Teste pentru egalitati de medii

Dimitriu Gabriel Spiru Haret AnIII

June 7, 2005

Exercitiu 1

Pentru a obtine informatii asupra rezistentei la coroziune a unui anumit tip de conducta de otel se face un exepriment in care 40 de specimene sunt ngropate timp de 3 ani si apoi masurind pentru fiecare specimen penetrarea s-a obtinut: $\overline{x} = 43.7, s = 2.7$. Conducta este fabricata cu specificatia ca penetratia este $m = 46$. Pentru a vedea daca datele experimentale indica faptul ca specificarea nu este corecta sa se verifice la $\alpha = 0.05$ $H_0 : m = 46; H_1 : m > 46$.
Demonstratie In cazul nostru avem urmatoarele date:

$$\begin{aligned} n &= 40 \\ \overline{x} &= 43.7 \\ s &= 2.7 \\ m_0 &= 46 \\ \alpha &= 0.05 \end{aligned}$$

Deoarece avem test de medie in care nu cunoastem dispersia vom utiliza testul F unilateral dreapta.

Calculam dispersia de calcul

$$s_{xx}^2 = n(\overline{x} - m_0)^2 = 40(43.7 - 46)^2 = 211.6$$

Calculam F_{calc}

$$F_{calc} = \frac{s_{xx}^2}{s^2} = \frac{211.6}{(2.7)^2} = 29$$

Luam din tabele cuantiala

$$F_{1-\alpha}(1, n-1) = F_{1-0.05}(1, 39) = F_{0.95}(1, 39) = 4.09$$

Deoarece avem test unilateral dreapta in care

$$F_{calc} = 29 > F_{0.95}(1, 39) = 4.09$$

vom respinge ipoteza H_0. ■

Exercitiu 2 *Dupa culegerea datelor a doua procese tehnologice avem urmatoarele masuratori*

Pentru primul proces: $n_1 = 12$ proces de distributie $N(m_1, 20^2)$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_{1,i}$	0.7	0.9	0.3	0.8	0.5	1	1.3	1.1	0.6	0.2	1.2	1.4

Pentru al doilea proces: $n_2 = 10$ proces de distributie $N(m_2, 25^2)$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{2,i}$	0.9	0.8	1.4	1.3	0.7	1.9	1	1.6	1.2	2

La pragul de incredere $\alpha = 0.05$ sa se verifice ipoteza $H_0 : m_1 = m_2$ fata de contraipoteza $H_1 : m_1 < m_2$.

Demonstratie Deoarece avem un test de egalitate a mediilor cind cunoastem dispersia celor doua procese vom aplica testul Z.

Asadar intii vom calcula mediile de selectie ale celor doua procese:

$$\begin{aligned} \overline{x_{n_1}} &= \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} = 0.83 \\ \overline{x_{n_2}} &= \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} = 1.12 \end{aligned}$$

Acum calculam Z_{calc}

$$Z_{calc} = \frac{\overline{x_{n_1}} - \overline{x_{n_2}} + m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{0.83 - 1.12 + 0}{\sqrt{\frac{20^2}{12} + \frac{25^2}{10}}} = -0.029$$

Din tabel obtine $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.96$.

Cum $Z_{cal} = -0.029 < Z_\alpha = 1.96$ vom respinge ipoteza H_0. ■

Exercitiu 3 *In urma a $n = 8$ masuratori asupra a doua procese tehnologice s-au obtinut urmatoarele date*

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_{1,i}$	10.28	10.27	10.3	10.32	10.27	10.27	10.28	10.29
$x_{2,i}$	10.31	10.31	10.26	10.3	10.27	10.31	10.20	10.26

Se se verifice la pragul de semnificatie $\alpha = 0.01$ ca cele doua procese au aceeasi medie.

Demonstratie Deoarece avem test asupra mediei a doua procese distincte si in acelasi timp nu cunoastem dispersiile celor doua procese vom utiliza testul Student pentru doua medii.

Ipotezele statistice sunt:

$$\begin{aligned} H_0 &: m_1 = m_2 \\ H_1 &: m_1 \neq m_2 \end{aligned}$$

Vom calcula mediile si dispersiile de selectie ale celor doua procese:

$$\begin{aligned}
\overline{x_1} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} = 10.285 \\
\overline{x_2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2,i} = 10.289 \\
s_1^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1,i}-\overline{x_1})^2 = 0.000314 \\
s_2^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{2,i}-\overline{x_2})^2 = 0.000498
\end{aligned}$$

Vom calcula statistica t_{calc}:

$$t_{calc} = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}+m_1-m_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{10.285-10.289}{\sqrt{\frac{0.000314}{8}+\frac{0.00498}{8}}} = 0.398$$

Din tabel luam cuantila $t_\alpha(n+n-2) = t_{0.01}(8+8-2) = t_{0.01}(14) = -t_{0.99}(14) = -2.62$
Deoarece $|t_{calc}| = 0.398 > t_{0.01}(14) = -2.62$ vom respinge ipoteza H_0. ■

Exercitiu 4

Greutatea carnii amabalata in pachete de 1000g de masina M_1 este o variabila aleatoare normala cu $\sigma_1 = 3g$ iar cea ambalata de masina M_2 are $\sigma_2 = 4g$. S-au cintarit 100 de pachete din produsele fiecarei masini si-au obtinut $\overline{x_1} = 1007g$ si $\overline{x_2} = 1002g$. Sa se verifice $H_0 : m_1 = m_2; H_1 : m_1 \neq m_2$ la $\alpha = 0.05$.
Demonstratie In conformitate cu enuntul problemei vom folosi testul Z pentru 2 medii si avem:

$$\begin{aligned}
n_1 &= n_2 = 100 \\
\overline{x_1} &= 1007 \\
\overline{x_2} &= 1002 \\
\sigma_1 &= 3 \\
\sigma_2 &= 4
\end{aligned}$$

Cu aceste date calculam

$$Z_{calc} = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1007-1002}{\sqrt{\frac{9}{100}+\frac{16}{100}}} = 10$$

Luam din tabel $Z_{tab} = Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.9$.
Deoarece $|Z_{calc}| = 10 > Z_{tab} = 1.9$ vom respinge ipoteza H_0. ■

Exercitiu 5

Dintr-o populatie normala cu $\sigma = 5$ s-au extras doua selectii de volum 9. Selectiile au dat mediile de selectie 2 respectiv 3. Se poate afirma ca la pragul de semnificatie de 0.05 ca diferentele inregistrate sunt intimplatoare ?

Demonstratie Din problema avem urmatoarele date

$$\begin{aligned}
\sigma &= 5 \\
n &= 9 \\
\alpha &= 0.05 \\
\overline{x_1} &= 2 \\
\overline{x_2} &= 3 \\
H_0 &: m_1 = m_2 \\
H_1 &: m_1 \neq m_2
\end{aligned}$$

Deoarece cunoastem dispersiile vom utiliza testul Z pentru 2 medii.

Calculam Z_{calc}:

$$|Z_{calc}| = \left| \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{2\frac{\sigma^2}{n}}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{\frac{2 \cdot 25}{9}}} \right| = \frac{3}{5\sqrt{2}} = 0.424$$

Din tabel vom lua cuantila $Z_{tab} = Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.9$.

Deoarece $|Z_{calc}| = 0.424 < Z_{tab} = 1.9$ vom accepta ipoteza H_0, deci diferentele inregistrate sunt intimplatoare. ■