Calcul Matriciel

Exercice 1. Pour chacune des matrices M suivantes, donner leur ordre et calculer leur transposée M^T.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
5. $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction exercice 1. Facile.

Exercice 2. Montrer que si M est une matrice carrée, $M + M^T$ est symétrique et $M - M^T$ est antisymétrique.

Correction exercice 2. On a $(M+M^T)^T = M^T + (M^T)^T = M + M^T$. De même, $(M - M^T)^T = M^T - (M^T)^T = -M + M^T = -(M + M^T)$.

Exercice 3. Trouver les valeurs du paramètre k pour lequelles $C = A + B$ est une matrice symétrique, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ k^2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -k \\ 8 & k+4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 3. Après calcul, on a $(A+B)^T = A+B$ ssi $k^2 + 3 = 12$ et $k + 6 = -k$, donc la seule solution est $k = -3$.

Exercice 4. Trouver les matrices A et B telles que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A - B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 4. En calculant somme et différence on trouve que

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \; 2B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix},$$

donc on a

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soient A et B telles que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA.

Correction exercice 5. On trouve $AB = BA = 0$

Exercice 6. Soient A et B telles que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer $(A+B)^2$.

Correction exercice 6. On trouve

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 121 & 99 \\ 88 & 88 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soient A et B telles que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(AB)^T = B^T A^T$.

Correction exercice 7. Il n'y a qu'à calculer.

Exercice 8. Calculer l'inverse des matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 8. Pour inverser A on se ramène à résoudre le système linéaire suivant, d'inconnues x, y et x', y' sont des paramètres.

$$\begin{cases} x + 2y = x' \\ x + y = y' \end{cases}.$$

En résolvant par substitution on trouve

$$\begin{cases} x = -x' + 2y \\ y = x' - y' \end{cases},$$

et donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour inverser B, on fait la même chose (plus long), on résoud

$$\begin{cases} x + 3y + 3z &= x' \\ x + 4y + 3z &= y' \\ x + 3y + 4z &= z' \end{cases}.$$

On trouve alors

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A(\theta)A^T(\theta) = I$. En déduire A^{-1}. Montrer ensuite que

$$A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2).$$

Correction exercice 9. L'identité $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ montre directement que

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

donc $A^{-1}(\theta) = A^T(\theta) = A(-\theta)$. Un calcul donne

$$A(\theta_1)A(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ -\cos\theta_1\sin\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix},$$

Les formules d'addition donnent alors

$$A(\theta_1)A(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = A(\theta_1+\theta_2).$$