第一章　行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$

$-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)$

$=-24+8+16-4=-4.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$=bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2$

$=(a-b)(b-c)(c-a).$

4. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_3}{\underset{c_4-7c_3}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times(-1)^{4+3}$

$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \overset{c_2+c_3}{\underset{c_1+\frac{1}{2}c_3}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{c_4-c_2}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_2}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\2&1&4&0\end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_4-r_1}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$.

(3) $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$;

解 $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}$

$=adfbce\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4abcdef$.

(4) $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix}0&1+ab&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$

$=(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1+ab&a&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+dc_2}\begin{vmatrix}1+ab&a&ad\\-1&c&1+cd\\0&-1&0\end{vmatrix}$

$=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1+ab&ad\\-1&1+cd\end{vmatrix}=abcd+ab+cd+ad+1$.

6. 证明:

(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;

证明

$$\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}a^2&ab-a^2&b^2-a^2\\2a&b-a&2b-2a\\1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix}=(b-a)(b-a)\begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(a-b)^3 .$$

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

8. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$, 其中对角线上元素都是 a, 未写出的元素都是 0;

解

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}\text{(按第 } n \text{ 行展开)}$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} +(-1)^{2n}\cdot a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)(n-2)} +a^n=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1).$$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

解　将第一行乘(−1)分别加到其余各行, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^n$$

第二章　矩阵及其运算

1. 计算下列乘积:

(5) $(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

解

$$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \quad a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$$

2. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $3AB-2A$ 及 A^TB.

解 $3AB-2A=3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$=3\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^TB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1=2y_1+y_3 \\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3 \\ x_3=4y_1+y_2+5y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1=-3z_1+z_2 \\ y_2=2z_1+z_3 \\ y_3=-z_2+3z_3 \end{cases},$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解 由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

所以有$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3 \end{cases}$.

4. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

(1)$AB=BA$ 吗?

解 $AB\neq BA$.

因为$AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, 所以$AB\neq BA$.

(3)$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

解 $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

因为$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

而 $$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

故$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$.

5. 举反列说明下列命题是错误的:

(1)若$A^2=0$, 则$A=0$;

解 取$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A^2=0$, 但$A\neq 0$.

(2)若$A^2=A$, 则$A=0$或$A=E$;

解 取$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A^2=A$, 但$A\neq 0$且$A\neq E$.

(3)若$AX=AY$, 且$A\neq 0$, 则$X=Y$.

解 取

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $AX=AY$，且 $A\neq 0$，但 $X\neq Y$.

7. 设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，求 A^k.

解　首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix},$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & \lambda^5 \end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots$,

$$A^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明:

当 $k=2$ 时，显然成立.

假设 k 时成立，则 $k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix},$$

由数学归纳法原理知:

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

8. 设 A, B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵.

证明　因为 $A^T=A$, 所以

$$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB,$$

从而 B^TAB 是对称矩阵.

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$;

解　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. $|A|=1$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

故　$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

解　$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$. $|A|=2\neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ -13 & 6 & -1\\ -32 & 14 & -2\end{pmatrix},$$

所以 $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{pmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

解 $A=\begin{pmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{pmatrix}$，由对角矩阵的性质知

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1} & & & 0\\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n}\end{pmatrix}.$$

12. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\ 2x_1+2x_2+5x_3=2\\ 3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$;

解 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},$$

故 $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

从而有 $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$.

19.设 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，求 A^{11}.

解 由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $A=P\Lambda P^{-1}$，所以 $A^{11}=A=P\Lambda^{11}P^{-1}$.

$|P|=3$, $P^*=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$,

而 $$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix},$$

故 $$A^{11}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731 & 2732\\ -683 & -684\end{pmatrix}.$$

20. 设 $AP=P\Lambda$, 其中 $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$,

求 $\varphi(A)=A^8(5E-6A+A^2)$.

解 $\varphi(\Lambda)=\Lambda^8(5E-6\Lambda+\Lambda^2)$

$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)[\mathrm{diag}(5,5,5)-\mathrm{diag}(-6,6,30)+\mathrm{diag}(1,1,25)]$

$=\mathrm{diag}(1,1,5^8)\mathrm{diag}(12,0,0)=12\mathrm{diag}(1,0,0)$.

$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

$=\frac{1}{|P|}P\varphi(\Lambda)P^*$

$$=-2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -3 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=4\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

21. 设 $A^k=O$ (k 为正整数), 证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明 因为 $A^k=O$, 所以 $E-A^k=E$. 又因为

$$E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

所以 $$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E,$$

由定理 2 推论知 $(E-A)$ 可逆, 且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证明 一方面, 有 $E=(E-A)^{-1}(E-A)$.

另一方面，由 $A^k=O$，有

$$E=(E-A)+(A-A^2)+A^2-\cdots-A^{k-1}+(A^{k-1}-A^k)$$
$$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A),$$

故 $\quad (E-A)^{-1}(E-A)=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A),$

两端同时右乘$(E-A)^{-1}$，就有

$$(E-A)^{-1}(E-A)=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

22. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 A 及 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1} 及$(A+2E)^{-1}$.

证明　由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A=2E，即 A(A-E)=2E,$$

或 $\quad A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E,$

由定理 2 推论知 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$.

由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A-6E=-4E，即(A+2E)(A-3E)=-4E,$$

或 $\quad (A+2E)\cdot\frac{1}{4}(3E-A)=E$

由定理 2 推论知$(A+2E)$可逆，且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$.

证明　由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$，两端同时取行列式得

$$|A^2-A|=2,$$

即 $\quad |A||A-E|=2,$

故 $\quad |A|\neq0,$

所以 A 可逆，而 $A+2E=A^2$, $|A+2E|=|A^2|=|A|^2\neq0$，故 $A+2E$ 也可逆.

由 $\quad A^2-A-2E=O \Rightarrow A(A-E)=2E$

$$\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E),$$

又由 $A^2-A-2E=O\Rightarrow(A+2E)A-3(A+2E)=-4E$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E,$$

所以 $(A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E)=-4(A+2E)^{-1}$,

$$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A).$$

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

$$(1)\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\3&0&4&-3\end{pmatrix};$$

解 $\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\3&0&4&-3\end{pmatrix}$(下一步: $r_2+(-2)r_1$, $r_3+(-3)r_1$.)

$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&-1&3\\0&0&-2&0\end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div(-1)$, $r_3\div(-2)$.)

$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&1&-3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$(下一步: r_3-r_2.)

$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&1&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$(下一步: $r_3\div3$.)

$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$(下一步: r_2+3r_3.)

$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$(下一步: $r_1+(-2)r_2$, r_1+r_3.)

$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -4 & 3\\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1\end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -4 & 3\\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0\\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1\end{pmatrix}$(下一步: r_2-3r_1, r_3-2r_1, r_4-3r_1.)

$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8\\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6\\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10\end{pmatrix}$(下一步: $r_2\div(-4)$, $r_3\div(-3)$, $r_4\div(-5)$.)

$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$(下一步: r_1-3r_2, r_3-r_2, r_4-r_2.)

$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1+y_3\\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3\\ x_3=4y_1+y_2+5y_3\end{cases},\quad \begin{cases}y_1=-3z_1+z_2\\ y_2=2z_1+z_3\\ y_3=-z_2+3z_3\end{cases},$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解 由已知

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 3\\ 12 & -4 & 9\\ -10 & -1 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},$$

所以有 $\begin{cases}x_1=-6z_1+z_2+3z_3\\ x_2=12z_1-4z_2+9z_3\\ x_3=-10z_1-z_2+16z_3\end{cases}$.

4. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7/2 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/6 & 2/3 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & -6 & -10\end{pmatrix}$.

5. (2)设$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, 求 X 使 $XA=B$.

解　考虑 $A^TX^T=B^T$. 因为

$$(A^T, B^T)=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4\end{pmatrix},$$

所以　$X^T=(A^T)^{-1}B^T=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$,

从而　$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}$.

9. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0).$$

解　用已知向量容易构成一个有 4 个非零行的 5 阶下三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此矩阵的秩为 4, 其第 2 行和第 3 行是已知向量.

12. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 问 k 为何值, 可使

(1)$R(A)=1$; (2)$R(A)=2$; (3)$R(A)=3$.

解 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2) \end{pmatrix}$.

(1)当 $k=1$ 时, $R(A)=1$;

(2)当 $k=-2$ 且 $k\neq 1$ 时, $R(A)=2$;

(3)当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时, $R(A)=3$.

P106/

1.已知向量组

A: $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(3, 0, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(2, 3, 0, 1)^T$;

B: $\boldsymbol{b}_1=(2, 1, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_2=(0, -2, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3=(4, 4, 1, 3)^T$,

证明 B 组能由 A 组线性表示, 但 A 组不能由 B 组线性表示.

证明 由 $(A, B)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

$$\overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -15 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(A)=R(A, B)=3$, 所以 B 组能由 A 组线性表示.

由

$$B=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&-2&4\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $R(B)=2$. 因为 $R(B)\neq R(B, A)$, 所以 A 组不能由 B 组线性表示.

4. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $(-1, 3, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (1, 4, 1)^T$;

(2) $(2, 3, 0)^T, (-1, 4, 0)^T, (0, 0, 2)^T$.

解 (1)以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 因为

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&7&7\\0&2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=2$ 小于向量的个数, 从而所给向量组线性相关.

(2)以所给向量为列向量的矩阵记为 B. 因为

$$|B|=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{vmatrix}=22\neq 0,$$

所以 $R(B)=3$ 等于向量的个数, 从而所给向量组线性相无关.

5. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$$\boldsymbol{a}_1=(a, 1, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(1, a, -1)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, -1, a)^T.$$

解 以所给向量为列向量的矩阵记为 A. 由

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}=a(a-1)(a+1)$$

知, 当 $a=-1$、0、1 时, $R(A)<3$, 此时向量组线性相关.

9.设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4$线性相关.

证明 由已知条件得

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b}_4-\boldsymbol{a}_1,$$

于是 $\quad \boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3$

$=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{a}_4$

$=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4+\boldsymbol{a}_1,$

从而 $\quad \boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{0},$

这说明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

11.(1) 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

(1)$\boldsymbol{a}_1=(1, 2, -1, 4)^T, \boldsymbol{a}_2=(9, 100, 10, 4)^T, \boldsymbol{a}_3=(-2, -4, 2, -8)^T$;

解 由

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 82 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=2$. 因为向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的分量不成比例, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 是一个最大无关组.

12.利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组:

(1)$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;

解 因为

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \underset{r_4-r_1}{\overset{r_2-3r_1 \atop r_3-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_2}{\overset{r_4-r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

(2)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

解 因为

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\underset{r_3\leftrightarrow r_4}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

13. 设向量组

$$(a, 3, 1)^T, (2, b, 3)^T, (1, 2, 1)^T, (2, 3, 1)^T$$

的秩为 2, 求 a, b.

解 设 $\boldsymbol{a}_1=(a, 3, 1)^T, \boldsymbol{a}_2=(2, b, 3)^T, \boldsymbol{a}_3=(1, 2, 1)^T, \boldsymbol{a}_4=(2, 3, 1)^T$.

因为

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&1&1&b-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&a-1&-1\\0&0&2-a&b-5\end{pmatrix},$$

而 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)=2$, 所以 $a=2, b=5$.

20.求下列齐次线性方程组的基础解系:

20.求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$;

解 对系数矩阵进行初等行变换, 有

$$A=\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&-3/4&-1/4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases}x_1=-4x_3\\x_2=(3/4)x_3+(1/4)x_4\end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(4, 0)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(-16, 3)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 4)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-16, 3, 4, 0)^T, \boldsymbol{\xi}_2=(0, 1, 0, 4)^T.$$

(2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0 \\ 8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0 \end{cases}$.

解　对系数矩阵进行初等行变换, 有

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/19 & -1/19 \\ 0 & 1 & 14/19 & -7/19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases} x_1=-(2/19)x_3+(1/19)x_4 \\ x_2=-(14/19)x_3+(7/19)x_4 \end{cases}.$$

取$(x_3, x_4)^T=(19, 0)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(-2, 14)^T$;

取$(x_3, x_4)^T=(0, 19)^T$, 得$(x_1, x_2)^T=(1, 7)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-2, 14, 19, 0)^T, \boldsymbol{\xi}_2=(1, 7, 0, 19)^T.$$

26. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$;

解　对增广矩阵进行初等行变换, 有

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1=-x_3-8 \\ x_2=\ \ x_3+13 \\ x_4=\quad\ \ 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=0$ 时, 得所给方程组的一个解$\boldsymbol{\eta}=(-8, 13, 0, 2)^{\mathrm{T}}$.

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \ x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

当 $x_3=1$ 时，得对应的齐次方程组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(-1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$.

解　对增广矩阵进行初等行变换，有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/7 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -(9/7)x_3 + (1/2)x_4 + 1 \\ x_2 = (1/7)x_3 - (1/2)x_4 - 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=x_4=0$ 时，得所给方程组的一个解

$$\boldsymbol{\eta}=(1, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -(9/7)x_3 + (1/2)x_4 \\ x_2 = (1/7)x_3 - (1/2)x_4 \end{cases}.$$

分别取 $(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$, $(0, 1)^T$，得对应的齐次方程组的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-9, 1, 7, 0)^T. \boldsymbol{\xi}_2=(1, -1, 0, 2)^T.$$