



Lehrstuhl für Baumechanik
Technische Universität München

Implementierung eines triangulären FE-Netzes im
ITM-FEM-Ansatz zur Untersuchung eines homogenen
Halbraums mit zylindrischem Hohlraum

Anton Bönisch

Bachelorarbeit im Studiengang Bauingenieurswesen

Editor : Univ.-Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller
Dr.-Ing. Mirjam Lainer
Supervisor : M.Sc. Tom Hicks
Handed in : 11. Oktober 2025

Abstract

An abstract is a greatly condensed version of a longer piece of writing that highlights the major points covered, and concisely describes the content and scope of the writing.

Abstracts give readers a chance to quickly see what the main contents and sometimes methods of a piece of writing are. They enable readers to decide whether the work is of interest for them. Using key words in an abstract is important because of today's electronic information systems. A web search will find an abstract containing certain key words.

Keywords:

- Keyword 1
- Keyword 2

Erklärungen

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Dr.-Ing. Gerhard Müller sowie dem gesamten Lehrstuhl für Baumechanik dafür bedanken, dass ich meine Bachelorarbeit dort schreiben durfte.

Bei meinem Betreuer Tom Hicks möchte ich mich ebenfalls bedanken

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt zu haben. Die verwendete Literatur und sonstige Hilfsmittel sind vollständig angegeben.

München, 11. Oktober 2025

Anton Bönisch

Inhaltsverzeichnis

Abstract	III
Erklärungen	IV
Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis	VIII
Listings	IX
Symbolverzeichnis	X
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der Elastizitätstheorie	2
2.1 Vorbemerkung	2
2.2 Lamésche Gleichung	2
2.3 Satz von Helmholtz	3
3 Integraltransformationmethode	4
3.1 Vorbemerkung	4
3.2 Fundamentalsystem Halbraum	5
3.3 Fundamentalsystem Vollraum mit zylindrischem Hohlraum	7
3.4 Überlagerung der Fundamentalsysteme	9
3.5 Dynamische Steifigkeitsmatrix des ITM-Teilsystems	11
4 Finite Elemente Methode	12
4.1 Vorbemerkung	12
4.2 FE-Netz durch degenerierte Dreiecke	12
4.3 Dynamische Steifigkeitsmatrix des 2,5D FEM-Teilsystems	14
4.4 Numerische Implementation	16
5 Kopplung der FEM mit der ITM	18
5.1 Vorbemerkung	18
5.2 Transformation der Lösung des FE-Systems	18
5.3 Kopplung	19
A Anhang	21
A.1 Verschiebungs und Spannungs Matrizen in kartesischen Koordinaten	21

A.2	Ableitungsmatrix $\bar{\mathbf{B}}$ zur FE-Berechnung	22
A.3	Transformations Matrizen zur Kopplung	22
A.3.1	Koordinatentransformationsmatrix \mathbf{T}_1	22
A.3.2	Fouriertransformationsmatrix \mathbf{T}_2	23
A.4	Verwendete Software	23
A.4.1	Maple TM	23
A.4.2	gnuplot	24
A.4.3	MATLAB	24
A.5	Maple TM -Programm für ein 2D-Problem	25
Literaturverzeichnis		26

Abbildungsverzeichnis

3.1	Fundamentalsystem homogener Halbraum - basiert auf [Freisinger 2022] . . .	5
3.2	Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (rechts) und Zylinderkoordinaten (links) [Freisinger 2022]	7
3.3	Fundamentalsysteme Halbraum (rechts) und Vollraum mit zylindrischem Hohl- raum (links) mit fiktiven Überlagerungsflächen - basiert auf Freisinger [2022]	10

Tabellenverzeichnis

5.1	Übersicht der Fourierräume und Koordinatensysteme von FEM und ITM. . .	18
-----	--	----

Listings

Symbolverzeichnis

Der Zusatz $\hat{}$ bezeichnet eine komplexe Größe.

Griechische Buchstaben

Γ	Berandung des Problems
$\delta(\vec{x}_0 - \vec{x})$	Dirac-Funktion am Punkt \vec{x}

Lateinische Buchstaben

c	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Schallgeschwindigkeit	$c = \frac{E}{\rho}$
E	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Elastizitätsmodul	
f	$\frac{1}{\text{s}}$	Frequenz	$f = \frac{\omega}{2\pi}$

Mathematische Symbole

A^T	Transponierte Matrix A
A^H	Komplex konjugierte Matrix A

Diakritische Zeichen

$\overline{}$	Kennzeichnung für eine einfach Fouriertransformierte Größe
$\tilde{}$	Kennzeichnung für eine zweifach Fouriertransformierte Größe
$\hat{}$	Kennzeichnung für eine dreifach Fouriertransformierte Größe

Akronyme

FE	Finite Elemente
FEM	Finite Elemente Methode
GP	Gauß Punkte
ITM	Integraltransformationsmethode

1 Einleitung

Besonders in urbanen Räumen mit hohen Siedlungs- und Bevölkerungsdichten sind in den letzten Jahren Anforderungen an Erschütterungsschutz gestiegen. Gründe hierfür sind sowohl eine zunehmende Sensibilisierung gegenüber Verkehrsstörungen als auch erhöhte Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit von Bauwerken. Vor diesem Hintergrund gewinnt die zuverlässige Vorhersage von Erschütterungen infolge dynamischer Einwirkungen zunehmend an Bedeutung. Ziel dieser Arbeit ist es, die rechnergestützte Vorhersage derartiger Erschütterungen weiterzuentwickeln. Der Fokus liegt dabei auf der geometrischen Situation Tunnel in einem ungeschichteten Boden.

2 Grundlagen der Elastizitätstheorie

2.1 Vorbemerkung

Das Aufbringen dynamischer Lasten auf ein Medium führt zur Entstehung von Spannungen und Verschiebungen, die sich im Erdreich in Form von mechanischen Wellen ausbreiten. Die folgende Betrachtung basiert auf der Annahme eines linear-elastischen Bodenmodells für das ein isotropes Materialverhalten vorausgesetzt wird. Wie Haupt [1986] beschreibt, kann das Bodenmodell durch diese vereinfachte Betrachtung in guter Näherung beschrieben werden, da die resultierenden Formänderungen infolge der dynamischen Lasten als gering einzustufen sind.

Um mithilfe der in den Kapiteln (3) und (4) vorgestellten Berechnungsmethoden Systemantworten für Verschiebungen und Spannungen zu ermitteln, werden im Folgenden die zugrunde liegenden Grundlagen der Elastizitätstheorie vorgestellt.

2.2 Lamésche Gleichung

Unter den oben genannten Annahmen für das Bodenmodell beschreibt die Lamésche Differentialgleichung die wellenförmige Ausbreitung von Verschiebungen und Spannungen in einem dreidimensionalen Kontinuum infolge einer dynamischen Belastung.

Wie in der Dissertation von Frühe [2010] beschrieben, werden diese partiellen Differentialgleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung des Kontinuums und des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors hergeleitet.

Gemäß Lamé [1852] ergibt sich dadurch ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen zu:

$$\mu u_{|j}^{i,j} + (\lambda + \mu) u_{|j}^{j,i} - \rho \ddot{u}^i = 0 \quad (2.1)$$

Dabei enthalten die Laméschen Konstanten μ und λ auch die elastischen Konstanten Schubmodul G , Elastizitätsmodul E und Querszahl ν , die sich wie folgt zusammensetzen:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.2a)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.2b)$$

2.3 Satz von Helmholtz

Zur Lösung der partiell gekoppelten Differentialgleichungen (2.1) wird eine Entkopplung mittels des Satzes von Helmholtz angewendet. Dem zufolge lässt sich das Vektorfeld der Verschiebung u_i in die Summe eines skalaren Φ und eines vektoriellen Potentials Ψ_i zerlegen, wie beispielsweise in Müller [2007] beschrieben. Der Index (i) steht dabei für die drei kartesischen Raumrichtungen ($i = x, y, z.$) und eine ausführliche Herleitung ist zudem in der Dissertation von Frühe [2010] zu finden.

Aus physikalischer Sicht lassen sich die Potentiale als verschiedene Wellentypen interpretieren. Das skalare Potential Φ beschreibt dabei die Longitudinalwellen, auch P-Wellen oder Kompressionswellen genannt, welche eine Volumenänderung bewirken. Das vektorielle Potential Ψ_i beschreibt hingegen die Transversalwellen, auch S-Wellen genannt, die mit einer Gestaltsänderung einhergehen. Diese beiden Raumwellentypen treten im Boden auf. An der Bodenoberfläche erscheinen darüber hinaus Love- und Rayleigh-Wellen, die ebenfalls aus den Potentialen abgeleitet werden können [Haupt 1986].

Als Ergebnis dieser Zerlegung erhält man ein System entkoppelter Potentiale, mit dem die Berechnung in den folgenden Kapiteln möglich ist.

3 Integraltransformationmethode

3.1 Vorbemerkung

Um die unendliche Ausdehnung des Bodens und die in Kapitel (2) beschriebenen elastischen Wellen analytisch zu berechnen, ist die Integraltransformationmethode (ITM) eine geeignete Berechnungsmethode [Müller 2007].

Da die ITM allerdings nur einfache Geometrien beschreiben kann, müssen komplexere Strukturen durch eine Überlagerung von Fundamentalsystemen abgebildet werden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Tunnel im ungeschichteten Boden untersucht. Für diese geometrische Situation liegt keine Lösung vor, sodass für die Berechnung die Fundamentalsysteme Halbraum und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum in den Kapiteln (3.2) und (3.3) herangezogen werden. Im darauffolgenden Kapitel (3.4) werden die Fundamentalsysteme überlagert, um so eine analytische Lösung für die untersuchte geometrische Situation zu erhalten.

Zu beachten ist, dass die in den Kapiteln (3.2) und (3.3) beschriebenen Lösungen eine dynamische Belastung ($\omega \neq 0$) voraussetzen. Aufgrund der gewählten Lösungsmethoden ist eine statische Belastung nicht zulässig [Frühe 2010].

3.2 Fundamentalsystem Halbraum

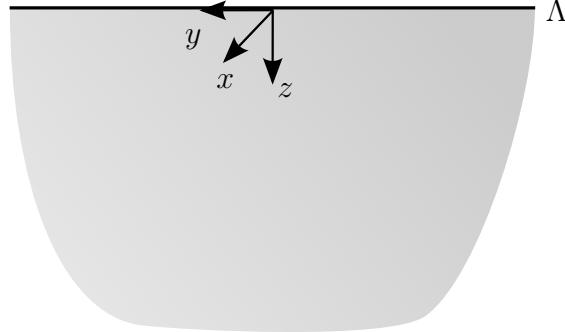


Abbildung 3.1: Fundamentalsystem homogener Halbraum - basiert auf [Freisinger 2022]

Wie Frühe [2010] beschreibt, werden die im Kapitel (2.3) hergeleiteten Potentiale Φ und Ψ_i für den Halbraum in kartesischen Koordinaten ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$) beschrieben. Dadurch ergibt sich ein System entkoppelter partieller Differentialgleichungen zu:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(x, y, z, t) = 0 \quad (3.1a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi_i(x, y, z, t) = 0 \quad (3.1b)$$

mit Ψ_i in den drei kartesischen Raumrichtungen ($i = x, y, z$.)

Um dieses partielle System zu lösen, erfolgt eine Überführung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen mittels dreifacher Fouriertransformation. Dazu werden die Ortskoordinaten x und y aus dem Originalraum zu Wellenzahlen k_x und k_y im fouriertransformierten Bildraum ($x \circ \bullet k_x$, $y \circ \bullet k_y$) sowie die Zeit t in den Frequenzbereich ω ($t \circ \bullet \omega$) überführt.

Um entlang der z -Koordinate im Folgenden Randbedingungen vergeben zu können, bleibt diese untransformiert im Originalraum [Müller 2007].

Die Transformation des Systems partieller Differentialgleichungen (3.1) in den fouriertransformierten Bildraum führte zur Umwandlung in das System gewöhnlicher Differentialgleichungen und lässt sich darstellen durch:

$$\left[-k_x^2 - k_y^2 + k_p^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \hat{\Phi}(k_x, k_y, z, \omega) = 0 \quad (3.2a)$$

$$\left[-k_x^2 - k_y^2 + k_s^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \hat{\Psi}_i(k_x, k_y, z, \omega) = 0 \quad (3.2b)$$

mit der Kompressionswellenzahl $k_p = \frac{\omega}{c_p}$ und der Scherwellenzahl $k_s = \frac{\omega}{c_s}$.

Das Symbol $(\hat{})$ kennzeichnet dabei ab sofort die fouriertransformierten Größen.

Zur Lösung zieht Frühe [2010] einen analytischen Exponentialansatz (3.3) heran. Da außerdem gemäß ? für das Potential $\Psi_z = 0$ gilt, wird die folgende Lösung in $\alpha = x, y$ definiert.

$$\hat{\Phi} = A_1 e^{\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_1 z} \quad (3.3a)$$

$$\hat{\Psi}_\alpha = B_{\alpha 1} e^{\lambda_2 z} + B_{\alpha 2} e^{-\lambda_2 z} \quad (3.3b)$$

mit $\lambda_1 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_p^2}$, $\lambda_2 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_s^2}$

sowie den unbekannten Koeffizienten $A_1, A_2, B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}$

Der Lösungsansatz (3.3) der Potentiale $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}_\alpha$ ermöglicht die Berechnung der Verschiebungen \hat{u}_k und Spannungen $\hat{\sigma}_k$ im fouriertransformierten Raum. Der Index (k) steht dabei für den Halbraum, der im kartesischen Koordinatensystem beschrieben wird.

So lässt sich die Verschiebung im fouriertransformierten Raum \hat{u}_k über die Matrix $[\hat{H}_k]$, dessen Einträge den Exponentialansatz (3.3) enthalten, und dem Vektor C_k , der die unbekannten Koeffizienten enthält, wie folgt darstellen [Frühe 2010]:

$$\hat{u}_k = [\hat{H}_k] \cdot C_k \quad (3.4)$$

Über die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung, die Spannungs-Verzerrungsbeziehung sowie einer Transformation in den Fourierraum lassen sich die Spannungen $\hat{\sigma}_k$ nach Müller [2007] hergeleiten. Sie lassen sich darstellen durch:

$$\hat{\sigma}_k = [\hat{K}_k] \cdot C_k \quad (3.5)$$

Dabei enthalten die Matrizen $[\hat{H}_k]$ und $[\hat{K}_k]$ Einträge, die aus dem gewählten Lösungsansatz resultieren und der Vektor C_k die unbekannten Koeffizienten.

Eine ausführliche Herleitung der Gleichungen (3.4) und (3.5), sowie die konkreten Einträge der Vektoren und Matrizen ist neben in der Arbeit von Frühe [2010] auch in der Dissertation von Müller [2007] zu finden.

Die sechs unbekannten Koeffizienten $A_1, A_2, B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}$, die aus dem gewählten Exponentialansatz (3.3) resultieren, werden über Randbedingungen bestimmt.

Die drei Koeffizienten A_2, B_{x2}, B_{y2} ergeben sich unter Heranziehung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung. Diese fordert, dass die Amplitude der Wellen in zunehmender Tiefe abklingt und sich die Wellenausbreitung nur in positiver z -Richtung, also weg von der Halbraumoberfläche, fortsetzt.

Die übrigen unbekannten Koeffizienten A_1, B_{x1}, B_{y1} werden durch die Randbedingung an der Halbraumoberfläche hergeleitet, da die angreifende Belastung mit der Spannung an der Oberfläche im Gleichgewicht stehen muss [Müller 2007].

Um nun die Spannungen und Verschiebungen im Originalraum (x, y und z) zu erhalten, erfolgt eine mehrfache Fourier-Rücktransformation.

3.3 Fundamentalsystem Vollraum mit zylindrischem Hohlraum

Im Gegensatz zur Lösungsfindung im Halbraum, werden die im Kapitel (2.3) hergeleiteten Potentiale Φ und Ψ_i für das System Vollraum mit zylindrischem Hohlraum in Zylinderkoordinaten beschrieben.

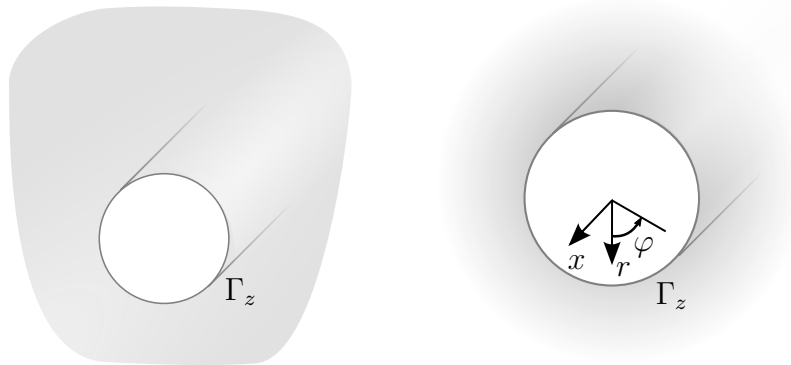


Abbildung 3.2: Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (rechts) und Zylinderkoordinaten (links) [Freisinger 2022]

Wie in der Abbildung (3.2) dargestellt, wird die räumliche Lage eines Punktes durch die Koordinaten x, r und ϕ beschrieben, wobei x die longitudinale, r die radiale und ϕ die umlaufende Koordinate darstellt Freisinger [2022].

Da das Vektorpotential in Zylinderkoordinaten nicht direkt zu entkoppelten Gleichungen führt [Hackenberg 2016], zeigt Frühe [2010], dass das Vektorfeld Ψ_i unter der Zusatzbedingung, dass es quellfrei ist, durch zwei voneinander unabhängige Skalarfunktionen ψ und χ dargestellt werden kann. Mithilfe dieser erweiterten Helmholtz-Zerlegung lassen sich schließlich wieder entkoppelte partielle Differentialgleichungen gewinnen, die sich wie folgt darstellen lassen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (3.6a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (3.6b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (3.6c)$$

Analog zum Vorgehen in Kapitel (3.2) werden die partiellen Differentialgleichungen über eine Überführung mittels Fouriertransformation gelöst. Dabei genügt, anders als in kartesischen Koordinaten, beim zylindrischen Hohlraum eine zweifache Fouriertransformation bezüglich der Ortskoordinate x in die Wellenzahlen k_x sowie die Zeit t in den Frequenzbereich ($x \circ \longrightarrow k_x, t \circ \longrightarrow \omega$). Die Ortskoordinate r bleibt dabei untransformiert.

Das resultierende System gewöhnlicher Differentialgleichungen lässt sich nach Frühe [2010] darstellen durch:

$$\left[-k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + k_p^2 \right] \hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (3.7a)$$

$$\left[-k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + k_s^2 \right] \hat{\psi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (3.7b)$$

$$\left[-k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + k_s^2 \right] \hat{\chi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (3.7c)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (3.7) leitet sich durch die Anwendung von Hankelfunktionen her. Die daraus resultierenden Verschiebungen \hat{u}_z ergeben sich zu:

$$\hat{u}_z = [\hat{H}_z] \cdot C_z \quad (3.8)$$

Der Index ($_z$) steht dabei für den Vollraum mit zylindrischem Hohlraum, der durch Zylinderkoordinaten beschrieben wird.

Analog zur Herleitung der Spannungen im Halbraum $\hat{\sigma}_k$ ergeben sich die Spannungen in Zylinderkoordinaten $\hat{\sigma}_z$ aus der Verschiebung, der Verschiebungs- und der Spannungs-Verzerrungsbeziehung sowie einer Transformation in den Bildraum.

$$\hat{\sigma}_z = [\hat{K}_z] \cdot C_z \quad (3.9)$$

Dabei enthalten die Matrizen $[\hat{H}_z]$ und $[\hat{K}_z]$ wieder Einträge, die aus dem gewählten Lösungsansatz resultieren.

Eine ausführliche Herleitung der Gleichungen (3.8) und (3.9), sowie die konkreten Einträge der Vektoren und Matrizen ist neben in der Arbeit von Frühe [2010] auch in der Dissertation von Müller [2007] zu finden.

Analog zu den Gleichungen (3.4) und (3.5) enthält der Vektor C_z ebenfalls sechs unbekannte Koeffizienten, die mittels Randbedingungen ermittelt werden.

Drei davon ergeben sich aus der Bedingung, dass sich die Amplituden der Wellen mit zunehmender Entfernung von der Belastung abnehmen und sich nur vom Ort der Belastung ausbreiten. Die übrigen Unbekannten werden über die Bedingung bestimmt, dass die eingeleitete Last am Zylinderrand mit den Spannungen im Gleichgewicht steht [Frühe 2010].

Um die Spannungen und Verschiebungen im Originalraum (x , r und ϕ) zu erhalten erfolgt eine erneute mehrfache Fourier-Rücktransformation.

3.4 Überlagerung der Fundamentalsysteme

Eine Lösung für das komplexe System Halbraum mit zylindrischem Hohlraum wird durch Überlagerung der in Kapitel (3.2) und (3.3) beschriebenen Fundamentalsysteme ermittelt.

Dafür werden die beiden Fundamentalsysteme Halbraum und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum an einer gemeinsamen, fiktiven Kopplungsfläche miteinander verknüpft. An dieser Fläche müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Einerseits muss ein Kräftegleichgewicht herrschen, sodass sich die aufgebrachten Spannungen der beiden Teilsysteme gegenseitig aufheben. Andererseits müssen die Verschiebungen der beiden Teilsysteme an der Kopplungsfläche identisch sein.

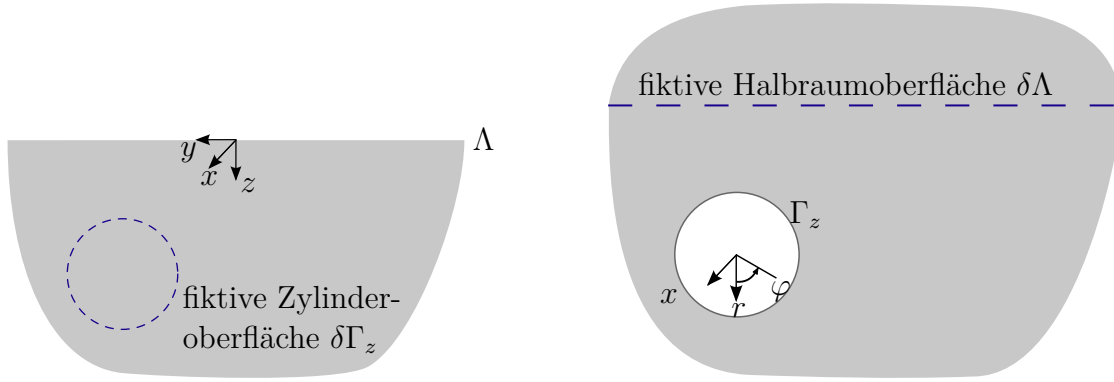


Abbildung 3.3: Fundamentalsysteme Halbraum (rechts) und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (links) mit fiktiven Überlagerungsflächen - basiert auf Freisinger [2022]

Wie in Abbildung (3.3) dargestellt, wird zu diesem Zweck im Halbraum an der Stelle, an der sich der Tunnel befindet, eine fiktive Zylinderoberfläche $\delta\Gamma_z$ eingeführt. Im Vollraum mit zylindrischem Hohlraum wird entsprechend der Bodenoberfläche eine fiktive Halbraumoberfläche $\delta\Lambda$ eingeführt. Entlang dieser Schnittflächen werden die genannten Randbedingungen formuliert und die Lösungen beider Teilsysteme miteinander kombiniert [Müller 2007].

Da die Spannungs- und Verschiebungsgrößen der beiden Teilsysteme in unterschiedlichen Koordinatensystemen vorliegen, ist eine Koordinatentransformation erforderlich. Frühe [2010] definiert hierfür die Transformationsmatrix (3.10), mit der die Größen zwischen den beiden Systemen umgerechnet werden können.

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Mithilfe der Matrix (3.10) können Koordinatensysteme umgerechnet werden, sodass die Kopplungsbedingungen über die Verschiebungen \hat{u} und die Spannungen $\hat{\sigma}$ formuliert und durchgeführt werden können.

Eine detaillierte Herleitung der Kopplungsbedingungen ist in den Dissertationen von Frühe [2010], Hackenberg [2016] und Freisinger [2022] zu finden.

3.5 Dynamische Steifigkeitsmatrix des ITM-Teilsystems

Die Kopplung der Lösungen der ITM und der FEM erfolgt in Kapitel (5) mittels der dynamischen Steifigkeitsmatrix der Berechnungsmethoden. Aus diesem Grund ist es erforderlich, die Steifigkeitsmatrix für die ITM noch zu ermitteln.

Zur besseren Nachvollziehbarkeit im Kopplungskapitel (5) werden die Vektoren und Matrizen mit dem Index ITM versehen.

Die Berechnung der dynamischen Steifigkeitsmatrix erfolgt gemäß der folgenden allgemeinen Beziehung:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{ITM}} \hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} \quad (3.11)$$

Wie in der Dissertation von Hackenberg [2016] dargestellt, wird das Verschiebungsfeld $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}}$ mit den Amplituden \mathbf{C} und dem Verschiebungs-Operator $\hat{\mathbf{U}}_{\text{ITM}}$. Außerdem wird der Lastvektor $\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}}$ mit den Amplituden \mathbf{C} und einem Spannungs-Operator, resultierend aus den Randbedingungen, $\hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}}$ dargestellt.

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}} \mathbf{C} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}}, \quad (3.12a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{ITM}} \mathbf{C}. \quad (3.12b)$$

Im nächsten Schritt werden die Beziehungen aus der Gleichung (3.12) in die Gleichung (3.11) eingesetzt, um die dynamische Steifigkeitsmatrix zu ermitteln.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{ITM}} \hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} \quad (3.13a)$$

$$\text{mit } \hat{\mathbf{K}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}} \hat{\mathbf{U}}_{\text{ITM}}^{-1} \quad (3.13b)$$

Um die in Kapitel (5) beschriebene Kopplung durchzuführen, ist es erforderlich, die herangezogene Gleichung (3.11) in Blockdarstellung, getrennt auf die beiden Koppelflächen Λ und Γ darzustellen.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Lambda\Lambda_{\text{ITM}}} & \hat{\mathbf{K}}_{\Lambda\Gamma_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Lambda_{\text{ITM}}} & \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma_{\text{ITM}}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_{\text{ITM}}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Lambda_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Lambda_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Für eine detaillierte Herleitung wird auf die Dissertationen von Hackenberg [2016] und Freisinger [2022] verwiesen.

4 Finite Elemente Methode

4.1 Vorbemerkung

Die ITM eignet sich zwar sehr gut für die Modellierung unendlicher Böden, für die Berechnung komplexerer Geometrien ist sie jedoch ungeeignet. Für die Geometrie im Tunnelbereich wird daher die Finite-Elemente-Methode (FEM) herangezogen.

Die Implementierung erfolgt dabei im fouriertransformierten Raum. Dadurch wird der hohe Rechenaufwand reduziert, da die longitudinale Koordinate x in den Wellenzahlbereich k_x überführt wird ($x \circ \bullet k_x$). Somit kann der konstante Tunnelquerschnitt mittels finiter Elemente auf ein zweidimensionales Problem heruntergebrochen werden [Frühe 2010].

Um im Anschluss die Lösungen der ITM- und FEM-Systeme zu einer Lösung des Gesamtsystems zu koppeln, ist zudem eine Teillösung im selben Fourier-Raum erforderlich. Daher findet eine zusätzliche Überführung der Zeit t in den Frequenzbereich ω statt ($t \circ \bullet \omega$).

Daher ist lediglich eine Diskretisierung in der y-z-Ebene erforderlich, die für jedes Wertepaar von k_x und ω separat ausgewertet wird. Dieser reduzierte Ansatz wird als 2,5-dimensional bezeichnet ?.

4.2 FE-Netz durch degenerierte Dreiecke

Die zu untersuchende Geometrie Halbraum mit zylindrischem Hohlraum wurde bereits im gekoppelten ITM-FEM-Ansatz von Hackenberg [2016] und Freisinger [2022] untersucht. In den vorliegenden Dissertationen wurde der Tunnel durch ein FE-Netz bestehend aus quadranguläre Elementen analysiert (verweis auf 4node FE Mesh darunter). Die Implementation in *MATLAB*TM dient dieser Arbeit als Grundlage.

..... hier von FE-mesh 4node einfügen

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die Analyse des Tunnels weiterzuentwickeln. Zu diesem Zweck wird eine Umstellung des FE-Netzes von quadranguläre auf trianguläre Elemente vorgenommen.

Die Realisierung dieses Ziels könnte durch die Implementierung eines FE-Netzes mit vollständig neuen Elementen erfolgen. Nach diesem Ansatz wird durch den Code die Generierung von finiten Elementen mit drei Knotenpunkten initiiert.

Um eine möglichst hohe Ähnlichkeit zum Originalcode von Hackenberg [2016] und Freisinger [2022] zu gewährleisten, wurde sich für den Degenerationsansatz entschieden.

? präsentiert diesen Ansatz als eine Möglichkeit, lineare Dreiecke aus der Degeneration von linearen Vierecken zu gewinnen. Hierbei werden zwei benachbarte Knoten eines 4-Knoten-Elements übereinandergelegt, sodass diese identische Koordinaten aufweisen. In der Folge degeneriert das Rechteckselement topologisch zu einem Dreieck (vgl. Abbildung unten)

... Abbildung aus Zienkiewicz zeichnen \rightarrow aus 4node zu 3 node ...

Im Rahmen der Implementierung erfolgt eine Löschung der doppelten Information des vierten Knotens an entsprechender Stelle, sodass im weiteren Verlauf von einem triangulären Element mit drei Knoten ausgegangen werden kann.

Nach erfolgter Degenerierung liegen lineare, trianguläre Elemente mit drei Knotenpunkten vor, die jeweils drei Verschiebungsfreiheitsgrade u_x, u_y, u_z besitzen (verweis auf Abbildung drunter).

....2,5 dimensionales finites Element dreieck mit verschiebungen an Knoten angezeichnet!
 \rightarrow Fig 4.2 Hackenberg ...

Diese Freiheitsgrade lassen sich in einen Knotenverschiebungsvektor $\tilde{\mathbf{u}}_n^T$ zusammenfassen:

$$\tilde{\mathbf{u}}_n^T = (\tilde{u}_{x1} \ \tilde{u}_{y1} \ \tilde{u}_{z1} \ \tilde{u}_{x2} \ \tilde{u}_{y2} \ \tilde{u}_{z2} \ \tilde{u}_{x3} \ \tilde{u}_{y3} \ \tilde{u}_{z3}). \quad (4.1)$$

Mittels Ansatzfunktionen werden die Verschiebungsfelder innerhalb der Dreiecke interpoliert. Für degenerierte Dreiecke formuliert ? die Ansatzfunktionen durch die Koordinaten $\eta, \zeta \in$

$[-1,1]$ zu:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \zeta)(1 - \eta), \quad (4.2a)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \zeta)(1 - \eta), \quad (4.2b)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} (1 + \eta). \quad (4.2c)$$

Es besteht demnach folgende Beziehung zwischen dem Verschiebungsfeld $\tilde{\mathbf{u}}$ und dem Knotenverschiebungsvektor $\tilde{\mathbf{u}}_n$:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \tilde{\mathbf{u}}_n. \quad (4.3)$$

Die Matrix \mathbf{N} enthält dabei die Ansatzfunktionen N_1, N_2, N_3 und lässt sich wie folgt formulieren:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1(\eta, \zeta) & 0 & 0 & N_2(\eta, \zeta) & 0 & 0 & N_3(\eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\eta, \zeta) & 0 & 0 & N_2(\eta, \zeta) & 0 & 0 & N_3(\eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\eta, \zeta) & 0 & 0 & N_2(\eta, \zeta) & 0 & 0 & N_3(\eta, \zeta) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Für die nachfolgende Berechnung werden sowohl die Matrix \mathbf{N} als auch die Matrix $\bar{\mathbf{B}}$ herangezogen. Diese beinhaltet die Ableitungen der Ansatzfunktionen (4.2) im Wellenzahlbereich k_x , um Verzerrungen aus den Knotenverschiebungen zu berechnen [Hackenberg 2016]. Die Einträge dieser Matrix sind im Anhang (A.2) zu finden.

4.3 Dynamische Steifigkeitsmatrix des 2,5D FEM-Teilsystems

Die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix erfolgt gemäß dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (PvA) im zweifach fouriertransformierten Wellenzahl-Frequenz-Raum. Dieses Prinzip besagt, dass die Summe aller virtuellen Arbeiten, die durch die im System wirkenden Kräfte verursacht werden, gleich null sein muss. Für das elastische Kontinuum setzen sich die Arbeitsanteile aus der inneren virtuellen Arbeit δW_i , der virtuellen Arbeit infolge der d'Alembert'schen Trägheit δW_T und der äußeren virtuellen Arbeit δW_a zusammen [?]:

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_T + \delta W_a = 0. \quad (4.5)$$

Da die Berechnung im k_x - ω -Bereich erfolgt, müssen die virtuellen Arbeitsanteile im transformierten Raum formuliert werden. Im weiteren Verlauf werden die zweifach fouriertransformierten Größen mit der Notation $\tilde{}$ versehen.

Unter Berücksichtigung der Ansatzfunktionen (4.2) sowie der Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung $\tilde{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}}_n$ und der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung $\tilde{\sigma} = \mathbf{D} \tilde{\varepsilon}$, kann das Prinzip der virtuellen Arbeiten (4.5) nach Freisinger [2022] wie folgt umformuliert werden:

$$-\delta \tilde{\mathbf{u}}_n^H \underbrace{\left(\int_{(A)} \bar{\mathbf{B}}^H \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dA \right)}_{\bar{\mathbf{K}}} \tilde{\mathbf{u}}_n + \delta \tilde{\mathbf{u}}_n^H \underbrace{\left(\int_{(A)} \mathbf{N}^H \tilde{\mathbf{p}} dA \right)}_{\tilde{\mathbf{p}}_n} + \delta \tilde{\mathbf{u}}_n^H \omega^2 \underbrace{\left(\int_{(A)} \rho \mathbf{N}^H \mathbf{N} dA \right)}_{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{u}}_n = 0. \quad (4.6)$$

Das Symbol $^{(H)}$ kennzeichnet dabei hermitesche Matrizen, die transponiert und anschließend komplex konjugiert wurden [Hackenberg 2016].

In Gleichung (4.6) sind zum einen die Matrizen \mathbf{N} und $\bar{\mathbf{B}}$ enthalten, die sich aus den Ansatzfunktionen ergeben (Gleichungen (4.4) und (A.3)). Außerdem findet sich auch der Knotenverschiebungsvektor $\tilde{\mathbf{u}}_n$ aus Gleichung (4.3) wieder. Des Weiteren ist die Elastizitätsmatrix \mathbf{D} enthalten, welche sich ergibt zu:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Die Laméschen Konstanten λ und μ wurden bereits in Gleichung (2.2) eingeführt und enthalten dabei die elastischen Größen.

Aus der Gleichung (4.6) lassen sich zudem die Beziehungen für die Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}(k_x)$, den nodalen Lastvektor $\tilde{\mathbf{p}}_n$ und die Massenmatrix \mathbf{M} erkennen. Die Lösung dieser Integrale erfolgt numerisch im nachfolgenden Kapitel (4.4).

Die Gleichung (4.6) lässt sich mithilfe der gelösten Integrale in der für die FEM typischen

Formulierung darstellen:

$$\bar{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}}_n - \omega^2 \bar{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{u}}_n = \underbrace{(\bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}})}_{\text{dyn. Steifigkeitsmatrix}} \tilde{\mathbf{u}}_n = \tilde{\mathbf{p}}_n. \quad (4.8)$$

mit der dynamische Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}(k_x, \omega) = \bar{\mathbf{K}} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}$.

Die Kopplung der beiden Teilsysteme FEM und ITM wird in Kapitel (5) durch die dynamischen Steifigkeitsmatrizen der Berechnungsmethoden durchgeführt.

Hackenberg [2016] formuliert dafür eine Matrix in Blockdarstellung, in deren System die Freiheitsgrade innerhalb des FE-Netzes Ω von denen an der Kopplungsfläche Γ getrennt werden.

Zur besseren Nachvollziehbarkeit im Kopplungskapitel (5) werden die Vektoren und Matrizen mit dem Index FE versehen.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma_{\text{FE}}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega_{\text{FE}}} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma_{\text{FE}}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega_{\text{FE}}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_{\Gamma_{\text{FE}}} \\ \tilde{\mathbf{p}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

4.4 Numerische Implementation

Im Implementierungsprozess werden die in Gleichung (4.6) dargestellten Integrale der Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}$ und der Massenmatrix $\bar{\mathbf{M}}$ numerisch gelöst.

Für die numerische Integration existieren mehrere Optionen. Es besteht die Möglichkeit, das Integrationsintervall in n äquisidistant angeordnete Abschnitte zu unterteilen und es anschließend über $n+1$ Stützstellen zu integrieren. Dieses Verfahren wird auch als Newton-Cotes-Quadratur bezeichnet und wird sowohl in [1] als auch in [2] vorgestellt.

Im Rahmen der Integration in der FEM findet in der Regel die Gauß'sche Quadraturformel aufgrund ihrer hohen Genauigkeit Anwendung, welche auf einen gewichteten Ansatz und optimierte Stützstellen zurückgreift.

In der von Hackenberg [2016] entwickelten Implementierung werden dafür vier Gaußpunkte verwendet mit je 2 Gaußpunkte je Koordinatenrichtung

Sodass letztendlich die Integrale aus Gleichung (4.6) numerisch lösen lassen zu:

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{k=1}^{n_{\text{GP}}} \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k}_x, \eta_{\mathbf{k}}, \zeta_{\mathbf{k}})^{\text{H}} \mathbf{D}' \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k}_x, \eta_{\mathbf{k}}, \zeta_{\mathbf{k}}) \det(\mathbf{J}) w_k \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n_{\text{GP}}} \rho \mathbf{N}(\eta_{\mathbf{k}}, \zeta_{\mathbf{k}})^{\text{H}} \mathbf{N}(\eta_{\mathbf{k}}, \zeta_{\mathbf{k}}) \det(\mathbf{J}) w_k \quad (4.10b)$$

Wobei die Jacobi Matrix \mathbf{J} die Transformation and Relation der Elementkoordinaten und globalen Koordinaten herstellt

5 Kopplung der FEM mit der ITM

5.1 Vorbemerkung

Die Auswertung der Lösung für das Gesamtsystem erfordert eine Kopplung der Berechnungsmethoden ITM und FEM. Die Kopplung der beiden Berechnungsmethoden wird durch die Übergangsbedingungen an der Kopplungsfläche Γ erreicht, da an diesen Stellen zum einen ein Kräftegleichgewicht herrschen muss und zudem die Verschiebungen identisch sein müssen.

Die Bedingungen für die Kopplung werden im Kapitel (5.3) erläutert. Im Vorfeld ist zu berücksichtigen, dass die Teillösungen sich auf die gleichen Koordinaten beziehen müssen. Daher ist im Vorfeld eine Transformation notwendig, die im Kapitel (5.2) vorgestellt wird.

..... Hier noch Größere Abbildung von gekoppelten Mesh reinmachen!!!.....MT Pfleger 3.12 für mich abzeichnen!s

5.2 Transformation der Lösung des FE-Systems

Bei der Kopplung ist zu berücksichtigen, dass die hergeleiteten Lösungen sich auf unterschiedliche Koordinatensysteme beziehen sowie in verschiedenen Fourierräumen liegen, wie in der folgenden Übersicht (5.1) dargestellt: Im Rahmen der Formulierung der genannten Über-

	FEM	ITM
Koordinatensystem auf Γ	kartesisch (x,y,z)	Zylinderkoordinaten (x,r,φ)
Fourier-Raum	zweifachtransformiert (k_x,ω)	dreifachtransformiert (k_x,n,ω)

Tabelle 5.1: Übersicht der Fourierräume und Koordinatensysteme von FEM und ITM.

gangsbedingungen ist es erforderlich, dass sich die Lösungen der Teilsysteme auf identische Größen beziehen. Für die Kopplung ist demnach eine Transformation an der Kopplungsfläche Γ erforderlich. Gemäß ? erfolgt die Transformation der Lösung des FEM-Systems in das der ITM.

Zunächst werden die Verschiebungen des FEM-Systems in das Zylinderkoordinatensystem der ITM-Lösung übertragen. Dafür greift Frühe [2010] erneut die Transformationsmatrix β aus Gleichung (3.10) auf und formuliert den Wechsel der Koordinatensysteme von kartesisch zu Zylinderkoordinaten wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}},k} = \mathbf{T}_1 \tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}},z} \quad (5.1)$$

Dabei werden die Größen im kartesischen Koordinatensystem fortfolgend mit k bezeichnet, während das Zylinderkoordinatensystem mit z gekennzeichnet wird. Die Einträge der Matrix \mathbf{T}_1 sind im Anhang (A.3.1) aufgeführt.

Im nächsten Schritt ist es erforderlich, $\tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}},z}$ in den selben Fourierraum zu übertragen. Zu diesem Zweck wird eine Fourier-Reihenentwicklung bezüglich des Umfangs der zylindrischen Kopplungsfläche Γ durchgeführt [Hackenberg 2016]:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}},z} = \mathbf{T}_2 \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}},z} \quad (5.2)$$

Wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln aufgeführt, werden zweifach fouriertransformierte Größen mit $\tilde{\cdot}$ bezeichnet, während dreifach fouriertransformierte Größen mit $\hat{\cdot}$ gekennzeichnet werden. Die konkreten Einträge der Matrix \mathbf{T}_2 sind erneut im Anhang (A.3.2) zu finden.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass durch die Anwendung der Transformationsmatrix \mathbf{T} eine Transformation auf einheitliche Koordinaten (k_x, r, n, ω) erzielt werden kann.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\Gamma,\text{FE},k} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma,\text{FE},z} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma,\text{FE},z} \quad (5.3)$$

Analog dazu erfolgt ebenfalls die Transformation des Lastvektor in die Koordinaten der ITM-Lösung (k_x, r, n, ω) mithilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T} :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma,\text{FE},k} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma,\text{FE},z} \quad (5.4)$$

5.3 Kopplung

Nachdem sich die Lösungen der Teilsysteme FEM und ITM nun auf die gleichen Koordinatensysteme beziehen, können im weiteren Verlauf die zu Beginn dieses Kapitels (5.1)

angegebenen Kopplungsbedingungen angewendet werden.

Einerseits wird gefordert, dass die Verschiebungen der Teilsysteme an der Kopplungsfläche identisch sind. Daraus ergibt sich die erste Kopplungsbedingung zu:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FEM}}} = \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} . \quad (5.5)$$

Des Weiteren ist es essenziell, dass an der Kopplungsfläche Γ die auftretenden Kräfte in einem Gleichgewichtszustand sind. Die Lasten der ITM und FEM müssen mit einer potentiellen Randlast auf der Kopplungsfläche Γ im Gleichgewicht stehen. Die zweite Kopplungsbedingung lautet daher wie folgt:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma, \text{ITM}} + \frac{1}{ds} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma, \text{FE}} = \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma} . \quad (5.6)$$

Der Nenner ds wird dabei verwendet, um die knotenweisen FEM-Lasten in stetige Spannungen entlang der Kopplungsfläche umzuwandeln Hackenberg [2016].

Hackenberg [2016] kombiniert die Kopplungsbedingungen (5.5) sowie (5.6) mit den Lösungen der Teilsysteme in den Gleichungen (3.14) und (4.9), sodass das folgende Blocksystem resultiert:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Lambda\Lambda_{\text{ITM}}} & \hat{\mathbf{K}}_{\Lambda\Gamma_{\text{ITM}}} & 0 \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Lambda_{\text{ITM}}} & \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma_{\text{ITM}}} + \frac{1}{ds} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma_{\text{FE}}} \mathbf{T} & \frac{1}{ds} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega_{\text{FE}}} \\ 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma_{\text{FE}}} \mathbf{T} & \tilde{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega_{\text{FE}}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Lambda_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Lambda_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} . \quad (5.7)$$

Das Resultat ist ein System, das Unbekannte auf der Halbraumoberfläche Λ , der gemeinsamen Kopplungsfläche Γ sowie im Inneren des FE-Feldes Ω enthält.

Um eine Endlösung des gekoppelten Systems zu erhalten, müssen die Größen mittels Inverser Fouriertransformation aus dem Fourierraum in den Originalraum zurückgeführt werden. Erst dann sind die Teilsysteme final auswertbar gekoppelt.

A Anhang

A.1 Verschiebungs und Spannungs Matrizen in kartesischen Koordinaten

Die Lösung der Verschiebungen \hat{u}_k in Kapitel (3.2) lassen sich nach Frühe [2010] wie folgt darstellen:

$$\hat{\mathbf{u}}_k = [\hat{\mathbf{H}}_k] \mathbf{C}_k \quad (\text{A.1a})$$

mit

$$[\hat{\mathbf{H}}_k] = \begin{bmatrix} i k_x e^{\lambda_1 z} & i k_x e^{-\lambda_1 z} & 0 & -\lambda_2 e^{\lambda_2 z} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 \\ i k_y e^{\lambda_1 z} & i k_y e^{-\lambda_1 z} & \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & -i k_y e^{\lambda_2 z} & -i k_y e^{-\lambda_2 z} & i k_x e^{\lambda_2 z} & i k_x e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1b})$$

$$\mathbf{C}_k^\top = (A_1 \quad A_2 \quad B_{x1} \quad B_{x2} \quad B_{y1} \quad B_{y2}) \quad (\text{A.1c})$$

Darauf aufbauend beschreibt Müller [2007] die Spannungen $\hat{\sigma}_k$ durch:

$$\hat{\sigma}_k = [\hat{\mathbf{K}}_k] \mathbf{C}_k \quad (\text{A.2a})$$

mit

$$[\hat{\mathbf{K}}_k] = \mu \begin{bmatrix} -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) e^{\lambda_1 z} & -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & -2ik_x \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & 2ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) e^{\lambda_1 z} & -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu} k_p^2) e^{-\lambda_1 z} & 2ik_y \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -2ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ (2k_r^2 - k_s^2) e^{\lambda_1 z} & (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_1 z} & -2ik_y \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & 2ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 2ik_x \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -2ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ -2k_x k_y e^{\lambda_1 z} & -2k_x k_y e^{-\lambda_1 z} & ik_x \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & -ik_y \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ 2ik_y \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & -2ik_y \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{\lambda_2 z} & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{-\lambda_2 z} & -k_x k_y e^{\lambda_2 z} & -k_x k_y e^{-\lambda_2 z} \\ 2ik_x \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & -2ik_x \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & k_x k_y e^{\lambda_2 z} & k_x k_y e^{-\lambda_2 z} & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{\lambda_2 z} & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2b})$$

A.2 Ableitungsmatrix $\bar{\mathbf{B}}$ zur FE-Berechnung

Im Rahmen der FE-Berechnung werden die degenriereten Dreiecke mit den Ansatzfunktionen (4.2) berücksichtigt. In der vorliegenden Berechnung wird in Kapitel (4.3) neben der Matrix \mathbf{N} aus Gleichung (4.4) auch die Matrix $\bar{\mathbf{B}}$ berücksichtigt, welche die Ableitungen der Ansatzfunktionen (4.2) im Wellenzahlbereich k_x beinhaltet [Hackenberg 2016].

Die Einträge dieser Matrix ergeben sich zu:

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} ik_x N_1(\eta, \zeta) & 0 & 0 & ik_x N_2(\eta, \zeta) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1(\eta, \zeta)}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2(\eta, \zeta)}{\partial y} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1(\eta, \zeta)}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2(\eta, \zeta)}{\partial z} & \dots \\ \frac{\partial N_1(\eta, \zeta)}{\partial y} & ik_x N_1(\eta, \zeta) & 0 & \frac{\partial N_2(\eta, \zeta)}{\partial y} & ik_x N_2(\eta, \zeta) & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1(\eta, \zeta)}{\partial z} & \frac{\partial N_1(\eta, \zeta)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2(\eta, \zeta)}{\partial z} & \frac{\partial N_2(\eta, \zeta)}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1(\eta, \zeta)}{\partial z} & 0 & ik_x N_1(\eta, \zeta) & \frac{\partial N_2(\eta, \zeta)}{\partial z} & 0 & ik_x N_2(\eta, \zeta) & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Die nicht ausgeschriebenen Spalten setzen das Muster für N_3 fort.

A.3 Transformations Matrizen zur Kopplung

A.3.1 Koordinatentransformationsmatrix \mathbf{T}_1

Um die Teilsysteme FEM und ITM in Kapitel (5) zu koppeln, müssen sich die Größen auf ein einheitliches Koordinatensystem beziehen. Dafür verwendet Frühe [2010] die transponierte Transformationsmatrix β^T aus Gleichung (3.10) zur Transformation der Lösung des FEM-Teilsystems auf Zylinderkoordinaten nach Gleichung (5.1).

Die Einträge der Transformationsmatrix \mathbf{T}_1 ergeben sich wie folgt:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_3 & -\cos \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.3.2 Fouriertransformationsmatrix \mathbf{T}_2

Nach Anwendung der Koordinatentransformation ist eine Fourier-Reihenentwicklung bezüglich des Umfangs der Kopplungsfläche erforderlich. Hackenberg [2016] zieht dafür in der Gleichung (5.2) die Matrix \mathbf{T}_2 heran, deren Einträge sich wie folgt ergeben:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} e^{in_1\varphi_1} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{in_1\varphi_1} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{in_1\varphi_1} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_1} & \dots \\ e^{in_1\varphi_2} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{in_1\varphi_2} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{in_1\varphi_2} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A.4 Verwendete Software

A.4.1 Maple™

Maple™ ist ein kommerzielles Mathematik-Paket der Firma Maplesoft. Seine Stärke liegt darin, dass es mathematische Ausdrücke algebraisch verarbeiten kann. Im vorliegenden Fall werden auf diese Weise Ableitungen und Integrale berechnet, ohne auf numerische Aspekte

Rücksicht zu nehmen. Dies ermöglicht einen kurzen und trotzdem voll funktionalen Code. *MapleTM* wurde in den Version 12 und 14 verwendet.

Internet: <http://www.maplesoft.com/>

A.4.2 gnuplot

gnuplot wurde verwendet, um für diese Arbeit Diagramme und Plots anzufertigen. Es ist ein interaktives, Kommandozeilen-gesteuertes Programm, das auf fast allen gängigen Betriebssystemen lauffähig ist. Es ist in der Lage, sowohl 2D als auch 3D Plots zu erstellen und diese in verschiedenen Dateiformaten zu exportieren. *gnuplot* ist ein Open Source Projekt und wird immer noch weiterentwickelt. Hier wurde die zum Zeitpunkt der Niederschrift aktuelle Version 4.2.3 verwendet.

Internet: <http://www.gnuplot.info/> die Anzahl der Knoten auf 1000 beschränkt ist. Glücklicher Weise ist die in der REM eine annehmbare Menge, mit der sich durchaus einige Problemen behandeln lassen.

A.4.3 MATLAB

MATLABTM ist ein kommerzielles Software-Paket der Firma MathWorks. Seine Stärke liegt in der Programmierung und numerischen Berechnung zur Analyse von Daten. In der vorliegenden Arbeit werden mit *MATLABTM* Simulationsergebnisse ausgewertet und Verifikationsplots erzeugt. *MATLABTM* wurde in der Version R2023a verwendet.

A.5 Maple™-Programm für ein 2D-Problem

Literaturverzeichnis

- [Freisinger 2022] FREISINGER, Julian M.: *Harmonic and transient three-dimensional Structure-Soil_streucture_interaction_{ap}plying_acoupledITM* – *FEMapproach*, Ph.D.thesis, 2022
- [Frühe 2010] FRÜHE, Georg: *Überlagerung von Grundlösungen in der Elastodynamik zur Behandlung der dynamischenTunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion*, Ph.D. thesis, 2010
- [Hackenberg 2016] HACKENBERG, Manuela: *A Coupled Integral Transform Method - Finite Element Method Approach to Model the Soil-Structure-Interaction*, Ph.D. thesis, 2016
- [Haupt 1986] HAUPT, Wolfgang: *Bodendynamik: Grundlagen und Anwendung*. (1986)
- [Lamé 1852] LAMÉ, Gabriel: *Lecons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides*. (1852)
- [Müller 2007] MÜLLER, Kai: *Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion*, Ph.D. thesis, 2007