Probabilité

Probabilité	Propriétés
A un événement de Ω. $P(A) = [0;1]$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A) = 1 - P(A^c)$

$f: R \to R$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire :

$f(x) \geq 0$	$f(x)$ est continue par morceau $P(X\epsilon[a;b]) = \int_a^b f(x)dx$	$\int f(x)dx = 1$

$f: R \to R$ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire:

f est continue à droite	f est croissante	$\lim_{-\infty} f = 0$ $\lim_{+\infty} f = 1$

Propriété : Pour le calcul de l'air sous la courbe, on peut utiliser la propriété suivante :

$$F(b-a) = F(b) - F(a)$$

Indicateurs

Espérance	Variance
$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} Xxdx$	$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(x - E[x])^2 dx$

Moyenne et espérance

Espérance	Moyenne
Valeur théorique moyenne.	Valeur moyenne obtenue pour une expérience.

Remarque : L'espérance est une valeur théorique alors que la moyenne est la valeur obtenue à partir estimée des données.

Propriété

L'espérance est linéaire	Variance
$E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$	$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Lois continues

Loi	Paramètres	Densité de probabilité	Fonction de répartition
Exponentielle $E(\lambda)$	$\lambda > 0$	$x < 0, f(x) = 0$ sinon $\lambda e^{-\lambda x}$	$x < 0, F(x) = 0$ sinon $1 - e^{-\lambda x}$
Uniforme $U(a,b)$	$a < b$	$x \in [a;b], \frac{1}{b-a}$ sinon $f(x) = 0$	$x < a, F(x) = 0$ $x \in [a;b], \frac{x-a}{b-a}$ sinon 1
Normale $N(m;\sigma^2)$	Espérance m Écart-type $\sigma > 0$	$\frac{e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$	On se ramène à $N(0;1)$: $\frac{X-m}{\sigma}$

Loi	Espérance	Quantiles q_{α}	Variance
Exponentielle $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$	$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
Uniforme $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\alpha b + (1-\alpha)a$	$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
Normale $N(m;\sigma^2)$	m	Se reporter à la table $Z = \frac{X-m}{\sigma}$	σ^2

<u>NB</u> l'espérance et l'écart type sont utiles pour retrouver les paramètres de la loi.

Lecture de la table de la loi Normale : on prend toujours la valeur inférieure.

Statistique

Échantillon réalisation n fois indépendamment d'une variable aléatoire X de la loi f_x et de fonction de répartition F_x on note $(X_1, \ldots X_n)$

Estimateurs des indicateurs et théorie des grands nombres

La moyenne empirique convergent vers l'espérance de la loi lorsque l'échantillon augmente.

Espérance (appelé moyenne)	Variance
$\hat{E} = moyenne$	$s^2 = \frac{n}{n-1} Var(x)$

<u>Théorème central limite</u>

La somme de variables aléatoires converge vers une loi normale

$$\sum X_i \to N(n\mu, n\sigma^2)$$

L'application directe de la loi permet de déduire un intervalle de confiance pour la moyenne :

$$E\hat{} \in I_c = [m - 1.95 \times \frac{s}{\sqrt{n}}; m - 1.95 \times \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

Avec m la moyenne et s l'écart type de l'échantillon.