① π ② $\frac{128}{5}\pi$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$ ⑤ $9x-9e^{-x}+C_2$

⑥ $\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$ $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ⑦ $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ $(-1\le x<1)$

东校区 2011 学年度第二学期 11 级《高等数学一》期末试题 A 卷

学院________ 专业________ 学号________ 姓名________ 评分________

⑧ 收敛 ⑨ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases} x \\ 0, & x=k\pi\end{cases}$ ⑩ $\ln\frac{3}{4}$

教师签名________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

解答下列各题，并写出必要的过程。（1-10 题每小题 8 分，11-12 题每小题 10 分）

⑪ 条件收敛;

1. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ 的值。

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

2. 求 $\iint\limits_S xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy$，其中S为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的外侧。

$$=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 4}(y^2+z^2+x^2)dxdydz$$

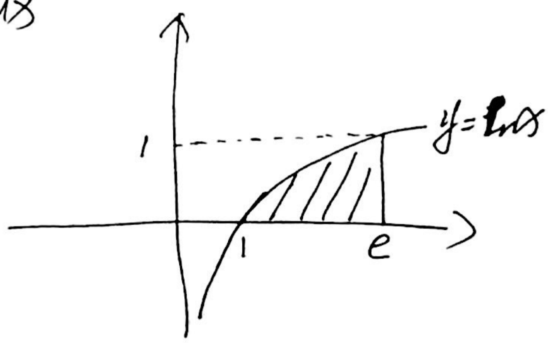
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\cdot r^2\sin\varphi\, dr=\frac{128}{5}\pi$$

3. 求$\oint_{L^+}(xy^2+y^3)dy-(x^3+x^2y)dx$,其中$L^+$为圆周$x^2+y^2=1$的正向。

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}(y^2+x^2)\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr=\frac{\pi}{2}.$$

4. 设$f(x,y)$在$[1,e]\times[0,1]$上连续，试交换如下二重积分的积分次序：$\int[\int_0^{\ln x}f(x,y)dy]dx$.

$$\int_1^e\left(\int_0^{\ln x}f(x,y)dy\right)dx=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$$



5. 求微分方程 $y''(e^x+1)+y'=0$ 通解。

令 $y'=z$. 则 $y''=\frac{dz}{dx}$.

原方程变为 $\frac{dz}{dx}(e^x+1)+z=0$ $\quad\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{e^x+1}\Rightarrow\ln|z|=-\int\frac{dx}{e^x+1}$

$\ln|z|=\int\frac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}=\ln|1+e^{-x}|+\ln C_1\quad\Rightarrow\quad z=C_1(1+e^{-x})$

由$y'=z$ 得 $y=\int C_1(1+e^{-x})dx=C_1x-C_1e^{-x}+C_2$

6. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域及和函数。

令 $u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{x^2}{2}\right|\to\frac{1}{2}x^2\ (n\to\infty)$.

当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数收敛.

又 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(n-\frac{1}{2})$，发散．故收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

7. 求 $\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式（请注明收敛域）。

令 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$. 则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$.

$$\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-x^2)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.\qquad -1\le x<1$$

8. 试判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性。

令 $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4} < 1.$

故级数收敛.

9. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且当 $x\in[-\pi,\pi)$ 时，$f(x)=x$, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0. \quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}. \quad n=1,2\ldots$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx = \begin{cases} x & k\pi < x < (k+1)\pi. \\ 0 & x = k\pi \end{cases} \quad k=\pm1,\pm2,\cdots$$

10. 求 $\int_0^1 \frac{x^2-x^3}{\ln x}dx$.

因 x^y 在 $(0,1]\times[2,3]$ 连续，故

$$\int_0^1 \frac{x^2-x^3}{\ln x}dx = \int_0^1 dx\int_3^2 x^y dy = \int_3^2 dy\int_0^1 x^y dx$$

$$= \int_3^2 \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{3}{4}$$

11. 判断积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^3+2}\cos x\,dx$ 是绝对收敛还是条件收敛.

$$\left(\frac{x^2+1}{x^3+2}\right)' = \frac{-x^4-3x^2+4x}{(x^3+2)^2} = \frac{-x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^3+2)^2} < 0 \ (\text{当 } x>1 \text{ 时})$$

当 $x>1$ 时，$\frac{x^2+1}{x^3+2}$ 单减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3+2}=0$

而 $\left|\int_1^A \cos x\,dx\right| \le 2$. 由狄利克雷判别法 积分收敛.

又 $\left|\frac{x^2+1}{x^3+2}\cos x\right| \ge \frac{x^2+1}{x^3+2}\cos^2 x = \frac{x^2+1}{x^3+2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+1}{x^3+2}dx$ 发散. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+1}{x^3+2}\cos 2x\,dx$ 收敛.

故 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{x^2+1}{x^3+2}\cos x\right|dx$ 发散. 积分条件收敛.

12. 试证明 $\int_0^{+\infty} te^{-tx}dx$ 在 $0<c\le t\le d$ 上一致收敛，但在 $0<t\le d$ 上不一致收敛。

$$\left|\int_0^A te^{-tx}dx-\int_0^{+\infty} te^{-tx}dx\right|=\left|\int_A^{+\infty} te^{-tx}dx\right|=e^{-At}$$

当 $0<c\le t\le d$ 时，$e^{-At}\le e^{-Ac}$

由 $e^{-Ac}<\varepsilon \Rightarrow A>\frac{1}{c}\ln\frac{1}{\varepsilon}\ (\varepsilon<1)$. 故积分在 $0<c\le t\le d$ 一致收敛.

（或 $|te^{-tx}|\le de^{-cx}$，而 $\int_0^{+\infty} de^{-cx}dx$ 收敛）

当 $0<t\le d$ 时，若取 $t_0=\frac{1}{A}$，则

$$\left|\int_0^A t_0e^{-t_0x}dx-\int_0^{+\infty} t_0e^{-t_0x}dx\right|=\left|\int_A^{+\infty} t_0e^{-t_0x}dx\right|=e^{-At_0}=e^{-1}>0.$$

故积分在 $0<t\le d$ 不一致收敛.

东校区 2010 学年度第二学期 10 级《高等数学一》期末试题 A 卷答案

一． 解答下列各题（每小题 7 分，共计 70 分）

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\pi$

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性。

2. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{3}{e}>1(n\to\infty)$,级数发散。

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n}$ 是否收敛，若收敛是条件收敛还是绝对收敛？

3. 令$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}, f'(x)=\frac{1-\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}}{x^2}$,当$x\geq 4$时，$f'(x)\leq 0;\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n}=0$,故级数收敛。

$\frac{\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n}}{\frac{1}{n}}=\sqrt[3]{n}-1\to\infty(n\to\infty),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n}$ 也发散，原级数条件收敛。

判定积分$\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^{5/2}}dx$ 的敛散性。

4. $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x^{5/2}}=\infty, x=0$是瑕点。

$\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^{5/2}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1,\int_0^1\frac{1}{x^{1/2}}dx$收敛，原积分收敛。

5\. 求$I = \oiint\limits_{S^+} (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy$,其中$S^+$是平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ $(a>0)$ 所谓立体表面之外侧。

$I = \iiint\limits_{\Omega} (1+1+1)dxdydz = 3a^3.$

6\. 求方程 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} - a(lnx)y^2 = 0$ 的通解。

令$z = y^{-1}$,则原方程变为$-z' + \dfrac{1}{x}z = a\ln x$ (1)

齐次方程$-z' + \dfrac{1}{x}z = 0$的解为$z = cx$;令$z = c(x)x$是(1)的解,

代入(1)得$c'(x) = -\dfrac{1}{x}a\ln x$,则$c(x) = -\dfrac{1}{2}a(\ln x)^2 + c$.

方程的通解为$xy[c - \dfrac{1}{2}a(\ln x)^2] = 1$.

7\. 求函数 $\ln(3+2x)$ 在 $x=0$ 的泰勒展开式。

$\ln(3+2x) = \ln 3 + \ln(1+\dfrac{2}{3}x) = \ln 3 + \dfrac{2}{3}\int_0^x \dfrac{dx}{1+\dfrac{2}{3}x} = \ln 3 + \dfrac{2}{3}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{2}{3}x)^n dx$

$= \ln 3 + \dfrac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{2}{3})^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,收敛域$x \in (-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}]$.

8\. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=2$ 与 $x^2+y^2=6$ 所截部分的面积。

$S = \iint\limits_{2\le x^2+y^2\le 6} \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \sqrt{1+4r^2}\,rdr = \dfrac{49}{3}\pi.$

判定积分 $\int_1^{\infty}\dfrac{\sin(3x+6)}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[4]{x+3}}dx$ 的敛散性，若收敛是条件收敛还是绝对收敛。

9. $\left|\dfrac{\sin(3x+6)}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[4]{x+3}}\right|\le\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{x^{\frac{13}{12}}}$

$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\frac{13}{12}}}$ 收敛，故原积分绝对收敛。

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx+n^2)}{\sqrt[3]{1+(x^2+n^3)^2}}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛。

10. $\left|\dfrac{\sin(nx+n^2)}{\sqrt[3]{1+(x^2+n^3)^2}}\right|\le\dfrac{1}{n^2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，原积分在 $x\in R$ 上一致收敛。

二. **解答下列各题（每小题 6 分，共计 30 分）**

3

计算 $I=\int_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中 L 为曲线 $x^2+y^2=ax, y\ge 0$ 从点 $(a,0)$ 到 $(0,0)$ 点的一段（$a>0$）。

11. $\int_{L+OA}=\iint mdxdy=m\cdot\dfrac{1}{2}\pi(\dfrac{1}{2}a)^2=\dfrac{1}{8}\pi ma^2,\int_{OA}=0,\int_L=\dfrac{1}{8}\pi ma^2.$

求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(y^2-z)dxdydz$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的空间闭区域。

2

12. $\iiint\limits_{\Omega}y^2dxdydz=\int_{-R}^{R}y^2dy\iint\limits_{x^2+z^2\le R^2-y^2}dxdz=\int_{-R}^{R}y^2\pi(R^2-y^2)dy=\dfrac{4}{15}\pi R^5,$

$\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=0,\quad I=\dfrac{4}{15}\pi R^5$

$=\dfrac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$

$=\dfrac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi\, drd\varphi$

13.

求函数 $f(x)=\begin{cases}-2 & -\pi\le x<0,\\ 1 & 0\le x<\pi.\end{cases}$ 的傅氏级数及其和函数。

$a_0=-1, a_n=0, b_n=\dfrac{3}{n\pi}[1-(-1)^n]$

$$f(x)\sim-\frac{1}{2}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\sin nx=-\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x=\begin{cases}-2,-\pi<x<0,\\ 1,0<x<\pi,\\ -\frac{1}{2},x=0,\pm\pi.\end{cases}$$

14.

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域及和函数。

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\dfrac{(2n+1)x^2}{2(2n-1)}\right|\to\dfrac{x^2}{2}$，当$x=\pm\sqrt{2}$时，级数发散，故其收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n=\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}$$

$$S(x)=(\frac{x}{2-x^2})'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

15.

7

证明函数 $f(a)=\int_1^{+\infty}e^{-ax}\dfrac{\cos x}{x^p}dx\,(p>0)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续。

$\left|\int_1^A\cos xdx\right|\le 2$，当$p>0$时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^p}=0$，$\dfrac{1}{x^p}$单调递减，

由狄氏判别法，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^p}dx$收敛，即当$a\in[0,+\infty)$时积分一致收敛；

当$a\in[0,+\infty)$，$x\in[1,+\infty)$时，$e^{-ax}\le 1$，且e^{-ax}关于x单调递减；

由阿贝尔判别法，$\int_1^{+\infty}e^{-ax}\dfrac{\cos x}{x^p}dx$在$[0,+\infty)$一致收敛，故$f(a)$在$[0,+\infty)$连续。

e^{-ax} x^{p} $\le e^{-ax}$