Lista 1 - Análisis Numérico II

Ciencias Básicas - Universidad del Atlántico

Sistemas de numeración

1. Escriba el número decimal correspondiente a los siguientes números:

   a) $(1101110)_2$

   b) $(100111.101)_2$

2. Escriba en base 2 los siguientes números dados en base 10:

   a) 2324.6

   b) 3475.52

3. El sistema de numeración octal es el sistema en base 8 que usa el conjunto de dígitos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Cualquier número entero m puede ser escrito en la forma

$$m = \pm(b_r \cdot 8^r + b_{r-1} \cdot 8^{r-1} + \cdots + b_1 \cdot 8^1 + b_0 \cdot 2^0),$$

   donde $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, r$. Deduzca un algoritmo para obtener la representación octal de un número en base 10.

4. Deduzca un algoritmo para obtener la representación octal de un numero real $x \in (0, 1)$.

5. Usando los algoritmos deducidos en los ejercicios 3 y 4, escriba en base 8 los siguientes números:

   a) 12345

   b) 3050.8

6. Obtenga la representación decimal de los siguientes números:

   a) $(0.4631\overline{4631}\ldots)_8$

   b) $(0.1100\overline{1100}\ldots)_2$

Factorización LU y Cholesky

1. Al aplicarse el método de la descomposición LU a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 3 & \cdots \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \cdots & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

   se obtienen las matrices

$$L = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cdots & -1 & \cdots & 5 \\ \cdots & 1 & \cdots & -2 \\ \cdots & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \cdots & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

   Complete los espacios con los tres puntos con valores adecuados.

2. Considere el sistema lineal

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

   a) Resuélvalo usando la descomposición LU.

   b) Calcule el determinante de A usando la descomposición.

3. Demuestre que si A satisface las hipótesis de la descomposición LU, entonces A se descompone de manera única como el producto LDU, donde L y U son matrices triangulares inferior y superior, respectivamente, ambas con 1 en la diagonal, y D es una matriz diagonal. Además, $det(A) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}$.

4. Demuestre que si A es una matriz simétrica y satisface las hipótesis de la descomposición LU, entonces $A = LDU$ implica $U = L^T$.
5. Demuestre que si A es una matriz definida positiva y satisface las hipótesis de la descomposición LU, entonces $A = LDL^T$, donde los elementos diagonales de D son todos positivos.

Sistemas de ecuaciones no lineales

1. Mediante el método de Newton con $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, calcule $x^{(2)}$ para el sistema no lineal:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 - 37 &= 0, \\ x_1 - x_2^2 - 5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

2. El método de Newton puede ser aplicado para la solución de un sistema lineal $Ax = b$. En este caso, ¿cuántas iteraciones serán realizadas? ¿por qué?

Sensibilidad de sistemas lineales

1. Pruebe que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ y $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ son normas vectoriales.
2. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva, definimos la A-norma sobre $\mathbb{R}^n$ como

$$\|x\|_A = (x^T Ax)^{1/2}.$$

   a) Pruebe que la A-norma es de hecho una norma en $\mathbb{R}^n$.
   b) Muestre que si $A = I$, entonces la A-norma es la norma euclidiana.
3. Pruebe que la norma matricial inducida satisface

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

4. Calcule $\|I\|_F$ y $\|I\|_2$, donde I es la matriz identidad de orden n, y note que son diferentes.
5. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para mostrar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|A\|_2 \le \|A\|_F$.
6. Demuestre que $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
7. Muestre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\| \le n\|x\|_\infty.$$

8. Usando el ejercicio 7, demuestre que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
   a) $\|A\|_1 \le \sqrt{n}\|A\|_2 \le n\|A\|_1$
   b) $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_2 \le n\|A\|_\infty$
9. Demuestre que $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$ y que para todo escalar no nulo c, $\kappa(cA) = \kappa(A)$.
10. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 375 & 374 \\ 752 & 750 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcule A^{-1} y $\kappa_\infty(A)$.
   b) Encuentre $b, \delta b, x$ y δx tales que