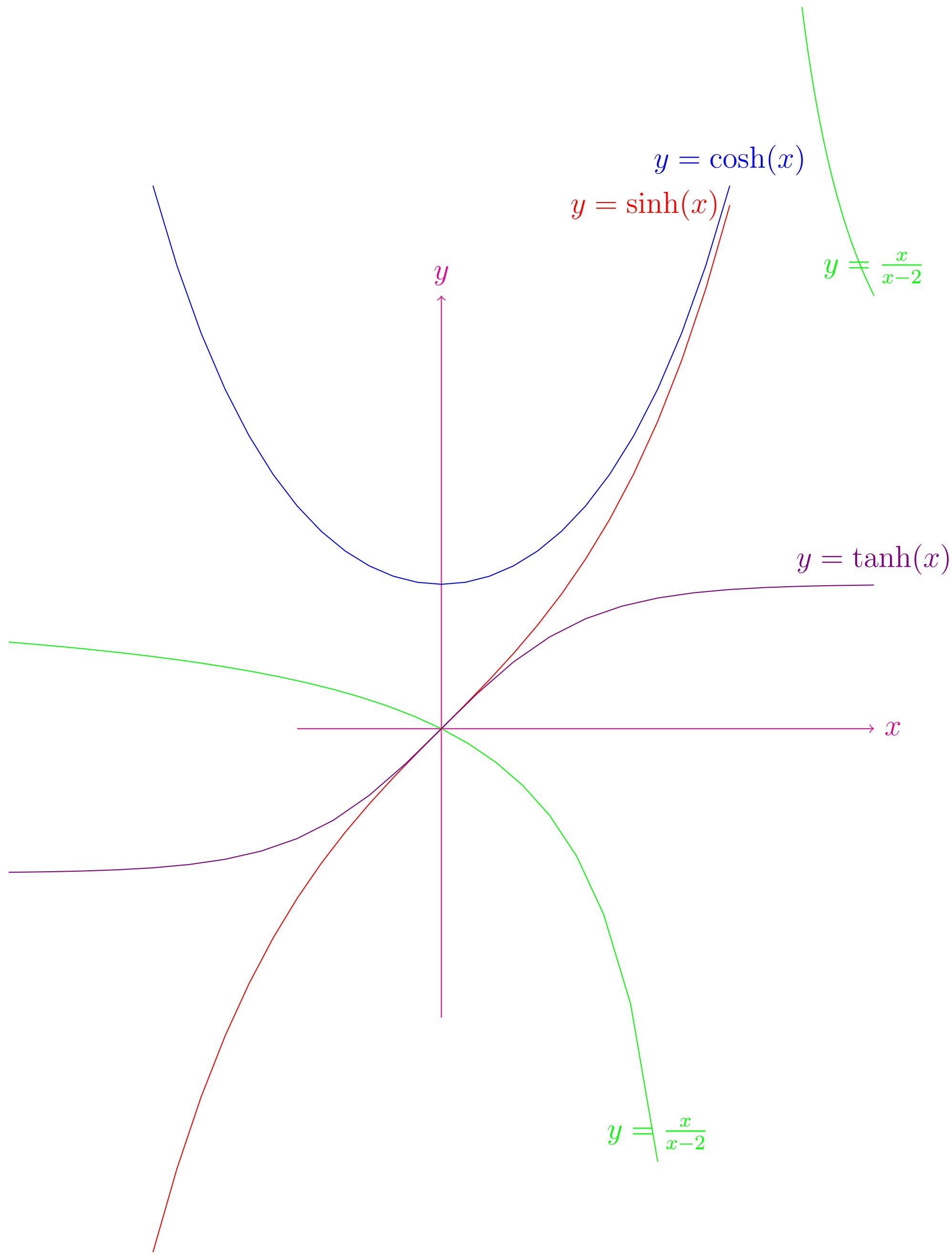
Exercice 15. Étudier les fonctions suivantes et tracer leur graphe :

1. $\frac{x}{x-2}$
2. $\cosh(x)$
3. $\sinh(x)$
4. $\tanh(x)$

Correction exercice 15.

1. Cette fonction f est définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. $\lim_{x\to2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty$ et $\lim_{x\to2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$. Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$.
2. La fonction $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier. Sa dérivée vaut $\sinh(x)$ qui est négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on remarque que la fonction cosh est paire.

3. La fonction $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier. Sa dérivée vaut $\cosh(x)$ qui est toujours positive. De plus, on remarque que la fonction sinh est impaire.
4. La fonction $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier. Sa dérivée vaut $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$. De plus, on remarque que $-1 < \tanh(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc cette fonction est strictement croissante. On peut de plus montrer qu'elle est impaire.
5. Tracé des fonctions :



Exercice 16. Soit une constante $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $\sin(\alpha x)$
2. $\cos(\alpha x)$
3. $\frac{1}{\alpha x}$
4. $e^{-\alpha x}$
5. $x^{\frac{1}{\alpha}}$
6. $\sqrt{\alpha x}$
7. $\frac{1}{\sqrt{\alpha x}}$
8. $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$
9. $\frac{1}{\alpha^2 + x^2}$
10. $\ln(x)$
11. $x \ln(x)$
12. $x \cos(x)$

Correction exercice 16. Tous les résultats de cette section peuvent être vérifiés en dérivant la primitive pour retrouver la fonction initiale.

1. $-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$
2. $\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$
3. $\frac{1}{|\alpha|}\ln(|\alpha x|)$ Attention pour celui-ci : la fonction $\frac{1}{\alpha x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ tandis que le logarithme est défini seulement sur $\mathbb{R}^*_+$. Il faut donc pouvoir envisager le cas $\alpha x < 0$ et c'est pour cela qu'il ne faut pas oublier les valeurs absolues.
4. $-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}$
5. Si $\alpha \neq -1$ alors la primitive vaut $\frac{\alpha}{\alpha+1}x^{1+\frac{1}{\alpha}}$. Si $\alpha = -1$, alors la primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(|x|)$.
6. $\sqrt{\alpha x} = (\alpha x)^{\frac{1}{2}}$ et donc la primitive de cette fonction vaut $\frac{2}{3\alpha}(\alpha x)^{\frac{3}{2}}$.
7. De même, $\frac{1}{\sqrt{\alpha x}} = (\alpha x)^{-\frac{1}{2}}$ et donc sa primitive vaut $\frac{2}{\alpha}(\alpha x)^{\frac{1}{2}}$.
8. Pour cette primitive, il faut reconnaître la dérivée de l'arcsinus : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ainsi, on a $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \frac{1}{|\alpha|\sqrt{1-(\frac{x}{\alpha})^2}}$. Et donc la primitive recherchée vaut $\frac{\alpha}{|\alpha|}\arcsin(\frac{x}{\alpha})$.
9. On rappelle la dérivée de l'arctangente : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. De plus, $\frac{1}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{\alpha^2(1+(\frac{x}{\alpha})^2)}$ et donc la primitive de cette fonction vaut $\frac{1}{\alpha}\arctan(\frac{x}{\alpha})$.
10. On utilise une intégration par parties pour cette primitive (on dérive $\ln(t)$ et on primitive 1)
$$\int^x 1\ln(t) = [t\ln(t)]^x - \int^x 1 = x\ln(x) - x$$
Une primitive de $\ln(x)$ est donc $x\ln(x) - x$ (on peut vérifier ce résultat en dérivant cette fonction).
11. A nouveau, on utilise une intégration par parties (on dérive $\ln(t)$ et on primitive t)
$$\int^x t\ln(t) = [\frac{t^2}{2}\ln(t)]^x - \int^x \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

12. Encore une fois, on utilise une intégration par parties. On dérive t et on primitive $\cos(t)$:

$$\int^x t\cos(t) = [t\sin(t)]^x - \int^x \sin(t) = x\sin(x) + \cos(x)$$

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^\pi \sin(x)\ dx$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx$
3. $\int_0^\pi x\sin(x)\ dx$
4. $\int_0^1 xe^x\ dx$
5. $\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{2\pi}} 2x\cos(x^2)\ dx$
6. $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\ dx$

Correction exercice 17.

1. Ici, on connaît une primitive de l'intégrande. $\int_0^\pi \sin(x)\ dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$
2. Idem. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$
3. Ici, on utilise une intégration par parties. $\int_0^\pi x\sin(x)\ dx = [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\ dx = \pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi$
4. Idem. $\int_0^1 xe^x\ dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx = e - e + 1 = 1$
5. Ici, on utilise le changement de variables $t = x^2$ et donc $dt = 2xdx$

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{2\pi}} 2x\cos(x^2)\ dx &= \int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{0} 2x\cos(x^2)\ dx + \int_0^{\sqrt{2\pi}} 2x\cos(x^2)\ dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(t)\ dt + \int_0^{2\pi} \cos(t)\ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\ dt = [\sin(t)]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = 0 - 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

6. Ici, on utilise le changement de variables $t = e^x$ et donc $dt = e^x\ dx$ ce qui donne $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\ dx = \int_1^e \frac{t-1}{t(t+1)}\ dt$$

Maintenant, il faut trouver a et b tels que

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} = \frac{(a+b)t + a}{t(t+1)}$$

et donc $a = -1$ et $b = 2$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\ dx = \int_1^e \frac{t-1}{t(t+1)}\ dt = \int_1^e \frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1}\ dt &= [-\ln(t) + 2\ln(t+1)]_1^e \\ &= -1 + 2\ln(e+1) - 2\ln(2)\end{aligned}$$