中山大学软件学院 **2008** 级软件工程专业(2009 秋季学期)

《工程数学》期末试题答案(B)

1.(a) $\mathrm{Ln}(-3)=\ln|-3|+i\mathrm{Arg}(-3)=\ln 3+(2k+1)\pi i$,其中$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ (5 points)

1.(b) $2^{1+i}=e^{(1+i)\mathrm{Ln}2}=e^{(1+i)(\ln 2+2k\pi i)}=e^{(\ln 2-2k\pi)+i(\ln 2+2k\pi)}=e^{\ln 2-2k\pi}[\cos(\ln 2+2k\pi)+i\sin(\ln 2+2k\pi)]$

$=2e^{-2k\pi}[\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)]$,其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$k=0$时，得其主值为 $2[\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)$

(5 points)

2. $\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1,$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1,$

得 $u=\int[e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1]\mathrm{d}x=e^x(x\cos y-y\sin y)+x+g(y),$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 得 $e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1=e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)-g'(y),$

故 $g(y)=-y+C$, 于是 $u=e^x(x\cos y-y\sin y)+x-y+C,$

$f(z)=u+iv=xe^xe^{iy}+iye^xe^{iy}+x(1+i)+iy(1+i)+C=ze^z+(1+i)z+C,$

由 $f(0)=0$, 得 $C=0$,

所求解析函数为 $f(z)=ze^z+(1+i)z.$

(10 points)

3.

(a) $z=0$ 为一级极点, $z=1$ 二级极点

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{e^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0$$

$$\oint_C\frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}=2\pi i.$$

(5 points)

(b) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=2}\frac{\frac{z}{9-z^2}}{z-(-i)}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\left.\frac{z}{9-z^2}\right|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}.$ (5 points)

(c) 被积函数$f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$除∞点外，其他奇点为$-i,1,3$

则$\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$

由于 $-i$ 与 1 在 C 内部，

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}$$

$$=-2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}\quad =-2\pi i\left\{\frac{1}{2(3+i)^{10}}+0\right\}=-\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.$$ (5 points)

(d) 函数$\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$有两个奇点$z=2$和$z=0$, $C=|z-3|=2$仅包含奇点 $z=2$,

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}dz=2\pi i\frac{d}{dz}\frac{1}{z^3}\Big|_{z=2}=\frac{-3\pi i}{8}$$ (5 points)

4. 因为 $\arctan z=\int_0^z\dfrac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$, 且$\dfrac{1}{1+z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n$, $|z|<1$

所以 $\arctan z=\int_0^z\dfrac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_0^z\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n\mathrm{d}z\ =\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$.

(10 points)

5. $$\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z=\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}}\frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

(10 points)

6.

$f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}\dfrac{1}{(1-z)^2}\ =f(z)\dfrac{1}{(1-z)^2}$，所以 $(1-z)^2f'(z)-f(z)=0,$

$(1-z)^2f''(z)+(2z-3)f'(z)=0$

$(1-z)^2f'''(z)+(4z-5)f''(z)+2f'(z)=0$

……

$f(0)=f'(0)=e,\ f''(0)=3e,\ f'''(0)=13e,\quad\cdots$

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right),(|z|<1).$$

(10 points)

7. $P(0)=P'(0)=P''(0)=0$，$P'''(0)\neq 0$.

利用洛朗展开式 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}=\dfrac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]$

$\therefore\ \mathbf{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\dfrac{1}{5!}$.

(10 points)

8. $F(s)=\dfrac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2}$

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2}]=e^{-2t}L^{-1}[\frac{2s+1}{s^2+3^2}]=e^{-2t}\{2L^{-1}[\frac{s}{s^2+3^2}]+L^{-1}[\frac{1}{s^2+3^2}]\}$$

$$=e^{-2t}(2\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t)$$

(10 points)

9. 由 $i^i=e^{iLni}=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ 可知被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ 以

$z_k=-(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi),(k=0,\pm1,\pm2,...)$ 为一阶极点，其中 $z_{-1}=-(\dfrac{\pi}{2}+2\pi),z_{-2}=-(\dfrac{\pi}{2}+4\pi)$ 包

含在 $|z-\pi|=2\pi$ 内部，由公式 $\mathrm{Re}\,s[f(z),z_k]=\dfrac{1}{(e^z-i^i)'}|_{z-z_k}=e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}(k=0,+1,+2,...)$，

由留数定理，

$$\oint_{|z-2\pi|=2\pi}\frac{1}{(e^z-i^i)}=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),z_{-1}]+\mathrm{Re}\,s[f(z),z_{-2}]\}=2\pi i(e^{\frac{-3\pi}{2}}+e^{\frac{-7\pi}{2}})$$

(10 points)