1 $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\cos(4\pi f_0 n+2\phi)\approx 0$

当 f_0 不接近 0 和 $\frac{1}{2}$ 时成立

同理 $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin(4\pi f_0 n+2\phi)\approx 0$

变型 $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin(4\pi f_0 n+2\phi)\cos(4\pi f_0 n+2\phi)\approx 0$

证明如下. 设 $\alpha = 4\pi f_0$. $\beta = 2\phi$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\alpha n+\beta) = \frac{1}{N}\mathrm{Re}\left(\sum_n e^{j(\alpha n+\beta)}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\mathrm{Re}\left(e^{j\beta}\frac{1-e^{j\alpha N}}{1-e^{j\alpha}}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\mathrm{Re}\left(e^{j\beta}\frac{e^{j\alpha N/2}}{e^{j\alpha/2}}\frac{e^{-j\alpha N/2}-e^{j\alpha N/2}}{e^{-j\alpha/2}-e^{j\alpha/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\mathrm{Re}\left(e^{j\beta}e^{j\alpha\left(\frac{N-1}{2}\right)}\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)$$

$$= \frac{\sin(N\alpha/2)}{N\sin(\alpha/2)}\cos\left(\alpha\left(\frac{N-1}{2}\right)+\beta\right)$$

只要 $\alpha \neq 0$ 或 2π 就接近 0。

即 $f_0 \neq 0$ 或 $\frac{1}{2}$ 就接近 0。

2 $\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi ln}{N}\right) = \frac{N}{2}\delta_{kl}$

$$\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi ln}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi n(k+l)}{N}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi n(k-l)}{N}\right)$$

所以原式

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi(k+l)}{N}n\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(\frac{2\pi(k-l)}{N}n\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k+l)}{N}n} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(k+l)}{N}n} +$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi(k-l)}{N}n} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi(k-l)}{N}n}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1-e^{j2\pi\alpha}}{1-e^{j\frac{2\pi\alpha}{N}}} + \frac{1}{4}\frac{1-e^{-j2\pi\alpha}}{1-e^{-j\frac{2\pi\alpha}{N}}} +$$

$$\frac{1}{4}\frac{1-e^{j2\pi\beta}}{1-e^{j\frac{2\pi\beta}{N}}} + \frac{1}{4}\frac{1-e^{-j2\pi\beta}}{1-e^{-j\frac{2\pi\beta}{N}}}$$

只有当 $\alpha=k+l=0$ 或 $\beta=k-l=0$ 时上式不为0

又 $\alpha=k+l=0$ 不可能. 所以只有 $k=l$ 时才不为0。

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{1-e^{j2\pi\beta}}{1-e^{j\frac{2\pi\beta}{N}}} = \frac{j2\pi\beta\, e^{j2\pi\beta}}{\frac{1}{N}j2\pi\beta\, e^{j2\pi\beta}} = N.$$

所以原式 $= \frac{N}{2}\delta_{kl}$