



09 级二期期末 B 卷试题参考解答.

一.求初值问题:
$$\begin{cases} (2xy-1)dx + x^2dy = 0, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

解 方程化为 $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$. 先解对应的齐次方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 0$.

得解为 $y = Cx^{-2}$, 用常数变易法, 令 $y = C(x)x^{-2}$, 则 $y' = C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3}$,

代入原方程, 得 $C'(x) = 1$, 故 $C(x) = x + C$, 从而得原方程的通解为

$$y = (x + C)x^{-2}, \text{ 或 } x^2y = x + C.$$

由初始条件, 得 $C = 1$, 故初值问题的解为 $x^2y - x = 1$.

二. 计算累次积分 $I = \int_0^1 dy \int_y^1 \sin x^2 dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int_0^1 dy \int_y^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 dx \int_0^x \sin x^2 dy = \int_0^1 \sin x^2 \left(\int_0^x dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x^2 dx^2 = \frac{1}{2} (-\cos x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1). \end{aligned}$$

三. 验证数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ 收敛, 并求其和.

$$\begin{aligned} \text{解 } S(n) &= \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &= \ln \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \ln \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

$$\text{因此 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{2n} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2.$$

四. 若函数 $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{y^3} \frac{\cos(xy)}{x} dx$, $y > 0$, 求 $g'(x)$.

$$\text{解 } g'(y) = \int_{\sqrt{y}}^{y^3} \frac{-x \sin(xy)}{x} dx + \frac{\cos y^3 y}{y^3} \cdot 3y^2 - \frac{\cos \sqrt{y} y}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



$$= \frac{1}{y} \cos xy \Big|_{\sqrt{y}}^{y^3} + \frac{3 \cos y^4}{y} - \frac{\cos \sqrt{y^3}}{2y} = \frac{4 \cos y^4}{y} - \frac{3 \cos \sqrt{y^3}}{2y}.$$

五. 计算曲线积分 $I = \oint_{L^+} (ye^x - \sin x^3)dx + (e^x + x^3 + \sin y^3)dy$, 其中 L 是圆周

$x^2 + y^2 = 1$, 逆时针方向.

解 $P(x) = ye^x - \sin x^3, Q(x) = e^x + x^3 + \sin y^3$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x + 3x^2 - e^x = 3x^2,$$

由格林公式,

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 3x^2 dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 3r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 3r^3 dr = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

六. 求解一阶常微分方程: $\frac{dy}{dx} - \frac{6y}{x} + xy^2 = 0$.

解 令 $z = y^{-1}$, 则 $\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx} = -y^{-2} \left(\frac{6y}{x} - xy^2 \right) = x - \frac{6z}{x}$,

得线性方程 $\frac{dz}{dx} + \frac{6z}{x} = x$ (*), 其对应的齐次方程为 $\frac{dz}{dx} + \frac{6z}{x} = 0$,

$\frac{dz}{z} = -\frac{6}{x} dx$, $\ln z = -6 \ln x + \ln C$, $z = Cx^{-6}$. 令 $z = C(x)x^{-6}$. 代入到(*)中,

得 $\frac{C'(x)}{x^6} - \frac{6C(x)}{x^7} = x - \frac{6C(x)}{x^7}$, 即 $C'(x) = x^7$, 于是 $C(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$.

于是(*)所求的解为 $z = x^{-6} \left(\frac{1}{8}x^8 + C \right) = \frac{x^8 + C}{8x^6}$. 原方程的解为 $y = \frac{8x^6}{x^8 + C}$.

另外, 显然方程还有平凡解 $y=0$.



七. 求解二阶非齐次方程的初值问题:
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 1 + e^{2x}, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

解 对应的齐次方程为 $y'' - 4y' + 3y = 0$, 其特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

特征根为 1 和 3, 因此齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

对非齐次方程 $y'' - 4y' + 3y = 1$, 特解为 $y = C = 1/3$;

对非齐次方程 $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$, 特解为 $y = C e^{2x}$, 代入后得 $C = -1$,

因此原方程的通解为
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x} + \frac{1}{3}.$$

由初始条件 $y(0)=1$, 得 $1 = C_1 + C_2 - 1 + \frac{1}{3}$, 即 $C_1 + C_2 = \frac{5}{3}$;

由初始条件 $y'(0)=1$, 得 $1 = C_1 + 3C_2 - 2$, 即 $C_1 + 3C_2 = 3$;

由此得 $C_1 = 1, C_2 = \frac{2}{3}$; 从而初值问题得解为
$$y = e^x + \frac{2}{3} e^{3x} - e^{2x} + \frac{1}{3}.$$

八. 计算曲面积分 $I = \iint_{S^+} (x^3 z + x) dy dz + (\cos y - x^2 y z) dz dx - x^2 z^2 dx dy$, 其中 S^+ 为曲

面 $z = 2 - x^2 - y^2, 1 \leq z \leq 2$, 取上侧.

解 $P = x^3 z + x, Q = \cos y - x^2 y z, R = -x^2 z^2$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 z + 1, \frac{\partial Q}{\partial y} = -\sin y - x^2 z, \frac{\partial R}{\partial z} = -2x^2 z.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - \sin y,$$

设 $A_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$, 取下侧, 记 $\Sigma = A_0 \cup S^+$, 则由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} (x^3 z + x) dy dz + (\cos y - x^2 y z) dz dx - x^2 z^2 dx dy = \iiint_{\Omega} (1 - \sin y) dv.$$

$$\stackrel{\text{由对称性}}{=} \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{2-r^2} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r(1-r^2) dr = \frac{\pi}{2}.$$



$$\begin{aligned} I_0 &= -\iint_{A_0} (x^3 z + x) dy dz + (\cos y - x^2 y z) dz dx - x^2 z^2 dx dy \\ &= -\iint_{A_0} (-x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

显然 $\oiint_{\Sigma} = I + I_0$, 即 $I + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 故得 $I = \frac{\pi}{4}$.

九. 若函数 $\frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n-1} \right)$, 的和函数, 并证明其在区间 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

解 $S_n = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k-1} \right) = \frac{1}{x+n}$, 故和函数 $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$, $x > 0$

又 $|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$, $\forall x > 0$, 故该函数项级数在区间 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

十. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ 的收敛半径, 收敛域及和函数.

解 $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}$, 故幂级数的收敛半径 $R = 3$.

当 $x=3$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 而当 $x=-3$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 于是幂级数的收敛域

为 $[-3, 3)$. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x/3} = \frac{1}{3-x}.$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{3-x} dx = -\ln(3-x) \Big|_0^x = \ln 3 - \ln(3-x) = \ln \frac{3}{3-x}, \quad -3 \leq x < 3.$$

十一. 求函数 $f(x) = \ln x$ 在 $x_0 = 2$ 处的泰勒展开式, 并求其收敛域.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \ln x = \ln[2 + (x-2)] = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-2}{2} \right)^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} (x-2)^n. \end{aligned}$$

收敛域为 $-1 < \frac{x-2}{2} \leq 1$, 即 $0 < x \leq 4$.

十二. 判别数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛,

解 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的前 n 项的部分和 $s_n = \ln(n+1) \rightarrow +\infty$, 故级数并非绝对收

敛. 令 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$, ($x > 0$), 则

$$f'(x) = [\ln(x+1) - \ln x]' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} < 0, \quad \forall x > 0,$$

所以 $\ln \frac{n+1}{n}$ 单调下降且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$,

由莱布尼兹判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 收敛, 故此级数条件收敛。

十三. 设 $a_n > 0, n=1, 2, \dots, \{a_n\}$ 单调递减, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n} \right)^n \text{ 收敛.}$$

证 因 $a_n > 0, n=1, 2, \dots, \{a_n\}$ 单调递减, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$. 而交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 故必有 $a_n \geq a > 0, n=1, 2, \dots$, 从而 $\frac{1}{1+a_n} \leq \frac{1}{1+a} < 1$. 于是

$$\left(\frac{1}{1+a_n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{1+a} \right)^n, n=1, 2, \dots.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a} \right)^n$ 收敛, 由比较判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+a_n} \right)^n$ 收敛.