Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{1+x}$
2. $\frac{3}{1+x^2}$
3. $e^{\frac{1}{1-x}}$
4. $\ln(1-x)$
5. $\sqrt{-4x}$

Correction exercice 1.

1. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
4. $]-\infty, 1[$
5. $]-\infty, 0]$

Exercice 2. Calculer l'image des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 2$ avec $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $g(x) = x^2$ avec $D_g = [-5, 5]$

Correction exercice 2.

1. $\mathrm{Im}(f) = \{1, 4, 7, 10\}$
2. $\mathrm{Im}(g) = [0, 25]$

Exercice 3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$.

1. Calculer le domaine image de f.
2. Trouver $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = 35$.

Correction exercice 3.

1. Lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, $2x^2$ parcourt $[0, +\infty[$ et donc $2x^2 + 3$ parcourt $[3, +\infty[$. On a $\mathrm{Im}(f) = [3, +\infty[$.
2. Commençons par remarquer que $35 \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc au moins un $z \in \mathbb{R}$ satisfaisant $f(z) = 35$. On résout l'équation suivante :

$$f(z) = 35 \iff 2z^2 + 3 = 35 \iff 2z^2 = 32 \iff z^2 = 16 \iff z = 4 \text{ ou } z = -4$$

Il existe donc deux $z \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = 35$: $z = -4$ et $z = 4$.

Exercice 4. Soient les fonctions $f(x) = (x + 1)(x - 2)$ et $g(x) = 2x$.

1. Calculer $f \circ g$.
2. Calculer $g \circ f$.

Correction exercice 4.

1. On a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x)+1)(g(x)-2) = (2x+1)(2x-2)$
2. On a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) = 2(x+1)(x-2)$

Exercice 5. Soient les fonctions $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x + 2$, et $h(x) = \frac{1}{x}$. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $(f \circ g)(x) = 15$
2. $(g \circ g)(x) = h(x)$
3. $(g \circ h)(x) = -4$

Correction exercice 5.

1. On résout ce problème sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = 15 &\iff (g(x))^2 - 1 = 15 \iff (3x+2)^2 - 1 = 15\\ &\iff (3x+2)^2 = 16 \iff 3x+2 = -4 \text{ ou } 3x+2 = 4\\ &\iff 3x = -6 \text{ ou } 3x = 2 \iff x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

On a trouvé deux solutions à cette équation : $\{-2, \frac{2}{3}\}$. Vérifions ce résultat : $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-4) = 15$ et $(f \circ g)(\frac{2}{3}) = f(g(\frac{2}{3})) = f(4) = 15$

2. On résout ce problème sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car h non définie en 0).

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) = h(x) &\iff 3(3x+2) + 2 = \frac{1}{x} \iff 9x + 8 = \frac{1}{x}\\ &\iff (9x+8)x = 1 \iff 9x^2 + 8x - 1 = 0\end{aligned}$$

Cherchons les racines éventuelles de ce polynôme. On calcule son discriminant : $\Delta = 64 - 4 \times 9 \times (-1) = 100 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{-8-10}{2\times 9} = -1$ et $x_2 = \frac{-8+10}{2\times 9} = \frac{1}{9}$. Ces racines sont non nulles (rappelez-vous qu'on cherche des solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), elles sont donc solutions de l'équation.

3. On cherche des solutions sur $\mathbb{R}^*$ (car h est définie sur $\mathbb{R}^*$)

$$(g \circ h)(x) = -4 \iff \frac{3}{x} + 2 = -4 \iff \frac{3}{x} = -6 \iff \frac{1}{x} = -2 \iff x = -\frac{1}{2}$$

et $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$, donc cette équation admet pour unique solution $-\frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

1. Donner D_f.
2. Calculer $f^{-1}(x)$.

Correction exercice 6.

1. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est définie pour $y \geq 0$. Dans notre cas, $y = 2x - 1$ et $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$. Donc $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty[$.
2. Calculons maintenant (si elle existe) l'inverse de f. Pour $y \in \mathbb{R}$, cherchons $x \geq \frac{1}{2}$ tel que
$$y = f(x) \iff y = \sqrt{2x-1} \iff y^2 = 2x - 1 \iff x = \frac{y^2+1}{2}$$
De plus, on a bien $\frac{y^2+1}{2} \geq 0$. Ainsi, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{y^2+1}{2} \in D_f$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est donc inversible et son inverse a pour expression $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$.

Exercice 7. Soient les fonctions $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

1. (a) Donner $f^{-1}(x)$. (b) Donner $g^{-1}(x)$. (c) Donner $(g \circ f)^{-1}(x)$.
2. Vérifier que $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{x} - 2)$.

Correction exercice 7.

1. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$, cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x) = y \iff 3x + 2 = y \iff 3x = y - 2 \iff x = \frac{y-2}{3}$$
Pour chaque $y \in R$, il existe un unique $x = \frac{y-2}{3} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est donc inversible et on a $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

   (b) Soit $y \in \mathbb{R}^*$, cherchons $x \in \mathbb{R}^*$ tel que
$$y = g(x) \iff y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$$
Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(x) = y$. La fonciton g est donc inversible et on a $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

   (c) On calcule $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x+2}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on cherche $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ tel que
$$(g \circ f)(x) = y \iff \frac{1}{3x+2} = y \iff 3x + 2 = \frac{1}{y} \iff 3x = \frac{1}{y} - 2 \iff x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3}$$
Pour chaque $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe un unique $x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3}$ tel que $y = (g \circ f)(x)$. De plus, pour $y \neq 0$, on a bien $x = \frac{1}{3y} - \frac{2}{3} \neq -\frac{2}{3}$. La fonction $g \circ f$ est donc inversible et son inverse est donnée par $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}$.
2. Il ne reste qu'à vérifier $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{3x} - \frac{2}{3}$. Le résultat vient rapidement.

Exercice 8. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\log(18) - \log(24) - \log(2)$
2. $\ln(2) + \ln(3x) - \ln(2x)$
3. $\ln(3x^2) + \ln(2x) - \ln(6x^3)$
4. $\log(5x^2) - \log(10x^2) + \log(4x)$

Correction exercice 8. Dans tout cet exercice, on utilise $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ et $\ln(a^n) = n \ln a$ (et les mêmes relations sont valables avec log à la place de ln).

1.

$$\begin{aligned}\log(18) - \log(24) - \log(2) &= \log(2 \times 3^2) - \log(2^3 \times 3) - \log(2) \\ &= \log 2 + \log(3^2) - \log(2^3) - \log 3 - \log 2 \\ &= \log 2 + 2\log 3 - 3\log 2 - \log 3 - \log 2 \\ &= -3\log 2 + \log 3\end{aligned}$$

2.

$$\ln(2) + \ln(3x) - \ln(2x) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(x) - \ln(2) - \ln(x) = \ln(3)$$

3.

$$\begin{aligned}\ln(3x^2) + \ln(2x) - \ln(6x^3) &= \ln(3) + 2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x) - \ln(6) - 3\ln(x) \\ &= \ln(3) + \ln(2) - \ln(2 \times 3) \\ &= 0\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\log(5x^2) - \log(10x^2) + \log(4x) &= \log(5) + 2\log(x) - \log(10) - 2\log(x) + \log(4) + \log(x) \\ &= \log(x) + \log(5) - \log(2 \times 5) + \log(2^2) \\ &= \log(x) + \log(2)\end{aligned}$$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes :

1. $2\ln(x) + 1 = 5$
2. $\ln(2x + 1) = 5$
3. $\frac{1}{4}\ln(4 - 3x) = 2$
4. $\ln(e^{2x-1}) = 36$
5. $e^{2x+3} = 4$
6. $e^{-2x} + 10 = 24$
7. $e^{4x+5} = -4$
8. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
9. $e^x + e^{-x} = 2$

Correction exercice 9.

1. Le domaine de définition de $2\ln(x) + 1$ est $\mathbb{R}_+^*$. On cherche donc x dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$2\ln(x) + 1 = 5 \iff 2\ln(x) = 4 \iff \ln(x) = 2 \iff x = e^2$$

(l'équivalence lors de l'application de exp vient du fait que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$)
Il existe une unique solution $e^2 \in \mathbb{R}_+^*$ à cette équation.

2. Le domaine de définition de $\ln(2x+1)$ est $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. On cherche donc $x > -\frac{1}{2}$ tel que

$$\ln(2x+1) = 5 \iff 2x+1 = e^5 \iff 2x = e^5 - 1 \iff x = \frac{e^5-1}{2}$$

(l'équivalence lors de l'application de exp vient du fait que la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$)

3. La fonction $\frac{1}{4}\ln(4-3x)$ est définie sur $]-\infty, \frac{4}{3}[$. On cherche $x < \frac{4}{3}$ tel que

$$\frac{1}{4}\ln(4-3x) = 2 \iff \ln(4-3x) = 8 \iff 4-3x = e^8 \iff -3x = e^8 - 4 \iff x = \frac{4}{3} - \frac{e^8}{3}$$

4. e^{2x-1} est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ où ln est définie. La fonction $\ln(e^{2x-1})$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\ln(e^{2x-1}) = 2x-1$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(e^{2x-1}) = 36 \iff 2x-1 = 36 \iff x = \frac{37}{2}$$

5.
$$e^{2x+3} = 4 \iff 2x+3 = \ln(4) \iff x = \frac{\ln(4)-3}{2}$$

(l'équivalence lors de l'application de ln vient du fait que cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$)

6.
$$e^{-2x} + 10 = 24 \iff e^{-2x} = 14 \iff -2x = \ln(14) \iff x = -\frac{1}{2}\ln(14)$$

(l'équivalence lors de l'application de ln vient du fait que cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$)

7. La fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $-4 \notin \mathbb{R}_+^*$. Il n'existe donc aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{4x+5} = -4$: cette équation n'a pas de solution.

8. On effectue le changement de variables $t = e^x$.

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff t^2 - 5t + 6 = 0$$

On calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles $t_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $t_2 = \frac{5+1}{2} = 3$. Donc

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \iff e^x = 2 \text{ ou } e^x = 3 \iff x = \ln(2) \text{ ou } x = \ln(3)$$

Cette équation admet deux solutions : $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

9. On effectue le changement de variables $t = e^x$.

$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \iff t^2 - 2t + 1 = 0$$

On calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta = 0$. Il admet donc une unique racine (double) : $t_0 = -1$. Donc

$$e^x + e^{-x} = 2 \iff e^x = -1$$

On a $e^x > 0$ et donc on ne peut pas avoir $e^x = -1$. Cette équation n'admet donc aucune solution.

Exercice 10. Tracer les graphes des fonctions suivantes :

1. $\ln(x) + 1$
2. $\ln(x - 2)$
3. $\ln(-x)$
4. $\ln(x + 2)$
5. $\ln(1 - x)$

Correction exercice 10.

1. Faire les tracer avec tikz ...

Exercice 11. Pour des réels a, b et β ($\beta \neq 0$), calculer la dérivée des fonctions suivantes (x est la variable) :

1. a^{x^2} $(a > 0)$
2. $(ax + b)^\beta$
3. $\ln(ax + b)$
4. e^{ax+b}
5. $\cos(ax + b)$
6. $\sin(ax + b)$
7. $\tan(x)$
8. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
9. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
10. $\arcsin(x)$
11. $\arccos(x)$
12. $\arctan(x)$

Correction exercice 11.

1. Il s'agit de la composée des fonctions $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$ et $g(x) = x^2$. Leurs dérivées valent $f'(x) = \ln(a)a^x$ et $g'(x) = 2x$. La dérivée de la fonction $a^{x^2} = (f \circ g)(x)$ vaut donc $f'(g(x)) \times g'(x) = 2\ln(a)xa^{x^2}$.
2. On a $(ax+b)^\beta = e^{\beta\ln(ax+b)} = (f \circ g)(x)$ avec $f(x) = x^\beta = e^{\beta\ln(x)}$ et $g(x) = ax+b$. Les dérivées de ces fonctions valent $f'(x) = \beta e^{\beta\ln(x)} \times \frac{1}{x} = \beta x^{\beta-1}$ et $g'(x) = a$. La dérivée de cette fonction vaut donc $f'(g(x)) \times g'(x) = \beta a(ax + b)^{\beta-1}$.
3. On note $f(x) = \ln(ax + b)$. Par dérivée d'une composée de fonctions, on a $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$.
4. On note $f(x) = e^{ax+b}$. Par derivée d'une composée de fonctions, on a $f'(x) = ae^{ax+b}$.
5. Idem : $-a\sin(ax + b)$
6. Idem : $a\cos(ax + b)$

7. On écrit la fonction tan comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. En dérivant le quotient de fonctions, on a

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \tan^2(x).$$

8. Il s'agit de la fonction $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. On obtient facilement $\cosh'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x)$.
9. Il s'agit de la fonction $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. On obtient facilement $\sinh'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.
10. L'arcsinus est défini comme étant la fonction inverse du sinus. Sur un certain intervalle, on a $\arcsin(\sin(x)) = x$. En dérivant cette expression, on obtient $\arcsin'(\sin(x))\cos(x) = 1$ et donc $\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$. Notez que l'on a utilisé la formule de trigonométrie $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Par changement de variables, on a alors $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
    Notez que l'on peut aussi utiliser la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ avec $f(x) = \sin(x)$. De plus, pour compléter cette démonstration, on peut montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$: ces deux foncitons ont la même image en 0 et ont pour dérivée ...
    !! TODO : voir comment montrer cette égalité.
11. L'arccosinus est défini comme étant l'inverse de la fonction cosinus. On peut utiliser la même méthodologie qu'à la question précédente. Sur un certain intervalle $\arccos(\cos(x)) = x$. En dérivant : $-\sin(x)\arccos'(\cos(x)) = 1$ et donc $\arccos'(\cos(x)) = \frac{-1}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$ et donc $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
    !! Nettoyer la démo pour l'inverse des fonctions trigo : il faut notamment spécifier les itervalles sur lesquels on travaille.
12. De la même façon : $\arctan(\tan(x)) = x$ et donc $\arctan'(\tan(x))(1-\tan^2(x)) = 1$ et donc $\arctan'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Exercice 12. Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $3x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 1$
2. $\frac{3x^2-2x+1}{x+4}$
3. $\frac{x^3-4x^2+1}{x^5+2}$
4. $\frac{3x+\sqrt{x}}{x-1}$
5. $\sqrt{x^2+4x-1} - 2x$
6. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

Correction exercice 12.

1. La limite en l'infini d'un polynôme est donnée par son monôme de plus haut degré. Comme $\lim_{x\to+\infty} 3x^4 = +\infty$, alors on a $\lim_{x\to+\infty} 3x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 1 = +\infty$.

2. La limite en l'infini d'un quotien de polynômes est donnée par la limite du quotien des monômes de plus haut degré. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x} = +\infty$!! quotien ou quotient ? ?
3. Idem : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x^2+1}{x^5+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^5} = 0$.
4. Ici on peut séparer la fraction en deux : $\frac{3x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3x}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$. Ainsi, en sommant les deux limites : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\sqrt{x}}{x-1} = 3$.
5. On peut traiter ce cas en majorant la fonction. On a, pour x suffisamment grand, $x^2+4x-1 \leq \frac{9}{4}x^2$ et donc (par croissance de la racine carrée) $\sqrt{x^2+4x-1} \leq \frac{3}{2}x$. Ainsi, pour x suffisamment grand, $\sqrt{x^2+4x-1} - 2x \leq -\frac{x}{2}$. On a, de plus, $\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$. Par majoration, on a donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x-1} - 2x = -\infty$.
6. !! TODO !!

Exercice 13. Calculer les limites suivantes :

1. de $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$ en $x = 1$
2. de $\frac{\cos(x)-1}{x}$ en $x = 0$

Correction exercice 13.

1. !! TODO !!