嶺南通訊社 Lingnantongxunshe

# 09 级二期期末 A 卷试题参考解答

完成以下共 14 题,除最后两题各 8 分外其余各题各 7 分.

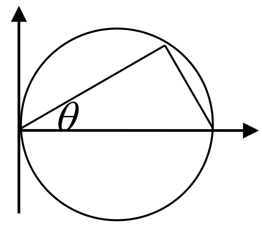
一.求一阶常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的解.

解 $\dfrac{dy}{e^y}=e^x dx \quad \int\dfrac{dy}{e^y}=\int e^x dx \quad -e^{-y}=e^x+C$,代入初始条件 $y(0)=0$

C=−2, 于是,所求方程满足初始条件的解为 $e^x+e^{-y}=2.$

二.计算二重积分 $I=\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, 其中为圆域 $x^2+y^2\le x.$

解 $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,dr^2d\theta$




$$=-\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2)d\theta$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\cos\theta}d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}.$$

三.验证数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$ 收敛,并求其和.

解 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1-\sqrt{2},$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}]+1-\sqrt{2}$$

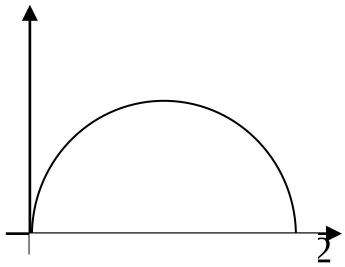
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+1-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}.$$

四.若函数 $F(x)=\int_1^x\dfrac{\sin(xt^2)}{t}dt,\quad x\ne 0$, 求 $F'(x)$.

解 $F'(x)=\dfrac{\sin(x\cdot x^2)}{x}+\int_1^x\dfrac{t^2\cos(xt^2)}{t}dt=\dfrac{\sin x^3}{x}+\int_1^x t\cos(xt^2)dt$

$$=\frac{\sin x^3}{x}+\frac{1}{2x}\int_1^x \cos(xt^2)d(xt^2)=\frac{\sin x^3}{x}+\frac{1}{2x}\sin(xt^2)\Big|_1^x=\frac{3}{2x}\sin x^3-\frac{1}{2x}\sin x.$$

五.计算曲线积分 $I=\int_C (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$, 其中 C 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分,方向从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$.




解 $P=x^2-y, Q=-(x+\sin^2 y)$, 于是 $\frac{\partial Q}{\partial y}=-1, \frac{\partial P}{\partial x}=-1$,

由于 $\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}$, 故积分和路径无关,于是

$$I=\int_C (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy,$$

$$=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

六.求解一阶常微分方程: $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}+xy^2=0.$

解 令 $z=y^{-1}=\frac{1}{y}$, 则 $\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$, 原方程化为 $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}=-x$,

即 $\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=x.(*)$ 这是一个一阶线性方程.对应的齐次线性方程为

$\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=0.$ 分离变量,得 $\frac{dz}{z}=-\frac{2dx}{x}$, $\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{2dx}{x}$,

$\ln z=-2\ln x+\ln C=\ln Cx^{-2}$, 即 $z=Cx^{-2}$. 下面用常数变易法,令 $z=C(x)x^{-2}$.

则 $\frac{dz}{dx}=-2\frac{C(x)}{x^3}+\frac{C'(x)}{x^2}$, 代入原方程,得

$$-2\frac{C(x)}{x^3}+\frac{C'(x)}{x^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^2}=x,$$

即 $\frac{C'(x)}{x^2}=x$, $C'(x)=x^3$, $C(x)=\frac{x^4}{4}+C$. 于是得方程(*)的解为

$$z=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4}+C\right)=\frac{x^4+C}{4x^2},$$

故原方程的解为 $y=\frac{1}{z}=\frac{4x^2}{x^4+C}$， 其中$C$为任意常数.

七.求解二阶非齐次方程的初值问题: $\begin{cases} y''+y=1+e^x, \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$

解 原方程可化为两个二阶非齐次方程 $y''+y=1\cdots$① 和 $y''+y=e^x\cdots$②

它们对应的齐次方程都是 $y''+y=0$, 特征方程为 $\lambda^2+1=0$, 通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

对方程①，设特解为 $y=C$, 代入后的 $C=1$；

对方程②，因 1 不是特征根，故设特解为 $y=Ae^x$, 代入方程得

$$Ae^x+Ae^x=e^x, \text{由此得 } A=1/2.$$

于是得原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+1.$

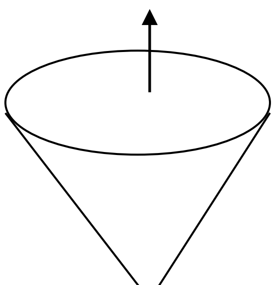
由定解条件： $1=y(0)=C_1+\frac{1}{2}+1\Rightarrow C_1=-\frac{1}{2},$

$$1=y'(0)=\left(-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x\right)\Big|_0=C_2+\frac{1}{2},\Rightarrow C_2=\frac{1}{2};$$

故本初值问题的解为 $y=\frac{1}{2}(-\cos x+\sin x+e^x)+1.$

八.计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}xdydz+ydzdx+zdxdy$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 4$, 取外侧.

解 如图，记 $A^+=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2\le 4, z=4\}$, 并设曲面 $A^+\cup S^+$ 所围区域为 $\Omega$, 由高斯定理



$$\iint_{A^+\cup S^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=3V$$

$$r=4, h=4. \qquad V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 4=\frac{64\pi}{3}$$

因此 $$\iint_{A^+\cup S^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=64\pi.$$

又 $\iint_{A^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{A^+} zdxdy=4\iint_{A^+} dxdy=4\cdot 4^2\pi=64\pi.$ 故

$$I=\iint_{S^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{A^+\cup S^+}-\iint_{A^+} xdydz+ydzdx+zdxdy=64\pi-64\pi=0.$$

九.若函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$, 求证:(1)函数 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$上有连续的导数;(2)广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

解 (1) $u_n(x)=\frac{1}{2^n+x}\le\frac{1}{2^n}, \quad x\in[0,+\infty),$

$$u_n'(x)=-\frac{1}{(2^n+x)^2}, |u_n'(x)|\le\frac{1}{2^{2n}}, \quad x\in[0,+\infty),$$

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ 均收敛，由 M 判别法，函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$ 在区间$[0,+\infty)$上一致收敛，于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$ 在区间$[0,+\infty)$上有连续的导数.且

$$f'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^n+x)^2}.$$

(2) $$\int_0^{+A} f(x)dx=\int_0^{+A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+A}\frac{1}{2^n+x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\ln(2^n+x)\Big|_0^{+A}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\frac{2^n+A}{2^n}\right)\geq\ln\left(\frac{2+A}{2}\right)\to+\infty,(A\to+\infty).$$

即广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散.证毕

十.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛半径,收敛域及和函数.

解　令 $u=x^2$, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}u^n$ . 记 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 则

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1,\quad \text{故级数收敛半径为 } R=\frac{1}{l}=1.$$

由于当 $|x|=1$ 时,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 满足莱布尼兹判别法条件,从而收敛,故原幂级数的收敛区域为[－1,1]. 下面来求和函数.记 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$, 则

$$\frac{1}{x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=g(x),$$

于是　$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},\text{ 即}$$

$$\frac{1}{x}f(x)=g(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xg(x)=x\arctan x.$$

十一.把函数 $f(x)=\frac{x-2}{4-x}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=x-2$, 则

$$f(x)=\frac{t}{2-t}=\frac{1}{1-t/2}-1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n-1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}-1.$$

收敛域为$\left\{x\left|\left|\frac{x-2}{2}\right|<1\right.\right\}=\left\{x\left|\left|x-2\right|<2\right.\right\}=\left\{x\left|-2<x-2<2\right.\right\}=\left\{x\left|0<x<4\right.\right\}$.

十二.验证瑕积分$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$收敛，并求其值.

解　$x$=1 为瑕点,而

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\overset{y=1-x}{=}-\int_1^0 y^{-\frac{1}{2}}dy=\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}dy=2y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2;$$

$$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}\overset{y=x-1}{=}\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}dy=2y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2\,;$$

故瑕积分$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$收敛,且其值为

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=4.$$

十三.若$0<\alpha\le 2$,讨论瑕积分$\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}\sin\frac{1}{x}dx$的敛散性.

解　令$y=\frac{1}{x}$,则$x=\frac{1}{y}$, $dx=-\frac{1}{y^2}dy$, 于是

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_{+\infty}^1 y^{\alpha}\sin y\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{2-\alpha}}dy.$$

当$\alpha=2, I(\alpha)=I(2)=\int_1^{+\infty}\sin ydy$都能够发散.

当$0<\alpha<2$,由于$\dfrac{1}{y^{2-\alpha}}$关于变量$y$单调下降且趋于0,而对任意正常数$A$,

积分一致有界: $\left|\int_1^A \sin y dy\right| \le 2.$

由 Drichlet 判别法,积分$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin y}{y^{2-\alpha}}dy$ 收敛.下面讨论绝对收敛性:

当$2-\alpha>1$,即$0<\alpha<1$时,$\left|\dfrac{\sin y}{y^{2-\alpha}}\right| \le \dfrac{1}{y^{2-\alpha}}$,当而积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{y^{2-\alpha}}dy$ 收敛,由比较判别法,广义积分$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin y}{y^{2-\alpha}}dy$ 绝对收敛;

当$2-\alpha\le 1$,即$1\le\alpha<2$时,$\left|\dfrac{\sin y}{y^{2-\alpha}}\right| \ge \dfrac{\sin^2 y}{y^{2-\alpha}}=\dfrac{1-\cos 2y}{y^{2-\alpha}}$,

但由于此时广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2y}{y^{2-\alpha}}dy$ 收敛,而广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{y^{2-\alpha}}dy$ 发散,于是

广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1-\cos 2y}{y^{2-\alpha}}dy$ 发散,即广义积分$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin y}{y^{2-\alpha}}dy$ 条件收敛.

十四.设$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增且$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$;

(1) 求证:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛并求其和;

(2) 若函数$f''(x)<0,\ x\in[0,+\infty)$,求证:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$也收敛.

证 (1) 因$a_n=f(n)-f(n-1)\ge 0$,且$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$,故

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]=\lim_{n\to+\infty}[f(n)-f(0)]=\lim_{n\to+\infty} f(n)=2.$$

因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛,其和为 $S$ =2.

⑵ 由于 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$上单调递增,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 为正项级数.

因 $f''(x)<0,\ x\in[0,+\infty)$, 故 $f'(x)$ 在此区间单调递减,而由拉格朗日中值定理,在区间$(n-1,n)$ 内,必有 $\xi_n$ ,使得 $f(n)-f(n-1)=f'(\xi_n)\geq f'(n)$,

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛,由正项级数的比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛.