参考答案

学院 ________ 专业 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 评分 ________

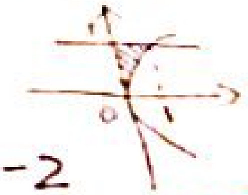
阅卷签名 ________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第六条："考试作弊不授予学士学位。"

1. 计算积分 $\iint_D \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} dxdy$，其中 D 由 $y^2 = x$，$x = 0$，$y = 1$ 所围。（8 分）

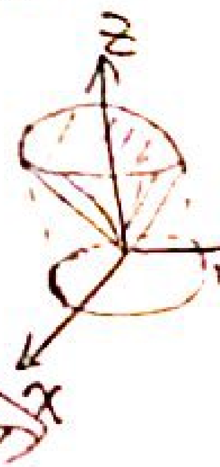
$$\iint_D \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} dx \quad \left(= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} dy\right) \quad (4分)$$

$$= \int_0^1 e^{\frac{x}{y}} \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (e^y - 1) dy = (e^y - y)\Big|_0^1 = e - 2 \quad (6分) \quad —8分$$



第二型曲面积分

2. 计算积分 $\oiint_\Sigma 2xz\,dydz + yz\,dzdx - z^2\,dxdy$，其中 Σ 由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与上半球面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围成的立体表面的外侧。（8 分）



原式 $= \iiint (2z + z - 2z) dxdydz$ —— 3分

$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,dz \overset{极}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z\,dz \quad 6分$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \cdot \frac{1}{2}(2 - r^2 - r^2) dr = 2\pi \int_0^1 (r - r^3) dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \quad —— 8分$$

$$= \iint_{1 \le x^2+y^2 \le 1} (3x^2 + 2y^2) dxdy + \iint_{x^2+y^2 \le 1} (3x^2 + 2y^2 - 2) dxdy = \frac{5}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi -$$

3. 求微分方程 $xy'-y-e^xy^2=0$ 的通解.（8 分）

注意

两边同除 $-xy^2$ 得 $-\frac{1}{y^2}y'+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{e^x}{x}$ ①

令 $z=\frac{1}{y}$，则 $z'=-\frac{1}{y^2}y'$，①变为 $z'+\frac{1}{x}z=-\frac{e^x}{x}$ ②. —— 3分

先解 $z'+\frac{1}{x}z=0$ 得 $z=C/x$ —— 5分，令 $z=C(x)/x$ 是②的解，代入得

$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{C(x)}{x}=-\frac{e^x}{x}$ $C'(x)=-e^x$，$C(x)=-e^x+$

方程通解为 $\frac{1}{y}=z=\frac{C}{x}-\frac{e^x}{x}$ 或 $\frac{x}{y}+e^x=C$ —— 8分

或 $y=\frac{x}{C-e^x}$

或 先解 $xy'-y=0$ 得 $y=Cx$，令 $y=C(x)x$ 是方程解，代

$(\ln(\frac{1}{x}))'=-[\ln(x)]'=-\frac{1}{x}$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln x$

$(\frac{C(x)}{x})'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}$

？为什么不可以 两边同除 y^2，得 $x\cdot(-y^2)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=-e^x$

方程通解为 $\frac{1}{y}=z=\frac{c}{x}-\frac{e^x}{x}$ 或 $\frac{x}{y}+e^x=c$ —8分

或 先解 $xy'-y=0$ 得 $y=cx$，令 $y=c(x)x$ 是方程解，代入得 $y=-$

？为什么不可以两边同除以 $-y^2$，得 $x\cdot(-y^{-2})\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=-e^x$ $C'(x)=-e^x+c$

$x\cdot\frac{d(y^{-1})}{dx}+y^{-1}=-e^x$ 令 $y^{-1}=z$ 则 $x\cdot\frac{dz}{dx}+z=\cancel{e^{-x}}-e^{x}$ 令 $x\cdot\frac{dz}{dx}+z=0$. $\frac{1}{z}$

$\therefore \ln\frac{1}{x}=\ln z$ $z=C_1\frac{1}{x}=\frac{C}{x}$. ∴z的方程为 $\frac{C(x)}{x}$，代入 $\frac{C'(x)}{x}-\cancel{\frac{C(x)}{x^2}}+\frac{C(x)}{x^2}=\frac{e^{-x}}{x}$

4. 讨论含参变量的无穷积分 $\int_1^{+\infty}e^{-bx}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 在 $b\in[0,+\infty)$上的一致收敛性。（8分）

因为 $\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|=|\cos 1-\cos A|\le 2$，$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$，$\frac{1}{\sqrt{x}}$关于x单调

由狄氏判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛，即在 $b\in[0,+\infty)$上一致收敛

$b>0, x>0$

而 $|e^{-bx}|\le 1$，一致有界，e^{-bx}在 $b\in[0,+\infty)$上关于x单调递减

由阿贝尔判别法 $\int_1^{+\infty}e^{-bx}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 在 $b\in[0,+\infty)$上一致收

先进行代换
然后解二阶微分方程.

6. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}x^n$ 的收敛域及和函数。（8分）

由 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+2}{n+3}|x| \to |x|$， $\frac{1}{n+2}(-1)^n$ 而 $x=1$ 时 $\sum\frac{1}{n+2}$ 发散，$x=-1$ 时，$\sum\frac{(-1)^n}{n+2}$ 收

故级数的收敛域为 $[-1,1)$ —— 2分

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}x^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x^2+\cdots$

有 $S(0)=\frac{1}{2}$，当 $x\neq0$ 时，$x^2S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$.

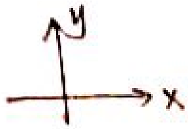
哪可!!

$[x^2S(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$，$x^2S(x)=\int_0^x\frac{x}{1-x}dx=\int_0^x(\frac{1}{1-x}$

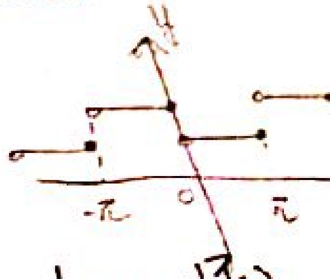
$\int x\cdot S(x)=\sum x^{n+2}$　$\int xS(x)=\sum\int\frac{1}{n+2}x^{n+1}\leftarrow xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x\frac{1}{n+2}x^{n+1}$　$=-\ln(1-x)-x$.

则 $S(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)$. $(x\neq0)$. —— 6分

和函数 $S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x), & -1\le x<1, 且 x\neq0.\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$ —— 8



7. 求函数 $f(x)=\begin{cases}2 & -\pi<x\le 0\\ 1 & 0<x\le\pi\end{cases}$ 的傅氏级数，并写出该级数的和函数.（8 分）



$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2dx+\int_{0}^{\pi}1dx\right)=3.$ —2分

$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}1\cos nx\,dx\right)=0$ —4分

$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-2}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)$

$=\frac{1}{n\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n=2k\\ -\frac{2}{(2k-1)\pi} & n=2k-1\end{cases}$ —6分

"注意计算过

$f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\sin nx=\frac{3}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$

$=\begin{cases}2 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\\ 3/2 & x=0,\pi\end{cases}$ —8分

8. 证明函数项级数 $\sum^{\infty}\frac{\sin x^n}{3+x^n}$ (1) 在 $0\le x\le 1-\delta\ (0<\delta<1)$ 一致收敛；(8 分)

$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin nx \xlongequal{\text{或}} \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$

$$= \begin{cases} 2 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \\ 3/2 & x = 0, \pi \end{cases}$$ — 8分

8. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^n}{3+x^n}$ (1) 在 $0 \le x \le 1-\delta$ $(0<\delta<1)$ 一致收敛；(2) 在 $0<x<1$ 不一致收敛。(8 分)

① $\left|\frac{\sin x^n}{3+x^n}\right| \le \left|\frac{x^n}{3+x^n}\right| \le \left|\frac{x^n}{3}\right| \le \frac{(1-\delta)^n}{3}$. — 5分

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\delta)^n}{3}$，$(0<\delta<1)$ 收敛，故级数在 $0 \le x \le 1-\delta$ 一致收敛。

② 当 $0<x<1$ 时，取 $x_n = 1-\frac{1}{n}$.

$$\frac{\sin x_n^n}{3+x_n^n} = \frac{\sin(1-\frac{1}{n})^n}{3+(1-\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \frac{\sin\frac{1}{e}}{3+\frac{1}{e}} \ne 0$$ — 8分

级数的一般项 $\frac{\sin x_n}{3+x_n}$ 不一致收敛于0，故级数在 $0<x<1$ 不

9. 判定广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ 的敛散性.（6 分）

$x=1$ 是瑕点. —— 2分

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} \Big/ \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \xrightarrow[(x\to 1-0)]{} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

而 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ 收敛, 故原积分收敛. —— 6分

10. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$ 的敛散性。（6 分）

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{n^n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} <$$

或 $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n n!}} = \frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \to \frac{e}{3} < 1$.

$\sqrt[n]{\frac{e^n}{3^n n!}} = \frac{e}{3}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \to \frac{e}{3} < 1$.

级数收敛.

11. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}$ $(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 是否收敛？若收敛是绝对收敛还是条件收敛？（

该级数是交错级数，$\lim_{n\to\infty}\tan\frac{\varphi}{n}=0$，$\tan\frac{\varphi}{n}$ 关于 n 单调递减

由莱布尼兹判别法知 级数收敛. —— 3分

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}}{\frac{1}{n}}\right| = \varphi\cdot\frac{\tan\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} \to \varphi \in (0,\frac{\pi}{2})$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}\right|$ 发散. —— 6

原级数条件收敛.

Scanned by CamScanner

12. 计算 $\oint_L (y^3+e^x)dx+(3xy+6x+\cos^2 y)dy$, （6 分）

其中L为圆域 $D: x^2+y^2\le 2$ 的边界曲线，取逆时针方向。

$$\text{原式} = \iint_{x^2+y^2\le 2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 2}(\underbrace{3y}_{\text{奇函数}}+6-3y^2)dxdy \quad \text{—— 3分}$$

$$= 6\times\pi\times 2 - 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin^2\theta\cdot r\,dr = 12\pi - 3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\cdot$$

$$= 12\pi - 3\times\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{1}{4}(\sqrt{2})^4 = 9\pi \quad \text{—— 6分}$$

13. 求函数 $f(x)=\dfrac{5}{6-x-x^2}$ 的幂级数展开式，并指出收敛域。（6 分）

$$f(x)=\frac{5}{6-x-x^2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \quad \text{——}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n, \quad x\in(-2,2) \quad \text{—— (分}$$

$$f(x)=\frac{5}{6-x-x^2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$ —— 2分.

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n,\quad x\in(-2,2)$$ —— 6分.

—— 5分

14. 求积分 $\int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{3}}}{\ln x}dx$ 的值。（6 分）

当 $x\in[0,1]$，$y\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]$ 时，$x^y\le x^{-\frac{1}{2}}$，

而瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛，故瑕积分 $\int_0^1 x^y dx$ 在 $y\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}]$ 一致收敛 ——

$$\int_0^1\frac{x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{3}}}{\ln x}dx=\int_0^1dx\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}}-x^y dy=-\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}}dy\int_0^1 x^y dx$$ ——

$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{y+1}dy=-\ln(y+1)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}}=-2\ln 2+\ln 3$$

$$=\ln 3-\ln 4$$