

Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{1+x}$ 2. $\frac{3}{1+x^2}$ 3. $e^{\frac{1}{1-x}}$ 4. $\ln(1-x)$ 5. $\sqrt{-4x}$

Correction exercice 1.

1. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 3. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ 5. $] -\infty, 0]$
2. \mathbb{R} 4. $] -\infty, 1[$

Exercice 2. Calculer l'image des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 2$ avec $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ 2. $g(x) = x^2$ avec $D_g = [-5, 5]$

Correction exercice 2.

1. $\text{Im}(f) = \{1, 4, 7, 10\}$ 2. $\text{Im}(g) = [0, 25]$

Exercice 3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$.

1. Calculer le domaine image de f . 2. Trouver $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = 35$.

Correction exercice 3.

1. Lorsque x parcourt \mathbb{R} , $2x^2$ parcourt $[0, +\infty[$ et donc $2x^2 + 3$ parcourt $[3, +\infty[$.
On a $\text{Im}(f) = [3, +\infty[$.
2. Commençons par remarquer que $35 \in \text{Im}(f)$. Il existe donc au moins un $z \in \mathbb{R}$ satisfaisant $f(z) = 35$. On résout l'équation suivante :

$$f(z) = 35 \iff 2z^2 + 3 = 35 \iff 2z^2 = 32 \iff z^2 = 16 \iff z = 4 \text{ ou } z = -4$$

Il existe donc deux $z \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = 35$: $z = -4$ et $z = 4$.

Exercice 4. Soient les fonctions $f(x) = (x+1)(x-2)$ et $g(x) = 2x$.

1. Calculer $f \circ g$.

2. Calculer $g \circ f$.

Correction exercice 4.

1. On a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x) + 1)(g(x) - 2) = (2x + 1)(2x - 2)$

2. On a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) = 2(x + 1)(x - 2)$

Exercice 5. Soient les fonctions $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x + 2$, et $h(x) = \frac{1}{x}$. Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} :

1. $(f \circ g)(x) = 15$

2. $(g \circ g)(x) = h(x)$

3. $(g \circ h)(x) = -4$

Correction exercice 5.

1. On résout ce problème sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = 15 &\iff (g(x))^2 - 1 = 15 \iff (3x + 2)^2 - 1 = 15 \\ &\iff (3x + 2)^2 = 16 \iff 3x + 2 = -4 \text{ ou } 3x + 2 = 4 \\ &\iff 3x = -6 \text{ ou } 3x = 2 \iff x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

On a trouvé deux solutions à cette équation : $\{-2, \frac{2}{3}\}$. Vérifions ce résultat :
 $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-4) = 15$ et $(f \circ g)(\frac{2}{3}) = f(g(\frac{2}{3})) = f(4) = 15$

2. On résout ce problème sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car h non définie en 0).

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) = h(x) &\iff 3(3x + 2) + 2 = \frac{1}{x} \iff 9x + 8 = \frac{1}{x} \\ &\iff (9x + 8)x = 1 \iff 9x^2 + 8x - 1 = 0\end{aligned}$$

Cherchons les racines éventuelles de ce polynôme. On calcule son discriminant :
 $\Delta = 64 - 4 \times 9 \times (-1) = 100 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles :
 $x_1 = \frac{-8-10}{2 \times 9} = -1$ et $x_2 = \frac{-8+10}{2 \times 9} = \frac{1}{9}$. Ces racines sont non nulles (rappelez-vous qu'on cherche des solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), elles sont donc solutions de l'équation.

3. On cherche des solutions sur \mathbb{R}^* (car h est définie sur \mathbb{R}^*)

$$(g \circ h)(x) = -4 \iff \frac{3}{x} + 2 = -4 \iff \frac{3}{x} = -6 \iff \frac{1}{x} = -2 \iff x = -\frac{1}{2}$$

et $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$, donc cette équation admet pour unique solution $-\frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{2x - 1}$.

1. Donner D_f .

2. Calculer $f^{-1}(x)$.

Correction exercice 6.

1. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est définie pour $y \geq 0$. Dans notre cas, $y = 2x - 1$ et $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$. Donc $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty[$.
2. Calculons maintenant (si elle existe) l'inverse de f . Pour $y \in \mathbb{R}$, cherchons $x \geq \frac{1}{2}$ tel que

$$y = f(x) \iff y = \sqrt{2x - 1} \iff y^2 = 2x - 1 \iff x = \frac{y^2 + 1}{2}$$

De plus, on a bien $\frac{y^2 + 1}{2} \geq 0$. Ainsi, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{y^2 + 1}{2} \in D_f$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est donc inversible et son inverse a pour expression $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$.

Exercice 7. Soient les fonctions $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

1. (a) Donner $f^{-1}(x)$. (b) Donner $g^{-1}(x)$. (c) Donner $(g \circ f)^{-1}(x)$.
2. Vérifier que $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{x} - 2)$.

Correction exercice 7.

1. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$, cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = y \iff 3x + 2 = y \iff 3x = y - 2 \iff x = \frac{y - 2}{3}$$

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{y - 2}{3} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est donc inversible et on a $f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$.

- (b) Soit $y \in \mathbb{R}^*$, cherchons $x \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$y = g(x) \iff y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$$

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(x) = y$. La fonction g est donc inversible et on a $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

- (c) On calcule $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x + 2}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on cherche $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ tel que

$$(g \circ f)(x) = y \iff \frac{1}{3x + 2} = y \iff 3x + 2 = \frac{1}{y} \iff 3x = \frac{1}{y} - 2 \iff x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3}$$

Pour chaque $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe un unique $x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3}$ tel que $y = (g \circ f)(x)$.

De plus, pour $y \neq 0$, on a bien $x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3} \neq -\frac{2}{3}$. La fonction $g \circ f$ est donc inversible et son inverse est donnée par $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}$.

2. Il ne reste qu'à vérifier $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}$. Le résultat vient rapidement.

Exercice 8. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\log(18) - \log(24) - \log(2)$
2. $\ln(2) + \ln(3x) - \ln(2x)$
3. $\ln(3x^2) + \ln(2x) - \ln(6x^3)$
4. $\log(5x^2) - \log(10x^2) + \log(4x)$

Correction exercice 8. Dans tout cet exercice, on utilise $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ et $\ln(a^n) = n \ln a$ (et les mêmes relations sont valables avec \log à la place de \ln).

1.

$$\begin{aligned}
 \log(18) - \log(24) - \log(2) &= \log(2 \times 3^2) - \log(2^3 \times 3) - \log(2) \\
 &= \log 2 + \log(3^2) - \log(2^3) - \log 3 - \log 2 \\
 &= \log 2 + 2 \log 3 - 3 \log 2 - \log 3 - \log 2 \\
 &= -3 \log 2 + \log 3
 \end{aligned}$$

2.

$$\ln(2) + \ln(3x) - \ln(2x) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(x) - \ln(2) - \ln(x) = \ln(3)$$

3.

$$\begin{aligned}
 \ln(3x^2) + \ln(2x) - \ln(6x^3) &= \ln(3) + 2 \ln(x) + \ln(2) + \ln(x) - \ln(6) - 3 \ln(x) \\
 &= \ln(3) + \ln(2) - \ln(2 \times 3) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \log(5x^2) - \log(10x^2) + \log(4x) &= \log(5) + 2 \log(x) - \log(10) - 2 \log(x) + \log(4) + \log(x) \\
 &= \log(x) + \log(5) - \log(2 \times 5) + \log(2^2) \\
 &= \log(x) + \log(2)
 \end{aligned}$$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes :

1. $2 \ln(x) + 1 = 5$
2. $\ln(2x + 1) = 5$
3. $\frac{1}{4} \ln(4 - 3x) = 2$
4. $\ln(e^{2x-1}) = 36$
5. $e^{2x+3} = 4$
6. $e^{-2x} + 10 = 24$
7. $e^{4x+5} = -4$
8. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
9. $e^x + e^{-x} = 2$

Correction exercice 9.

1. Le domaine de définition de $2 \ln(x) + 1$ est \mathbb{R}_+^* . On cherche donc x dans \mathbb{R}_+^* tel que

$$2 \ln(x) + 1 = 5 \iff 2 \ln(x) = 4 \iff \ln(x) = 2 \iff x = e^2$$

(l'équivalence lors de l'application de \exp vient du fait que la fonction exponentielle est une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R}_+^*)

Il existe une unique solution $e^2 \in \mathbb{R}_+^*$ à cette équation.

2. Le domaine de définition de $\ln(2x+1)$ est $] -\frac{1}{2}, +\infty[$. On cherche donc $x > -\frac{1}{2}$ tel que

$$\ln(2x+1) = 5 \iff 2x+1 = e^5 \iff 2x = e^5 - 1 \iff x = \frac{e^5 - 1}{2}$$

(l'équivalence lors de l'application de \exp vient du fait que la fonction exponentielle est une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R}_+^*)

3. La fonction $\frac{1}{4}\ln(4-3x)$ est définie sur $] -\infty, \frac{4}{3}[$. On cherche $x < \frac{4}{3}$ tel que

$$\frac{1}{4}\ln(4-3x) = 2 \iff \ln(4-3x) = 8 \iff 4-3x = e^8 \iff -3x = e^8 - 4 \iff x = \frac{4}{3} - \frac{e^8}{3}$$

4. e^{2x-1} est à valeur dans \mathbb{R}_+^* où \ln est définie. La fonction $\ln(e^{2x-1})$ est définie sur \mathbb{R} et on a $\ln(e^{2x-1}) = 2x - 1$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(e^{2x-1}) = 36 \iff 2x - 1 = 36 \iff x = \frac{37}{2}$$

5.

$$e^{2x+3} = 4 \iff 2x+3 = \ln(4) \iff x = \frac{\ln(4) - 3}{2}$$

(l'équivalence lors de l'application de \ln vient du fait que cette fonction est une bijection de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R})

6.

$$e^{-2x} + 10 = 24 \iff e^{-2x} = 14 \iff -2x = \ln(14) \iff x = -\frac{1}{2}\ln(14)$$

(l'équivalence lors de l'application de \ln vient du fait que cette fonction est une bijection de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R})

7. La fonction exponentielle est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et $-4 \notin \mathbb{R}_+^*$. Il n'existe donc aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{4x+5} = -4$: cette équation n'a pas de solution.
8. On effectue le changement de variables $t = e^x$.

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff t^2 - 5t + 6 = 0$$

On calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles $t_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{5+1}{2} = 3$. Donc

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff e^x = 2 \text{ ou } e^x = 3 \iff x = \ln(2) \text{ ou } x = \ln(3)$$

Cette équation admet deux solutions : $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

9. On effectue le changement de variables $t = e^x$.

$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \iff t^2 - 2t + 1 = 0$$

On calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta = 0$. Il admet donc une unique racine (double) : $t_0 = 1$. Donc

$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^x = 1$$

On a $e^x > 0$ et donc on ne peut pas avoir $e^x = -1$. Cette équation n'admet donc aucune solution.