广东工业大学试卷参考答案及评分标准（ A ）

课程名称： 线性代数

考试时间：****年**月**日（第 ** 周 星期* ）

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. A 2. C 3. C 4. D 5.B

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. −16 2. $\dfrac{A+3E}{-5}$ 3. $\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix}$

4. 6 5. 6

三、(共 12 分)解：

(1)

$$[A\mid I]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&4&3&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&4&3&1&0&1\end{bmatrix}$$

…………(5 分)

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&-1&-3&-4&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&-3&1\\0&0&1&3&4&-1\end{bmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-3&1\\3&4&-1\end{bmatrix}$ ……………………………………………(1 分)

(2)原方程的解为 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-3&1\\3&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-4&4\\2&5&-5\end{bmatrix}$

…………………………………………………………………………(12 分)

四、(共 12 分)

解：对矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 作行初等变换变为行阶梯形，

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{bmatrix}1&2&-1&-1&2\\1&1&1&-2&4\\-2&4&-6&2&4\\7&3&6&-9&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1&-1&2\\0&-1&2&-1&2\\0&8&-8&0&8\\0&-11&13&-2&-5\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&-1&-1&2\\0&1&-1&0&1\\0&-1&2&-1&2\\0&-11&13&-2&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1&-1&2\\0&1&-1&0&1\\0&0&1&-1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&-3\\0&1&0&-1&4\\0&0&1&-1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

，因 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(A)=3,$

……...(5 分)

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量集的一个最大线性无关子集。 **……...(6 分)**

由于矩阵 V的列向量与其简化梯矩阵的列向量之间有相同的线性关系，

$\alpha_4=-\alpha_2-\alpha_3$， $\alpha_5=-3\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3$

…………...(12 分)

五、（12 分）

解： $|A|=\begin{vmatrix}-1&-4&1\\0&a&-3\\1&3&a+1\end{vmatrix}=-(a+3)(a-1)$ ………3 分

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\1&3&a+1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\0&-1&a+2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&-1&a+2&1\\0&0&(a+3)(a-1)&a+3\end{pmatrix}$$

……………5 分

当 $a=1$时，增广矩阵为

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\0&-1&a+2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-4&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}R(A)\neq R(B)，$$

方程组无解，………………………7 分

当$a=-3$时，增广矩阵为知

$$\overline{A}\to\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=R(\overline{A})=2<3$ ， 方程组有无穷多解，且解为

$$\xi=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$$，其中为任意常数……………10 分

当$a\neq1$且$a\neq-3$时，方程组有唯一解，唯一解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a+10}{1-a}\\x_2=\dfrac{-3}{1-a}\\x_1=\dfrac{-1}{1-a}\end{cases}$$ ……12 分

六、(共 12 分)

1,、证明，因为$\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{pmatrix}$**，**

因为$\begin{vmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{vmatrix}=22\neq0$,则矩阵$\begin{pmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{pmatrix}$可逆**，**

α_1，α_2，α_3线性无关，则秩$\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}=3$

因为矩阵$\begin{pmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{pmatrix}$可逆，则秩$\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=3$,

则$\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3$线性无关。

2、 $A^{-1}(AB)A=(BA)$,则矩阵AB与BA相似

七、(共 12 分)解：

矩阵A的特征多项式为$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -2\\ 2 & -\lambda & -2\\ 2 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -\lambda\\ 2 & -\lambda & -\lambda\\ 2 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 2 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(-\lambda)$.特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0.$

……………....(4 分)

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(A-\lambda E)=(A-E)=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

可解得对应的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$或者$q_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix},q_2=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_3=0$时，可解得对应的特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

……………....(4 分)

因为 A 可相似对角化的充要条件为有三个线性无关的特征向量，

$|p_1,p_2,p_3|\neq 0,$ 因而A有三个线性无关的特征向量，即 A 可以对角化。变换

矩阵$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1/2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.　　$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

……………....(4 分)