

5、设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 若向量组的秩为 r , 则下列说法正确的是_____

A、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r-1$ 个向量都线性无关。

B、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关。

C、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个向量都线性无关。

D、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中向量的个数 s 必大于 r 。

二、填空题（每小题 4 分，共计 20 分）

1、设 A 是 3 阶方阵且 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|(2A)^{-1} - 5A^*| =$ _____.

2、若 A 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2 + 3A + 5E = 0$, 则 $A^{-1} =$ _____

3、
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2008} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{1997} =$$
 _____.

4、设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $A_{i,j}$ 为相应元素的代数余子式, 则 $A_{11} + 3A_{12} + A_{13} + A_{14} =$ _____

5、若三阶矩阵 A 的特征值 $1, -1, 2$, 则 $|A^* - I| =$ _____

三、(12 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求:

(1)、矩阵 A 的逆矩阵; (6 分)

(2)、解矩阵方程 $AX = B$ 。(6 分)

四. (12 分)

给定向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组; (2) 将其余向量用所求的极大线性无关组线性表示。

五. (12 分) 当 a 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ ax_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) 有唯一解? (2) 无解? (3) 有无穷多解? 并在有解时求解; 无穷多解时要求用导出组基础解系表示通解。

六. (12 分)

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

$$\text{且 } \beta_1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2; \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3; \beta_3 = 4\alpha_3 - 5\alpha_1$$

证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

2. 若 A, B 均为 n 阶方阵, 且 A 可逆, 证明: BA 与 AB 相似.

七. (12 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 试判断它是否可对角化? 若可以, 写出可逆

阵 P 及相应的对角阵 Λ .