

Lista 1 - Análisis Numérico II

Ciencias Básicas - Universidad del Atlántico

Sistemas de numeración

1. Escriba el número decimal correspondiente a los siguientes números:

- a) $(1101110)_2$
b) $(100111.101)_2$

2. Escriba en base 2 los siguientes números dados en base 10:

- a) 2324.6
b) 3475.52

3. El sistema de numeración octal es el sistema en base 8 que usa el conjunto de dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Cualquier número entero m puede ser escrito en la forma

$$m = \pm(b_r \cdot 8^r + b_{r-1} \cdot 8^{r-1} + \cdots + b_1 \cdot 8^1 + b_0 \cdot 8^0),$$

donde $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ para todo $i = 0, 1, \dots, r$. Deduzca un algoritmo para obtener la representación octal de un número en base 10.

4. Deduzca un algoritmo para obtener la representación octal de un número real $x \in (0, 1)$.
5. Usando los algoritmos deducidos en los ejercicios 3 y 4, escriba en base 8 los siguientes números:

- a) 12345
b) 3050.8

6. Obtenga la representación decimal de los siguientes números:

- a) $(0.4631\overline{4631} \dots)_8$
b) $(0.1100\overline{1100} \dots)_2$

Factorización LU y Cholesky

1. Al aplicarse el método de la descomposición LU a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 3 & \cdots \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \cdots & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

se obtienen las matrices

$$L = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cdots & -1 & \cdots & 5 \\ \cdots & 1 & \cdots & -2 \\ \cdots & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \cdots & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Complete los espacios con los tres puntos con valores adecuados.

2. Considere el sistema lineal

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

- a) Resuélvalo usando la descomposición LU .
b) Calcule el determinante de A usando la descomposición.

3. Demuestre que si A satisface las hipótesis de la descomposición LU , entonces A se descompone de manera única como el producto LDU , donde L y U son matrices triangulares inferior y superior, respectivamente, ambas con 1 en la diagonal, y D es una matriz diagonal. Además, $\det(A) = d_{11}d_{22} \cdots d_{nn}$.

- Demuestre que si A es una matriz simétrica y satisface las hipótesis de la descomposición LU , entonces $A = LDU$ implica $U = L^T$.
- Demuestre que si A es una matriz definida positiva y satisface las hipótesis de la descomposición LU , entonces $A = LDL^T$, donde los elementos diagonales de D son todos positivos.

Sistemas de ecuaciones no lineales

- Mediante el método de Newton con $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, calcule $x^{(2)}$ para el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2 - 37 &= 0, \\x_1 - x_2^2 - 5 &= 0, \\x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0.\end{aligned}$$

- El método de Newton puede ser aplicado para la solución de un sistema lineal $Ax = b$. En este caso, ¿cuántas iteraciones serán realizadas? ¿por qué?

Sensibilidad de sistemas lineales

- Pruebe que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ y $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ son normas vectoriales.
- Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, definimos la A -norma sobre \mathbb{R}^n como

$$\|x\|_A = (x^T A x)^{1/2}.$$

- Pruebe que la A -norma es de hecho una norma en \mathbb{R}^n .
 - Muestre que si $A = I$, entonces la A -norma es la norma euclidiana.
- Pruebe que la norma matricial inducida satisface

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

- Calcule $\|I\|_F$ y $\|I\|_2$, donde I es la matriz identidad de orden n , y note que son diferentes.
- Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para mostrar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.
- Demuestre que $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
- Muestre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty.$$

- Usando el ejercicio 7, demuestre que para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \leq n \|A\|_1$
- $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \leq n \|A\|_\infty$

- Demuestre que $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$ y que para todo escalar no nulo c , $\kappa(cA) = \kappa(A)$.
- Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{pmatrix}.$$

- Calcule A^{-1} y $\kappa_\infty(A)$.
 - Encuentre $b, \delta b, x$ y δx tales que $Ax = b$, $A(x + \delta x) = b + \delta b$, $\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$ sea pequeño, y $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ sea grande.
 - Encuentre $b, \delta b, x$ y δx tales que $Ax = b$, $A(x + \delta x) = b + \delta b$, $\|\delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ sea pequeño, y $\|\delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$ sea grande.
- Sea A una matriz no singular, y sean a_1, a_2, \dots, a_n denotando sus columnas. Entonces, para cualquier i y j , y cualquier norma matricial inducida,

$$\kappa(A) \geq \frac{\|a_i\|}{\|a_j\|}.$$

12. Sean A una matriz no singular, $\|\delta A\|/\|A\| < \kappa(A)^{-1}$, $b \neq 0$, $Ax = b$ y $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$. Demuestre que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

13. Sea A una matriz no singular, y suponga que x y \hat{x} satisfacen $Ax = b$ y $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$, respectivamente, donde $\hat{A} = A + \delta A$, $\hat{x} = x + \delta x \neq 0$, y $\hat{b} = b + \delta b \neq 0$.

a) Muestre que

$$\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A\hat{x}),$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|(\|\delta b\| + \|\delta A\| \|\hat{x}\|),$$

y

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|A\| \|\hat{x}\|} \right).$$

b) Muestre que

$$\|\hat{b}\| \leq (\|A\| + \|\delta A\|)\|\hat{x}\|,$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\|\hat{x}\|} \leq \frac{\|A\| + \|\delta A\|}{\|\hat{b}\|}.$$

c) Combine los resultados de (a) y (b) para mostrar que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|\hat{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \frac{\|\delta b\|}{\|\hat{b}\|} \right).$$