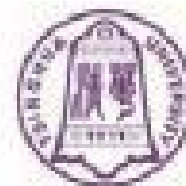


第三章 光子输运问题的模拟

1. 问题模型
2. 直接模拟方法
3. 加权法
4. 蒙特卡罗程序结构

➤ 大作业





第三章 光子输运问题的模拟

这里，我们以计算NaI(Tl)晶体对光子的响应为例，介绍蒙特卡罗方法解决粒子输运问题的基本方法和技巧。

对于其它粒子输运问题，其模拟的基本方法是一样的，其差别只在于记录的不同以及技巧的不同。因此，这些方法和技巧对于诸如辐射传播、多次散射和通量计算等一般粒子输运问题都是适用的。



粒子的输运问题带有明显的随机性质，粒子的输运过程是一个随机过程。粒子的运动规律是根据大量粒子的运动状况总结出来的，是一种统计规律。蒙特卡罗模拟，实际上就是模拟相当数量的粒子在介质中运动的状况，使粒子运动的统计规律得以重现。不过，这种模拟不是用实验方法，而是利用数值方法和技巧，即利用随机数来实现的。



1. 问题模型

在辐射测量中，NaI(Tl)晶体作为一种常用的闪烁体用于测量光子的计数率和能谱。

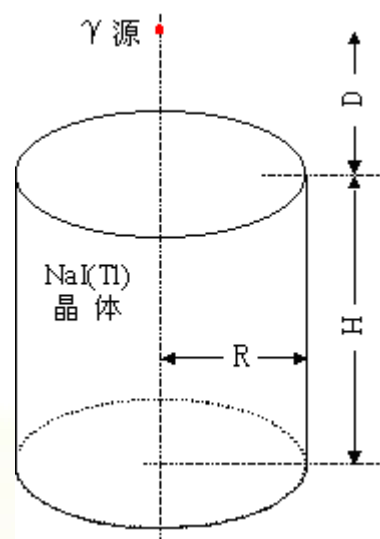
这里，我们只是简单地模拟低能光子在晶体内的输运以及产生的能量沉积，忽略次级光子和电子的产生情况。

在模拟过程中，假定粒子在两次碰撞之间按直线运动，且粒子之间的相互作用可以忽略。

这里，我们用一个圆柱体的NaI(Tl)晶体来测量一个 γ 源。晶体半径为 R ，高为 H ；源在晶体中心轴上，与晶体距离为 D 。

我们要计算晶体对该 γ 源发射光子的探测效率，光子能量沉积谱。

坐标系假定以晶体底面为XY平面，中心轴为Z轴。



2. 直接模拟方法

直接模拟方法就是直接从物理问题出发，模拟粒子的真实物理过程。

- 1) 状态参数与状态序列
- 2) 粒子与物质作用过程
- 3) 模拟运动过程
- 4) 记录结果



1) 状态参数与状态序列

粒子在介质中的运动的状态，可用一组参数来描述，称之为**状态参数**。它通常包括：粒子的空间位置 \mathbf{r} ，能量 E 和运动方向 $\mathbf{\Omega}$ ，以 $\mathbf{S}=(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega})$ 表示。

有时还需要其他的参数，如粒子的时间 t 和附带的权重 W ，这时**状态参数**为 $\mathbf{S}'=(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t, W)$ 。

状态参数通常要根据所求问题的类型和所用的方法来确定。

例如，对于球对称几何，取 $\mathbf{S}=(r, E, \cos\theta)$

其中 r 表示粒子所在位置到球心的距离， θ 为粒子的运动方向与其所在位置的径向夹角。



粒子第 m 次碰撞后的状态参数为

$$\mathbf{S}_m = (\mathbf{r}_m, E_m, \boldsymbol{\Omega}_m)$$

或

$$\mathbf{S}'_m = (\mathbf{r}_m, E_m, \boldsymbol{\Omega}_m, t_m, W_m)$$

它表示一个由源发出的粒子，在介质中经过 m 次碰撞后的状态，其中

\mathbf{r}_m : 粒子在第 m 次碰撞点的位置

E_m : 粒子第 m 次碰撞后的能量

$\boldsymbol{\Omega}_m$: 粒子第 m 次碰撞后的运动方向

t_m : 粒子到第 m 次碰撞时所经历的时间

W_m : 粒子第 m 次碰撞后的权重

有时，也可选为粒子进入第 m 次碰撞时的状态参数。

一个由源发出的粒子在介质中运动，经过若干次碰撞后，直到其运动历史结束（如逃出系统或被吸收等）。假定粒子在两次碰撞之间按直线运动，其运动方向与能量均不改变，则粒子在介质中的运动过程可用以下碰撞点的**状态序列**描述：

$$S_0, S_1, \dots, S_{M-1}, S_M$$

或者更详细些，用

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0, & \mathbf{r}_1, & \dots, & \mathbf{r}_{M-1}, & \mathbf{r}_M \\ E_0, & E_1, & \dots, & E_{M-1}, & E_M \\ \boldsymbol{\Omega}_0, & \boldsymbol{\Omega}_1, & \dots, & \boldsymbol{\Omega}_{M-1}, & \boldsymbol{\Omega}_M \end{pmatrix}$$

来描述。这里 S_0 为粒子由源出发的状态，称为初态， S_M 为粒子的终止状态。 M 称为粒子运动的链长。

这样的序列称为粒子随机运动的历史，模拟一个粒子的运动过程，就变成确定**状态序列**的问题。



2) 粒子与物质作用过程

粒子在运动过程中会与物质发生反应，即发生碰撞。粒子到达碰撞点的距离即为该粒子本次运输的距离。由于碰撞是随机发生的，所以运输距离 L 是一随机变量。

假设 L 服从分布 $f(L)$ ，即粒子在与出发点距离 $l \sim l + dl$ 中间发生碰撞的概率为：

$$P(l \leq L < l + dl) = f(l)dl$$

对于单个原子核来说，其微观截面反映了粒子与其发生作用的有效面积。假如粒子与核能发生多种作用，则这些有效面积之和即为其微观总截面 σ_t 。如果这种原子核的核密度为 N ，则在单位体积内这种原子核的有效作用面积

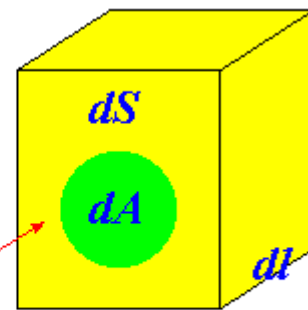
$\Sigma_t = N \cdot \sigma_t$ ，即为其宏观总截面。

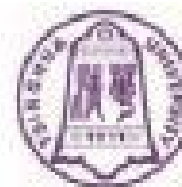
如图所示，一个进入 $dV = dS \cdot dl$ 体积元的粒子在 dV 内发生碰撞的概率为：

$$dp = dA/dS = \Sigma_t(l) \cdot dV/dS = \Sigma_t(l) \cdot dl$$

而粒子要进入该体积元

的概率为： $P(L > l) = \int_l^\infty f(l)dl = 1 - F(l)$





所以，粒子在距离出发点 l 处的体积元 dV 内发生碰撞的概率为： $P(L > l) \cdot dp = f(l)dl$

$$\text{即： } \Sigma_t(l) \cdot (1 - F(l)) \cdot dl = dF(l)$$

$$1 - F(l) = \exp\left(-\int_0^l \Sigma_t(l)dl\right)$$

$$f(l) = F'(l) = \Sigma_t(l) \cdot \exp\left(-\int_0^l \Sigma_t(l)dl\right)$$

积分 $\rho = \int_0^l \Sigma_t(l)dl$ 称为自由程。

它服从指数分布： $f(\rho) = e^{-\rho}$ ， $\rho \geq 0$



3) 模拟运动过程

(1) 确定初始状态 \mathbf{S}_0 :

确定粒子的初始状态，实际上就是要从粒子源的空间位置、能量和方向分布中抽样。设源分布为

$$f(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) = f_1(\mathbf{r}_0)f_2(E_0)f_3(\boldsymbol{\Omega}_0)$$

则分别从各自的分布中抽样确定初始状态。

对于单向点源: $\mathbf{r}_0 = (0, 0, H)$, $\boldsymbol{\Omega}_0 = (0, 0, -1)$

对于各向同性点源: $w_0 = \left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2 + R^2}}\right) \cdot \xi - 1$

$$\mathbf{r}_0 = \left(D \cdot \frac{\sqrt{1 - w_0^2}}{-w_0}, 0, H\right), \quad \boldsymbol{\Omega}_0 = (\sqrt{1 - w_0^2}, 0, w_0)$$

(2) 确定下一个碰撞点：

已知状态 \mathbf{S}_{m-1} ，要确定状态 \mathbf{S}_m ，首先要确定下一个碰撞点的位置 \mathbf{r}_m 。在相邻两次碰撞之间，中子的输运长度 L 服从如下分布：

$$f(L) = \Sigma_t(\mathbf{r}_{m-1} + L \cdot \boldsymbol{\Omega}_{m-1}, E_{m-1}) \exp \left\{ - \int_0^L \Sigma_t(\mathbf{r}_{m-1} + l \cdot \boldsymbol{\Omega}_{m-1}, E_{m-1}) dl \right\}$$

其中， Σ_t 为介质的中子宏观总截面，积分 $\rho = \int_0^L \Sigma_t(\mathbf{r}_{m-1} + l \cdot \boldsymbol{\Omega}_{m-1}, E_{m-1}) dl$ 称为粒子输运的自由程数，系统的大小通常就是用系统的自由程数表示的。

粒子输运的自由程数 ρ 服从指数分布：

$$f(\rho) = e^{-\rho}, \quad \rho \geq 0$$

因此，从 $f(L)$ 中抽样确定 L ，就是要先从指数分布抽样确定自由程数 ρ ， $\rho = -\ln \xi$ ；然后再从积分方程 $\int_0^L \Sigma_t(r_{m-1} + l \cdot \Omega_{m-1}, E_{m-1}) dl = -\ln \xi$ 中解出 L 。

对于单一介质

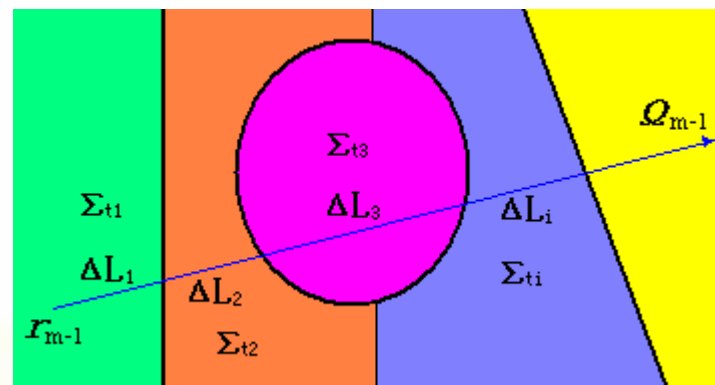
$$L = \frac{\rho}{\Sigma_t(E_{m-1})} = \frac{-\ln \xi}{\Sigma_t(E_{m-1})}$$

对于多层介质，如果

$$\sum_{i=1}^{I-1} \Delta L_i \cdot \Sigma_{t,i}(E_m) \leq \rho < \sum_{i=1}^I \Delta L_i \cdot \Sigma_{t,i}(E_m)$$

则

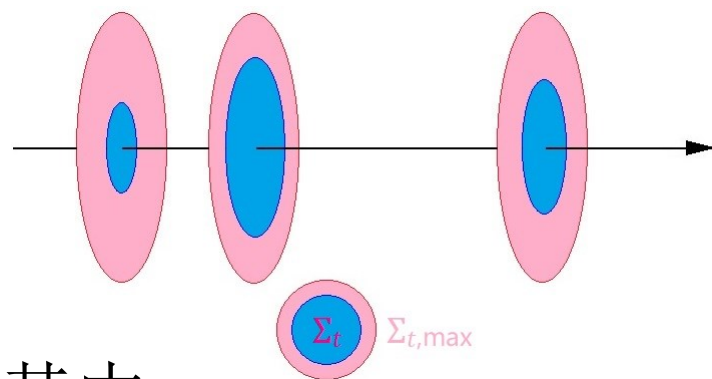
$$L = \sum_{i=1}^{I-1} \Delta L_i + \frac{\rho - \sum_{i=1}^{I-1} \Delta L_i \cdot \Sigma_{t,i}(E_m)}{\Sigma_{t,I}(E_m)}$$



最大截面法

对于多层介质，或其他介质密度与位置有关的问题，在求 $\Delta L_i (i = 1, 2, \dots, I_{max})$ 时，如果系统形状复杂，计算是非常烦杂的。在这种情况下，使用最大截面法更方便。

最大截面抽样方法为：



其中

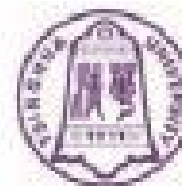
$$\Sigma_{t,max}(E) = \max_r \Sigma_t(\mathbf{r}, E)$$

$$L_1 = 0$$

$$L_1 = L_1 - \frac{\ln \xi_1}{\Sigma_{t,max}(E_m)}$$

$$\xi_2 \leq \frac{\Sigma_t(\mathbf{r}_m + L_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_m, E_m)}{\Sigma_{t,max}(E_m)} >$$

$$L \leq L_1$$



L 确定后，则下一个碰撞点的位置

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_{m-1} + L \cdot \boldsymbol{\Omega}_{m-1}$$

即

$$x_m = x_{m-1} + L \cdot u_{m-1}$$

$$y_m = y_{m-1} + L \cdot v_{m-1}$$

$$z_m = z_{m-1} + L \cdot w_{m-1}$$

如果 $z_m \leq 0$ 、或 $z_m \geq H$ 、或 $x_m^2 + y_m^2 \geq R^2$ ，则光子飞出晶体，光子历史终止。

(3) 确定被碰撞的原子核：

通常介质由多种原子核组成，粒子与核碰撞时，要确定与哪一种核碰撞。设介质由 A 、 B 、 C 三种原子核组成，其核密度分别为 N_A 、 N_B 、 N_C ，则介质的宏观总截面为：

$$\Sigma_t(E_{m-1}) = \Sigma_t^A(E_{m-1}) + \Sigma_t^B(E_{m-1}) + \Sigma_t^C(E_{m-1})$$

其中 $\Sigma_t^A, \Sigma_t^B, \Sigma_t^C$ 分别为核 A 、 B 、 C 的宏观总截面。其定义如下：

$$\Sigma_t^{(\cdot)}(E_{m-1}) = N_{(\cdot)} \sigma_t^{(\cdot)}(E_{m-1})$$

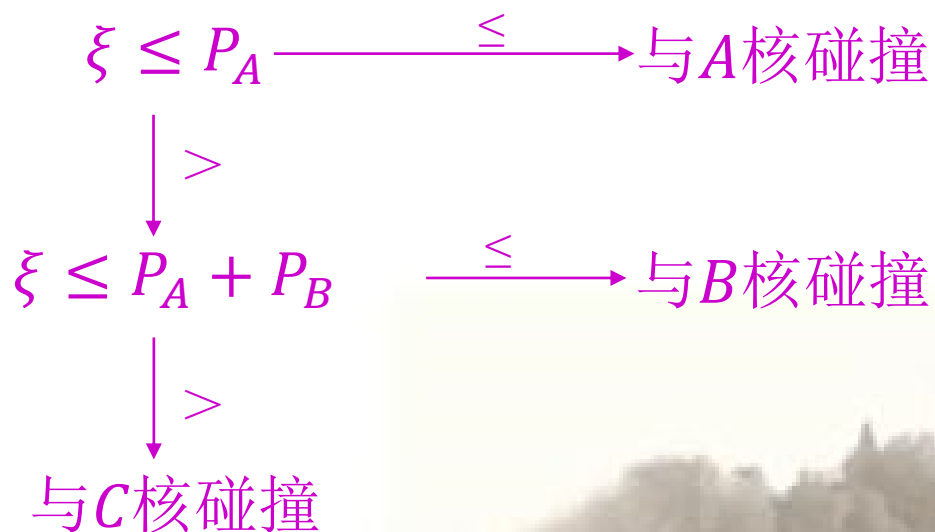
$\Sigma_t^{(\cdot)}(E_{m-1})$ 、 $N_{(\cdot)}$ 、 $\sigma_t^{(\cdot)}(E_{m-1})$ 分别表示 (\cdot) 核的宏观总截面、核密度和微观总截面。



由于核截面反映了粒子与核碰撞可能性的大小，因此，很自然地，粒子与 A 、 B 、 C 核发生碰撞的几率分别为：

$$P_A = \frac{\Sigma_t^A(E_{m-1})}{\Sigma_t(E_{m-1})}, \quad P_B = \frac{\Sigma_t^B(E_{m-1})}{\Sigma_t(E_{m-1})}, \quad P_C = \frac{\Sigma_t^C(E_{m-1})}{\Sigma_t(E_{m-1})}$$

利用离散型随机变量的抽样方法，确定碰撞核种类：



(4) 确定碰撞类型：

确定了碰撞的核(比如 B 核)后,就要进一步确定碰撞类型。低能光子与核的反应类型有光电效应和康普顿效应,它们的微观截面分别为 $\sigma_{pe}^B(E_{m-1})$ 和 $\sigma_c^B(E_{m-1})$ 。

则有 $\sigma_t^B(E_{m-1}) = \sigma_{pe}^B(E_{m-1}) + \sigma_c^B(E_{m-1})$

各种反应发生的几率分别为

$$P_{pe} = \sigma_{pe}^B(E_{m-1}) / \sigma_t^B(E_{m-1})$$

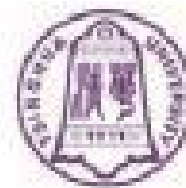
$$P_c = \sigma_c^B(E_{m-1}) / \sigma_t^B(E_{m-1})$$

利用离散型随机变量的抽样方法，确定反应类型。

即抽取随机数 ξ ，若 $\xi \leq P_{pe}$ ，则为光电效应，此时光子的历史终止。

否则，则为康普顿效应，这时就要进一步确定康普顿散射后光子的能量和方向。





(5) 确定碰撞后的能量与运动方向：

光子发生康普顿散射后，其能量分布密度函数为：

$$f(x/\alpha) = \frac{1}{K(\alpha)} \left[\left(\frac{\alpha + 1 - x}{\alpha \cdot x} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right], \quad 1 \leq x \leq 1 + 2\alpha$$

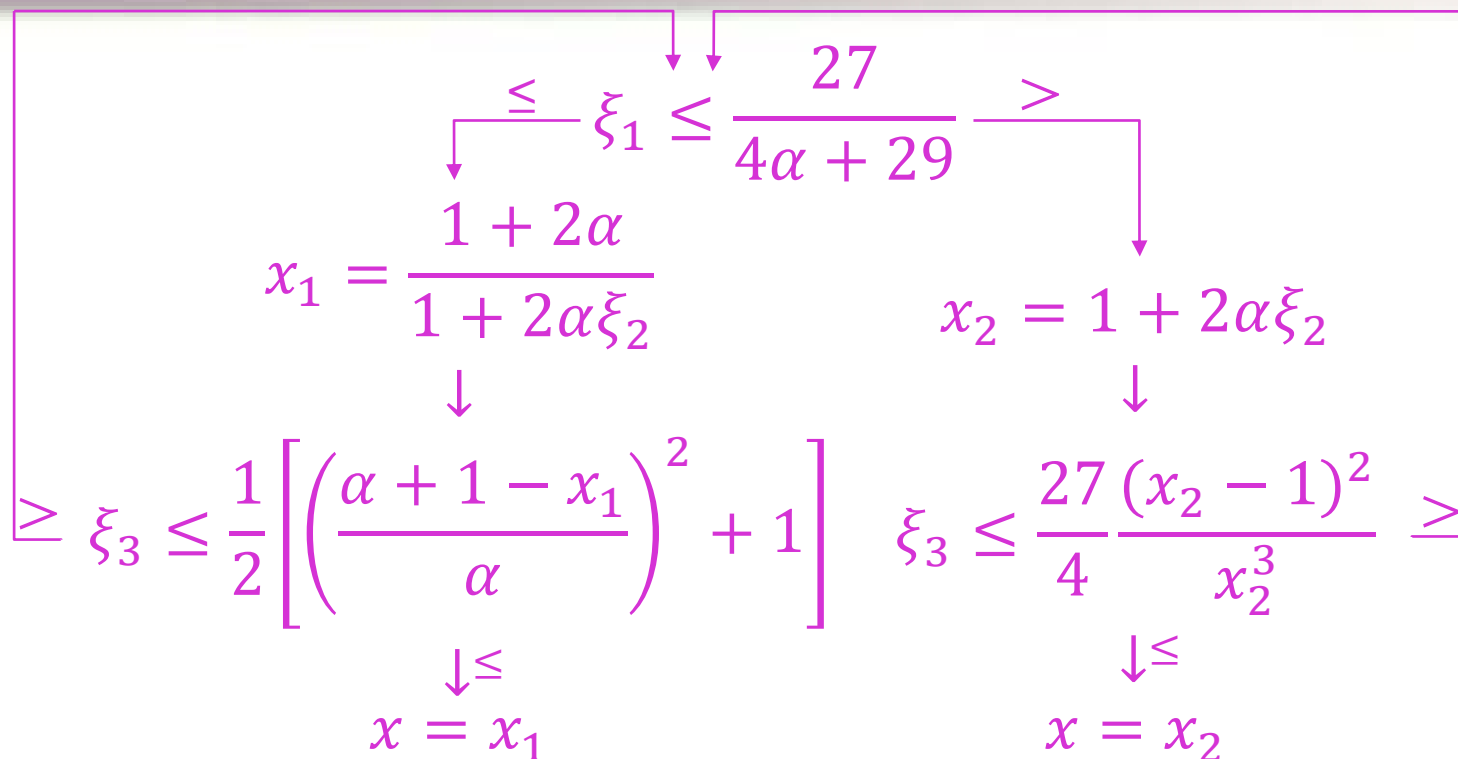
其中， $K(\alpha)$ 为归一因子。

$$K(\alpha) = \left[1 - \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha^2} \right] \ln(1 + 2\alpha) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{2(1 + 2\alpha)^2}$$

$x = \alpha/\alpha'$ ， α 和 α' 分别为光子散射前后的能量，以 m_0c^2 为单位， m_0 为电子静止质量， c 为光速，即 $\alpha = E/m_0c^2$ ， $\alpha' = E'/m_0c^2$ 。

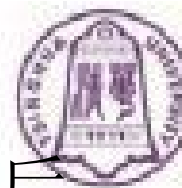


光子康普顿散射能量分布的抽样方法为:



x 的抽样确定后, 散射后的能量为:

$$E_{m+1} = \alpha' \cdot m_0 c^2 = \frac{\alpha}{x} \cdot m_0 c^2 = \frac{E_m}{x}$$

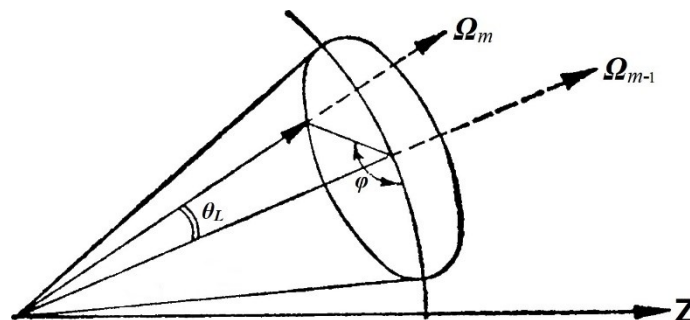


光子的康普顿散射角与其散射前后
的能量有关，它的散射角余弦 $\mu_L = \cos \theta_L$
的分布密度函数为：

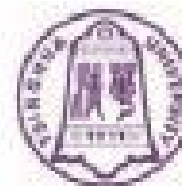
$$f(\mu_L) = \delta\left(1 - \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha} - \mu_L\right)$$

抽样方法为：

$$\mu_L = 1 - \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha}$$



散射角 θ_L 确定后，还需要确定方位角并最终确定散射后光子的运动方向。



令

$$a = \cos \theta_L, \quad b = \sin \theta_L = \sqrt{1 - a^2},$$
$$c = \cos \varphi, \quad d = \sin \varphi$$

方位角 φ 在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布。

则

$$u_m = \frac{-bcw_{m-1}u_{m-1} + bdv_{m-1}}{\sqrt{u_{m-1}^2 + v_{m-1}^2}} + au_{m-1}$$

$$v_m = \frac{-bcw_{m-1}v_{m-1} - bdu_{m-1}}{\sqrt{u_{m-1}^2 + v_{m-1}^2}} + av_{m-1}$$

$$w_m = bc\sqrt{u_{m-1}^2 + v_{m-1}^2} + aw_{m-1}$$

当 $u_{m-1}^2 + v_{m-1}^2 \rightarrow 0$ 时，
不能使用左边的公式，
可用下面的简单公式：

$$u_m = bc$$

$$v_m = bd$$

$$w_m = aw_{m-1}$$



至此，由 \mathbf{S}_{m-1} 可以完全确定 \mathbf{S}_m 。

因此，当光子由源出发后，即 \mathbf{S}_0 确定后，重复步骤 (2)~(5)，直到光子游动历史终止。

于是得到了一个光子的随机游动历史 $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{M-1}, \mathbf{S}_M$ ，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0, & \mathbf{r}_1, & \cdots, & \mathbf{r}_{M-1}, & \mathbf{r}_M \\ E_0, & E_1, & \cdots, & E_{M-1}, & E_M \\ \boldsymbol{\Omega}_0, & \boldsymbol{\Omega}_1, & \cdots, & \boldsymbol{\Omega}_{M-1}, & \boldsymbol{\Omega}_M \end{pmatrix}$$

也就是模拟了一个由源发出的光子完整的运动过程。



以上模拟过程可分为两大步：第一步确定粒子的初始状态 S_0 ，第二步由状态 S_{m-1} 来确定状态 S_m 。这第二步又分为两个过程：第一个过程是确定碰撞点位置 r_m ，称为**输运过程**；第二个过程是确定碰撞后粒子的**能量及运动方向**，称为**碰撞过程**。对于光子，碰撞过程是先确定能量，再确定散射角以及运动方向。重复这两个过程，直至粒子的历史终止。

这种模拟过程，是解任何类型的粒子输运问题所共有的，它是蒙特卡罗方法解题的基本手段。

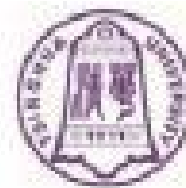


4) 记录结果

在获得光子的随机游动历史后，我们要对所要计算的物理量进行估计。对于NaI(Tl)晶体，我们要计算探测效率和光子能量沉积谱。考察每个光子的随机游动历史，记录该光子在探测器中发生的每次碰撞所损失的能量（即沉积能量 E_D ），对于第 m 次碰撞的粒子：

$$E_D(m) = \begin{cases} E_{m-1} - E_m & \text{康普顿效应} \\ E_{m-1} & \text{光电效应} \end{cases}$$

总沉积能量 $E_D = \sum E_D(m)$ ，如果为零，说明该光子没有被记录到，其对探测效率的贡献为0；否则其对探测效率的贡献为1，同时可根据该沉积能量记录相应的光子能量沉积谱。



设第 n 个光子对探测效率的贡献为 η_n ，则

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } E_D > 0 \\ 0, & \text{当 } E_D = 0 \end{cases}$$

如果我们共跟踪了 N 个光子，则记录到的光子数为：

$$N_c = \sum_{n=1}^N \eta_n$$

则探测效率的近似值为：

$$\hat{\eta}_N = \frac{N_c}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \eta_n$$

它是探测效率的一个无偏估计。

我们称这种直观地模拟过程和估计方法为直接模拟方法。在置信水平 $1-\alpha=0.95$ 时，的误差为：

$$|\hat{\eta}_N - \eta| < \frac{\chi_\alpha \sigma_\eta}{\sqrt{N}} \approx \frac{2\sigma_\eta}{\sqrt{N}}$$

其中 σ_η 为 η_n 的均方差，由于 η_n 是一个服从二项分布的随机变量，所以

$$\sigma_\eta^2 = \eta(1 - \eta)$$

或

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = \hat{\eta}_N(1 - \hat{\eta}_N)$$

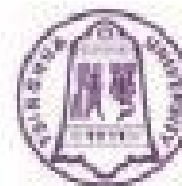
为了得到光子能量沉积谱，事先将能量分成若干个间隔：

$$E_{min} = E_0 < E_1 < \cdots < E_I = E_{max}$$

其中 E_{max} ， E_{min} 分别表示能量的上、下限，对于有记录的光子，根据 E_D 所处的能量间隔进行记录，若沉积能量 E_D 属于第 i 个能量间隔 ΔE_i ，则在第 i 个能量计数器中加“1”。

如果能量按 ΔE 等间隔划分，则

$$i = \frac{E_D - E_{min}}{\Delta E}$$



跟踪 N 个光子后，则光子能量沉积谱为：

$$\hat{P}_i = \frac{N_i}{N \cdot \Delta E_i} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

其中 N_i 为第 i 个能量间隔的光子记录数。

归一后得到能谱分布的概率密度函数：

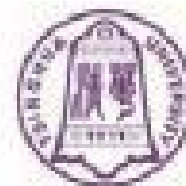
$$\hat{P}_i^* = \frac{\hat{P}_i}{\hat{\eta}_N} = \frac{N_i}{N_c \cdot \Delta E_i} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

在实际的测量系统中，并不能精确地测量到光子的沉积能量值，实际测量到的值是有一定的统计涨落的，而且该涨落是服从高斯分布的。因此，要模拟实际的测量情况，最终记录的沉积能量就是一个正态分布的随机变量：

$$E'_D = E_D + \sigma \cdot x$$

其中 E_D 是其计算的沉积能量， x 是服从标准正态分布的随机变量， σ 是对应沉积能量处的能量统计涨落的标准差。它与该能量处的能量分辨率 r 有以下关系：

$$\sigma = \frac{r \cdot E_D}{2\sqrt{2 \ln 2}} \approx 0.4247 \cdot r \cdot E_D$$



正态分布的近似抽样

我们知道，随机数 ξ 的期望值为 $1/2$ ，方差为 $1/12$ ，
则随机变量

$$X_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{2} \right) / \sqrt{\frac{1}{12n}}$$

渐近正态分布，因此，当 n 足够大时便可用 X_n 作为
正态分布的近似抽样。特别是 $n=12$ 时，有

$$X_{12} = \sum_{i=1}^6 (\xi_{2i} - \xi_{2i-1})$$



3. 加权法

加权法是蒙特卡罗方法解粒子输运问题中很常用的手段。

- 1) [加权法思想](#)
- 2) [偏移抽样方法](#)



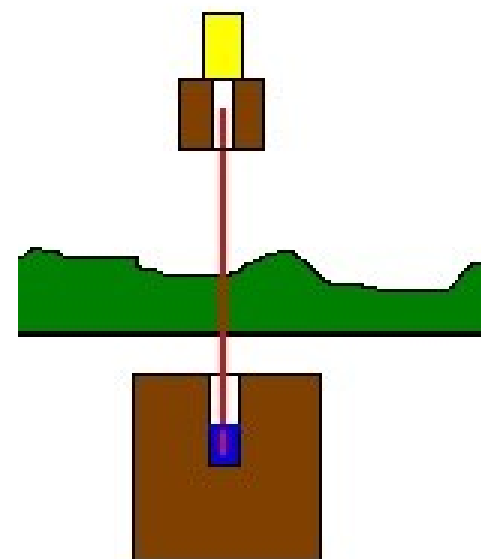
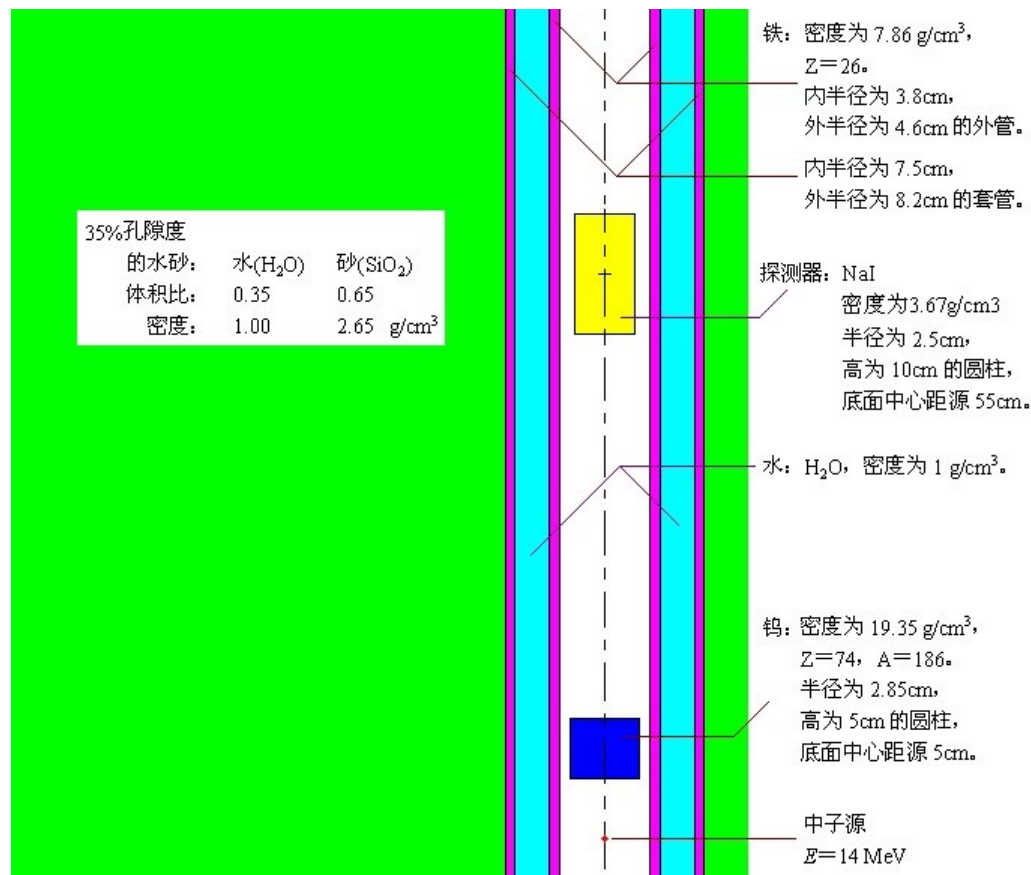
1) 加权法思想

对于很多深穿透或大系统的问题，在直接模拟时，由于模拟的粒子距离指定区域很远，在输运过程中要发生多次碰撞，很容易被吸收，使其很难到达指定区域。因此在模拟大量的粒子后，往往只有极少数粒子进入指定区域，因而很难记录到足够数量的贡献，使得估计值的误差很大。





NaI(Tl)晶体测量光子响应的实际例子：



在模拟过程中，每次碰撞时粒子很有可能被吸收而停止跟踪。如果改变模拟方法，例如对于光子，在判断碰撞类型 $\xi \leq P_{pe}$ 时，可以认为光子的 P_{pe} 部分被吸收，而其余部分(P_c)是康普顿散射，即人为地把光子分成两部分，一部分散射，一部分吸收。继续跟踪散射部分，这部分现在只能代表部分光子了，因此需要一个权重因子来反映其所代表的比例。

也就是说，我们利用粒子权重的变化来反映继续跟踪的部分。这就是简单加权法的基本思想。

显然，在加权法中光子的权重 W 已成为光子状态参数的组成部分。这时光子历史成为：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0, & \mathbf{r}_1, & \cdots, & \mathbf{r}_{M-1}, & \mathbf{r}_M \\ E_0, & E_1, & \cdots, & E_{M-1}, & E_M \\ \boldsymbol{\Omega}_0, & \boldsymbol{\Omega}_1, & \cdots, & \boldsymbol{\Omega}_{M-1}, & \boldsymbol{\Omega}_M \\ W_0, & W_1, & \cdots, & W_{M-1}, & W_M \end{pmatrix}$$

对源光子，取 $W_0 = 1$ 。

经过碰撞光子权重的变化为：

$$W_m = W_{m-1} \frac{\Sigma_c^B(E_{m-1})}{\Sigma_t^B(E_{m-1})} = W_{m-1} \cdot P_c^B$$

采用了加权法以后，各个粒子的贡献就以其权重为基准了。

例如，要模拟探测器测量光子的计数时，当光子经过多次散射后进入探测器，进入探测器时的权重为 W_{in} ，进入探测器后就不能用加权法了，只能用直接模拟法。

这时如果探测器记录到该光子，则记录到的数目为 W_{in} ，也就是说该光子对探测器计数的贡献不是一个光子，而是 W_{in} 个光子。同样的在记录能谱时，也要在相应的能量计数器中加 W_{in} ，而不是加“1”了。





2) 偏移抽样方法

使用蒙特卡罗方法计算积分

$$I = \int g(x)f(x)dx$$

时, 可考虑将积分 I 改写为

$$I = \int \frac{g(x)f(x)}{f^*(x)} \cdot f^*(x)dx = \int g^*(x) \cdot f^*(x)dx$$

其中 $f^*(x)$ 为一个与 $f(x)$ 有相同定义域的新的分布密度函数。于是可以这样计算积分 I :

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^*(X_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{f^*(X_i)} \cdot g(X_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W(X_i) \cdot g(X_i)$$

这里 X_i 是从 $f^*(x)$ 中抽取的第 i 个子样。

由此可以看出，原来由 $f(x)$ 抽样，现改为由另一个分布密度函数 $f^*(x)$ 抽样，并附带一个权重纠偏因子

$$W(x) = f(x)/f^*(x)$$

这种方法称为偏倚抽样方法。

从 $f(x)$ 中抽取的 X_f ，满足

$$P(x \leq X_f < x + dx) = f(x)dx$$

而对于偏倚抽样，有

$$W(X_{f^*}) \cdot P(x \leq X_{f^*} < x + dx) = W(x)f^*(x)dx$$

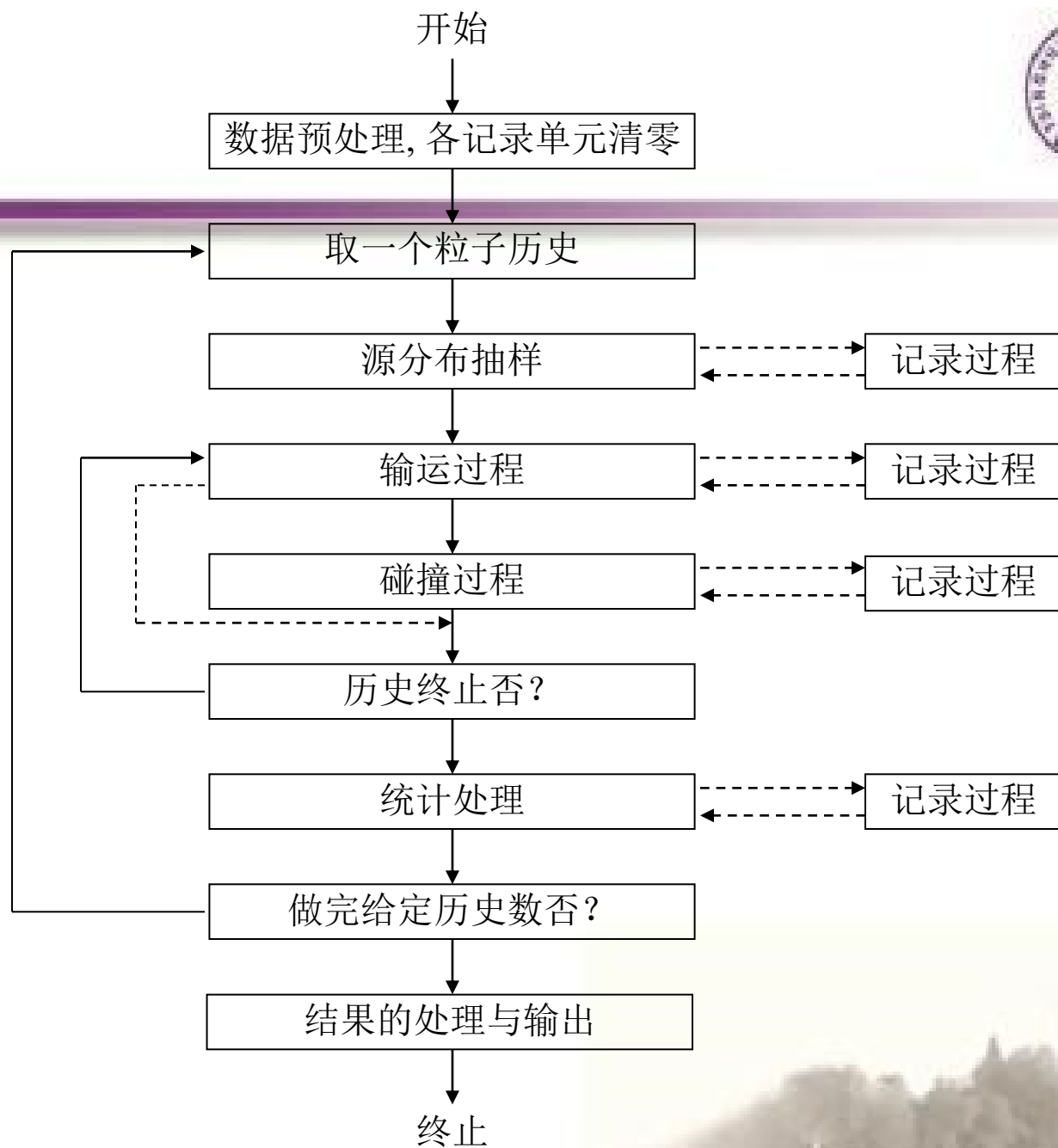
一般情况下， X_f 是具有分布 $f(x)$ 总体的简单子样的个体，只代表一个。 X_{f^*} 是具有分布 $f^*(x)$ 总体的简单子样的个体，但不代表一个，而是代表 $W(X_{f^*})$ 个，这时 X_{f^*} 是带权 $W(X_{f^*})$ 服从分布 $f(x)$ 。



4. 蒙特卡罗程序结构

在电子计算机上，蒙特卡罗方法解粒子输运问题的程序，一般都可分为：源抽样，空间输运过程，碰撞过程，记录过程和结果的处理与输出等部分。

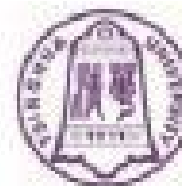




至于粒子历史终止条件，根据问题的几何条件、物理假定，处理方法，可归纳为以下几种：

- 1) 粒子从系统逃脱；
- 2) 粒子经碰撞被吸收；
- 3) 经俄国轮盘赌后，历史被终止；
- 4) 粒子能量低于给定能量（阈能）；
- 5) 粒子位置越过某一界面；
- 6) 粒子飞行时间超过给定时间；





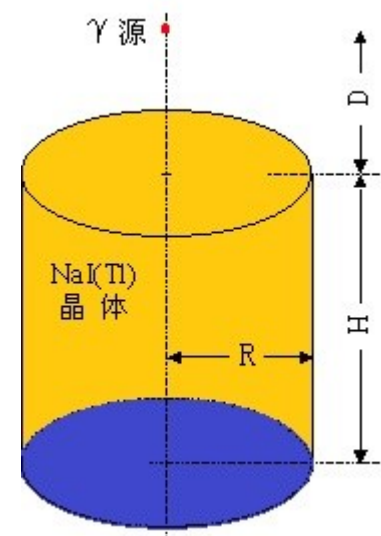
光子探测效率及能谱测量

计算模型:

- 闪烁体尺寸 $\Phi 4 \times 4\text{cm}$ ，即半径 $R=2\text{cm}$ 、高 $H=4\text{cm}$ 。

（选做：探测器底部包裹 0.1cm 厚的铝）

- ^{137}Cs 点源在闪烁体中轴线上，与距离闪烁体 $D=20\text{cm}$ ，粒子垂直向下入射进入晶体。





要求计算探测效率和能量沉积谱

1. 计算探测效率和峰总比，并估计相对误差。

$$\text{探测效率} = N_m / N$$

$$\text{峰总比} = N_p / N_m$$

N = 进入闪烁体的总粒子数

N_m = 探测到的总计数（能量沉积 $E > 0$ 的光子计数）

N_p = 全能峰的总计数（按 $E_0 \pm 3\sigma$ 范围统计计数）

误差估计取置信水平 $1 - \alpha = 0.95$ ， $\lambda_\alpha \approx 2.0$ 。

2. 统计 γ 谱每道的计数，画出 γ 能谱图。
能量范围取0~0.8 MeV，按每道为0.003 MeV的间隔划分。
3. 根据 γ 能谱图，估计测量系统在0.662 MeV处的能量分辨率。
(直接根据 γ 能谱图全能峰的半高宽进行计算)

