分形与随机系统（Final Exercise）

2015301020099　　高多奇

摘要：本文主要介绍运用 python 对分形图案的绘制，主要包括利用数学函数的迭代产生和利用符号的递归迭代产生，并且对分形的应用做简要介绍，再对随机系统中的随机行走做简要分析。

关键词：分形，迭代次数，迭代，随机行走

引言：分形理论(Fractal Theory)是当今十分风靡和活跃的新理论、新学科。分形的概念是美籍数学家本华·曼德博首先提出的。一个数学意义上分形的生成是基于一个不断迭代的方程式，即一种基于递归的反馈系统[1]。分形有几种类型，可以分别依据表现出的精确自相似性、半自相似性和统计自相似性来定义。虽然分形是一个数学构造，它们同样可以在自然界中被找到，这使得它们被划入艺术作品的范畴。分形在医学、土力学、地震学和技术分析中都有应用。

一、绘制分形图案

1. Mandelbrot 集合

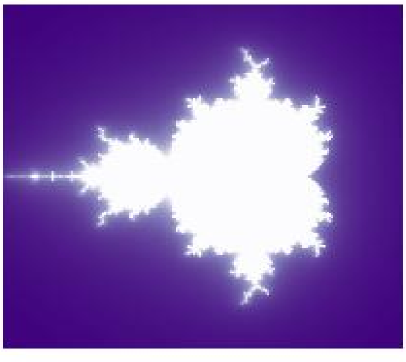
Mandelbrot 集合是在复平面上组成分形的点的集合。曼德布洛特集合可以用复二次多项式:

$$fc(z) = z^2 + c$$

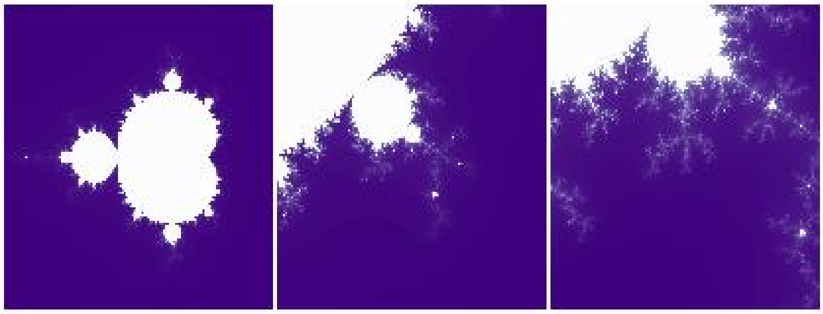
来定义,c 是一个复参数。对每一个 c，从 $fc(z)$开始对进行迭代。序列的值或者延伸到无限大，或者只停留在有限半径的圆盘内。曼德布洛特集合就是使以上序列不延伸至无限大的所有 c 点的集合。

所以，用程序绘制 Mandelbrot 集合时不能进行无限次迭代，必须先计算出它的迭代次数再来进行迭代，不妨设置一个迭代的最大半径 R，当计算结果的模大于 R 时，迭代停止。

做出图像如下



对其中一个局部进行放大，会得到如图



这说明分支具有和整体一样的图形，这说明了分形的一个重要特征自相似性，这在很多方面都可得到运用。

2. 用线性函数组迭代得到分形图形

A.

x(n+1) = 0

y(n+1) = 0.16 * y(n)

B.

x(n+1) = 0.2 * x(n) - 0.26 * y(n)

y(n+1) = 0.23 * x(n) + 0.22 * y(n) + 1.6

C.

x(n+1) = -0.15 * x(n) + 0.28 * y(n)

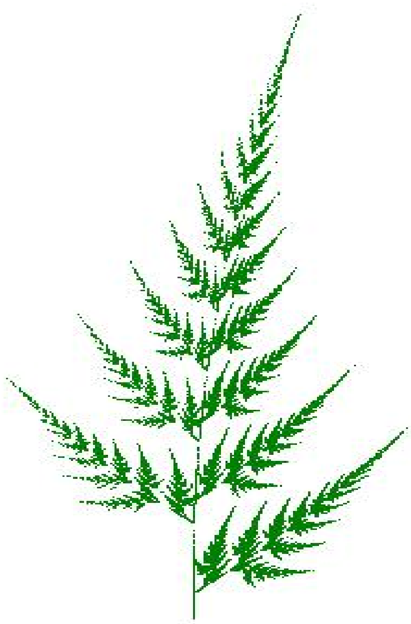
y(n+1) = 0.26 * x(n) + 0.24 * y(n) + 0.44

D.

x(n+1) = 0.7 * x(n) + 0.04 * y(n)

y(n+1) = -0.04 * x(n) + 0.85 * y(n) + 1.6 [2]

用上面四个函数迭代，分别取 P(A)=0.01,P(B)=0.07,P(C)=0.37,P(D)=0.55，最后从坐标原点(0,0)开始迭代，将每次迭代所得到的坐标绘制成图可得

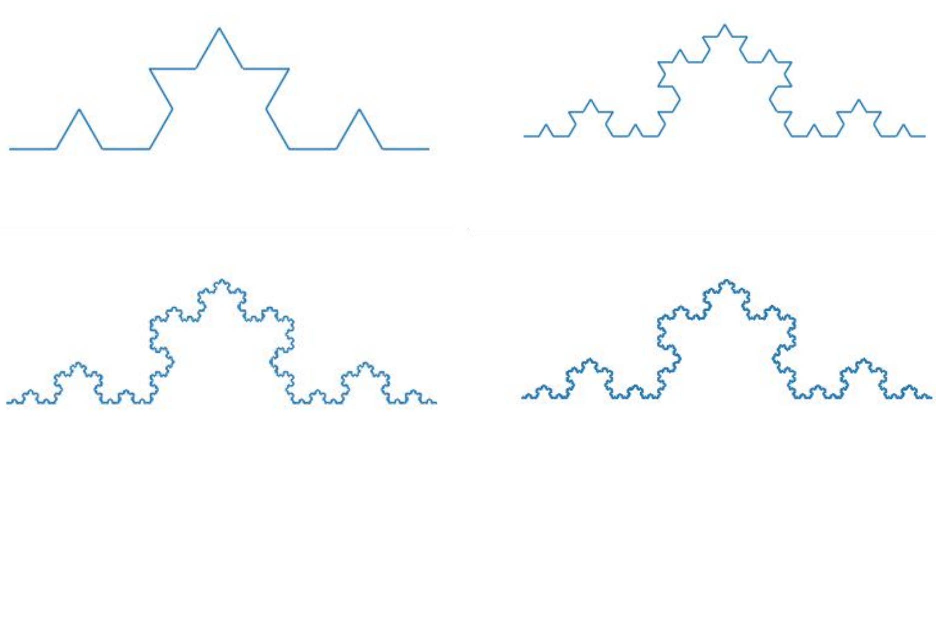


可以看出整个图案呈现出完美的自相似特性，任意取其中的一个枝干，将其旋转放大之后都和整体相同。

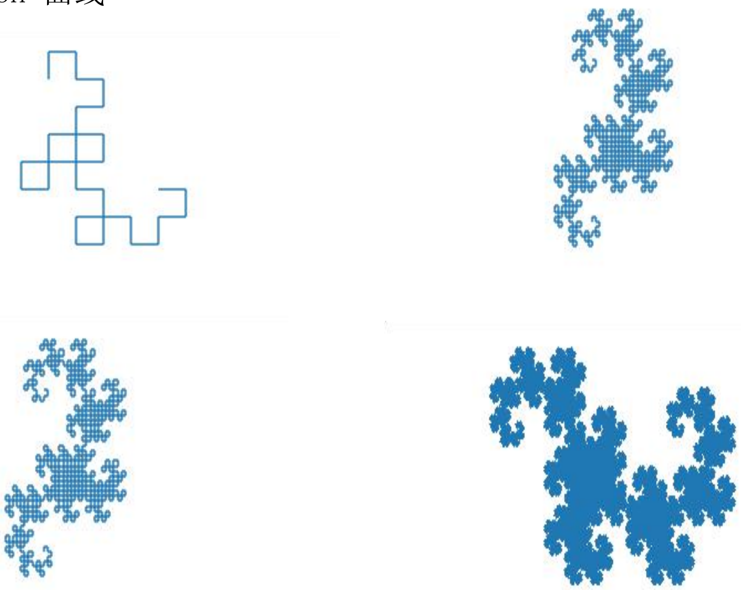
3.符号的递归迭代

1 和 2 都是运用的数学函数进行递归迭代，python 还可以通过符号的递归迭代来进行绘制分形图案。只需在绘制程序时定义：向前走，正方向旋转，负方向旋转三个符号就可以得到某些经典的分形图案

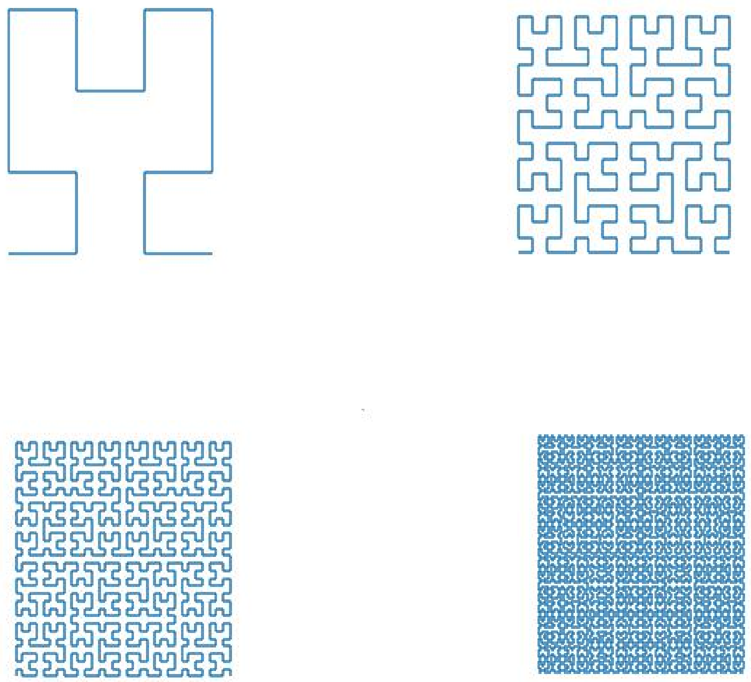
（1）Koch 曲线



（2）Dragon 曲线



（3）Hilbert 曲线



二、分形的实际应用

1. 分形与物理

分形理论被推广应用到若干远离平衡态的不可逆生长过程中,这些过程也显示出自相似的扩展对称性。对具有分形行为生长模型的研究工作是通过计算机模拟来实现的。

例如受限扩散凝聚模型[3]，它于 1981 年由 Witten 和 Sander 建立，该模型的基本思想是将扩散方程与随机行走过程结合分析，后面我会对随机行走过程做简要分析，他们的模拟实验是：

考虑一个正方格子网络,开始在网络中央放置一粒固定的种子粒子，然后,第二个粒子从足

够远的地方被引进该系统进行随机行走。如果它走到种子粒子的最邻近格点位置,它就被固定不动并与第一个种子粒子粘连在一起形成二粒子集团。类似地,从 足够远的地方引进的第

兰个作随机行走的粒子只要走到上述二粒子的任一最近邻格点,它也被固定不动并与这两个粒子粘连在一起形成三粒子集团。最后形成的二维树枝状受限扩散凝聚集团和分形图案惊人的相似,所以运用分形来分析这个模型是具有很深刻的实际意义的。

2. 分形与计算机

分形在计算机图形学中的应用广泛。如迭代函数系统产生无穷多的分形图可以用于图案设计[4]、创意制作、计算机动画、实物模拟仿真、装饰工程[5]等具有广泛的应用价值,分形用于压缩图像信息时图像信息的提取和识别[6]、纹理图像分割,分形图像编码[7]等方面,都取得了很好的效果。

3. 分形与材料

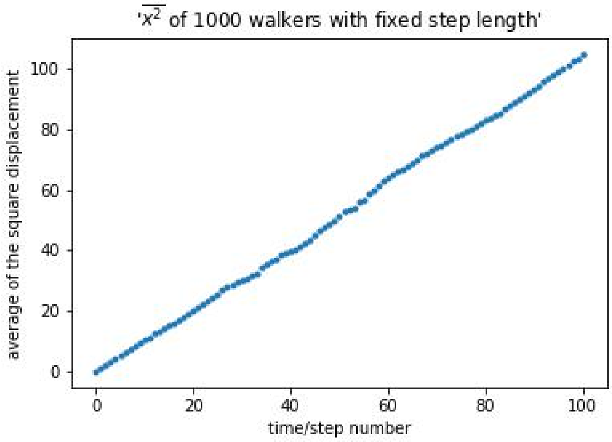
分形可以用于材料制备和材料断裂行为等研究[8,9]。用于材料磨损表面、材料断裂表面 、材料烧结与氧化过程、薄膜材料等方面的分析研究。分形学用于描述断口的特征,研究表明断口的分形维数是与宏观力学的某些参量密切相关,材料微观结构的分形维数与其超导电性密切相关。可以用分形维数的大小来区分材料的加热程度, 晶体和非晶体的表面都可以用分形表面来描述。

三、随机行走

1、一维的随机行走

一维的随机行走是其中最简单的模型。在一维模型中，一个质点在一维轴上运动，其方向是不确定的。现在而且向左边和向右边行走的概率是相等的。

每次运行得到的曲线都不一致，这反映了随机行走的随机性。体现了实验现象，但根据统计理论，步数平方的均值大致是与时间成正比的，下面我们通过编程来验证



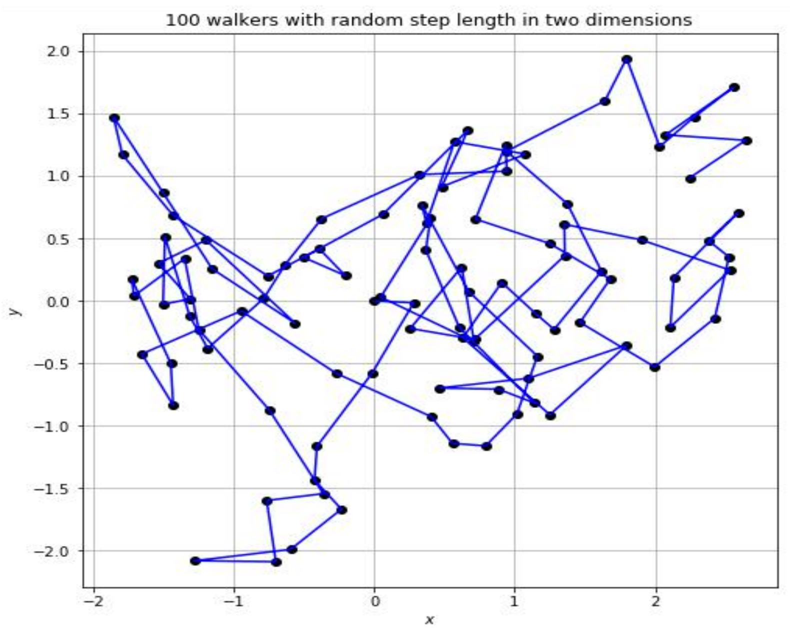
由图可知，该结论成立。

2. 二维随机行走

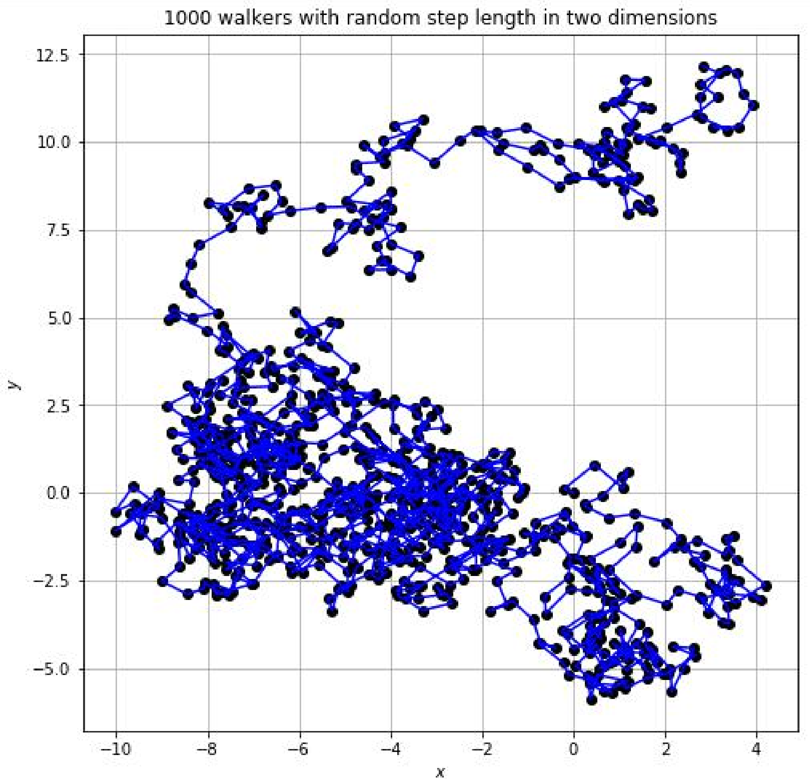
与一维的情况相似，考虑每次跳跃的距离是一样的，方向先固定，只在 x,y 方向进行跳跃。

如图

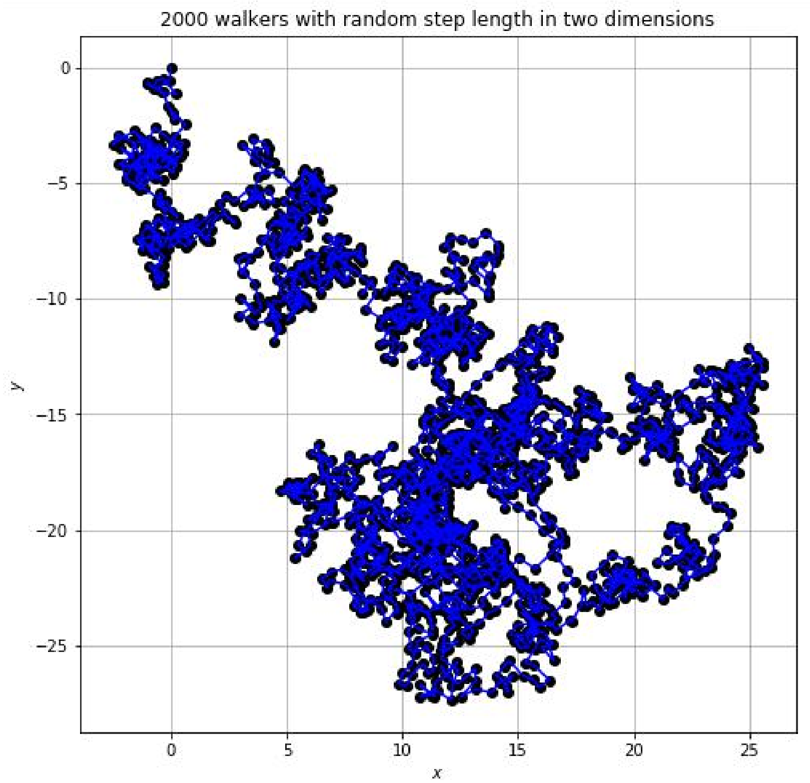
100 次的随机跳跃



1000次的随机跳跃



2000次的随机跳跃



对比分形中的Dragon 曲线发现它们之间惊人的相似，将分形理论用来分析这种无规律的随机行走，是十分恰当的。

四、结语

分形图案的得到并不复杂，但是它在实际应用中随处可见，在当今这个时代，解决非线性问题仍然十分困难，物理和数学都在这里碰壁，而分形则给出一种比较好的形式来解决这些问题。由于它的自相似性，将某些复杂问题通过分形模拟出来，从而得到这些问题的近似解。作为学物理的学生，我相信随机系统所呈现的并不是毫无规律可言，而是存在其必然性的。

四、参考文献

[1]Briggs, John. Fractals:The Patterns of Chaos. London : Thames and Hudson, 1992. 1992: 148. ISBN 0500276935, 0500276935

[2]《Python 科学计算》19.2-------张若愚

[3]Witten T.A.,Sander L.M.,*Phys. Rev. Lett.*,47(1981) 1400

[4]王小铭.计算机辅助分形艺术图案设计的算法造型技术[J] .华南师范大学报(自然科学版),2003,(1):46-50

[5]陈萧枫, 蔡秀云.分形图在装饰工程中的应用[J].工程图学学报, 2001,(3):114 -119

[6]李望超.分形图像压缩的研究进展[J].河北科技大学学报, 2001, 22(4):1 -3, 16.

[7]赵耀,王红星,袁保宗。分形图像编码研究的进展[J].电子学报,2000, 28(4):95 -101, 106

[8]王慧,曾令可.分形理论及其在材料科学中的应用[J].材料开发与应用,2000, 15(5):39 -43.

[9]文洪杰,彭达岩,王资江,等.分形理论在材料研究中的应用和发展[J].钢铁研究学报,2000,12(5):70 -73.