

**Projet n°5***Méthodes d'interpolation et d'intégration**Splines cubiques et interpolation de surfaces***Groupe n°1 - Équipe n°2**

Responsable : Marzin Julien

Secrétaire : Équipe

Codeurs : Arnault-Macabiau Jérémey,

Benkirane Mohamed, Douezan-Grard Guillaume

**Résumé :** Ce projet consiste à implémenter un modèle (basique) qui permet de représenter l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion. L'objectif principal est d'obtenir une carte de pression autour de l'aile de manière à connaître sa capacité à maintenir l'avion dans les airs. Pour obtenir ce résultat, deux étapes sont nécessaires : tout d'abord modéliser la courbe qui représente la surface portante de l'aile, puis calculer la carte de pression en utilisant des méthodes d'intégrations.

## 1 Obtention de la courbe représentant la surface portante

La surface portante de l'aile d'avion est représentée par une liste de points (définis par leur abscisse et leur ordonnée) qui peut être séparée en deux parties : l'*extrados* et l'*intrados* (respectivement la partie au-dessus et en-dessous de l'aile).

Pour représenter ces points avec une courbe suffisamment lisse, nous utilisons les *splines cubiques*. Cela consiste à joindre les points de la courbe par des polynômes de degré au plus égal à 3. Ces polynômes sont choisis tels que la courbe obtenue soit continue.

On considère les points d'interpolations  $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$ . On découpe l'intervalle  $[x_0, x_n]$  en  $n$  intervalles de la forme  $[x_{i-1}, x_i]$ . Pour chacun de ces intervalles, on définit un polynôme  $P_i$  tel que  $\deg(P_i) \leq 3$  avec :

$$\forall i \in [0, n-1], P_i = Ay_i + By_{i+1} + Cy_i^{(2)} + Dy_{i+1}^{(2)} \quad (1)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des polynômes définis par :

$$A(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad B(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$C(x) = \frac{1}{6}(A(x)^3 - A(x))(x_{i+1} - x_i)^2 \quad \text{et} \quad D(x) = \frac{1}{6}(B(x)^3 - B(x))(x_{i+1} - x_i)^2$$

Il reste à calculer tous les  $y_i^{(2)}$  qui vont permettre d'obtenir une courbe continue. Pour ce faire, il faut résoudre les équations suivantes :

$$\forall i \in [1, n-1], \underbrace{\frac{x_i - x_{i-1}}{6} y_{i-1}^{(2)}}_{a_{i,0}} + \underbrace{\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{3} y_i^{(2)}}_{a_{i,1}} + \underbrace{\frac{x_{i+1} - x_i}{6} y_{i+1}^{(2)}}_{a_{i,2}} = \underbrace{\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}_{p_i}$$

avec  $y_0^{(2)} = y_n^{(2)} = 0$ .

Cela revient à résoudre l'équation matricielle suivante :  $AX = B$  d'inconnue  $X$  avec :

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & & & \\ 0 & a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-2,0} & a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

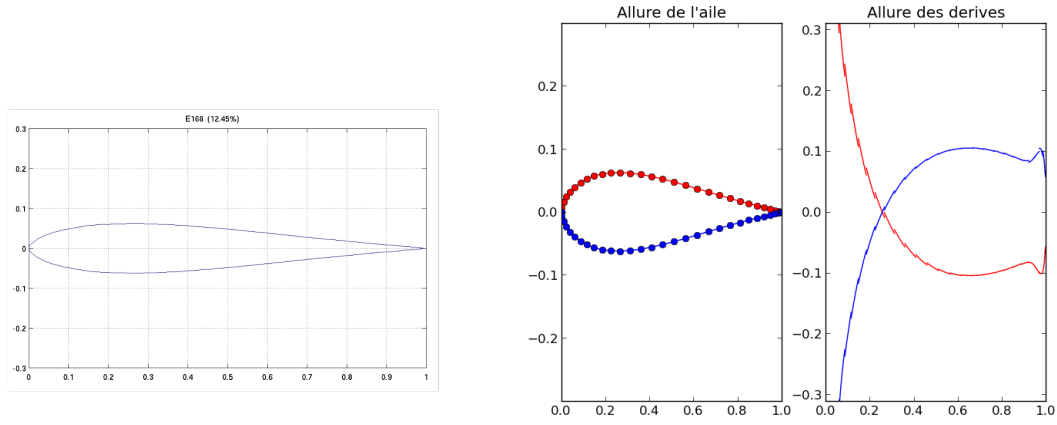


FIGURE 1 – Allures de l’aile et des dérivées

Le vecteur résultat  $X$  de cette équation est de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} y_0^{(2)} \\ y_1^{(2)} \\ \vdots \\ y_{n-1}^{(2)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Après la résolution du système, tous les éléments permettant de calculer les polynômes  $P_i$  sont disponibles. Il ne reste qu’à utiliser l’équation 1 page précédente sur chaque intervalle.

**Complexité** En considérant que l’aile est représentée par une liste de  $n + 1$  points, il faut calculer les polynômes sur  $n$  subdivisions. Avant de pouvoir calculer les polynômes, il faut résoudre un système linéaire de  $n + 1$  équation à  $n + 1$  inconnues. Cette résolution a une complexité en  $\theta(n^3)$ . Il reste à calculer les polynômes sur chaque intervalle. Le calcul d’un polynôme se fait en un nombre constant d’opérations. On a donc une complexité de  $n\theta(1) = \theta(n)$  pour le calcul des polynômes sur les  $n$  subdivisions.

La complexité totale du calcul des splines est donc celle de la résolution du système plus celle du calcul des polynômes sur chaque subdivision *i.e.*  $\theta(n^3) + \theta(n) = \theta(n^3)$ .

Voici le résultat que nous obtenons avec l’aile de référence *e168* disponible dans la base de données de **UIUC Applied Aerodynamics Group**.

## 2 Méthodes d’intégration et intégrales curvilignes

Dans cette partie, nous chercherons à développer un module permettant d’appliquer des méthodes d’intégrations différentes, en attachant un soin particulier à le rendre modulaire pour éviter toute duplication de code. Ce module sera alors mis en action sur le calcul de longueur de courbes via les intégrales curvilignes, et pourra être utilisé par la suite pour déterminer la longueur de splines d’interpolation (qui ne sont que des simples polynômes).

### 2.1 Des méthodes d’intégration

Les méthodes d’intégration considérées sont celles des rectangles gauche/droite, des trapèzes et de Simpson. Ces méthodes permettent de trouver par un raisonnement quasi-identique une valeur approchée de l’intégrale d’une fonction, en considérant une subdivision continue (et uniforme ici,

mais ceci par modularité du code peut éventuellement être modifié pour d'autres distributions) de l'intervalle d'étude  $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ . Sur chaque segment élémentaire  $[x_i, x_{i+1}]_{i \in [0, n]}$ , chaque méthode nous donne une formule pour déterminer la valeur retenue (et approchée) de l'intégrale de la fonction  $f$  considérée sur ce segment.

Pour la méthode des rectangles (pour une subdivision uniforme) :

$$I_{[x_i, x_{i+1}]} = \frac{b-a}{n} f(x_i) \text{ à gauche et } I_{[x_i, x_{i+1}]} = \frac{b-a}{n} f(x_i) \text{ à droite.}$$

Pour la méthode des trapèzes, on considèrera :

$$I_{[x_i, x_{i+1}]} = \frac{b-a}{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

Et pour la méthode de Simpson :

$$I_{[x_i, x_{i+1}]} = \frac{b-a}{6n} (f(x_i) + 4f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1}))$$

Il nous reste à sommer ces valeurs élémentaires de la même façon pour toutes les méthodes (en faisant attention à ne pas décaler la somme), et on obtient ainsi une valeur approchée de  $I_{[a,b]}$ .

Nous avons prêté attention dans notre implémentation à rendre modulaire la méthode d'intégration (nous passons en argument une fonction qui calcule la valeur approchée sur un segment élémentaire de la subdivision), la fonction à intégrer et la subdivision (nous n'avons implémenté qu'une subdivision uniforme).

## 2.2 Précision du calcul

Il est possible de donner un terme de précision désirée lors du calcul, qui s'exprime comme suit :  $\varepsilon \in \mathbb{R} : I_n - I < \varepsilon$ . Cependant avec l'implémentation ci-dessus, il est inefficace de renvoyer le résultat correspondant à cette précision puisque nous recalculons tous les termes à chaque fois en augmentant la subdivision. Mais si l'on double à chaque fois le nombre de subdivisions, nous pouvons nous restreindre à n'effectuer qu'une évaluation supplémentaire de  $f$  dans chaque segment élémentaire. Ceci est évident dans le cas de la méthode des rectangles, mais plus difficile à implémenter pour la méthode de Simpson.

Pour les rectangles par exemple :

$$I_{2n} = \frac{1}{2} I_n + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{h}{2} + kh)$$

Nous avons implémenté ces algorithmes.

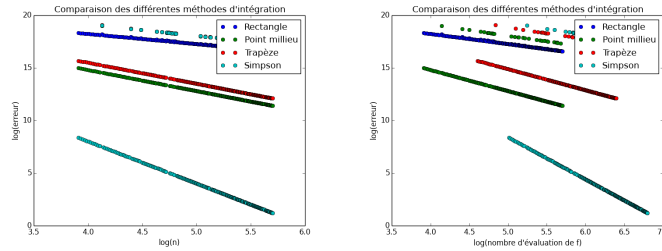
## 2.3 Intégrale curviligne et longueur de courbe

Pour obtenir la longueur d'une fonction dérivable sur un intervalle  $[t_0, T]$ , nous devons calculer l'intégrale  $L_{[t_0, T]} = \int_{t_0}^T \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

## 2.4 Comparaison des différentes méthodes

Nous pouvons comparer les méthodes d'intégration entre-elles sur un unique graphe, qui représente (en échelle logarithmique) l'erreur sur la valeur de l'intégrale en fonction du nombre de subdivisions effectuées. On peut ainsi classer les méthodes d'intégration en fonction de leur convergence vers la solution, la méthode Simpson étant la plus efficace de celles testées (voir Figure ?? page ??).

On peut également comparer le nombre d'évaluations de  $f$  effectuées par rapport à l'erreur obtenue. Même si la méthode Simpson dans sa version classique fait appel 3 fois à  $f$  par segment de la subdivision, le gain sur l'erreur final est suffisamment important pour qu'elle reste la plus efficace (voir Figure ?? page ??)



(a) En fonction du nombre de subdivision  
(b) En fonction du nombre d'appel à  $f$

FIGURE 2 – Comparaison des méthodes d'intégration

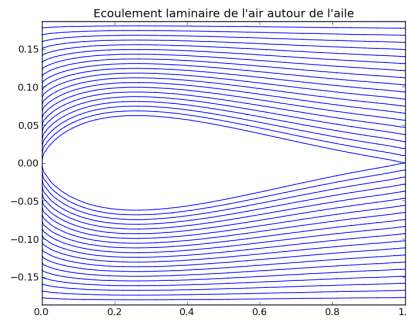


FIGURE 3 – Écoulement laminaire de l'air autour de l'aile

### 3 Modélisation de la circulation de l'air

Cette partie consiste en la mise en pratique des 2 parties précédentes. En effet, après avoir modélisé l'extrados et l'intrados de l'aile à l'aide de polynômes de degré 3, le but va être de déterminer l'écoulement laminaire de l'air autour de l'aile et ainsi pouvoir modéliser la pression qu'exerce ce flux. Cela pourra être déterminé à l'aide des différentes méthodes d'intégration vues à la partie précédente.

L'écoulement laminaire autour de l'air est déterminé grâce à la formule suivante :

$$y = f_{\lambda}(x) = (1 - \lambda)f(x) + 3\lambda h_{\max}, \lambda \in [0, 1]$$

Notons que  $f$  est la fonction définie par morceaux (par des polynômes de degré 3) représentant l'extrados, respectivement l'intrados, de l'aile.  $h_{\max}$  est la valeur maximale suivant l'axe des ordonnées que prend la courbe des extrados. Dans notre cas,  $h_{\max}$ . Avec la formule précédente, on s'intéresse à l'écoulement de l'air jusqu'à l'altitude  $3h_{\max}$ . En effet, il est facilement démontrable que :

$$y = f_{\lambda}(x) \leq 3h_{\max}, \lambda \in [0, 1] \text{ car } f(x) \leq h_{\max}$$

Cette famille de fonctions sera donc un ensemble de fonctions définies par morceaux (décomposées suivant des polynômes de degré 3, tout comme l'a été  $f(x)$ ).

Toutes les fonctions de cet ensemble sont continues et leurs dérivées également sont continues de par la construction de  $f$ . En effet,  $f_{\lambda_i}(x) = (1 - \lambda_i)f(x) + \lambda_i \times 3h_{\max} \mid \lambda_i \in [0, 1]$  fixé, est continue car  $f$  est continue.

De même :  $f'_{\lambda_i}(x) = (1 - \lambda_i)f'(x) \mid \lambda_i \in [0, 1]$  fixé, est continu car  $f'$  est continue.

De ce fait, nous pouvons obtenir un ensemble de fonctions continues en fonction de  $\lambda$  permettant de modéliser l'écoulement laminaire de l'air autour de l'aile (Figure ??).

**Complexité** Notons  $n_{\lambda}$  le nombre de fonctions  $\lambda$  et  $n$  le nombre de subdivision de l'aile en entrée. Ainsi la complexité totale pour l'obtention de ce graphique est égale au nombre de fois où l'on calcule

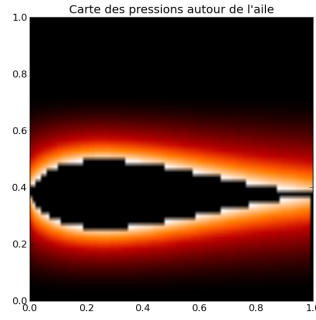


FIGURE 4 – Carte des pressions autour de l'aile

le polynôme de degré 3 caractérisant une subdivision. Nous avons donc une complexité en  $\theta(n_\lambda n^3)$ . En effet, après avoir calculé toutes les dérivées secondes, l'obtention du polynôme de degré 3 approché est réalisé par un calcul en temps constant, d'où une complexité en  $\theta(n^3)$  pour déterminer chaque fonction  $\lambda$  définie par morceaux.

Nous avons maintenant envie de connaître la variation de pression autour de l'aile. Cette variation est la conséquence de l'action de l'aile sur l'air aux alentours (comme le montre le graphique précédent). Pour cela, nous utilisons la loi de Bernoulli :

$$P = P_S + P_D$$

où  $P_S$  est la pression statique (donc constante ici par définition) et  $P_D = \frac{1}{2}\rho V^2$  avec  $\rho$  la densité de l'air et  $V$  la vitesse de l'air.

Dans cette équation, seule  $V$  la vitesse de l'air varie selon la distance par rapport l'aile (selon  $\lambda$ ). Ainsi, nous avons  $P = f(V)$  où  $P$  est proportionnel est la vitesse au carré.

La vitesse peut s'exprimer telle que  $V = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$ . Nous considérons ici que quelque soit le chemin suivi, le temps que met l'air à "traverser" l'aile est constant. Ainsi, nous avons directement  $P = f(\text{distance})$  où  $P$  est donc proportionnel à la distance au carré.

Grâce aux méthodes d'intégration vues à la partie précédente, nous pouvons alors calculer directement la "longueur" de chaque fonction  $\lambda$ , c'est à dire l'intégrale curviligne entre 0 et 1. Expérimentalement, nous avons résolu ce problème en additionnant l'ensemble des intégrales curvilignes des fonctions  $\lambda$  car celles-ci sont définies par morceaux. Au delà de  $3h_{\max}$ , on considère que l'air n'est pas impacté par l'air et que la pression ne subit donc aucune modification.

Nous obtenons alors la carte des pressions Figure ??.

$$P = P_S + K \times \text{distance}^2 \text{ où } P_S \text{ et } K \text{ sont des constantes } (K = \frac{\rho}{2 \cdot \text{temps}^2})$$

**Complexité** Notons  $n_\lambda$  le nombre de fonctions  $\lambda$ ,  $n$  le nombre de subdivision de l'aile en entrée et  $CI$  la complexité de l'intégration d'une de ces subdivisions sur son intervalle. Ainsi la complexité totale pour l'obtention de cette carte des pressions est égale au nombre de fois où l'intégration est effectuée. Nous avons donc une complexité en  $\theta(n_\lambda n^3 \times CI)$ .