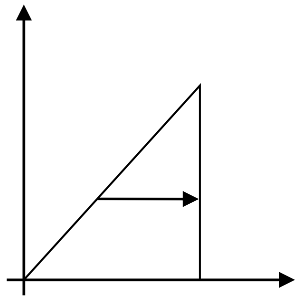
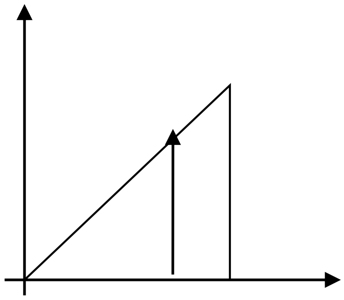
一,完成以下各题

3.计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2 e^{-x^4}dx.$





解 $\int_0^1 dy\int_y^1 y^2 e^{-x^4}dx=\int_0^1 dx\int_0^x y^2 e^{-x^4}dy$

$$=\int_0^1 \frac{y^3}{3}\bigg|_0^x e^{-x^4}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 e^{-x^4}dx$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^1 e^{-x^4}dx^4=\frac{1}{12}\left(-e^{-x^4}\right)\bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}\left(1-e^{-1}\right).$$

4.求解一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}.$

解 先解 $\frac{dy}{dx}+y\cos x=0.$ 分离变量,得 $\frac{dy}{y}=-\cos xdx$

$$\ln y=-\sin x+\ln C,\qquad y=Ce^{-\sin x}.$$

令 $y=C(x)e^{-\sin x}$. 则 $y'=C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}.$

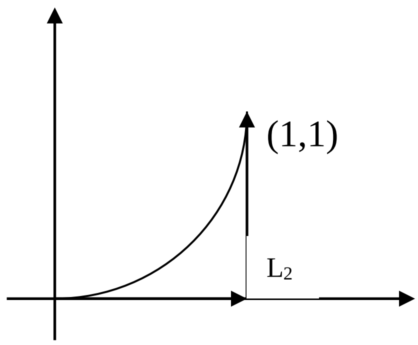
代入原方程,得 $C'(x)e^{-\sin x}-\cos x\cdot C(x)e^{-\sin x}+C(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x}.$

即 $C'(x)=1,\quad C(x)=x+C.$ 从而方程通解为

$$y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

二.(10 分)求曲线积分 $I=\int_L\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy,$

其中L为曲线y=$\sin\frac{\pi x}{2}$ 上由点$O(0,0)$到$A(1,1)$的弧段.



解 $P=e^y+x,Q=xe^y-2y,\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x},$

故积分值和路径无关,从而

$$I=\int_{L_1+L_2}\left(e^y+x\right)dx+\left(xe^y-2y\right)dy$$

(0,0) (1,0)

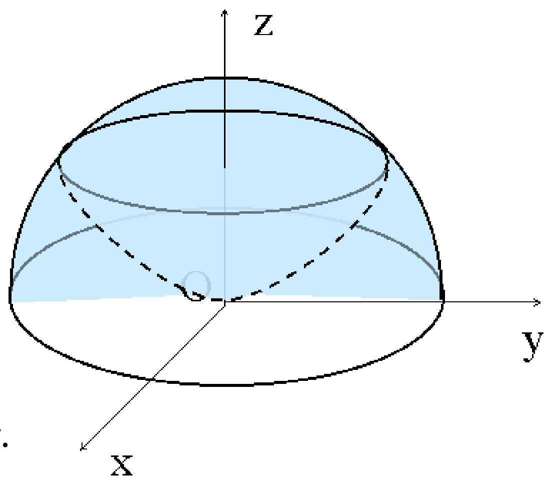
L1

$$=\int_0^1(e^0+x)dx+\int_0^1(e^y-2y)dy=e-\frac{1}{2}.$$

三.(10 分)计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}\left(y^2+z^2\right)dydz+yzdzdx+z\left(x^3+y^2\right)dxdy$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围区域的表面,取外侧.

解　记 $\Omega=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 2\}$, 则有高斯公式及对称性,

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(z+x^3+y^3\right)dV=\iiint\limits_{\Omega}zdV$$



$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_r^{\sqrt{4-r^2}}zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\left(4-2r^2\right)dr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\cdot(2-r^2)dr^2=\pi\left(2r^2-\frac{1}{2}r^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=2\pi.$$

四. (10 分)求解初值问题: $\begin{cases}y''-2y'-3y=3x+1,\\ y(0)=\dfrac{1}{3},y'(0)=3.\end{cases}$

解　齐次方程对应的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$. 特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$.

因此齐次方程的通解为　$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

由于 0 不是特征方程的根,故设非齐次方程的特解为 $y=ax+b$, 代入原方程,比较系数,得 $a=-1,b=\frac{1}{3}$. 即原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}$.

由定解条件,得　$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ -C_1+3C_2-1=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=1.\end{cases}$

初值问题的解为　$y=-e^{-x}+e^{3x}-x+\dfrac{1}{3}$.

五.(每小题 5 分,共 10 分)讨论下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$; (2) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx,\alpha>0$.

解 (1) 因为 $\frac{1}{1+x|\sin x|}\geq\frac{1}{1+x},(x>0)$ 而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散,

由比较判别法，无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\sin x}{x^\alpha}\Big/\frac{1}{x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to0+0}\frac{\sin x}{x}=1$, 故 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$和$\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx,\alpha>0$同敛散.

而当$\alpha-1<1$即$\alpha<2$时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 收敛; 当$\alpha-1\geq1$即$\alpha\geq2$时, $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ 发散. 故

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\begin{cases}\text{收敛,当}0<\alpha<2,\\ \text{发散,当}\alpha\geq2.\end{cases}$$

六. (10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛半径,收敛区间和收敛域,并求其和函数.

解 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}\overset{t=\frac{x-1}{2}}{=}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot t^{n-1}$$

$$(x-1)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=g(t),\qquad g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t},$$

因此 $$g(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|,$$

$$(x-1)f(x)=-\ln\left|1-\frac{x-1}{2}\right|=\ln2-\ln|3-x|,$$

从而 $$f(x)=\frac{\ln2-\ln|3-x|}{x-1}.$$

由于 $a_n=\frac{1}{2^n},l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,收敛半径为 R=2,

收敛区间为$-1<t<1, -1<\frac{x-1}{2}<1$,即$-1<x<3$. 即(−1,3).

又由于级数当 x=−1 收敛,当 x=3 时发散,故收敛区域为[−1,3).

七. (10 分)吧函数 $f(x)=\ln(5+x)$ 展开成$\left(x-2\right)$的幂级数,并求其收敛域.

解　令 $t=\frac{x}{5}$, 则

$$f(x)=\ln(7+x-2)=\ln 7+\ln\left(1+\frac{x-2}{7}\right)=\ln 7+\ln(1+t)$$

$$=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{7^n}$$

其收敛域为$-1<\frac{x-2}{7}\le 1$,即　$-5<x\le 9$.

八.(6 分)研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$的敛散性.

解　因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}=1$, 而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$也发散,即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$不绝对收敛.

但　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}=0$, 又函数$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}$单调下降,即$f(n)=\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$关于 n 单调下降,于是由莱布尼兹判别法,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$收敛.因而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+5}}{n^2}$条件收敛.

九. (6 分)设 n 是自然数,求证:方程$x^n+nx-1=0$存在唯一正实根x_n;且当$\alpha>1$时,数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛.

证　记 $f(x)=x^n+nx-1$,则$f(1)=n>0$, $f(0)=-1<0$. 故由 $f(x)$的连续性,必有 $x_n\in(0,1)$,使$f(x_n)=0$. 又 $f'(x)=n(x^{n-1}+1)>0$,即$f(x)$严格单调,故根唯一.

又,由 $f(x_n)=x_n^n+nx_n-1=0$,得　$nx_n=1-x_n^n<1$,　$x_n<\dfrac{1}{n}$,　$x_n^\alpha<\dfrac{1}{n^\alpha}$.

当$\alpha>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$收敛,故由比较判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.证毕.