均匀分布的相关处理

$x[n] = w[n]$，$w[n] \sim U(0, \beta)$，估计β

1) 均匀分布的统计特性

对于 $U(a,b)$，方差为 $\frac{(b-a)^2}{12}$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\left[u(x-a) - u(x-b)\right]$$

2) 求 pdf，$U(0,\beta)$

设 $x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$
$$p(x;\tfrac{\beta}{2}) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^n \left[u(\min x[n]) - u(\max x[n] - \beta)\right]$$

3) 因子分解

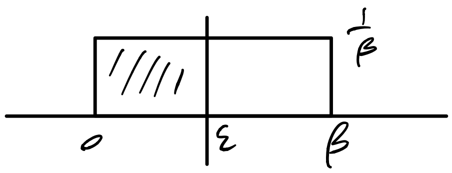
$$p(x;\tfrac{\beta}{2}) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^n \left[u(\min x[n]) - u(\max x[n] - \beta)\right]$$ 改写成

$$p(x;\tfrac{\beta}{2}) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^n \underbrace{u[\beta - \max x[n]]}_{g(T,\theta)} \underbrace{u[\min x[n]]}_{h(x)}$$

$T = \max(x[n])$，忽略证明其完备性

4) 先求 T 的 CDF

$$\begin{aligned}
F_T(\varepsilon) &= P_r(T \le \varepsilon) \\
&= P_r(\max x[n] \le \varepsilon) \\
&= P_r(x(0), x(1), x(2) \cdots x(N-1) \le \varepsilon) \\
&= P_r(x(0) \le \varepsilon)^N \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^N
\end{aligned}$$



5) 再求 pdf 和均值

$$f_T(\varepsilon) = \frac{dF_T(\varepsilon)}{d\varepsilon} = N\frac{\varepsilon^{N-1}}{\beta^N} \quad . \quad 0 \le \varepsilon \le \beta$$

$$E[T] = \int_0^\beta N\frac{\varepsilon^{N-1}}{\beta^N}\varepsilon \, d\varepsilon = \frac{N}{N+1}\beta$$

要使 $g(T) = \beta$. 则要使

$$g(T) = \frac{N+1}{2N}T = \frac{N+1}{2N}\max(x[n])$$

6) 求 $g(T)$ 的方差

$$g(T) = \left(\frac{N+1}{2N}\right)^2 var(T) = \left(\frac{N+1}{2N}\right)^2\{E[T^2]-E^2[T]\}$$

$$E[T^2] = \frac{N}{N+2}\beta^2 \qquad E[T] = \frac{N}{N+1}\beta$$

得 $var(T) = \frac{N}{(N+2)(N+1)^2}\beta^2$

$$Var(g(T)) = \frac{\beta^2}{4N(N+2)} < \frac{\beta^2}{12N}$$

$x[n] \sim U(-\theta, \theta)$ 求充分统计量

$$p(x[n];\theta) = \frac{1}{2\theta}\left[u(x(n+\theta)) - u(x(n-\theta))\right] \qquad N\frac{\varepsilon^{N-1}}{\beta^N}$$

$$p(x;\theta) = \frac{1}{(2\theta)^N}\prod_{n=0}^{N-1}\left[u(x(n+\theta)) - u(x(n)-\theta)\right]$$

对于所有 $x[n]$ 有 $\max|x(n)| \le \theta$

$$p(x;\theta) = \frac{1}{(2\theta)^N} u(\theta - \max|x(n)|) \cdot 1$$

所以 $T(x) = \max|x(n)|$

$x[n] \sim U(\theta_1, \theta_2)$ 求充分统计量

$$p(x[n]) = \frac{1}{\theta_2-\theta_1}, \quad \theta_1 \le x[n] \le \theta_2$$

$$p(x;\theta) = \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^N}$$

对于所有 $x[n]$ 有 $\theta_1 \le x[n] \le \theta_2$

或 $\min x[n] \ge \theta_1$. $\max x[n] \le \theta_2$ 所以

$$p(x;\theta) = \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^N} u(\min x[n]-\theta_1)\, u(\max x[n]-\theta_2)$$

所以 $T(x) = \begin{cases} \min x[n] \\ \max x[n] \end{cases}$

对于 $U[0,\theta]$ 观测到 N 个 IID 样本. 求 θ 的 MLE

$$p(x) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$

$$p(x) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x[n]) = \frac{1}{\theta^N}, \quad 0 < \text{所有} x[n] < \theta$$

$p(x)$ 在区间内恒定为 $\frac{1}{\theta^N}$

要使 $p(x)$ 最大. 则要使 θ 最小

但又有 $\theta \ge$ 所有 $x[n]$

所以 $\hat{\theta}$ 取 $\max x[n]$ 时 有所有的 θ 内取值最小