MAP-3121 - Roteiro - Cálculo de raizes de equações

Este texto é um primeiro roteiro introdutório ao cálculo numérico de raízes de equações reais. O que espero de vocês é uma gradual percepção dos problemas e a obtenção de maneiras de solução dos mesmos, sem buscar respostas em livros ou outras fontes. A troca de ideias entre vocês é perfeitamente válida. No processo estou supondo que vocês tenham acesso a algum meio para realizar as 4 operações básicas com a precisão numérica que for necessária (ou em alguns casos, com a limitação inerente ao uso de uma calculadora, ou programa computacional). Mais recursos disponíveis nestes meios não farão parte da regra do jogo neste instante. Bem, vamos lá ...

- Calcule a solução da equação $3x - 7 = 0$.
- Calcule as soluções da equação $x^2 - 6x + 7 = 0$.
- Expresse as soluções do item anterior em sua expansão decimal, com erro inferior a 10^{-10}.
- Você respeitou as regras do jogo no item anterior? Se sim, então percebeu que mesmo a solução de uma simples equação do segundo grau requer um procedimento numérico para a obtenção da resposta, ou seja, devemos saber como extrair a raiz quadrada de um número real positivo (sim, há uma tecla na calculadora para tal ou uma função sqrt na sua linguagem de programação, mas como será que funcionam?).
- Ok, você sabe que $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2, mas isto ainda nos deixa longe de obter a solução com a precisão requerida. Procure desenvolver um método (um algoritmo) para realizar este cálculo.
- Após cada passo do seu método, o que ocorre com a estimativa de erro em relação à solução exata?
- Quantos passos de seu método você terá que executar até atingir a precisão requerida?
- Procure agora justificar porque o método funciona. Quais foram as condições essenciais para garantir o resultado?
- Seu esquema é aplicável para resolver a equação $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$?
- Quais são as condições necessárias para a aplicabilidade de seu método para resolver uma equação $f(x) = 0$, supondo que exista uma solução e que f possa ser avaliada computacionalmente em seu domínio. É possível delimitar a precisão do método?

Ok, neste ponto você deve ter chegado à conclusão que dispõe de um esquema razoavelmente geral para resolver equações. Escreva um algoritmo para resolver $f(x) = 0$ com precisão ϵ e enuncie as hipóteses para que ele funcione!

Vamos agora voltar ao cálculo de $\sqrt{2}$, ou de forma mais geral, ao cálculo da raiz quadrada de qualquer real positivo. Inicialmente responda à pergunta: quem é maior $\sqrt{ab}$ ou $(a + b)/2$, onde a e b são reais positivos. Demonstre este fato (é fácil ...). Ok, vamos agora chegar a um método interessante para o cálculo de $\sqrt{2}$.

- lembremos que a resposta está entre 1 e 2. Qual é a média geométrica entre esses dois números? Perfeito, mas saber calculá-la (de forma eficiente ..) é o objetivo aqui. A média aritmética dos dois números está aonde?

- Ok, seja então x esta média aritmética e considere x e $2/x$. O que você pode afirmar em relação à localização destes números? E das suas médias?

- A resposta à pergunta anterior deve te dar uma pista sobre como gerar uma sequência convergente para $\sqrt{2}$. Prove que a sequência converge e que o limite é o desejado. Calcule alguns passos da sequência. Que lhe parece a velocidade de convergência?

- Tente generalizar este método para o cálculo da raiz cúbica de um real positivo.

- O método é tão bom quanto o anterior?

Se você completou o roteiro até aqui, já deve ter aprendido várias coisas úteis. Alguns destes conceitos são comuns a muitos métodos para se resolver numericamente uma série de problemas. Dentre estes temos que os problemas em geral são resolvidos de forma aproximada (ou por não sabermos uma expressão analítica para a solução, ou pelo fato de trabalharmos com computadores - onde o conjunto dos números reais é representado por um subconjunto finito dos racionais, pense nisso!). Sempre que possível, é importante termos maneiras de delimitar o erro. Boa parte dos processos numéricos geram sequências que, esperamos, convergem para a solução do problema.

- Uma classe bastante geral de métodos para resolução de equações se utiliza de sequências do tipo $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ a partir de algum valor inicial x_0.

- Escreva seu último método para o cálculo de $\sqrt{2}$ nesta forma.

- Se uma sequência do tipo $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge, como podemos caracterizar o limite? Para que tipo de funções Φ?

- Tome $\Phi(x) = \cos(x)$, escolha o x_0 de sua preferência e calcule a sequência. O que ocorre? Troque o x_0 e repita o processo? O que mudou? Quem é o limite? 0.999...? Pense o que você fez de errado e repita o processo. Procure fazer um gráfico representando a sequência e o processo para calculá-la. (note que agora você precisa também usar a avaliação de funções do seu instrumento computacional ... Algum dia discutiremos como elas são avaliadas, mas por hora, use-as.)

- Faça o mesmo para $\Phi(x) = 2+e^{-x}$, $\Phi(x) = e^x - 2$, $\Phi(x) = \sqrt{x}$, $\Phi(x) = x^2$.
- As sequências convergem? Para onde ? Por que? Teste suas hipóteses ...

Mais no próximo capítulo ....