广东工业大学试卷参考答案及评分标准（ A ）

课程名称： 线性代数

考试时间：**年**月**日 （第**周 星期*）**

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．$\frac{1}{3}(A+2I)$；　2．0；　3．-16；　4．$x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$；　5．$-64$

二、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1．D；　2．C；　3．B；　4．A；　5．B

三、（共 12 分）

解：(1) 构造分块矩阵

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}0&1&-1&1&4\\2&1&0&-1&3\\1&-1&1&3&2\end{array}\right)\overset{r_{12}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&3&2\\2&1&0&-1&3\\0&1&-1&1&4\end{array}\right)$$

$$\overset{r_{12}(-2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&3&2\\0&3&-2&-7&-1\\0&1&-1&1&4\end{array}\right)\overset{r_{23}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&3&2\\0&1&-1&1&4\\0&3&-2&-7&-1\end{array}\right)$$

$$\overset{r_{23}(-3)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&3&2\\0&1&-1&1&4\\0&0&1&-10&-13\end{array}\right)\overset{r_{21}(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&4&6\\0&1&-1&1&4\\0&0&1&-10&-13\end{array}\right)$$

$$\overset{r_{32}(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&4&6\\0&1&0&-9&-9\\0&0&1&-10&-13\end{array}\right).$$

于是 $X=\begin{pmatrix}4&6\\-9&-9\\-10&-13\end{pmatrix}$ 即为所求.　　…………6 分

(2)

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c & d \\ a & 1+b & c & d \\ a & b & 1+c & d \\ a & b & c & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+b+c & b & c & d \\ 1+a+b+c & 1+b & c & d \\ 1+a+b+c & b & 1+c & d \\ 1+a+b+c & b & c & 1+d \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_{21}(-1)\\ r_{31}(-1)\\ r_{41}(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a+b+c.$$

…………6 分

四、（共 12 分）解法 1：对增广矩阵进行行初等变换

$$\left(A \,\vdots\, b\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 & 3 \\ 1 & \lambda & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-3) & (\lambda-3) \end{array}\right)$$ …………3 分

当 $\lambda \neq 3$ 且 $\lambda \neq -1$ 时，$r(A) = r\left(A \,\vdots\, b\right) = 3$，方程组有唯一解．…………5 分

当 $\lambda = -1$ 时，$r(A) < r\left(A \,\vdots\, b\right)$，方程组无解． …………7 分

当 $\lambda = 3$ 时，$r(A) = r\left(A \,\vdots\, b\right) < 3$，方程组有无穷多解． …………9 分

$$\left(A \,\vdots\, b\right) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组的通解为 $x = c\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数． …………12 分

解法 2：设线性方程组的系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 \\ 3 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-3)$.

…………3 分

当 $\lambda \neq 3$ 且 $\lambda \neq -1$ 时，$r(A) = r\left(A \,\vdots\, b\right) = 3$，方程组有唯一解．…………5 分

当$\lambda=-1$时，$\left(A \,\vdots\, b\right)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$，$r(A)<r\left(A \,\vdots\, b\right)$，方程组无解.

…………7 分

当$\lambda=3$时，$\left(A \,\vdots\, b\right)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&7&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=r\left(A \,\vdots\, b\right)<3$，

方程组有无穷多解. …………9 分

方程组的通解为$x=c\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$，其中$c$为任意常数. …………12 分

五、（12 分）解：(1) 构造矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}$，则$|A|=t-5$.

…………3 分

当$t=5$时，$|A|=0$，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关. …………6 分

(2) 当$t=5$时，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\underset{r_{31}(-1)}{\overset{r_{21}(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\overset{r_{23}(-2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_{12}(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=B.$$ …………3 分

因为A和B行等价，所以α_1,α_2构成一个最大线性无关组，$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

…………6 分

六、（共 12 分）

解：(1) 因为$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$，

所以特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

因为矩阵A具有 3 个不同的特征值，所以矩阵A可以对角化. …………4 分

(2) 当$\lambda=0$时，解方程组$(A-0\cdot I)x=0$，得$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. …………2 分

当$\lambda=1$时，解方程组$(A-1\cdot I)x=0$，得$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. …………4 分

当$\lambda=2$时，解方程组$(A-2\cdot I)x=0$，得$p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. …………6 分

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\Lambda$成立.

…………8 分

七、（共 12 分）

证明：(1)　设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一组两两正交的非零向量，所以

$$0=\langle 0,\alpha_1\rangle=\langle k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,\alpha_1\rangle=k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle+k_3\langle\alpha_3,\alpha_1\rangle$$
$$=k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle+0+0$$
$$=k_1\|\alpha_1\|^2,$$

且$\|\alpha_1\|^2>0$，于是$k_1=0$. 同理可得$k_2=k_3=0$.

综上所述，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关. …………6 分

(2) 解法 1：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$. 因为$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3$，所以

$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3)=0$，

即$(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+(k_1-2k_2)\alpha_3=0$. …………3 分

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$k_1+k_2=k_1-k_2=k_1-2k_2=0$. 解得$k_1=k_2=0$，从而$\beta_1$、$\beta_2$线性无关. …………6 分

解法 2：考虑齐次线性方程组 $Bx=0$．根据题意可得，

$\left(\beta_1,\beta_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}$，简记为 $B=AC$，所以 $Bx=ACx=0$，即 $y=Cx$ 是

$Ay=0$ 的解向量.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $Ay=0$ 只有零解，即 $y=Cx=0$．…………3 分

又因为 C 的两个列向量不成比例，$r(C)=2$，所以 $Cx=0$ 也只有零解，即 $x=0$.

于是 β_1、β_2 线性无关.

…………6 分