



## 08 级东校区第二学期高等数学(一)期末考试题 A 答案

一. (每小题 8 分, 共 64 分)

1. 已知  $u = x \sin(2y+1)$ , 求  $du$

$$du = \sin(2y+1)dx + 2x \cos(2y+1)dy,$$

2. 若  $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1 + ye^{xy}f_2$$

3. 求  $I = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) dx$ .

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} 4 \cos(x^2) dy = \int_0^2 2x \cos(x^2) dx = \sin 4$$

4. 求  $I = \oiint_S xz^2 dydz + yx^2 dzdx + zy^2 dxdy$ , 其中  $S$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{5}\pi$$

5. 求微分方程  $xy' - y \ln y = 0$  的通解.

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore y = e^{cx}$$

6. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$  的收敛域.

$$R = 1$$

当  $x=1$  和  $x=-1$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \neq 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$  发散

$\therefore$  收敛域为  $(-1, 1)$

7. 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10}$  的敛散性, 若收敛, 指明是绝对收敛还是条件收敛?



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+10} \bigg/ \frac{1}{n} = 1, \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+10} \text{ 发散}$$

$$\text{由 Leibniz 判别法 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10} \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10} \text{ 条件收敛。}$$

8. 求  $I = \int_0^1 \frac{1-3x^2}{\sqrt{x-x^3}} dx.$

$$I = \int_0^1 \frac{1-3x^2}{\sqrt{x-x^3}} dx = \sqrt{x-x^3} \Big|_0^1 = 0$$

二. (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 求  $I = \oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$ , 其中  $C$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $C$  取正向.

$$I = \oint_C (x+y)dx - (x-y)dy = \iint -2dxdy = -2\pi ab$$

2. 求  $I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为三个坐标面及平面  $x+y+z=1$  所围成的闭区域.

$$I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^1 \frac{1}{2} x (1-x)^2 dx = \frac{1}{24}$$

3. 求方程  $yy'' - (y')^2 = 0$  的满足条件  $y(0) = y'(0) = 1$  的特解.

$$\text{令 } y' = p(y), \therefore y'' = p'y'$$

$$\therefore yp' - p = 0, \therefore p = c_1 y, \therefore y' = c_1 y$$

$$\therefore y = c_2 e^{c_1 x}$$

$$\because y(0) = y'(0) = 1, \therefore c_1 = 1, c_2 = 1$$

$$\therefore \text{特解为: } y = e^x$$



4. 求  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$  在  $x=0$  处的幂级数展开式, 并指出收敛域.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 2[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1, 1]$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad x \in [-1, 1)$$

$$\therefore f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in (-1, 1)$$

三. (每小题 4 分, 共 12 分)

1. 求方程  $y'' - y = 4xe^x$  的通解

解: 对应齐次方程的特征根为  $\lambda=1$ ,  $\lambda=-1$ , 所以其通解为:

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

设非齐次方程的特解为:  $x(Ax+B)e^x$ , 代入得:

$$A=1, B=-1$$

$\therefore$  非齐次方程的通解为:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (x^2 - x)e^x$

2. 讨论  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx$  的收敛性, 若收敛, 指明是绝对收敛还是条件收敛?

解: 进行换元, 可得原式  $= \int_1^{+\infty} 2 \frac{\sin x}{x} dx$

对于  $A \geq 1, |\int_1^A \sin x dx| \leq 2$  有界。

函数  $\frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty]$  上单调下降趋于 0, 由狄利克雷法知收敛。

取  $[\frac{A}{\pi}] = n_0$ ,

$$\int_1^A \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=2}^{n_0} \int_{(n-1)\pi}^{n_0\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n_0\pi} |\sin x| dx$$

$$= \sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{n}, \text{ 而 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 故只要 } A \text{ 充分大,}$$

$$\int_1^A \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ 无界。}$$

$\therefore$  条件收敛。

3. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明  $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

证明: 数列  $\{\frac{1}{n^x}\}$  单调趋于0, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  一致收敛,

由阿贝尔判别法  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$  一致收敛, 因此满足连续性。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$