



一, (每小题 7 分, 共 28 分)

1, 设函数 $z(x, y) = \frac{x^2}{2y} + f(xy)$, 其中函数 f 二阶可微, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

2, 若隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy = e^{x+y}$ 确定, 求 y' 。

3, 设函数 $g(y) = \int_{\sqrt{y}}^{y^3} \frac{\cos(xy)}{x} dx$, $y > 0$, 求 $g'(y)$ 。

4, 计算积分: $I = \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{\sin x}{x-1} dx$ 。

二, (10 分) 求曲线积分 $I = \oint_{\ell} (1 + ye^x) dx + (x + e^x) dy$, 其中 ℓ 是椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的上半周由点 $A(2, 0)$ 到点 $B(-2, 0)$ 。

三, (10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{S^+} x dy dz + (y + y^2) dz dx + z dx dy$, 其中 S^+ 为曲

面 $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, 取下侧。

四, (每小题 7 分, 共 14 分)

1, 求解微分方程初值问题: $\begin{cases} xy' + y = e^x \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 。

2, 求微分方程: $y'' - 4y' + 3y = 1 + e^{2x}$ 的通解。

五, 讨论如下广义积分的敛散性: (每小题 5 分, 共 10 分)

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}},$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$$

六, (每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} (x-3)^n$ 的收敛半径, 收敛区间和收敛域。

(2) 求函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 在点 $x=1$ 处的幂级数展开式。

七, (7 分) 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{5+x^3} dx$ 的敛散性, 若积分收敛, 研究其是绝对收敛还是条件收敛?

八, (5分) 设序列 $\{na_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 也收敛, 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。