La curvatura dello spazio in un universo finito

La curvatura di una superficie è la proprietà intrinseca che provoca la distorsione delle distanze su una carta geografica. Ciò vale pure per la curvatura dello spazio, dove la carta geografica è la relatività generale

di J.J. Callahan

L'universo è finito o infinito? Secondo molte rappresentazioni dell'antichità, pur avendo struttura complessa, è finito. Questo punto di vista si sviluppa con la filosofia greca e culmina nella cosmologia di Eudosso e Aristotele, secondo la quale la Terra è una palla circondata da una serie di sfere cristalline concentriche, la più esterna delle quali sostiene le stelle fisse e contiene nel suo interno tutto l'universo materiale. Fine principale di questa cosmologia era la spiegazione dei moti dei pianeti e degli altri corpi celesti, ognuno dei quali era trasportato intorno alla Terra dalla rotazione della propria sfera. Parte integrante della teoria era comunque il fatto che l'universo fosse finito.

La rappresentazione aristotelica del mondo fu largamente accettata nell'Europa medioevale; la si ritrova, per esempio, nella filosofia scolastica e nella Divina Commedia dantesca. Dante, in realtà, sviluppò radicalmente la rappresentazione aristotelica in un senso profondamente moderno. Ci occuperemo dell'interpretazione dantesca nella conclusione. Nonostante la sua popolarità, il modello di universo finito si offre a un'obiezione cruciale: per essere finito, esso deve avere un contorno che lo limiti, come la sfera più esterna di Aristotele. Questo però è impossibile, in quanto un contorno può soltanto separare una porzione di spazio da un'altra. L'obiezione, già avanzata dai greci, riapparve nello scetticismo scientifico del primo Rinascimento e può essere formulata da qualunque studente di oggi che rifletta un poco. Se si accetta questa obiezione si è portati immediatamente a concludere che l'universo è infinito.

Il concetto di infinito è sempre stato avvolto dal mistero e ha suscitato perplessità che solo gradualmente sono state superate. Durante il Rinascimento la geometria euclidea diventò lo strumento fondamentale per la comprensione dello spazio fisico infinito. Essa afferma che la linea retta rappresenta la distanza più breve tra due punti e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180 gradi. Gli scienziati del Rinascimento si accorgevano che la geometria euclidea, pur trattando oggetti ideali in un contesto matematico ideale infinito, forniva con i suoi assiomi e le sue proposizioni un'esatta descrizione delle relazioni spaziali del mondo reale. Leibniz e Newton avevano in comune l'opinione che lo spazio fisico fosse infinito ed euclideo, ma la pensavano in modo diverso sulla quantità totale di materia presente in esso. Per Leibniz non era concepibile un insieme finito di stelle, dato che avrebbe avuto una posizione definita nello spazio e Dio non avrebbe allora avuto alcuna ragione per metterlo in un luogo piuttosto che in un altro. Per Leibniz quindi l'universo doveva essere infinito. Newton respingeva questa eventualità sostenendo che Dio era l'unica forma di infinito in atto. Sebbene oggi queste argomentazioni possano sembrare poco convincenti, a quei tempi erano tuttavia accettate nell'ambito della scienza.

Chi aveva ragione? Entrambe le argomentazioni erano di tipo essenzialmente negativo: Leibniz negava che l'universo fosse finito, e Newton che fosse infinito. Nessuno dei due però era soddisfatto dell'alternativa. Nel 1781 Immanuel Kant presentò nella *Critica della ragion pura* un'analisi completa dell'intero problema dello spazio, che comprendeva un'ardita e originale risoluzione della disputa fra Newton e Leibniz. Kant sosteneva che le posizioni di entrambi erano corrette e che paradossalmente si deve ammettere che l'universo non è né finito né infinito!

Questa contraddizione di fondo tra principi che paiono in ugual misura ragionevoli e necessari è nota come antinomia kantiana dello spazio, ed è una delle tante antinomie che secondo il filosofo indicavano «una colpa ereditaria nella metafisica che non si può spiegare, e tantomeno rimuovere, a meno di ascendere fino alla sua origine, la ragion pura medesima». Tra i propositi principali della *Critica della ragion pura* vi era proprio quello di togliere alla metafisica tali colpe ereditarie. Il metodo kantiano era drastico: siccome non possiamo concepire un universo insieme finito ed infinito, non saremo mai in grado di scoprire empiricamente se le cose stanno in un modo o nell'altro. Lo spazio, inoltre, non è una cosa, sarebbe un errore fondamentale trattarlo come tale, ma una forma attraverso la quale percepiamo le cose. L'antinomia rifletteva una limitazione di base dei processi mentali di cui ci valiamo per la descrizione del mondo. Kant sosteneva con fermezza che si doveva mettere da parte il problema ritenendolo senza significato.

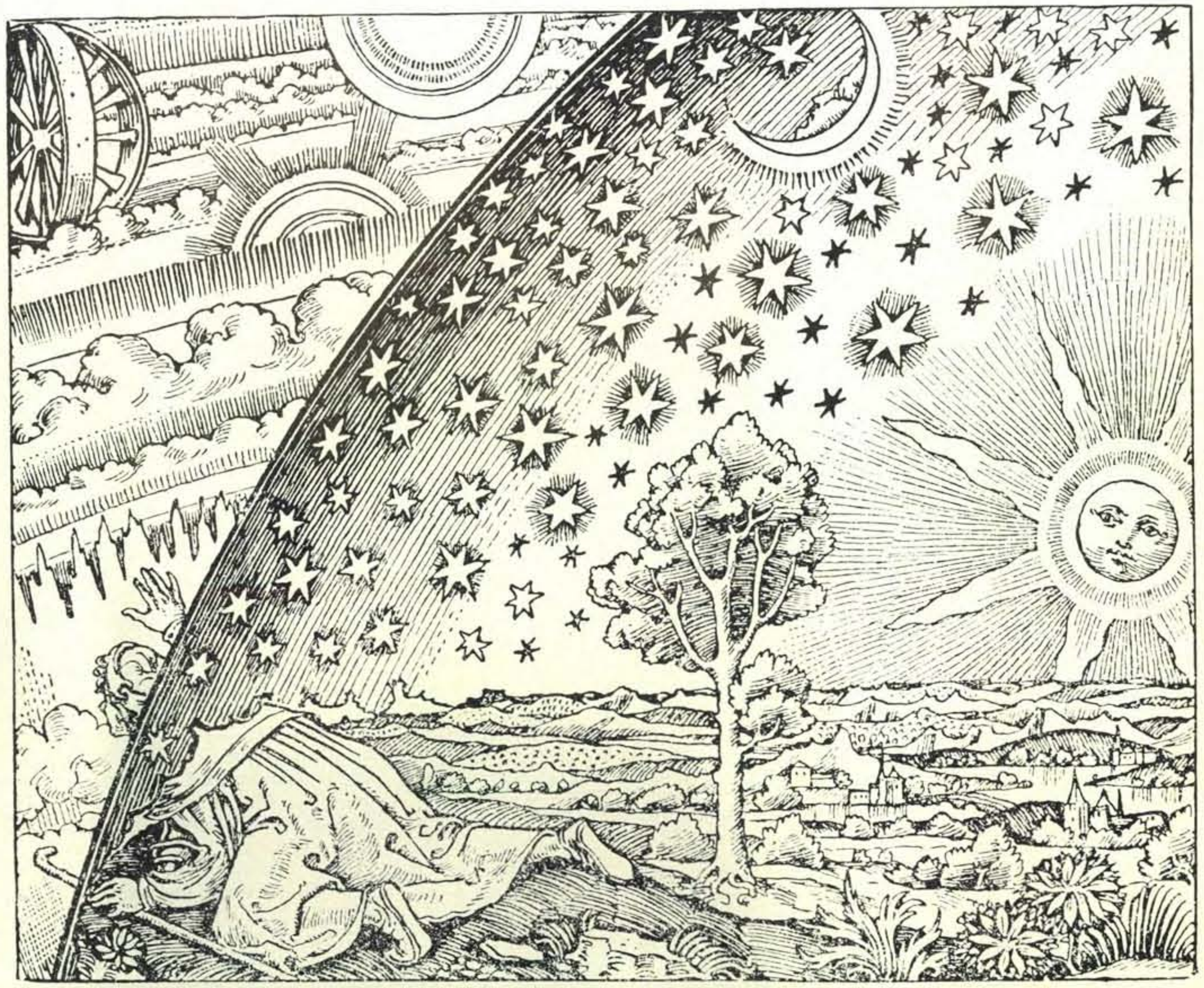
L'analisi metafisica kantiana dello spazio è poco considerata dalla scienza moderna perché i suoi fondamenti, essenzialmente la geometria euclidea, sono stati estesi dagli sviluppi rivoluzionari della matematica e della fisica. La teoria della relatività generale di Einstein dà una nuova geometria allo spazio e rende possibile affrontare il problema della finitezza dell'universo secondo una via che Kant non poteva nemmeno sospettare. Per Kant il problema era semplicemente mal posto. Einstein, al contrario, mostrando che l'antinomia kantiana dello spazio è solo apparente e che la si può risolvere senza ricorrere alla metafisica, restituì validità a tutta la questione. In breve, Einstein ha dimostrato che un'universo finito è effettivamente possibile.

Come ogni altra teoria fisica, la teoria della relatività generale riguarda la materia e le sue proprietà. Essa considera la galassia come l'unità naturale di quantità di materia su scala cosmica. A questo livello il problema dello spazio è il problema di comprendere come sono legate le galassie. Una maniera opportuna per visualizzare l'idea di Einstein è costruire in laboratorio un modello dell'intero sistema galattico. Lo si potrebbe realizzare con palline e bastoncini, come il modellino di una grossa molecola, dove ogni pallina rappresenta una galassia e ogni bastoncino la distanza tra due galassie. Prima di esaminare il modello di Einstein, però, facciamo un passo indietro per tradurre nel linguaggio dei modelli i punti di vista di Newton, Leibniz e Kant. Questo ci servirà per capire meglio le loro idee e per apprezzare ancora di più il progresso costituito dalla teoria della relatività generale.

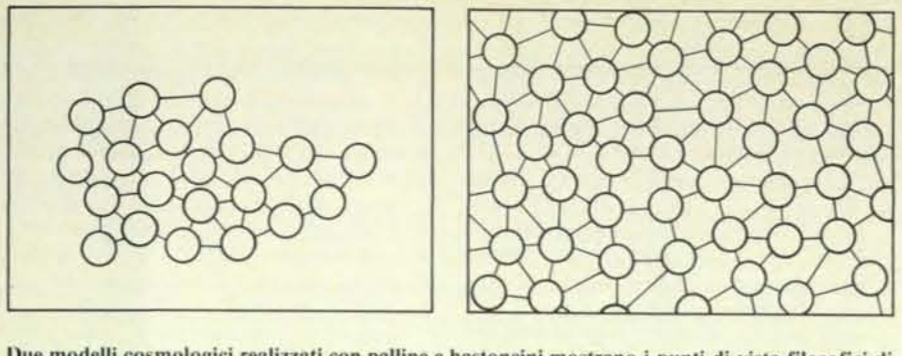
Torniamo per prima cosa all'affermazione di Newton che l'universo è finito. Se così fosse, allora il numero delle galassie sarebbe pure finito e sarebbe ragionevole aspettarsi di poter realizzare gli strumenti per localizzarle tutte e costruire così un modello completo di tutto il sistema galattico. Il modello è per lo meno concettualmente possibile, il che ci basta. Se Newton avesse concepito un tale modello lo avrebbe senz'altro pensato in scala esatta: tale cioè che le distanze fra le palline fossero esattamente proporzionali alle distanze tra le galassie da esse rappresentate.

La conseguenza più importante dell'esatta scala è che ogni caratteristica metrica del modello (che dipende cioè solo dalla distanza) è posseduta pure dal sistema galattico o, in altre parole, il modello e il sistema galattico hanno la medesima struttura metrica. Nell'ambito del laboratorio terrestre la validità delle leggi della geometria euclidea è stabilita attraverso l'osservazione diretta ed esse determinano le proprietà metriche del modello. Le stesse leggi devono determinare le proprietà metriche del sistema galattico. Questa è una conclusione molto importante e costituirà lo spunto per quel che segue. Essa stabilisce che la validità delle leggi della geometria euclidea su scala galattica non è dovuta alla verifica diretta tramite osservazioni e misure sul sistema galattico, ma piuttosto alla possibilità di riprodurre il sistema galattico stesso in un modello in scala. Vale pure l'inverso: se è impossibile riprodurre il sistema galattico in un modello in scala esatta, allora dobbiamo abbandonare la convinzione che la geometria dello spazio intergalattico sia una geometria euclidea.

Una figura geometrica e qualunque suo modello in scala sono simili, il che significa che angoli corrispondenti della figura e del suo modello sono identici e che lati corrispondenti hanno lunghezze che sono direttamente proporzionali. Questo equivale a dire che lo spazio può contenere figure simili di qualunque dimensione se e solo se la sua struttura è quella della geometria euclidea. In realtà



Secondo la cosmologia aristotelica accettata nel medioevo lo spazio era finito e aveva un contorno ben definito. Qui si vede un uomo che guarda oltre i confini dello spazio verso l'Empireo, dimora di Dio. L'illustrazione, spesso ritenuta una xilografia tedesca del XVI secolo, è invece probabilmente, secondo Owen Gingerich della Harvard University, un esemplare di *art nouveau* che fu pubblicato per la prima volta nel 1907 in *Weltall und Menscheit*, edito da Hans Kremer. La scena illustra comunque in modo esplicito il dilemma posto da Immanuel Kant noto come antinomia kantiana dello spazio. Kant riteneva che l'universo dovesse avere estensione finita e composizione omogenea e obbedire alle leggi della geometria euclidea. Non è possibile, tuttavia, che queste richieste siano tutte simultaneamente soddisfatte. Newton, Leibniz ed Einstein risolsero in maniera diversa il dilemma, come si vede nelle illustrazioni che sono riportate nelle due pagine seguenti.



Due modelli cosmologici realizzati con palline e bastoncini mostrano i punti di vista filosofici di Newton e Leibniz; ogni pallina rappresenta una galassia e ogni bastoncino la distanza tra le galassie. Sebbene entrambi accettassero l'ipotesi di Kant secondo cui lo spazio è soggetto alla geometria euclidea, Newton era convinto che il sistema galattico fosse finito e non omogeneo (*a sinistra*), ragione per cui questo modello ha un centro e un contorno. Leibniz invece pensava che il sistema galattico fosse infinito e omogeneo (*a destra*), e che non avesse né un centro né un contorno.

questo è un risultato antico: lo ottenne per primo il matematico inglese John Wallis nel 1663. Comunque, si usi il linguaggio dei modelli o quello delle figure simili, ci ritroviamo con un criterio per determinare le proprietà geometriche dello spazio.

Ogni modello di universo finito ha due caratteristiche metriche di particolare interesse: per prima cosa il modello ha un centro «geografico», e poi possiede un contorno, costituito dalle palline che hanno palline adiacenti da una parte sola. Quindi, se Newton aveva ragione, anche il sistema galattico deve avere un centro e un contorno, in quanto possiede le proprietà metriche del suo modello in scala.

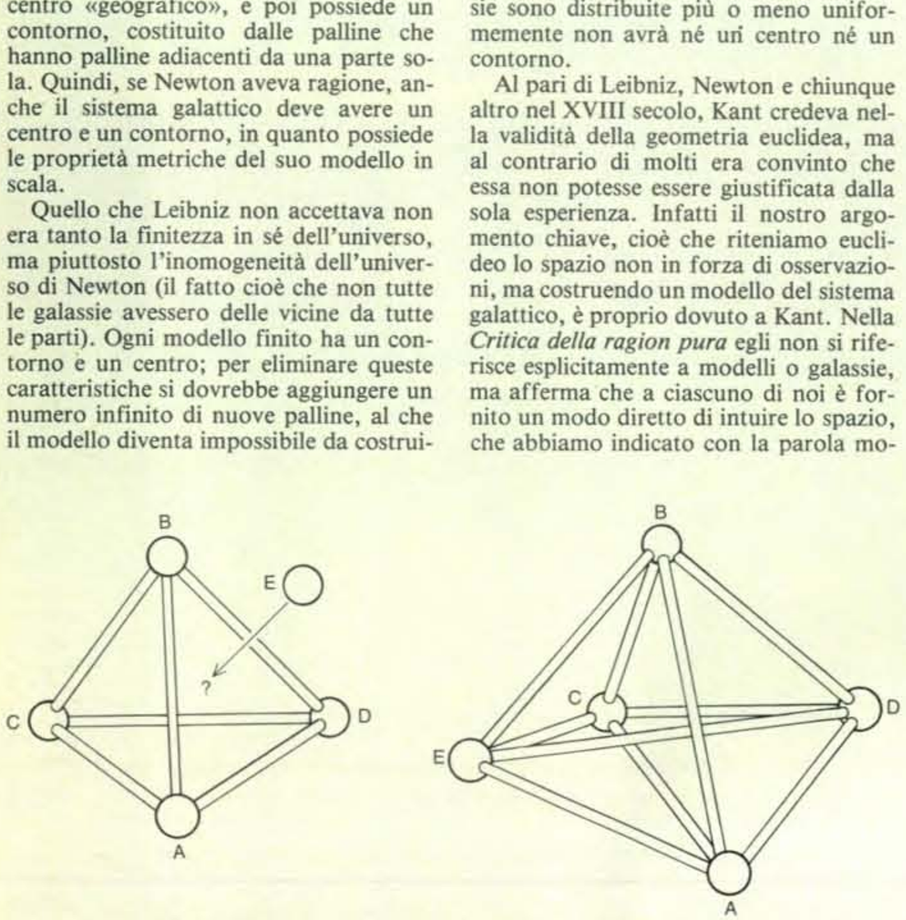
Quello che Leibniz non accettava non era tanto la finitezza in sé dell'universo, ma piuttosto l'inomogeneità dell'universo di Newton (il fatto cioè che non tutte le galassie avessero delle vicine da tutte le parti). Ogni modello finito ha un contorno e un centro; per eliminare queste caratteristiche si dovrebbe aggiungere un numero infinito di nuove palline, al che il modello diventa impossibile da costruire. Ciononostante si può immaginare una disposizione delle palline, riproducente con esattezza la posizione delle galassie, che si estende infinitamente in ogni direzione. Consideriamo questa costruzione mentale come il modello in scala di Leibniz. Essa è simile al modello di un cristallo, che si considera teoricamente infinito. Il modello di Leibniz non è allora più strano di quello di Newton e se le galassie sono distribuite più o meno uniformemente non avrà né un centro né un contorno.

Al pari di Leibniz, Newton e chiunque altro nel XVIII secolo, Kant credeva nella validità della geometria euclidea, ma al contrario di molti era convinto che essa non potesse essere giustificata dalla sola esperienza. Infatti il nostro argomento chiave, cioè che riteniamo euclideo lo spazio non in forza di osservazioni, ma costruendo un modello del sistema galattico, è proprio dovuto a Kant. Nella *Critica della ragion pura* egli non si riferisce esplicitamente a modelli o galassie, ma afferma che a ciascuno di noi è fornito un modo diretto di intuire lo spazio, che abbiamo indicato con la parola modello, per mezzo del quale indaghiamo le sue proprietà. Essendo universalmente condiviso dagli esseri umani, questo modo di intuire lo spazio è uno dei dettami della ragion pura che concorrono insieme all'esperienza sensoriale alla «costruzione» del mondo. Per di più, siccome questa intuizione non dipende dall'esperienza, che può essere ingannevole o incompleta, la conoscenza che ci fornisce viene a essere vera in modo necessario. Secondo Kant la geometria euclidea è sintetica a priori, ossia è un tipo particolare di conoscenza che dà una descrizione veritiera del mondo dell'esperienza, ma non trova solo nell'esperienza la sua giustificazione. Nel XVIII secolo la geometria era il prototipo della scienza esatta e la fisica classica aveva la geometria come proprio ideale. Kant diede forma esplicita alle sue idee perché voleva sfruttare la posizione particolare della geometria per confutare l'affermazione degli empiristi, avanzata nella forma più convincente da David Hume, secondo la quale *tutta* la conoscenza del mondo empirico si fonda esclusivamente sulla percezione dei sensi. Ma per capire l'universo è assolutamente indispensabile una tale intuizione? L'universo deve ammettere un modello in scala? Se si dovesse configurare una situazione differente i punti fondamentali della filosofia kantiana sarebbero indeboliti.

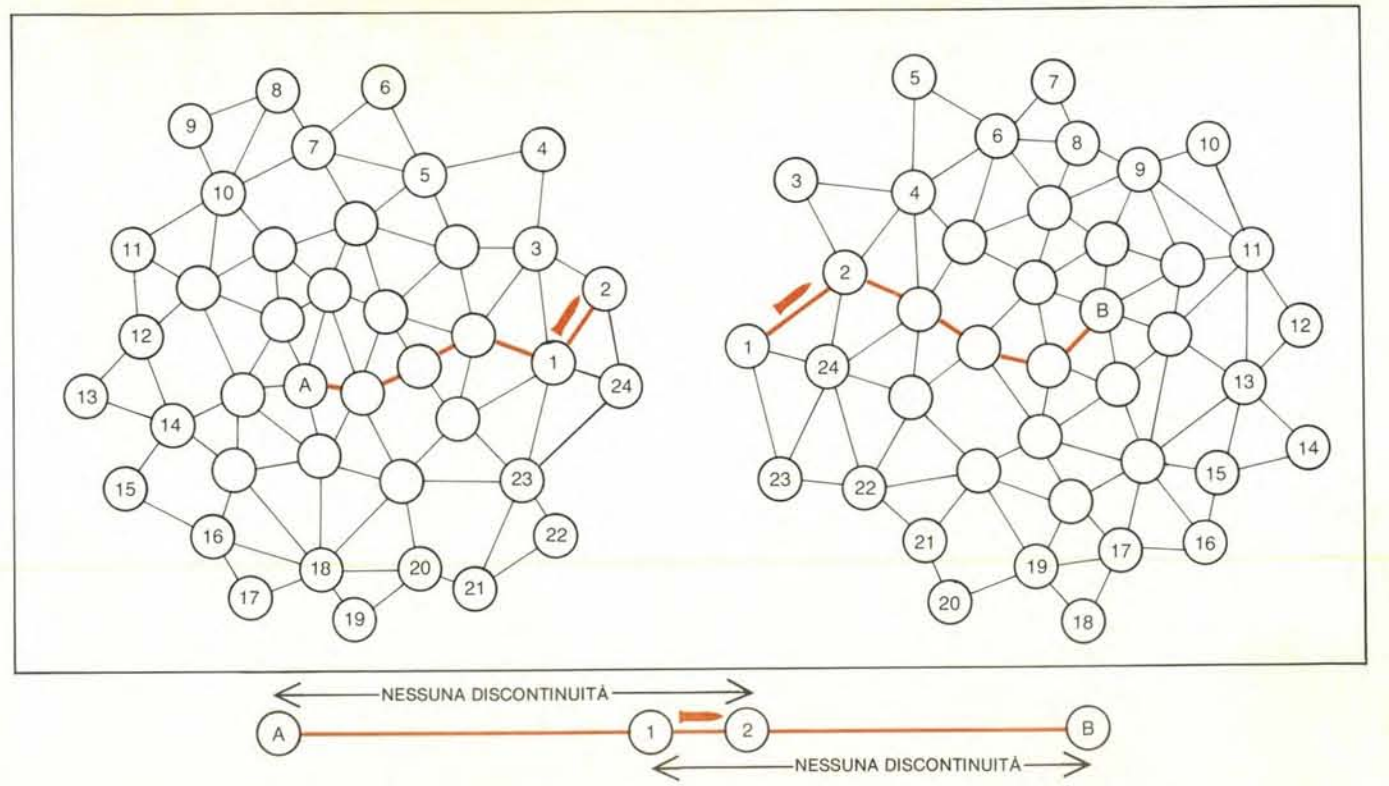
Quello di Newton e quello di Leibniz sono due modelli del sistema galattico chiaramente distinti e Kant li rifiutò, per la mancanza in entrambi di una proprietà che riteneva essenziale. Per parte sua sosteneva che ogni studio dell'universo materiale dovesse basarsi su tre punti: primo, il sistema galattico è finito; secondo, è omogeneo e illimitato; terzo, si può rappresentare in un modello in scala esatta. Tuttavia questi tre punti non possono essere tutti simultaneamente veri. In altre parole, nessun modello in scala esatta può essere insieme finito e omogeneo. Siamo giunti di nuovo all'antinomia kantiana dello spazio, e questa volta è stata ottenuta nel linguaggio dei modelli.

Perché si presenta questa antinomia? Kant la attribuiva alle limitazioni intrinseche dei processi mentali che usiamo per descrivere il mondo. Nel caso specifico il processo è la costruzione del modello. Kant sosteneva che non siamo capaci di costruire un modello del sistema galattico perché la nostra mente non è in grado di dirci come fare.

Una via per uscire dall'antinomia però esiste: rifiutare uno dei «punti» precedenti. Ricordiamo che nessuno dei tre è un fatto fisico stabilito tramite osservazione diretta, sono tutti assunzioni intuitive, come Kant stesso ammetteva. Una possibilità è seguire Newton e respingere il secondo punto, che il sistema galattico sia omogeneo e illimitato, dopo di che non c'è alcun problema ad accettare gli altri due e costruire un modello adeguato. Questa può essere in effetti la scelta corretta, in quanto un sistema galattico



Il modello cosmologico di Einstein realizza la richiesta kantiana di un universo finito e omogeneo, solo a patto di rifiutare l'ipotesi di Kant di uno spazio euclideo. Dire che su grande scala lo spazio è curvo significa che può non essere possibile costruire un modello del sistema galattico in scala esatta in laboratorio, dove valgono le leggi della geometria euclidea. Possono per esempio esistere cinque galassie equidistanti, ma ogni tentativo di costruire un modello in scala esatta di questo sistema è destinato a fallire (*a sinistra*). Einstein risolve l'antinomia dello spazio suggerendo che, in un modello a palline e bastoncini del sistema, il bastoncino più lungo che unisce due delle galassie rappresenti la stessa distanza degli altri nove (*a destra*).



Si tratta di una rappresentazione un po' più dettagliata del modello di Einstein per un sistema galattico finito. Il modello, tutto contenuto nel riquadro della figura, si presenta altamente inomogeneo; è raffigurato in due parti sconnesse ognuna con un centro e un contorno e sembrerebbe che non tutte le galassie possiedano vicine da ogni parte. La stessa galassia, poi, è rappresentata da due palline numerate, una per parte. Le palline non numerate stanno per galassie distinte non duplicate. Il modello non è in scala per cui le sue caratteristiche particolari non sono necessariamente quelle del sistema galattico, che in effetti è decisamente omogeneo. La linea in colore tra le palline *A* e *B* rappresenta un cammino continuo attraverso il sistema galattico percorso da un razzo (anch'esso riprodotto due volte nella figura). La continuità del cammino è illustrata in basso nella figura. Ci si può immaginare il modello come costituito da una coppia di schermi tridimensionali nella quale ogni galassia compare almeno su uno dei due e ogni galassia disposta sul bordo di uno schermo compare anche sull'altro.

finito ma non omogeneo non è mai stato scartato sperimentalmente e comunque elimina l'antinomia. Un'altra possibilità è seguire Leibniz e respingere il primo punto, cioè che il sistema galattico sia finito. Anche così l'antinomia è rimossa, poiché sperimentalmente non è esclusa la possibilità di un universo omogeneo e infinito. Oppure, per finire, possiamo seguire Einstein.

Einstein in effetti ottenne quello che era nei desideri di Kant: la costruzione di un modello di sistema galattico finito e omogeneo su scala terrestre. Tuttavia il prezzo pagato fu la soppressione della terza ipotesi kantiana, che il modello fosse in scala esatta. Nel modello di Einstein, per esempio, un bastoncino lungo otto centimetri può rappresentare una volta una distanza intergalattica di 50 milioni di anni luce, un'altra di 60. Per renderci conto dell'importanza dell'innovazione di Einstein consideriamo la situazione immaginaria che segue.

Un giorno, in qualche istante del lontano futuro, i membri di una spedizione esplorativa galattica tornano a casa dopo aver misurato tutte le distanze fra cinque galassie di particolare interesse. Si scambiano i dati e scoprono che ognuna delle cinque galassie è equidistante dalle altre quattro. Possono subito disporre quattro palline ai vertici di un tetraedro regolare per rappresentare quattro delle galassie, ma dove metteranno la quinta? Possono attaccarla a una terna qualunque delle altre quattro e formare così un altro tetraedro; così facendo, però, la quinta pallina è equidistante dalle tre adiacenti, ma non dalla quarta. Non c'è modo, in realtà, di costruire un modello da laboratorio di cinque palline equidistanti: il sogno di un grande disegno dell'intero sistema galattico svanisce, dato che basta una manciata di galassie per mettere in crisi la nostra intuizione. Come portavoce del punto di vista euclideo, Kant avrebbe dedotto che gli esploratori si erano sbagliati perché lo spazio «non è così». Ma gli esploratori hanno già ricontrollato il loro lavoro e non ci sono errori: lo spazio *è* così. L'ipotesi di poter costruire un modello in scala di ogni sistema fisico, che equivale a supporre che la geometria dello spazio sia euclidea, si rivela perciò un tentativo di adeguare la realtà a nostri schemi mentali precostituiti. Einstein aggira l'ostacolo e adegua invece il modello alla realtà: prende il modellino costruito e stabilisce che il bastoncino più lungo rappresenta la medesima distanza intergalattica degli altri nove.

Basta un passo per andare dalle cinque galassie al modello di Einstein dell'intero sistema galattico. L'illustrazione in alto mostra una versione semplificata del modello di Einstein usando alcune dozzine di palline invece dei milioni in pratica necessari. Questo però non è essenziale perché le proprietà fondamentali di un modello più grande sarebbero le stesse. Due in particolare meritano attenzione. Primo, in questa illustrazione ci sono due parti sconnesse, ognuna con un contorno; secondo, in qualche caso due palline, una per parte, rappresentano la stessa galassia. Siccome però il modello non è in scala esatta queste proprietà non interessano necessariamente il sistema galattico. Infatti il sistema è proprio omogeneo, come ci si rende conto pensando al modello come a un paio di schermi tridimensionali: ogni galassia compare in almeno uno dei due e, per essere sicuri che nessuna sia trascurata, ogni galassia che compare sul bordo di uno schermo appare pure sul bordo dell'altro. Questo spiega perché in qualche caso due palline rappresentano la stessa galassia.

Consideriamo adesso una delle galassie sul bordo; metà dei suoi vicini sono visibili su uno schermo e metà sull'altro per cui, anche se ogni pallina rappresentante quella galassia è collocata sul bordo del proprio schermo, la galassia va considerata come se fosse completamente circondata da galassie vicine. Dato che le galassie che rimangono compaiono in uno schermo o in un altro, anch'esse hanno vicine da tutte le parti. Il sistema galattico non possiede quindi un contorno; esso è inoltre connesso, in quanto un oggetto si può muovere con continuità partendo da ognuna delle galassie e arrivando a qualunque altra, anche se può essere necessario cambiare schermo a un certo punto per seguirne il moto.

La terza caratteristica essenziale del modello è la distorsione delle distanze, ma nella illustrazione incompleta che ne abbiamo fatto non è particolarmente apprezzabile. L'esatto ammontare della distorsione delle distanze è una questione tecnica, completamente trattata nel modello dettagliato di Einstein (la teoria della relatività generale); quello che ci interessa è la semplice presenza di distorsione che rivela una proprietà fondamentale dello spazio, cioè delle relazioni metriche del sistema galattico. La distorsione delle distanze in un particolare modello è determinata soltanto dalla natura dello spazio. Come si è già visto, se il sistema galattico ammette un modello in scala esatta, allora lo spazio è euclideo, in caso contrario esso deve possedere una proprietà che impedisce di avere modelli siffatti. A questa proprietà si è dato il nome di curvatura.

Questo può sembrare uno strano nome per una proprietà dello spazio, e spiegherò le ragioni della scelta. Il termine curvatura dello spazio si riferisce semplicemente alla necessità di usare modelli distorti e non ha niente a che fare con uno spazio misteriosamente curvato. Se si considera il modello di Einstein si giunge a una delle conclusioni fondamentali della teoria della relatività generale: l'antinomia kantiana dello spazio ha origine dall'ipotesi non dimostrata che lo spazio sia euclideo. È possibile invece concepire un sistema galattico che sia nello stesso tempo finito e omogeneo, e questo grazie proprio alla curvatura dello spazio.

La connessione tra curvatura e universo finito è argomento comune delle esposizioni divulgative della relatività, ma viene di solito spiegata in analogia con le superfici. Su un piano ogni insieme finito di punti ha un contorno. Su una superficie sferica, come quella della Terra, la situazione è differente. Si può immaginare, per esempio, una rete di stazioni meteorologiche distribuite più o meno uniformemente: benché siano in numero finito, ognuna ha una stazione vicina da qualunque parte e quindi la rete non ha contorno. Questa analogia suggerisce che lo spazio di un sistema galattico finito omogeneo deve assomigliare alla superficie della Terra, tranne che per le dimensioni maggiori. Dato che la superficie della Terra è bidimensionale, la posizione di un punto su di essa è determinata da due soli numeri, la latitudine e la longitudine, e la ragione per cui non possiede un contorno ci sembra dovuta al fatto che essa si curva in una terza dimensione. Siamo quindi portati a pensare che uno spazio «sferico» tridimensionale deve in qualche modo curvarsi in una quarta dimensione, ma l'analogia cade perché è inutile cercare di immaginarsi questa quarta dimensione: nessuno l'ha mai vista.

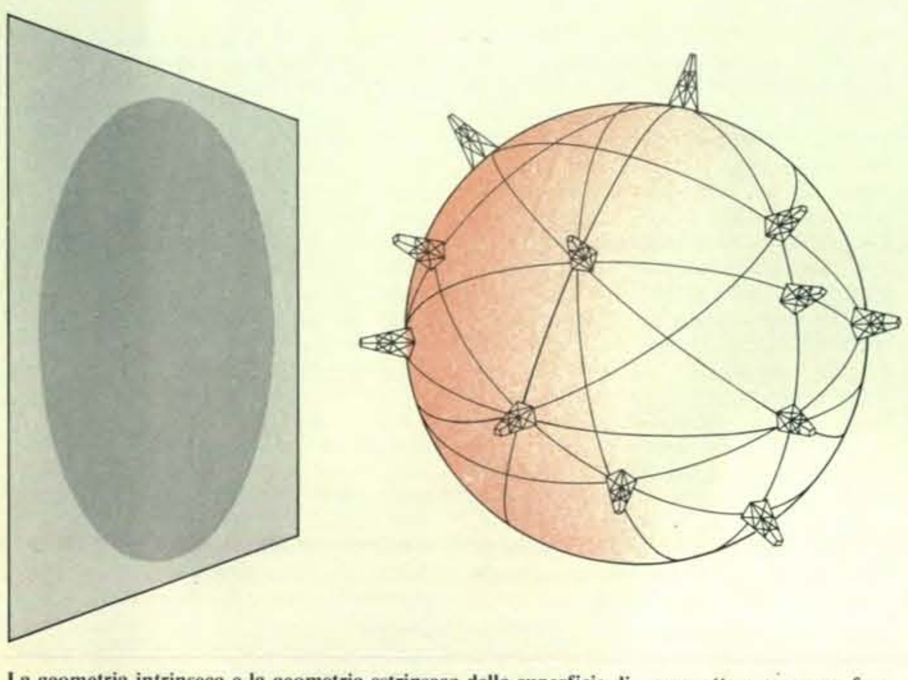
In realtà l'analogia è buona, ma stranamente risente di una descrizione troppo dettagliata dalla Terra e non di una troppo sommaria dello spazio. Una superficie possiede due tipi di proprietà geometriche, intrinseche ed estrinseche. Le prime si riferiscono alle misure che si possono effettuare interamente sulla superficie stessa, qualunque altra è estrinseca. Eratostene, per esempio, nel terzo secolo a.C. calcolò il raggio della Terra combinando una proprietà intrinseca (la distanza di 5000 stadi tra Siene ed Alessandria) con una estrinseca (il fatto che quando il Sole è allo zenit a Siene, ne dista 7,2 gradi ad Alessandria).

Dello spazio fisico, invece, non conosciamo proprietà geometriche estrinseche perché ogni sua proprietà nota si riferisce a figure e misure, rispettivamente collocate ed effettuate, all'interno dello spazio stesso. Esso non può quindi essere paragonato alla superficie di una sfera, non possedendo niente di simile alla geometria estrinseca di una sfera. È solo nella nostra mente che è possibile trascurare le differenze e stabilire un'analogia tra oggetti diversi.

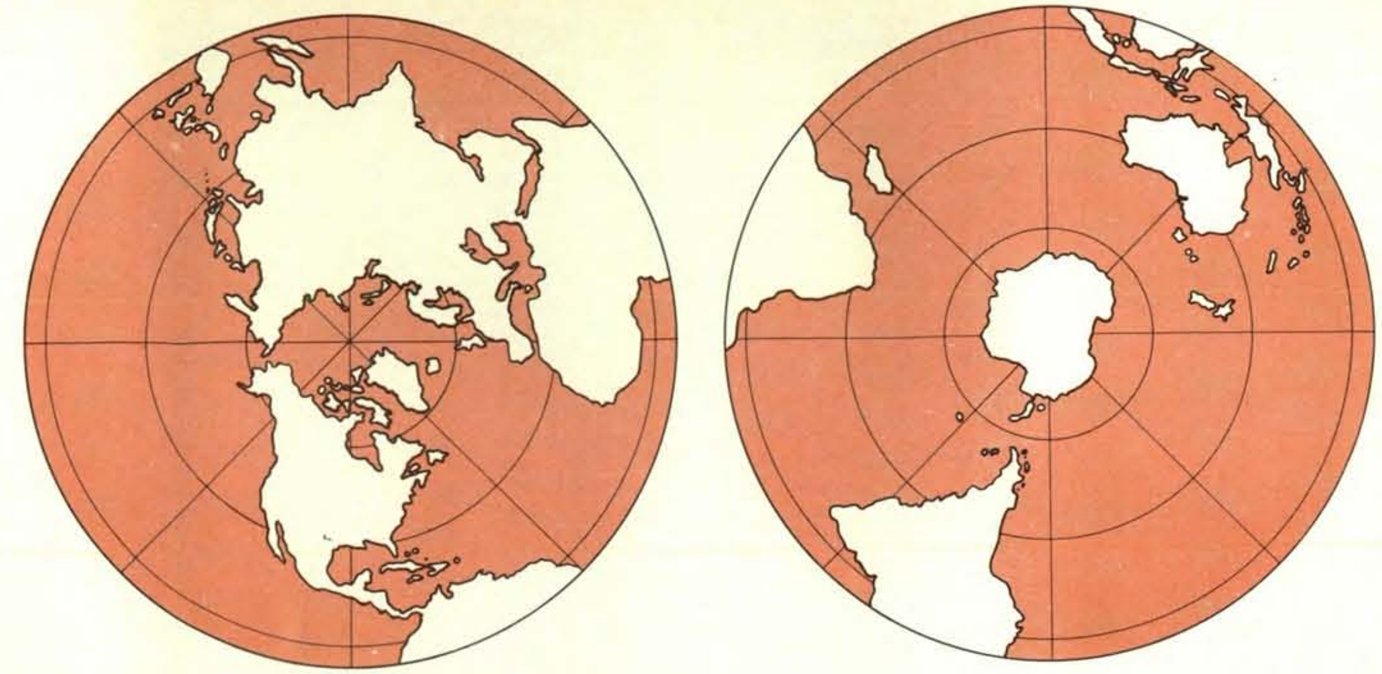
Esiste però un modo per raffigurarsi la curvatura dello spazio. Il nostro vero scopo è capire a che cosa assomiglia un sistema galattico finito omogeneo. È utile a questo punto considerare la rete di stazioni meteorologiche sulla superficie terrestre. Si noti che le proprietà geometriche importanti della rete sono tutte intrinseche: ogni stazione è circondata da stazioni vicine e la rete, anche se finita, non ha contorno. Siccome queste sono proprietà intrinseche non si rinuncia a nulla ignorando la geometria estrinseca della Terra, anzi, dato che proprio quest'ultima ci metteva in difficoltà, ci conviene non tenerne conto. Le informazioni non necessarie possono fuorviare il matematico quanto il lettore di «gialli». In matematica il compito di isolare quello che è veramente importante dal resto si chiama astrazione.

Possiamo ricevere ancora un aiuto dal linguaggio dei modelli. Un mappamondo è un modello in scala esatta della superficie terrestre, ma è perfino troppo dettagliato, in quanto riproduce con perfetta chiarezza tutte le caratteristiche geometriche della Terra, estrinseche e intrinseche. Sembra strano, ma non ci permette di capire quello che cerchiamo. Ci serve un modello che conservi tutta la geometria intrinseca, ma filtri quella estrinseca. Proviamo a passare all'altro modello della Terra che ci è familiare: un atlante.

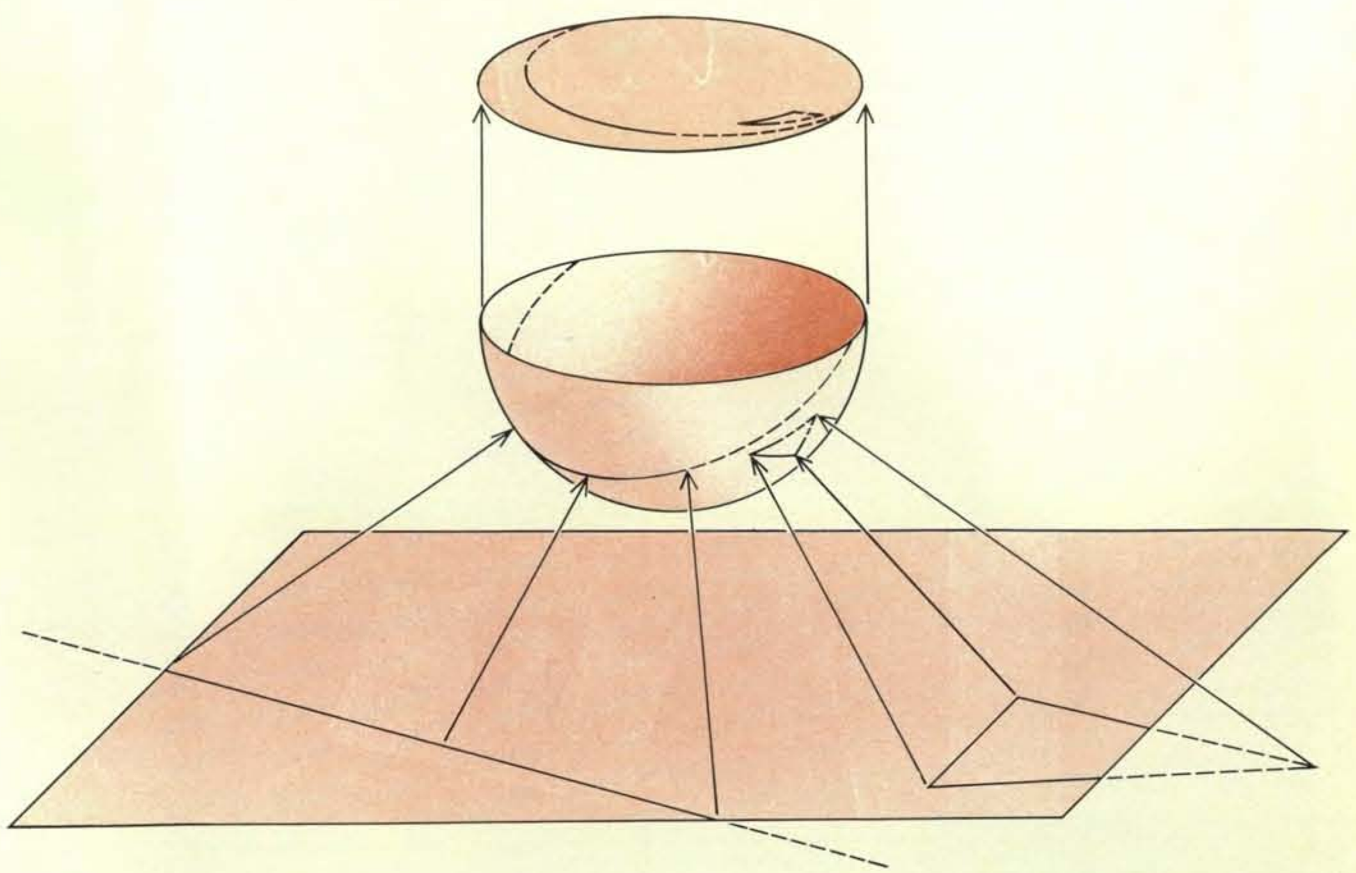
Per molti versi un atlante, anche il migliore, è inferiore a un mappamondo. Rappresenta la Terra come un *collage* di carte piane che si sovrappongono e ogni carta distorce le distanze. Nonostante tutto, però, da un atlante si può estrarre tutta la geometria intrinseca della superficie terrestre. Questo è un risultato matematico davvero sorprendente ed è dif-



La geometria intrinseca e la geometria estrinseca della superficie di un oggetto come una sfera, sono nettamente differenti. Ogni proprietà intrinseca di una superficie è legata alle misurazioni che si possono effettuare su di essa; ogni altra proprietà è estrinseca. Il fatto che, per esempio, una rete di stazioni metereologiche su una sfera può essere simultaneamente finita e illimitata è una proprietà intrinseca. Il fatto invece che la sfera proietta un'ombra circolare da tutte le direzioni costituisce una proprietà geometrica estrinseca. Lo spazio fisico non possiede una geometria estrinseca in quanto ogni proprietà che conosciamo si riferisce a figure e a misurazioni che trovano la loro collocazione nello spazio stesso. È quindi senza speranza tentare di immaginare lo spazio curvo come se fosse misteriosamente piegato in una quarta dimensione, in quanto non possiamo uscire dallo spazio e guardarlo dal di fuori in modo da averne una visione estrinseca.



Un atlante conserva tutte le proprietà intrinseche della Terra mentre filtra tutta la geometria estrinseca. Poiché la superficie curva della Terra è appiattita sulla carta, le distanze sono distorte. L'ammontare e il tipo di distorsione contengono tutte le informazioni necessarie a ricostruire l'intera geometria della Terra. Non abbiamo quindi più alcun bisogno di una terza dimensione per capire la curvatura della superficie della sfera e in modo del tutto simile non c'è alcun bisogno di una quarta dimensione per riuscire ad afferrare la curvatura dello spazio.

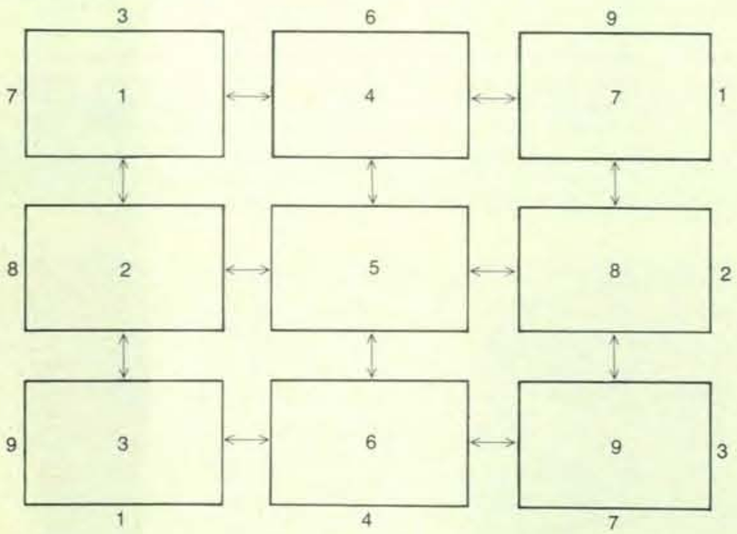


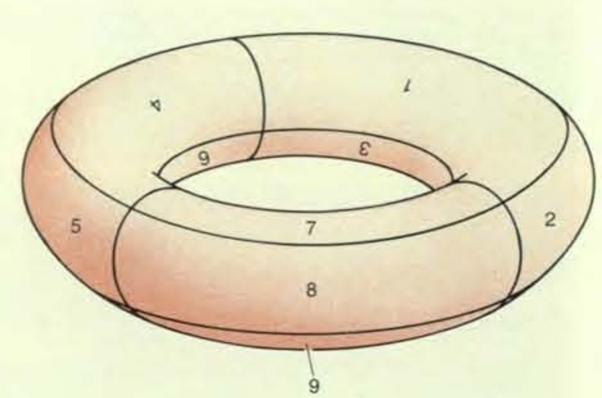
Il piano infinito si può rappresentare su un atlante esattamente come una sfera. In questo caso particolare l'atlante è costituito da una sola mappa, il disco, che si ottiene proiettando prima il piano sull'emisfero e poi sul disco. (Questa è solo una delle molte rappresentazioni del piano.) Le forme geometriche rivelano ancora le distorsioni delle distanze dovute alla rappresentazione. Qualunque superficie bidimensionale illimitata si può rappresentare in un atlante; una superficie, di questo tipo, piano e sfera compresi, costituisce una varietà bidimensionale.

ficile da dimostrare, ma rimane il fatto che le inevitabili distorsioni, anche se scomode, sono trattabili, altrimenti come sarebbe possibile la navigazione marina e aerea con l'aiuto delle carte? Si potrebbe obiettare che un atlante non assomiglia alla Terra, che non ci aiuta ad afferrare la sua geometria estrinseca. Per i nostri propositi, però, il fatto che le carte siano piane, lungi dal costituire uno svantaggio, è il loro pregio migliore. Questo implica che si può ricavare tutta la geometria intrinseca di una sfera senza mai lasciare una superficie piana bidimensionale, il che è estremamente economico e mostra quello che l'astrazione permette di raggiungere: non c'è bisogno di una terza dimensione per capire la struttura della rete di stazioni meteorologiche; allo stesso modo non c'è bisogno di una quarta dimensione per comprendere la struttura del sistema galattico. Quella che poi sembra una stridente analogia tra la Terra e lo spazio è in effetti una reale somiglianza tra le loro strutture intrinseche astratte: il modello di Einstein (la teoria della relatività generale) è un atlante dello spazio.

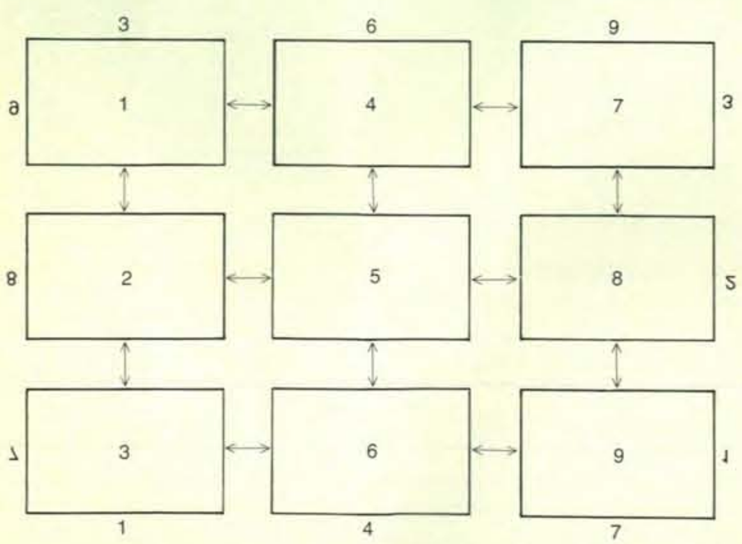
E la curvatura come entra in questo discorso? Nella teoria della relatività generale il concetto di curvatura dello spazio si presenta come un recupero del lavoro di Carl Friedrich Gauss sulle superfici curve pubblicato nel 1827. Gauss fu il primo a capire che una superficie possiede una geometria intrinseca ben distinta. La sua scoperta più notevole (anche dal suo punto di vista) fu che la curvatura di una superficie è una proprietà intrinseca. Nelle sue linee generali il suo discorso è il seguente: prendiamo una piccola porzione di superficie curva e riportiamola su un piano. In altri termini, facciamone una mappa. In generale bisognerà deformarla, per cui le distanze saranno distorte. Dovrebbe essere evidente che la curvatura della superficie determina con precisione il tipo e l'ammontare della distorsione. La scoperta di Gauss consiste nell'inverso: la curvatura di una superficie si può determinare completamente solo dalle distorsioni delle distanze contenute sulla carta. È questa la ragione per la quale le distorsioni del tutto analoghe presenti nel modello del sistema galattico proposto da Einstein vengono attribuite alla curvatura dello spazio.

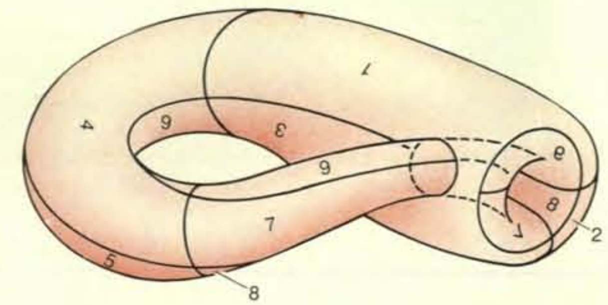
Gauss studiò la geometria intrinseca di una piccola porzione di superficie facendone una mappa, ma per rappresentare tutta una superficie in genere si ha bisogno di diverse mappe, cioè di un atlante. Una superficie che si può rappresentare con un atlante si dice varietà bidimensionale e il termine vuole proprio sottolineare il fatto che la superficie è di solito costituita da molte porzioni bidimensionali e non da una sola mappa.





Un atlante per il toro (*a sinistra*) potrebbe consistere di nove carte; i numeri collocati accanto ai bordi di ciascuna carta indicano a quale delle altre carte si sovrappone. A destra sono rappresentate le regioni numerate sul toro che corrispondono alle nove differenti carte dell'atlante.



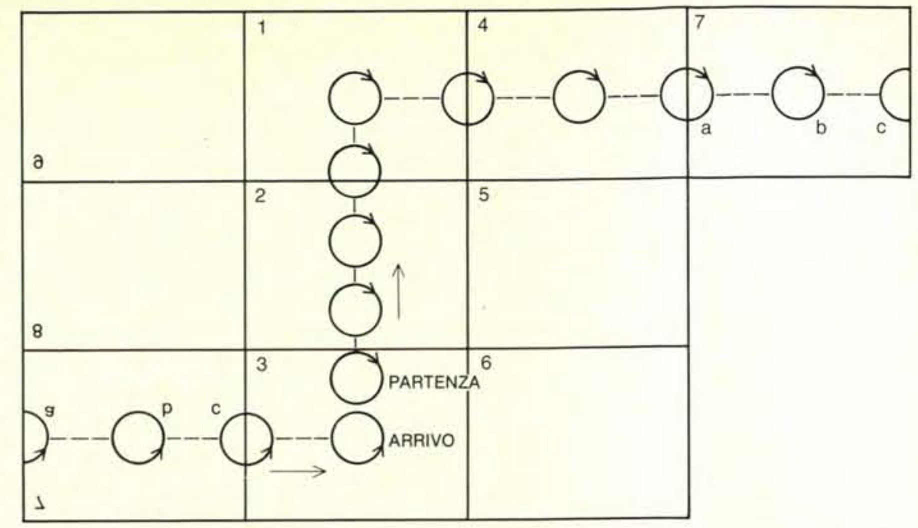


Un atlante per la bottiglia di Klein (*a sinistra*) potrebbe pure consistere di nove mappe. È molto simile all'atlante del toro, ma le carte si sovrappongono in modo diverso. Questo cambiamento rende però impossibile unire le carte senza che la superficie si intersechi dove non dovrebbe. La bottiglia di Klein è una superficie a una faccia, ossia non possiede interno, al contrario di quanto accade per la sfera e per il toro.

Ogni superficie regolare che non abbia contorno costituisce una varietà bidimensionale. Un piano infinito o un toro, per esempio, sono tali. Si può anche partire da una qualunque collezione arbitraria di mappe che si sovrappongono in qualche maniera sensata: essa rappresenterà allora un atlante per qualche varietà bidimensionale.

Il concetto di varietà che si è sviluppato nel tentativo di comprendere la geometria intrinseca di una superficie, dà in realtà risultati più generali. Si possono realizzare mappe con «uova» tridimensionali invece che con «toppe» bidimensionali piane e ottenere un oggetto che è realizzabile in tre dimensioni. Quello che ne risulta si dice, come è logico aspettarsi, una varietà tridimensionale, ed è caratterizzato da un volume piuttosto che da una superficie. Il modello di Einstein è un atlante per una particolare varietà tridimensionale: la sfera tridimensionale o trisfera. (La superficie della sfera ordinaria è una bi-sfera.) Si possono fare innumerevoli altri esempi. L'ordinario spazio euclideo della matematica è dato da una sola mappa, simile a quella per il piano infinito. Altri spazi diventano subito troppo complicati per poterli descrivere in dettaglio. I matematici hanno definito varietà per un numero arbitrario di dimensioni escogitando un sistema col quale non si ha più la necessità di visualizzarne i componenti fondamentali con i quali è costruita: la dimensione di una varietà è interpretata semplicemente come il numero di variabili che occorrono per individuare un punto su di essa. Le varietà sono perciò diventate una base naturale per i problemi che richiedono più variabili e il loro uso interessa attualmente, oltre la matematica, le scienze in generale.

Una delle percezioni più elementari che abbiamo dell'ambiente che ci circonda è che per contrassegnare completamente tutte le posizioni all'interno di esso ci servono tre variabili (altezza, larghezza e profondità, o x, y e z). Lo spazio fisico è una varietà tridimensionale. L'errore del senso comune è assumere che esso debba essere rappresentato da una sola mappa e cioè dallo spazio euclideo. A questo punto possiamo anche renderci conto del perché fosse naturale incorrere in tale errore. Localmente (cioè nelle immediate vicinanze di ciascun punto) tutte le varietà della stessa dimensione appaiono simili. Anche se in linea di principio la curvatura le distingue, in pratica può essere che non si riesca a rilevarla con una sufficiente accuratezza sperimentale quando si limitano le misure a una piccola regione. (Gli esploratori del nostro esempio avevano viaggiato fino ad altre galassie per avere dei risultati, mentre i nostri strumenti di misura non hanno ancora lasciato il sistema solare.) In altri termini, lo spazio *è* euclideo agli effetti pratici se lo si considera su regioni abbastanza piccole. L'intero cosmo è tutt'altra cosa e il concetto di varietà fornisce una quantità di modi per comprenderne la struttura su vasta scala. Lungi dall'essere messa in crisi dall'apparente assurdità della questione della struttura dello spazio, come Kant suggeriva, la matematica grazie a essa si è invece arricchita in modo sostanziale.



L'orientabilità di una proprietà globale di una superficie. Il cerchio con una freccia sulla circonferenza disegnato su una mappa di una varietà definisce un orientamento locale (orario o antiorario). L'orientamento si può estendere alle altre mappe trasportando il cerchio da una carta all'altra dell'atlante. Il trasporto lungo i due cammini differenti può portare a orientamenti opposti della freccia. In questo caso si dice che la varietà è globalmente non-orientabile. La bottiglia di Klein è globalmente non-orientabile; qui si vede il suo atlante e una sua mappa (*la numero 7*) con tre posizioni del cerchio orientato (*a - c*) riportate due volte. Quando il cerchio orientato torna alla posizione iniziale nella mappa numero 3 è un'immagine speculare di se stesso. Altre varietà, come il toro, dove non sorgono questi problemi si dicono globalmente orientabili.

Le differenze tra una varietà e un'altra che più colpiscono sono quelle globali, quelle che si possono distinguere solo con lo studio di interi atlanti e non delle singole mappe. Una proprietà globale di una superficie è la sua orientabilità. Gli atlanti per un toro e per la superficie nota come bottiglia di Klein sono piuttosto simili, ma quest'ultima ha due caratteristiche peculiari che la rendono molto diversa da un toro. Per prima cosa non si può costruire la bottiglia di Klein nello spazio senza che intersechi se stessa dove non dovrebbe. Secondo, non può essere orientata nello spazio. Mentre l'autointersezione non si può dedurre direttamente dall'atlante dato che è una caratteristica estrinseca, la non orientabilità invece è una caratteristica intrinseca e si può scoprire seguendo il quadrante di un orologio che si muove da una mappa alla altra dell'atlante. La non orientabilità è una prima proprietà globale. Un'altra proprietà globale è la connessione, ossia il fatto che ogni cammino chiuso individuato su una superficie la divida in due parti distinte. La sfera e il toro hanno diversa connessione. Esistono nozioni analoghe di connessione per varietà di dimensioni più elevate. Lo studio delle proprietà globali fa parte della topologia. È quindi evidente che in una varietà, compreso il modello dello spazio di Einstein come tri-sfera, si può combinare un certo numero di piccoli settori dotati di una geometria ordinaria e familiare in modo tale da produrre un effetto globale completamente nuovo e sorprendente. A questo aspetto delle varietà è in parte dovuto il fascino esercitato dall'opera grafica di Maurits C. Escher.

Nella ricerca sulle origini delle idee di Einstein si è data enfasi particolare alla geometria non euclidea sviluppata all'inizio dell'ottocento, il che può essere un po' fuorviante. Molti matematici, tra cui Johann Heinrich Lambert, che visse tra il 1728 e il 1777 e fu amico di Kant, giunsero alla conclusione che si poteva dedurre un insieme di teoremi, validi logicamente quanto quelli della geometria euclidea, ma differenti, da un nuovo sistema di assiomi, leggermente diverso da quello di Euclide. Un numero più ristretto di matematici del XIX secolo, cioè Gauss, János Bolyai e Nikolai Lobachevski, andarono più in là accorgendosi che questo nuovo sistema poteva descrivere in modo altrettanto fondato la struttura dello spazio fisico; non era quindi possibile sostenere oltre l'affermazione kantiana che la geometria euclidea fosse sintetica a priori. Rimaneva comunque l'antinomia, in quanto il nuovo spazio di Lobachevski, come spesso è chiamato, conservava la medesima struttura topologica globale dello spazio euclideo. In particolare, in esso ogni insieme finito di galassie avrebbe avuto ancora un contorno.

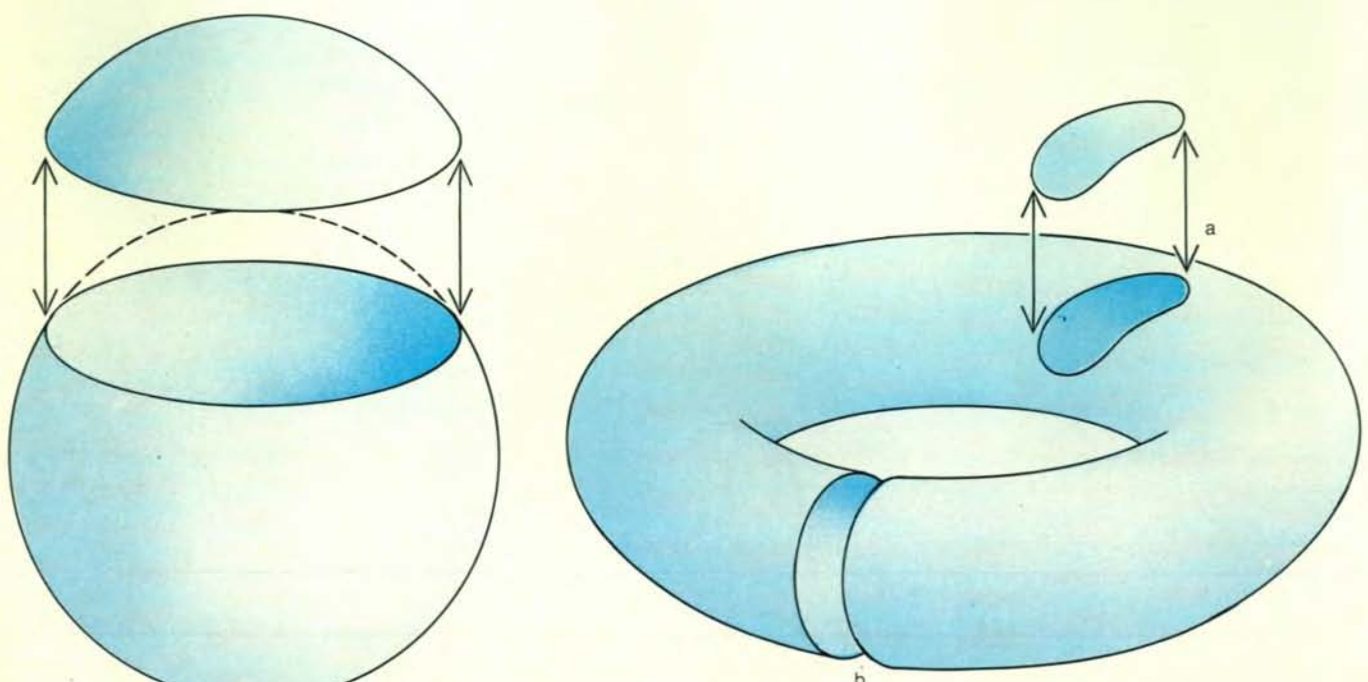
Il XIX secolo fu un periodo di straordinari sviluppi per la geometria. Entro il 1870 si erano formati sistemi organici comprendenti tutte le geometrie euclidee e proiettive. Stranamente il problema della importanza dei sistemi geometrici nei confronti della fisica non fu più al centro dell'interesse e la questione si fece confusa. Henri Poincaré, uno dei matematici più in vista del tempo, arrivò a sostenere che non esiste una geometria rigorosamente corretta per la descrizione dello spazio. La scelta di una particolare geometria piuttosto che un'altra era per lui convenzionale, non meno arbitraria della scelta della scala Fahrenheit e la scala centigrada per la misurazione della temperatura.

Lo stile della matematica della teoria della relatività generale di Einstein si discosta da quello delle geometrie sistematiche degli inizi del ventesimo secolo. Si tratta di una parte della geometria differenziale che, come il nome stesso suggerisce, sfrutta la potenza dell'analisi. Con essa Einstein mostrò in quale senso interpretare la gravitazione come curvatura dello spazio. In altri termini, la distorsione delle distanze sarà presente anche in un modello di una piccola regione di spazio che contenga una quantità apprezzabile di materia. La distorsione dello spazio, e non la «forza» gravitazionale, determina allora il cammino dei corpi in movimento. La curvatura è quindi un fenomeno locale oltre che globale; la teoria della relatività generale si occupa soprattutto delle conseguenze locali della curvatura. È arduo immaginarsi come la geometria della teoria della relatività generale, così strettamente collegata con la materia, si sarebbe potuta evolvere dai nitidi sistemi assiomatici di Euclide e Lobachevski. Prendendo a prestito un modo di dire del mondo del teatro nuovaiorchese, dove le commedie si possono presentare «off-off-Broadway», potremmo dire che la geometria usata da Einstein è non-non-euclidea. Le idee di Einstein erano formulate in un linguaggio diverso perfino da quello delle geometrie non euclidee: il calcolo differenziale assoluto. Fino al momento in cui Einstein non se ne valse e ne cambiò il nome in analisi tensoriale, questo settore della matematica sembrava essere proprio il tipico esempio di ricerca matematica pura priva di qualsiasi rapporto con il mondo reale.

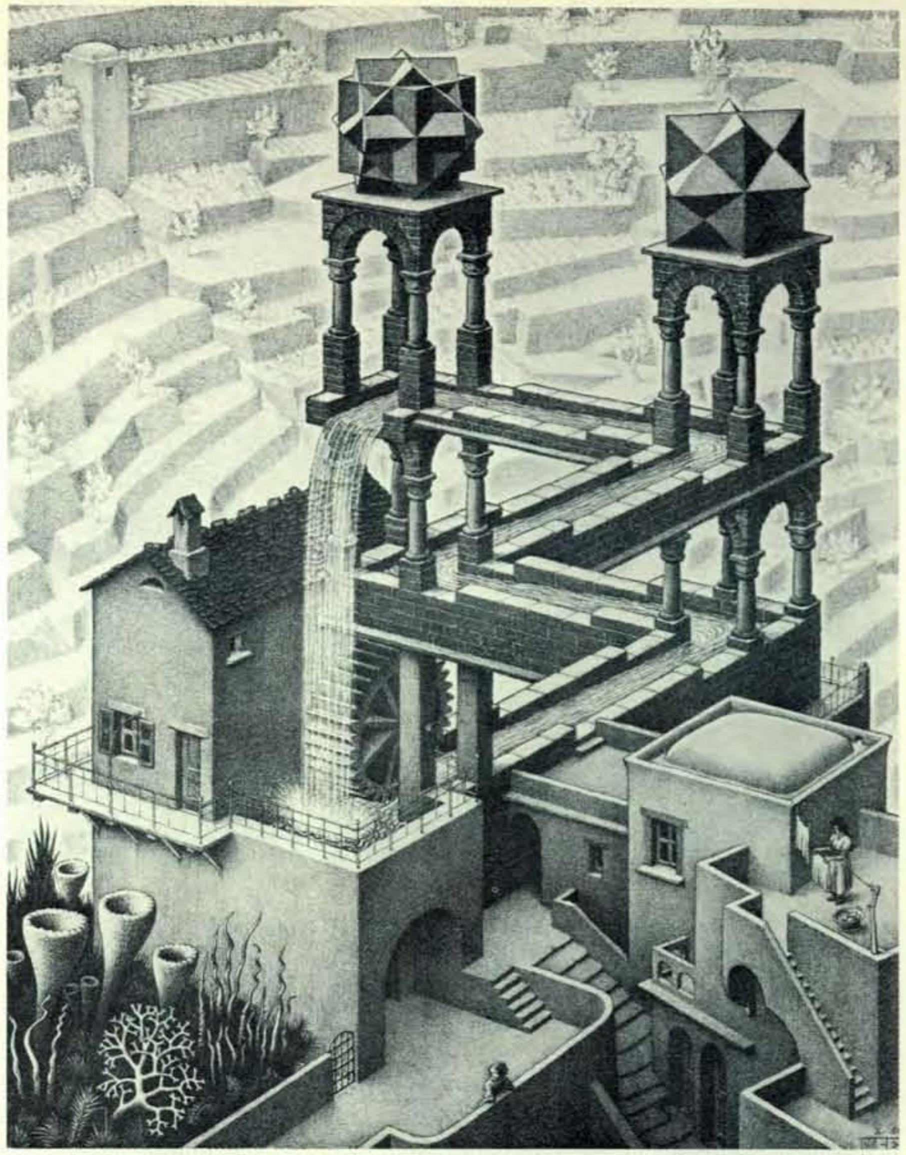
Stranamente l'analisi tensoriale non iniziò così. Le sue origini si possono trovare nell'opera di Bernhard Riemann (1826-1866). In occasione della sua nomina alla facoltà dell'Università di Göttingen nel 1854, all'età di 27 anni, Riemann aprì una linea di pensiero completamente nuova con la prolusione intitolata *Sulle ipotesi che sono a fondamento della geometria*. L'argomento era stato scelto per lui da Gauss, suo maestro e collega. Nella tesi di Riemann è possibile trovare tutto il moderno punto di vista: il concetto di varietà n-dimensionale; lo studio della geometria intrinseca della varietà, in particolar modo la curvatura, con l'estensione del lavoro di Gauss sulle superfici; perfino il concetto che geometria e fisica sono inseparabili, cioè che la presenza della materia determina la curvatura dello spazio. L'interesse centrale per Riemann era quindi per le implicazioni che le sue idee avevano nei confronti della struttura dello spazio fisico. Le sue parole lo spiegano perfettamente: «Che lo spazio sia una varietà tridimensionale illimitata è un'ipotesi che viene impiegata in ogni apprensione del mondo esterno, sia che si tratti della effettiva percezione del mondo, sia che si tratti dell'individuazione delle determinazioni spaziali di un oggetto; ciò è confermato nel corso di queste applicazioni. Per questo motivo l'illimitatezza dello spazio ha un grado di certezza più elevato di qualunque altra esperienza esterna. Da questo non scende però in alcun modo che lo spazio sia infinito. Al contrario, esso sarebbe di necessità finito se assumessimo che i corpi esistono indipendentemente dalla loro posizione, così da potere assegnare una curvatura costante allo spazio, purché questa curvatura avesse un valore positivo, per quanto piccolo fosse.»

Riemann trattò lo spazio come una varietà e si rese conto che una delle strutture per essa possibili è quella che abbiamo chiamato tri-sfera di Einstein. Fu così il primo a vedere la possibilità concettuale di un universo finito illimitato. Egli, e non Einstein, trovò per primo la via per superare l'antinomia kantiana dello spazio.

Benché Gauss per primo fosse restato stupito da quello che aveva sentito affermare da Riemann, la comunità scientifica nel suo complesso non venne a conoscenza della sua dissertazione finché non fu pubblicata postuma nel 1868. (Riemann morì di tubercolosi a 39 anni.) Durante il mezzo secolo successivo le sue idee matematiche furono ampiamente sviluppate, ma venne in pratica dimenticata la loro applicazione allo spazio. Una generazione dopo, Einstein sembrò riscoprire tutta la ricchezza delle idee di Riemann sul mondo fisico, ma il suo lavoro era profondamente originale. La teoria della relatività generale è soprattutto una teoria fisica in cui viene effettuata una trattazione dettagliata e coerente dell'aspetto geometrico della gravitazione. Riemann aveva formulato il linguaggio geometrico, ma la fisica di Ein-



La connessione è un'altra proprietà globale di una superficie legata al fatto che un qualunque cammino chiuso su di essa la divide in due parti distinte. La connessione di una sfera è diversa, per esempio, da quella di un toro. Ogni cammino chiuso sulla sfera la separa in due parti (*a sinistra*). Cammini con questa proprietà (*a*) esistono anche sul toro (*a destra*), ma ce ne sono altri (*b*) che non la possiedono. L'esistenza di cammini non separanti per certe superfici ma non per altre rispecchia una differenza topologica fondamentale tra le superfici.



***Cascata*, una litografia in bianco e nero di Maurits C. Escher, è un esempio di come lo spazio possa avere proprietà locali del tutto ordinarie ma essere globalmente piuttosto strano.**

stein era radicalmente nuova e Riemann stesso nei suoi lavori l'aveva solamente lasciata intravedere.

Le posizioni di Einstein e Kant non sono affatto antitetiche. Al contrario, come si è visto, uno dei punti fondamentali dell'idealismo metafisico kantiano è che lo spazio non è una cosa, ma una delle forme attraverso le quali noi organizziamo la percezione delle cose. La struttura della nostra organizzazione percettiva è inoltre data a priori. Questi concetti kantiani sono implicitamente accettati dalla relatività; la divergenza fondamentale tra Einstein e Kant è intorno alla struttura dello spazio. Kant assumeva, in parte perché non intravedeva possibilità più generali, che lo spazio fosse euclideo; Einstein affermava che era riemanniano, includendo così il punto di vista kantiano come caso particolare. Questo spiega in primo luogo come poté sorgere l'antinomia dello spazio, e quindi come Riemann ed Einstein poterono risolverla senza che per questo la concezione kantiana dello spazio venisse scalzata.

Per finire, una parola su Dante, seguendo alcune osservazioni fatte da Andreas Speiser nel suo libro *Klassische Stücke der Mathematik*. Nelle prime due cantiche della Divina Commedia Dante attraversa il mondo materiale, dal centro ghiacciato della Terra, la dimora di Lucifero, fino al monte del Purgatorio. Nell'ultima cantica, il Paradiso, Beatrice fa ascendere Dante attraverso le nove sfere celesti, ognuna più grande e in moto più rapido della precedente, fino a raggiungere il *Primum Mobile*, la nona e più vasta sfera, che è il limite dello spazio. L'aspirazione del poeta è vedere L'Empireo, la dimora di Dio. Questo gli appare alla fine come un punto di luce accecante circondato da nove sfere concentriche che rappresentano gli ordini di angeli che sono responsabili del moto delle sfere. Dante si trova in imbarazzo perché quanto più piccolo è il raggio delle sfere dell'Empireo, tanto più velocemente esse girano. Beatrice spiega che non c'è alcun paradosso nel comportamento delle sfere materiali e delle sfere spirituali; ognuna, materiale o spirituale che sia, gira tanto più velocemente quanto più è perfetta o divina. Il mondo spirituale completa il mondo materiale esattamente nello stesso modo in cui gli schermi del modello di Einstein del sistema galattico si completano l'un l'altro. La zona di sovrapposizione è rivelata dalla corrispondenza tra le sfere celesti e i corrispondenti ordini di angeli, e, ancora come nel modello di Einstein, quanto più lontana è una sfera dal centro di una carta, tanto più vicina è la sua controparte al centro dell'altra e le velocità delle sfere materiali e delle sfere spirituali sono in armonia.

Speiser pensa che Dante fosse in grado di giungere a questa notevole visione poiché la sua conoscenza geometrica era derivata dall'astronomia e non da Euclide, di cui aveva scarsa conoscenza. Riportiamo la conversazione tra Dante e Beatrice (Canto XXVIII, 22-78).

Forse cotanto quanto pare appresso
alo cigner la luce che 'l dipigne
quando 'l vapor che 'l porta più è spesso,

distante intorno al punto un cerchio d'igne
si girava sì ratto, ch'avría vinto
quel moto che più tosto il mondo cigne.

E questo era d'un altro circuncinto,
e quel dal terzo, e 'l terzo poi dal quarto,
dal quinto il quarto, e poi dal sesto il quinto.

Sopra seguiva il settimo sì sparto
già di larghezza, che 'l messo di Iuno
intero a contenerlo sarebbe arto.

Così l'ottavo e 'l nono; e ciascheduno
più tardo si movea, secondo ch'era
in numero distante più dall'uno;

e quello avea la fiamma più sincera
cui men distava la favilla pura,
credo, però che più di lei s'invera.

La donna mia, che mi vedea in cura
forte sospeso, disse: «Da quel punto
depende il cielo e tutta la natura.

Mira quel cerchio che più li è congiunto;
e sappi che 'l suo muovere è sì tosto
per l'affocato amore ond'elli è punto».

E io a lei: «Se 'l mondo fosse posto
con l'ordine ch'io veggio in quelle rote,
sazio m'avrebbe ciò che m'è proposto;

ma nel mondo sensibile si pote
veder le volte tanto più divine,
quant'elle son dal centro più remote.

Onde, se 'l mio desio dee aver fine
in questo miro e angelico templo
che solo amore e luce ha per confine,

udir convienmi ancor come l'essemplo
e l'essemplare non vanno d'un modo,
ché io per me indarno a ciò contemplo».

«Se li tuoi diti non sono a tal nodo
sufficienti, non è maraviglia;
tanto, per non tentare, è fatto sodo!»

Così la donna mia; poi disse: «Piglia
quel ch'io ti dicerò, se vuo' saziarti;
ed intorno da esso t'assottiglia.

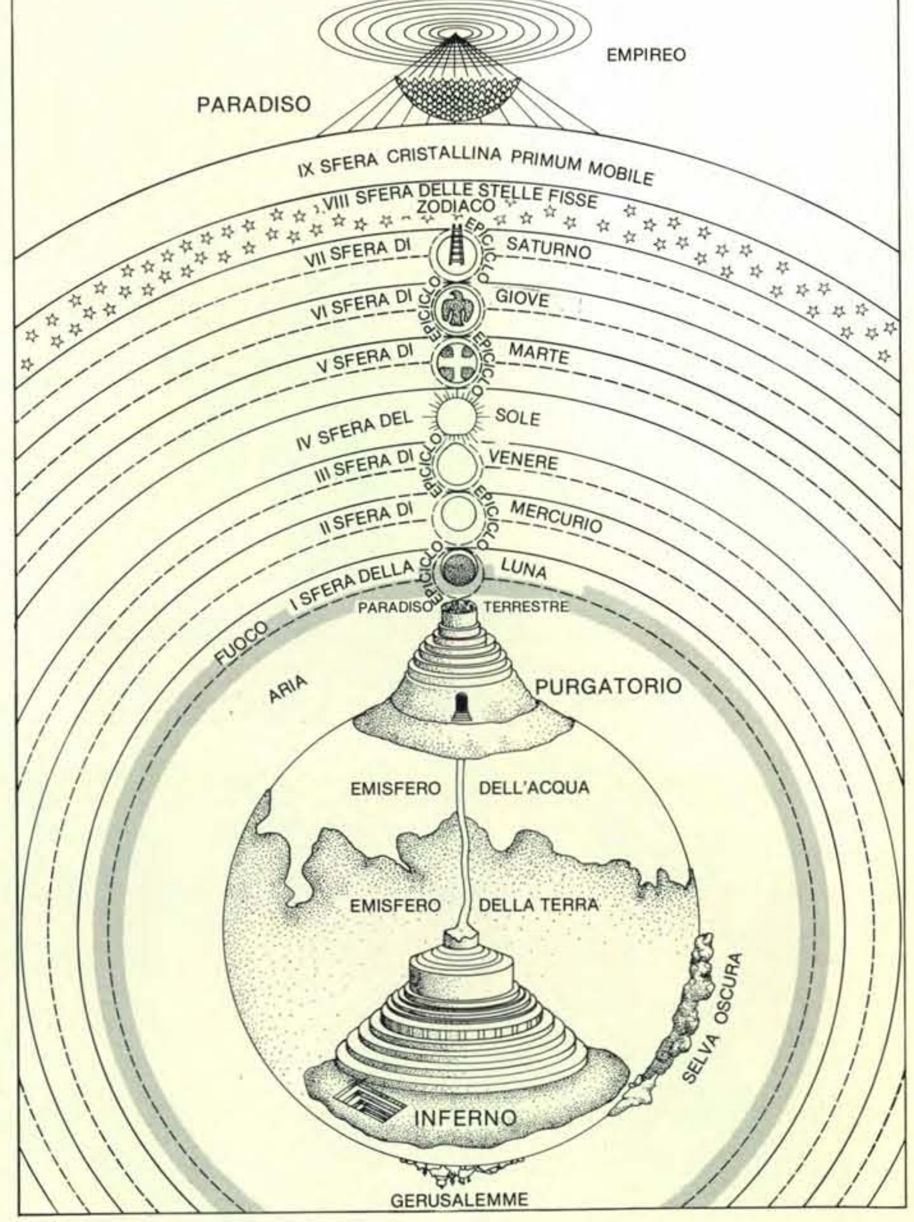
Li cerchi corporai sono ampi e arti
secondo il più e 'l men della virtute
che si distende per tutte lor parti.

Maggior bontà vuol far maggior salute;
maggior salute maggior corpo cape,
s'elli ha le parti igualmente compiute.

Dunque costui che tutto quanto rape
l'altro universo seco, corrisponde
al cerchio che più ama e che più sape.

Per che, se tu alla virtù circonde
la tua misura, non all'apparenza
delle sustanze che t'appaion tonde,

tu vederai mirabil consequenza
di maggio a più e di minore a meno
in ciascun cielo, a sua intelligenza».



Lo schema dell'universo di Dante sviluppa la cosmologia aristotelica in forma moderna.