广东工业大学试卷参考答案及评分标准（A）

课程名称：线性代数

考试时间：****年**月**日　(第**周　星期*)

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}$；　　2. -12；　　3. $t=5$，$t\neq 5$；

4. $\lambda=-2$，$c=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$；　　5. $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$.

二、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1	2	3	4	5
C	A	C	A	D

三、（10 分）解法一：$\mathbf{A}_{31}+3\mathbf{A}_{32}-2\mathbf{A}_{33}+2\mathbf{A}_{34}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$

…………4 分

$$\overset{r_{13}}{=}(-1)\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 3 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}\overset{\substack{r_{12}(5)\\ r_{13}(-3)\\ r_{14}(-1)}}{=}-\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 16 & -7 & 6\\ 0 & -8 & 5 & -4\\ 0 & -8 & 5 & -5\end{vmatrix}\overset{r_{34}(-1)}{=}-\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 16 & -7 & 6\\ 0 & -8 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 16 & -7\\ 0 & -8 & 5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}16 & -7\\ -8 & 5\end{vmatrix}=80-56=24.$$

…………6 分

解法二：$A_{31}=16$，$A_{32}=8$，$A_{33}=-40$，$A_{34}=-48$，…………8 分

于是 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=24$. …………2 分

四、（10 分）解：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&-1&1&-1\\1&1&2&-1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_{12}(-1)\\r_{13}(-1)\\r_{14}(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-2&-1&-2\\0&0&0&-2\\0&-2&-1&0\end{pmatrix}\overset{r_{24}(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-2&-1&-2\\0&0&0&-2\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_{34}(1)\\r_2(-1)\\r_3(-1/2)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&2&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_{41}(-1)\\r_{42}(-2)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2(1/2)\\r_{21}(-1)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

…………6 分

于是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 构成元向量集的一个最大线性无关子集，

$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$. …………4 分

五、（10 分）解：$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，简记为 $\mathbf{B}=\mathbf{AC}$.

因为向量集 $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ 线性无关，$\mathbf{C}$ 是可逆阵，所以 $r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})=3$，

从而向量集 $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ 线性无关.

六、（15 分）解：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&k+3&-3\\k-1&4&-3\end{vmatrix}=-3(k+3)-8-6(k-1)-\left[-(k-1)(k+3)-12-12\right]$$

$$=k^2-7k-10=(k-2)(k-5),$$

令$|\mathbf{A}|=0$，解得$k=2$或$k=5$. …………5 分

当$k=2$时，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&5&-3\\1&4&-3\end{pmatrix}\overset{r_{12}(-2)}{\underset{r_{13}(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&2&-2\end{pmatrix}\overset{r_{23}(-2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_{21}(-2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$，解得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$. …………5 分

当$k=5$时，

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&8&-3\\4&4&-3\end{pmatrix}\overset{r_{12}(-2)}{\underset{r_{14}(-4)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&-1\\0&-4&1\end{pmatrix}\overset{r_{23}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2(1/4)}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1/4\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\overset{r_{23}(-2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-1/4\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}x_1-\dfrac{1}{2}x_3=0\\x_2-\dfrac{1}{4}x_3=0\end{cases}$，解得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$. …………5 分

七、（15 分）解：(1)　特征多项式

$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$,

解得$\lambda=1$或$\lambda=3$. …………4 分

当$\lambda=1$时，$\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$，$x_1-x_2=0$，

对应的特征向量为$\mathbf{p}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$且$t\neq0$. …………3 分

当$\lambda=3$时，$\mathbf{A}-3\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$x_1+x_2=0$，

对应的特征向量为$\mathbf{p}=t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$且$t\neq0$. …………3 分

(2) 解法一：由(1)可知，$|\mathbf{A}|=1\times3=3$，

$\mathbf{A}^*+2\mathbf{A}-\mathbf{E}=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{A}-\mathbf{E}=3\mathbf{A}^{-1}+2\mathbf{A}-\mathbf{E}$，

其特征值为$3\lambda^{-1}+2\lambda-1$，

把$\lambda=1$和$\lambda=3$代入，对应值为4和6，于是$|\mathbf{A}^*+2\mathbf{A}-\mathbf{E}|=4\times6=24$.

…………5 分

解法二：$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^*+2\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&5\end{pmatrix}$，$|\mathbf{A}^*+2\mathbf{A}-\mathbf{E}|=24$.

…………5 分