Testul Z

June 5, 2005

Exercitiu 1 *Fie X~N(μ,81)*

Sa se verifica la pragul de semnificatie $\alpha = 0.05$ ipoteza $H_0 : \mu = 840$ fata de $H_1 : \mu < 840$ folosindu-se o selectie de volum n=25 pentru care $\overline{x} = 838$.

Rezolvare:

Deoarece avem $H_1 : \mu < m_0$ si dispersia $\sigma^2 = 81$ vom aplica testul Z unitalteral stinga pentru medie.

Vom calcula valoarea critica pentru acest tip de test

$$\times_c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha = 840 + \frac{9}{5}(-1.64) = 837,048$$

Deoarece $\overline{x} > x_c$ accept ipoteza H_0.

Exercitiu 2 *Fie X~N(μ,144)*

i) Sa se verifice la pragul de semnificatie $\alpha = 0.01$ ipoteza $H_0 : \mu = 74$ fata de $H_1 : \mu > 74$ pe baza unei selectii de volum n=36 pentru care $\overline{x} = 76$

ii) Sa se calculeze $\pi(78)$.

Rezolvare:

i) Deoarece avem $H_1 : \mu > m_0$ si dispersia $\sigma^2 = 144$ vom aplica testul Z unilateral stinga pentru medie.

Vom calcula valoarea critica pentru acest tip de test

$$x_c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 74 + \frac{12}{6} 2.33 = 78.66$$

Deoarece $\overline{x} < x_c$ $(76 < 78.66)$ voi accepta ipoteza H_0.

ii)Puterea testului este data de formula

$$\pi(m_1) = \Phi\left(u_\alpha + \frac{m_1 - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Inlocuind avem:

$$\pi(78) = \Phi(-2.33 + \frac{78 - 74}{12/6}) = \Phi(-0.33) = 1 - \Phi(0.33) = 1 - 0.6293 = 0.3707$$

Exercitiu 3

O fabrica de televizoare afirma ca pentru atingerea unui anumit nivel (grad) de stralucire sunt necesario 320 microamperi. O selectie de 28 astfel de televizoare a dat $\overline{x} = 331$. Amerajul necesar pentru a atinge stralucirea dorita este o variabila $N(\mu, 144)$.

i)La pragul de semnificatie $\alpha = 0.05$ sa se verifice ipoteza $H_0 : \mu = 320$ fata de alternativa corespunzatoare.

ii)Daca $\mu = 330$ care este probabilitatea erorii de ordinul doi ?

Rezolvare:

i) Deoarece ipoteza $H_1 : \mu \neq 320$ vom folosi testul Z bilateral.

Vom calcula regiunea critica pentru $\sigma = 12$.

$$\left|\frac{\overline{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{331 - 320}{12/5.29}\right| = 4.849$$

Pe care o comparam cu cuantila normala $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$

Deoarece 4.849>1.96 vom respinge ipoteza H_0.

ii)Probabilitatea erorii de ordin 2 este:

$$\begin{aligned} P(u &\in W|H_1) = \beta \\ P(|u| &< u_{tab}|m_1) = P(u < u_{tab}) + P(u > u_{tab}) = \Phi(u_{tab}) + 1 - \Phi(-u_{tab}) = 2\Phi(u_{tab}) \end{aligned}$$

Deci

$$\beta = 2 * \Phi(1.96) = 1.95???$$

Exercitiu 4 *Recolta unei anumite cereale este o variabila X~N(μ,0.25)*

Daca de pe 100ha s-a obtinut o recolta medie $\overline{x} = 2050 Kg/ha$ sa se verifice, la pragul de semnificatie $\alpha = 0.05$, ipoteza $H_0 : \mu = 2000$ fata de $H_1 : \mu > 2000$.

Rezolvare:

Deoarece avem $H_1 : \mu > m_0$ si dispersia $\sigma^2 = 0.25$ vom aplica testul Z unilateral stinga pentru medie.

Vom calcula valoarea critica pentru acest tip de test

$$x_c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2000 + \frac{0.5}{10} 2.57 = 2000.128$$

Deoarece $\overline{x} = 2050 > x_c = 2000.128$ vom accepta ipoteza H_0.

Exercitiu 5

O selectie de 16 loturi de caprolactana cristalizata,tip A are continutul de baze volatile $\overline{x} = 0.22$ miliechivalenti pe Kg. Presupunem ca continutul de baze volatile este o variabila aleatoare avind repartitia $N(\mu, (0.08)^2)$.

i)La pragul de semnificatie $\alpha = 0.01$ sa se verifice ipoteza $H_0 : \mu = 0.20$ fata de $H_1 : \mu > 0.20$.

ii)Care este puterea testului pentru $\mu_1 = 0.21$?

Rezolvare:

Deoarece avem $H_1 : \mu > m_0$ si dispersia $\sigma^2 = 0.08^2$ vom aplica testul Z unilateral stinga pentru medie.

Vom calcula valoarea critica pentru acest tip de test

$$x_c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 0.20 + \frac{0.08}{4} 2.225 = 0.2445$$

Deoarece $\overline{x} < x_c$ $(0.22 < 0.2445)$ voi accepta ipoteza H_0.
ii)Puterea testului este data de formula

$$\pi(m_1) = \Phi\left(u_\alpha + \frac{m_1 - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Inlocuind avem:

$$\pi(0.21) = \Phi(-2.225 + \frac{0.21 - 0.2}{0.08/4}) = \Phi(-1.725) = 1 - \Phi(1.725) = 1 - 0.9577 = 0.04226$$

Exercitiu 6

Experienta anterioara arata ca durabilitatea unei anvelope auto poate fi considerata ca o variabila $N(30000Km, (800Km)^2)$. Se face o schimbare a procesului de productie. O selectie de 100 anvelope are $\overline{x} = 29000Km$. Pe baza acestei selectii si la un prag de semnificatie $\alpha = 0.05$ putem spune ca noua metoda conduce la scaderea durabilitatii anvelopelor ?

Rezolvare:

Acesta problema se poate pune in cadrul ipotezelor astfel:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 30000 \\ H_1 &: \mu < 30000 \end{aligned}$$

Deoarece avem $H_1 : \mu < m_0$ si dispersia $\sigma^2 = 800^2$ vom aplica testul Z unitalteral stinga pentru medie.

Vom calcula valoarea critica pentru acest tip de test

$$\times_c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha = 30000 + \frac{800}{10}(-1.645) = 29868.4$$

Deoarece $\overline{x} = 29000 < x_c = 29868.4$ resping ipoteza H_0 deci intr-adevar noua metoda conduce la scaderea durabilitatii anvelopelor.

Exercitiu 7

Durata de functionare a unui tip oarecare de bec electric de 100 W, poate fi considerata o variabila aleatoare $X\tilde{}N(1500, (200)^2)$. O selectie de 25 astfel de becuri da o durata medie de functionare de 1380 de ore. La pragul de semnificatie $\alpha = 0.01$ sa se verifice ipoteza $H_0 : \mu = 1500$ fata de alternativa $H_1 : \mu < 1500$.

Rezolvare:

Deoarece avem $H_1 : \mu < m_0$ si dispersia $\sigma^2 = 200^2$ vom aplica testul Z unitalteral stinga pentru medie.

Vom calcula valoarea critica pentru acest tip de test

$$\times_c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha = 1500 + \frac{200}{5}(-2.325) = 1407$$

Deoarece $\overline{x} = 1380 < x_c = 1407$ resping ipoteza H_0.

Exercitiu 8

Masa medie a lucuitorilor unui oras poate fi considerata ca o variabila aleatoare $X\tilde{}N(70, 5^2)$. O selectie de 100 locuitori ai orajului, cu domiciliul in zona parcurilor, este gasita ca avind o masa de 69Kg.

i)Acest rezultat indica faptul ca locuitorii avind domiciliul in zona parcurior au o masa mai mica decit a celorlalti locuitori la pragul de semnificatie $\alpha = 0.05$?

ii)Care este puteea tetului pentru $\mu_1 = 68$?

Rezolvare:

i)Acest test poate fi vazut in cadrul ipotezelor statistice astfel:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 70 \\ H_1 &: \mu < 70 \end{aligned}$$

Deoarece avem $H_1 : \mu < m_0$ si dispersia $\sigma^2 = 5^2$ vom aplica testul Z unitalteral stinga pentru medie.

Vom calcula valoarea critica pentru acest tip de test

$$\times_c = m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha = 70 + \frac{5}{10}(-1.645) = 69.1775$$

Deoarece $\overline{x} = 69 < x_c = 69.1775$ resping ipoteza H_0 deci locuitorii avind domiciliul in zona parcurilor au o masa mai mica decit a celorlalti locuitori.

ii)Puterea testului este data de formula

$$\pi(m_1) = \Phi\left(u_\alpha + \frac{m_1 - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Inlocuind avem:

$$\pi(68) = \Phi\left(-1.645 + \frac{68 - 70}{5/10}\right) = \Phi(-5.645) = 1 - \Phi(5.645) = 0!!$$