09级第二学期高等数学（一）期末考试A题答案

学院_________专业____________学号___________姓名__________评分_________

阅卷老师签名_______________

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

一。解答下列各题（共10小题，每小题7分）

1. $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$，其中$D$是由$y=x$和$y=x^2$所围成。

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx=-\cos x+x\cos x-\sin x\Big|_0^1=1-\sin 1$$

2. 求曲面$x^2+y^2=z$，$x^2+y^2=4$及xoy平面所围成的立体体积。

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=8\pi$$

3. 计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$是沿曲线$x^2+y^2=1$正向一周。

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=2\pi$$

4. 求 $I=\int_L yds$, 其中L是圆周$x^2+y^2=1$.

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx=0$$

5. 求微分方程$y''+3y'+2y=2$的通解。

解：特征方程$\lambda^2+3\lambda+2=0\ \therefore\ \lambda=-2,\lambda=-1$

齐次方程通解为：$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}$

设非齐次方程的特解为：$y^*=A$, 代人解得$A=1$,

非齐次方程的通解为：$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+1$

6. 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n^2}$的敛散性，若收敛，指出是绝对收敛还是条件收敛。

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2}=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n^2}$是交错级数，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2}=0$，设 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$,则$f'(x)=-\frac{2(x-1)}{x^3}$，当$x>1$时，

$f'(x)<0,\therefore\frac{2n-1}{n^2}$递减,由 leibiniz 判别法，可得收敛，

因此，级数条件收敛。

7. 求无界函数的广义积分$\int_1^{e}\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

$$\int_1^{e}\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx=\int_1^{e}\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d\ln x=\arcsin\ln x\,|_1^e=\frac{\pi}{2}$$

8. 判定积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x}}$的敛散性.

$x=0$是瑕点，

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=1，\quad 而\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\frac{3}{2}收敛$$

所以，积分收敛

9. 判别$\int_1^{\infty}\frac{x\cos x}{1+x^2}dx$的敛散性

$$|\int_1^A\cos dx|=|\sin A-\sin 1|\le 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0,(\frac{x}{1+x^2})'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0,(x>1),\therefore\frac{x}{1+x^2}单调递减$$

$\therefore$由狄里克雷判别法可得收敛

10. 在区间$(-\pi,\pi)$内把函数 $f(x)=x$展开为付立叶级数.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx dx=0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$\therefore x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx \qquad x\in(-\pi,\pi)$$

二。解答下列各题（共 5 小题，每小题 6 分）

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的和函数和收敛域

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = 1$$

$$x=1\text{时},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\text{发散，}\ x=-1\text{时},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1},\text{发散}$$

$\therefore$ 收敛域为：（$-1,1$）

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n+1})x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\frac{x}{1-x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{x}{1-x}dx=-\frac{1}{x}\ln(1-x)-1$$

$$S(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1$$

2. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x+2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数。

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{3})^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}$$

$$-1<\frac{x-1}{3}<1,\text{解得}x\in(-2,4)$$

3．判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^4+n^2x^2}\quad -\infty<x<+\infty$ 的一致收敛性.

$$\left|\frac{x}{n^4+n^2x^2}\right|\le\left|\frac{x}{2n^3x}\right|=\frac{1}{2n^3}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3}$ 收敛，由强级数判别法，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^4+n^2x^2}$ 在 R 上一致收敛。

4 求积分 $g(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+\cos^2x)dx,\quad a\neq 0$

$$f(x,a)=\ln(a^2\sin^2x+\cos^2x),\quad f_a'(x,a)=\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+\cos^2x}$$

当 $x\neq a,\ f(x,a),\ f_a'(x,a)$在$[0,\frac{\pi}{2}]X(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$连续，$\therefore\ g(a)$可导，

$$g'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\tan^2x}{a^2\tan^2x+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2at^2}{a^2t^2+1}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{2a}{a^2-1}[\arctan t-\frac{1}{a}\arctan(at)]_0^{+\infty}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{a+1} & a>0\\ \dfrac{\pi}{a-1} & a<0\end{cases}$$

$g(a)=\int g'(a)da=\pi\ln(|a|+1)+c$

$\because g(1)=0$得$c=-\pi\ln 2$

$\therefore g(a)=\pi\ln\frac{1+|a|}{2}$

5．设函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，且对于任意光滑曲面 Σ，有 $\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$。证明：在 $\mathbf{R}^3$ 上，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$。

证：反证法。若存在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，使得 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$，不妨设 $(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})_{M_0}>0$，

由于函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，即 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 连续，所以存在 $r,c>0$，使得当

$(x,y,z)\in\Omega=\{(x,y,z)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq r^2\}$时成立$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}>c>0$

但，由于高斯公式可得：

$$\iint\limits_{\Omega}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz\geq\iiint\limits_{\Omega}cdxdydz>0$$

与题设矛盾，故假设错误。